

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
ĐAN LẬP HẢI PHÒNG

THƯ VIỆN

605

L259 TH

LÊU THỌ TRÌNH

CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP II

HỆ SIÊU TĨNH

LÊU THỌ TRÌNH

CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP II

DVL738



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

THU VIỆN
ĐH. DÂN LẬP HP
KÝ HIỆU: 6.05
L 259 TH
SỐ:

Gs, Ts. LÊU THỌ TRÌNH

CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP II

Hệ siêu tĩnh

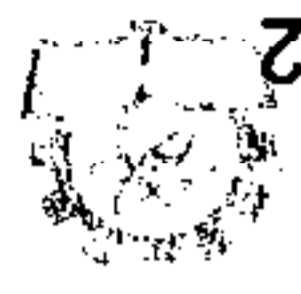
THU VIỆN ĐH. DÂN LẬP HP
PHÒNG ĐỌC
2001 ĐVL 738



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2000

451-10-2 KHKT - 00



60-605

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
CÔNG NGHIỆP

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
CÔNG NGHIỆP
HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP

5

Phương pháp lực và cách tính hệ phẳng siêu tĩnh

5.1. Khái niệm về hệ siêu tĩnh - Bậc siêu tĩnh

A. Định nghĩa

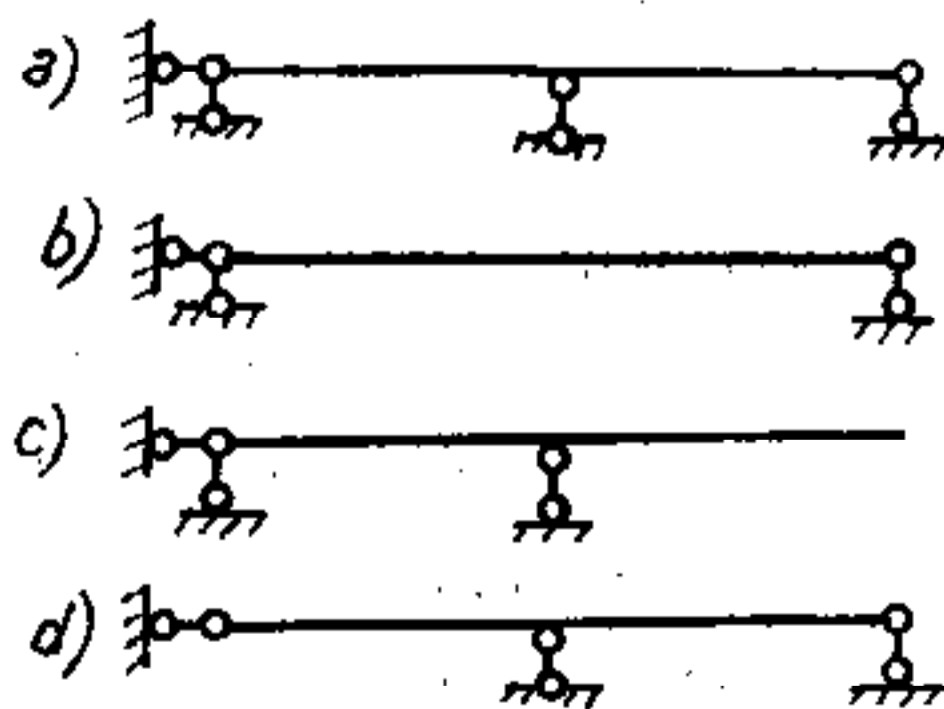
Trong tập I đã giới thiệu cách tính hệ tĩnh định tức là những hệ trong đó chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học cũng đủ để xác định phản lực và nội lực. Trên thực tế, thường gặp những hệ trong đó nếu chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định các phản lực và nội lực. Để tính các hệ đó cần có các phương trình biến dạng bổ sung. Như vậy:

Hệ được gọi là siêu tĩnh nếu trong toàn hệ hoặc trong một vài phần của hệ ta không thể chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định tất cả các phản lực và nội lực.

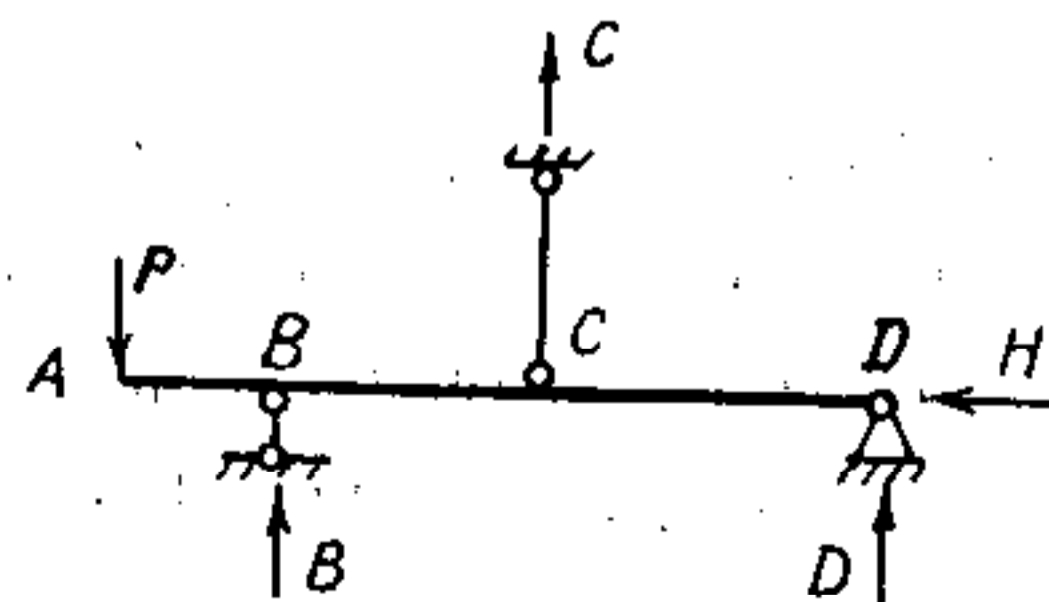
Hệ siêu tĩnh là hệ bất biến hình và có liên kết thừa.

Danh từ liên kết thừa dùng ở đây chỉ là quy ước. Ta cần hiểu liên kết thừa là những liên kết không cần thiết cho sự cấu tạo hình học của hệ nhưng vẫn cần cho sự làm việc của công trình.

Ví dụ, dầm hai nhịp trên hình 5.1a có bốn liên kết loại một nhưng ta chỉ có ba phương trình cân bằng tĩnh học nên chưa đủ để xác định bốn phản lực trong bốn liên kết, vậy dầm đó là siêu tĩnh. Dầm này có một liên kết thừa là một trong ba liên kết thành thẳng đứng. Nếu loại một liên kết thừa như trên các hình 5.1b, c, d thì dầm vẫn bất biến hình nhưng tính chất làm việc sẽ khác đi.



Hình 5.1



Hình 5.2

Đối với hệ cho trên hình 5.2 ta thấy: phần đầu thừa AB là tĩnh định vì có thể dùng các phương trình cân bằng tĩnh học cũng đủ để xác định nội lực trong đó; phần BCD là siêu tĩnh vì với ba phương trình cân bằng tĩnh học chưa đủ để xác định bốn phản lực B, C, D và H , do đó cũng không xác định được nội lực trong phần này. Vậy, nếu xét toàn bộ thì hệ này là siêu tĩnh.

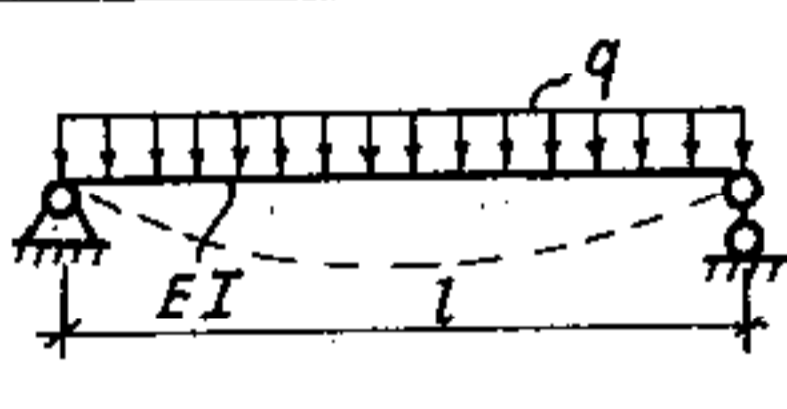
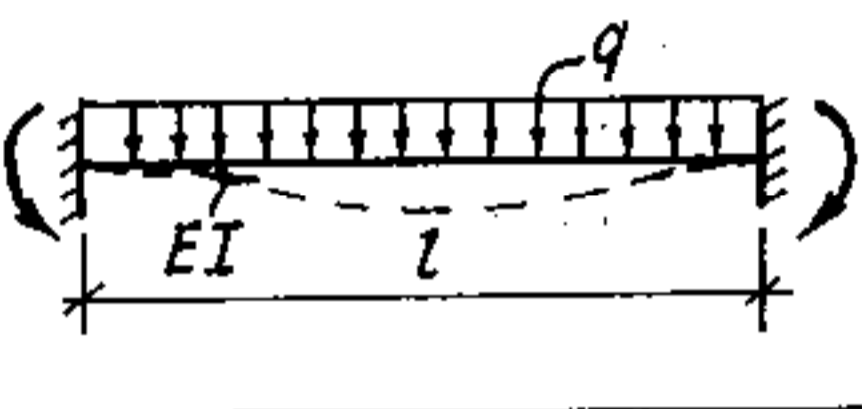
B. Tính chất

Đối chiếu với hệ tĩnh định, hệ siêu tĩnh có những tính chất sau:

- 1) Chuyển vị, biến dạng và nội lực trong hệ siêu tĩnh nói chung nhỏ hơn trong hệ tĩnh định có cùng kích thước và tải trọng.

Bảng 5.1 cung cấp kết quả tính độ võng ở giữa nhịp và mômen uốn lớn nhất trong dầm tĩnh định một nhịp với dầm siêu tĩnh một nhịp có hai đầu ngàm.

Bảng 5.1

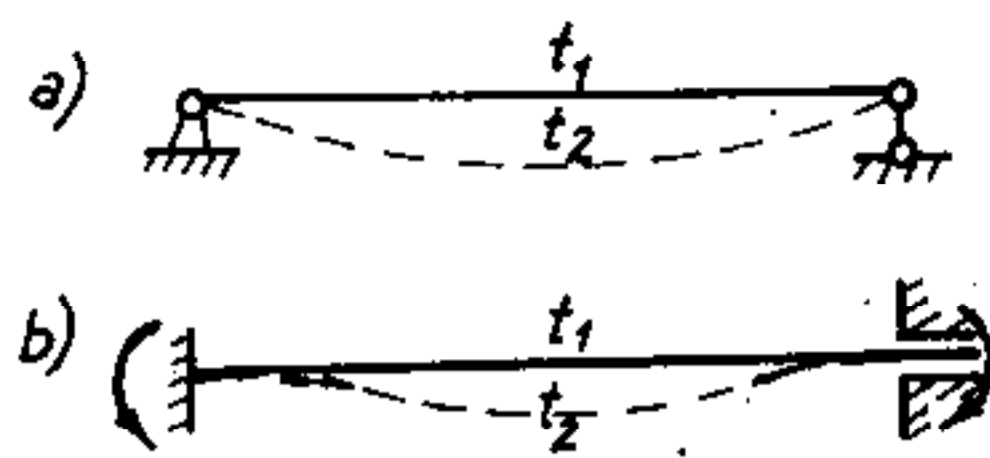
| | | |
|----------------------------|--|---|
| Dầm |  |  |
| Độ võng ở giữa nhịp | $y_{max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$ | $y_{max} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$ |
| Giá trị mômen uốn lớn nhất | tại giữa nhịp $M = \frac{ql^2}{8}$ | tại ngàm $M = \frac{ql^2}{12}$ |

Qua những số liệu trên ta thấy chuyển vị và nội lực trong dầm siêu tĩnh nhỏ hơn trong dầm tĩnh định khá nhiều. Bởi vậy dùng hệ siêu tĩnh sẽ tiết kiệm được vật liệu hơn so với hệ tĩnh định tương ứng. Đó là ưu điểm chính của hệ siêu tĩnh.

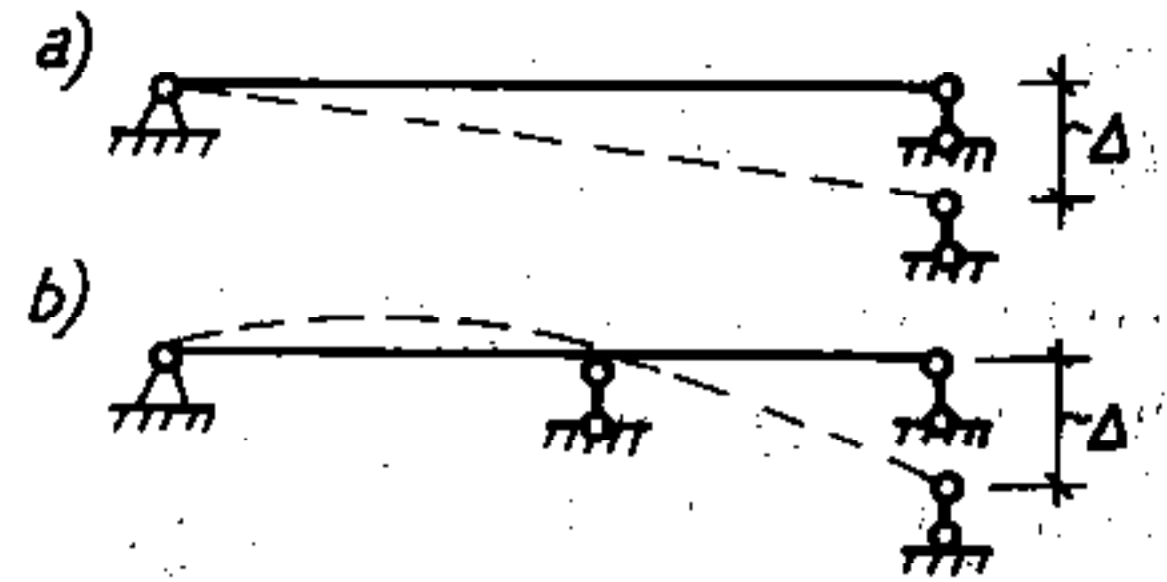
- 2) Trong hệ siêu tĩnh phát sinh các nội lực do sự thay đổi nhiệt độ, sự chuyển vị các gối tựa, sự chế tạo và lắp ráp không chính xác gây ra.

Để thấy rõ tính chất này, ta xét một vài ví dụ:

- So sánh dầm tĩnh định một nhịp (hình 5.3a) với dầm siêu tĩnh một nhịp (hình 5.3b) cùng chịu sự thay đổi nhiệt độ không đều, ở trên là t_1 , ở dưới là t_2 với $t_2 > t_1$ ta thấy: dưới tác dụng của nhiệt độ dầm có khuynh hướng bị uốn cong, nhưng trong dầm tĩnh định các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không phát sinh phản lực và nội lực, ngược lại trong dầm siêu tĩnh, các liên kết (ngàm) cản trở không cho phép dầm biến dạng tự do, do đó phát sinh phản lực và nội lực.

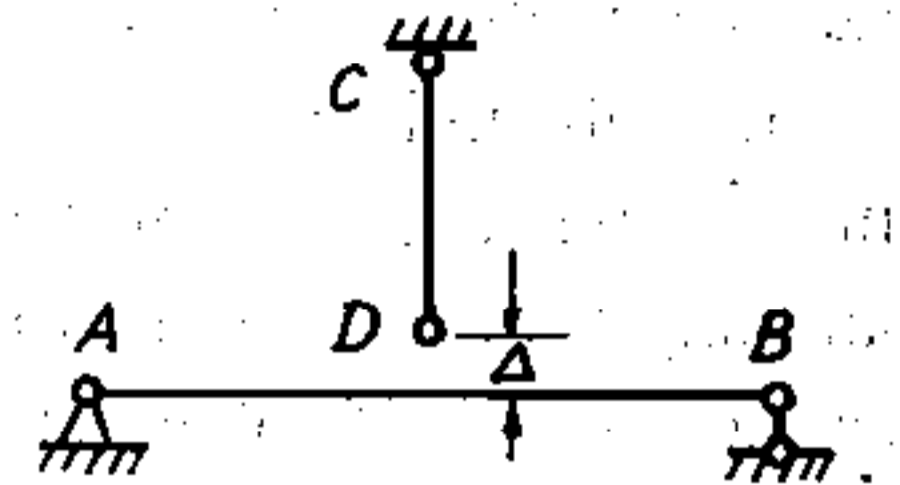


Hình 5.3



Hình 5.4

- Khi liên kết có chuyển vị cưỡng bức (bị lún) dầm tĩnh định cho trên hình 5.4a bị nghiêng đi, các liên kết không ngăn cản và cho phép chuyển vị tự do nên không phát sinh nội lực. Ngược lại, khi gối phải của dầm siêu tĩnh trên hình 5.4b bị lún, gối tựa giữa không cho phép dầm chuyển vị tự do như trường hợp trên, dầm bị uốn cong theo đường đứt nét, do đó trong dầm sẽ phát sinh nội lực.
- Khi chế tạo, giả sử chiều dài của thanh CD trong hệ siêu tĩnh trên hình 5.5 bị ngắn so với chiều dài thiết kế một đoạn bằng Δ . Sau khi lắp ráp, thanh CD bị dãn ra đồng thời dầm AB cũng bị uốn cong, do đó trong hệ tồn tại các nội lực ban đầu.



Hình 5.5

Khi thiết kế kết cấu siêu tĩnh ta cần đặc biệt lưu ý đến những nguyên nhân gây ra nội lực kể trên. Đôi khi có thể sử dụng tính chất này để tạo sẵn trong hệ những nội lực và biến dạng ban đầu ngược chiều với nội lực và biến dạng do tải trọng gây ra. Biện pháp này làm cho sự phân phối nội lực trong các cấu kiện của công trình được hợp lý hơn và do đó tiết kiệm được vật liệu.

3) Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vật liệu và kích thước của tiết diện trong các thanh.

Như sau này sẽ thấy, để tính hệ siêu tĩnh ta phải dựa vào điều kiện biến dạng mà biến dạng lại phụ thuộc các độ cứng EI , EA ... nên nội lực trong hệ siêu tĩnh cũng phụ thuộc EI , EA của các thanh.

Tính các hệ siêu tĩnh thường phức tạp hơn tính các hệ tĩnh định. Có nhiều phương pháp tính hệ siêu tĩnh. Hai phương pháp cơ bản là:

- * Phương pháp lực (được đề cập trong chương này).
- * Phương pháp chuyển vị (được đề cập trong chương 6).

C. Bậc siêu tĩnh

Trong phạm vi những giả thiết được chấp nhận trong cơ học kết cấu, ta có thể định nghĩa bậc siêu tĩnh như sau:

Bậc siêu tĩnh của hệ siêu tĩnh bằng số liên kết tương đương loại một ngoài số liên kết cần thiết để cho hệ bất biến hình.

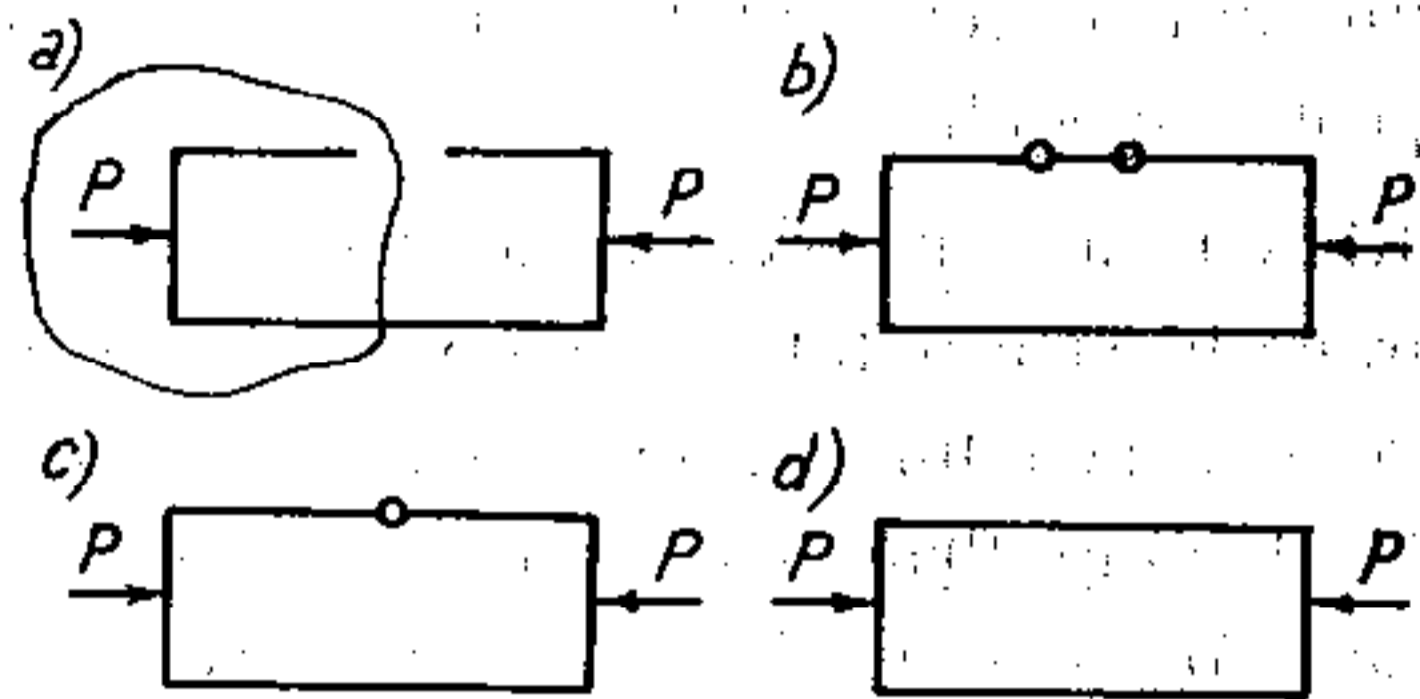
Ta có thể dùng các công thức (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) liên hệ giữa số lượng các miếng cứng và số lượng các liên kết đã nghiên cứu trong chương 1 để suy ra bậc siêu tĩnh của hệ. Ví dụ, từ (1.3) ta suy ra công thức xác định bậc siêu tĩnh n của hệ nối với trái đất là

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D,$$

trong đó D – số các miếng cứng tĩnh định (miếng cứng có chu vi hở).

Ngoài ra còn có thể thiết lập công thức đơn giản hơn để xác định bậc siêu tĩnh.

Trước khi thiết lập ta khảo sát một ví dụ. Xét một khung có chu vi hở (hình 5.6a). Khung này là tĩnh định, vì ta có thể chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ sau khi thực hiện mặt cắt như trên hình vẽ.



Hình 5.6

Nếu đặt thêm vào chu vi hở đó một liên kết loại một (thanh), hệ sẽ thừa một liên kết (hình 5.6b). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh bằng một.

Nếu đặt thêm vào chu vi hở đó một liên kết loại hai (khớp) hệ sẽ thừa hai liên kết tương đương loại một (hình 5.6c). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh bằng hai.

Nếu đặt thêm vào chu vi hở đó một mối hàn (liên kết loại ba) hệ sẽ thừa ba liên kết tương đương loại một (hình 5.6d). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh bằng ba.

Qua ví dụ trên ta có kết luận sau:

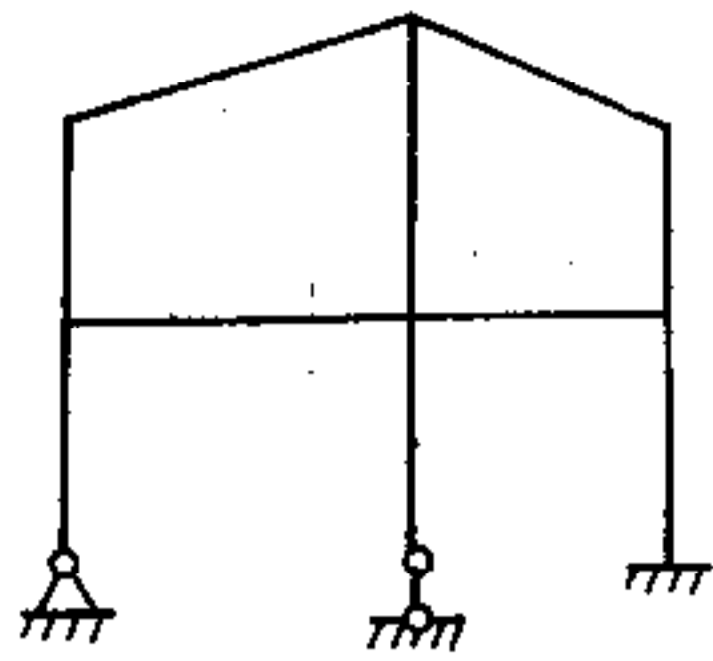
Một chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng ba, nếu thêm vào chu vi kín đó một khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh giảm xuống một đơn vị.

Để thiết lập công thức xác định bậc siêu tĩnh, ta giả thiết trong hệ siêu tĩnh có V chu vi kín và K khớp đơn giản.

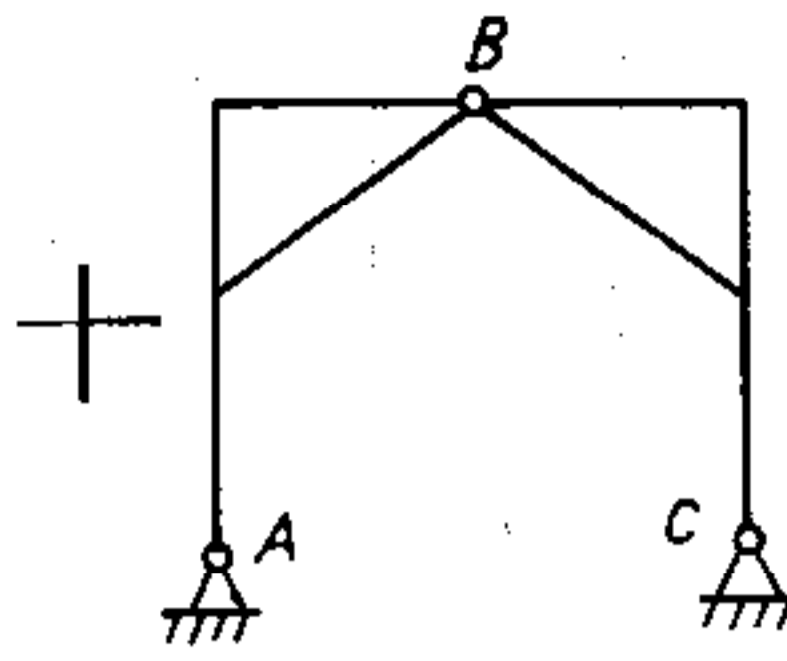
Theo nhận xét trên, cứ mỗi chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng ba nên V chu vi kín sẽ có bậc siêu tĩnh là $3V$. Nếu thêm một khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh giảm xuống một đơn vị, do đó K khớp đơn giản làm bậc siêu tĩnh của hệ giảm K đơn vị. Vậy bậc siêu tĩnh n của hệ được xác định theo công thức:

$$n = 3V - K. \quad (5.1)$$

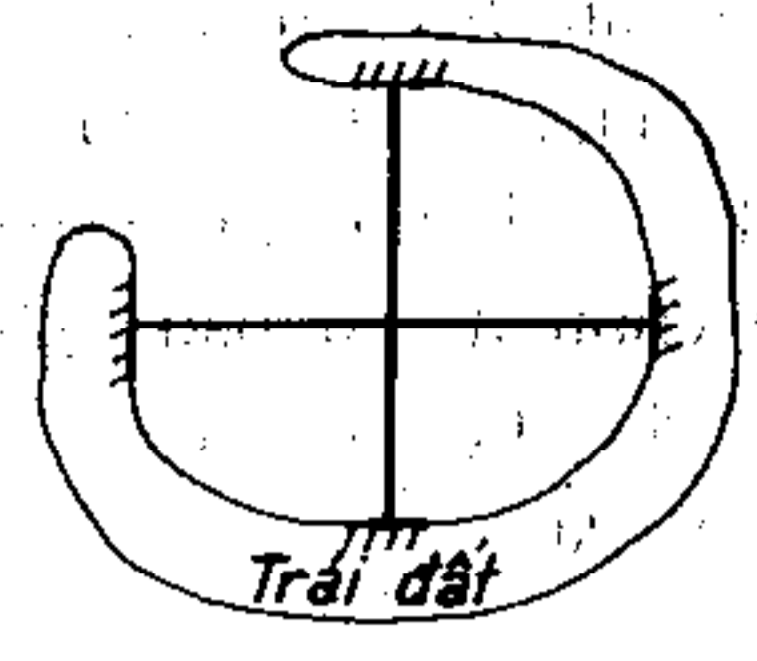
Ví dụ 5.1. Tìm bậc siêu tĩnh của hệ trên hình 5.7.
 Hệ này có $V=4$ và $K=3$. Do đó $n=3.4-3=9$.



Hình 5.7



Hình 5.8



Hình 5.9

Ví dụ 5.2. Tìm bậc siêu tĩnh của hệ trên hình 5.8.

Hệ này có ba chu vi kín. Để tính số khớp K ta cần chú ý: các khớp A, C là khớp đơn giản cho nên mỗi khớp tính bằng một đơn vị; khớp B là khớp phức tạp cho nên phải tính bằng độ phức tạp của nó và bằng $4-1=3$. Vậy tổng số khớp đơn giản là $K=5$. Bậc siêu tĩnh $n=3.3-5=4$.

Chú thích: Khi sử dụng công thức (5.1) cần quan niệm trái đất là miếng cứng hờ. Ví dụ, khi xét hệ trên hình 5.9 thì số chu vi kín trong trường hợp này bằng 3 chứ không phải bằng 4 vì phải quan niệm trái đất là miếng cứng hờ như trên hình vẽ. Bậc siêu tĩnh của hệ này bằng $n=3.3-0=9$.

5.2. Nội dung phương pháp lực và cách tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng bất động, sự thay đổi nhiệt độ, sự cấu tạo chiều dài không chính xác, sự chuyển vị gối tựa

A. Nội dung phương pháp lực

Để tính hệ siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính trên một hệ khác cho phép dễ dàng xác định nội lực. Hệ mới này suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bớt các liên kết thừa gọi là *hệ cơ bản*. Tất nhiên, để bảo đảm cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh đã cho ta cần phải bổ sung thêm các điều kiện phụ. Đó là nội dung tóm tắt của phương pháp lực.

Hệ cơ bản của phương pháp lực là một hệ bất biến hình suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ tất cả hay một số liên kết thừa.

Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản là tĩnh định còn nếu chỉ loại bỏ một số liên kết thừa thì hệ cơ bản là siêu tĩnh có bậc thấp hơn.

Điều quan trọng là *hệ cơ bản phải bất biến hình và cho phép ta xác định được nội lực một cách dễ dàng*. Bởi vậy trong đa số trường hợp, ta thường dùng hệ cơ bản tĩnh định.

Đối với hệ siêu tĩnh trên hình 5.10a, ta có thể chọn hệ cơ bản theo nhiều cách khác nhau. Trên hình 5.10b, c, d giới thiệu ba cách chọn hệ cơ bản tĩnh định cho hệ siêu tĩnh ở hình 5.10a.

Để thiết lập các điều kiện phụ ta hãy so sánh sự khác nhau giữa hệ siêu tĩnh đã cho (hình 5.10a) với hệ cơ bản (giả sử dùng hệ cơ bản 5.10b). Ta nhận thấy:

Tại các vị trí loại bỏ liên kết (A và C):

- ◆ trong hệ siêu tĩnh nói chung có các phản lực còn trong hệ cơ bản không có;
- ◆ trong hệ siêu tĩnh, chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ đều bằng không; trong hệ cơ bản, các chuyển vị này có thể tồn tại.

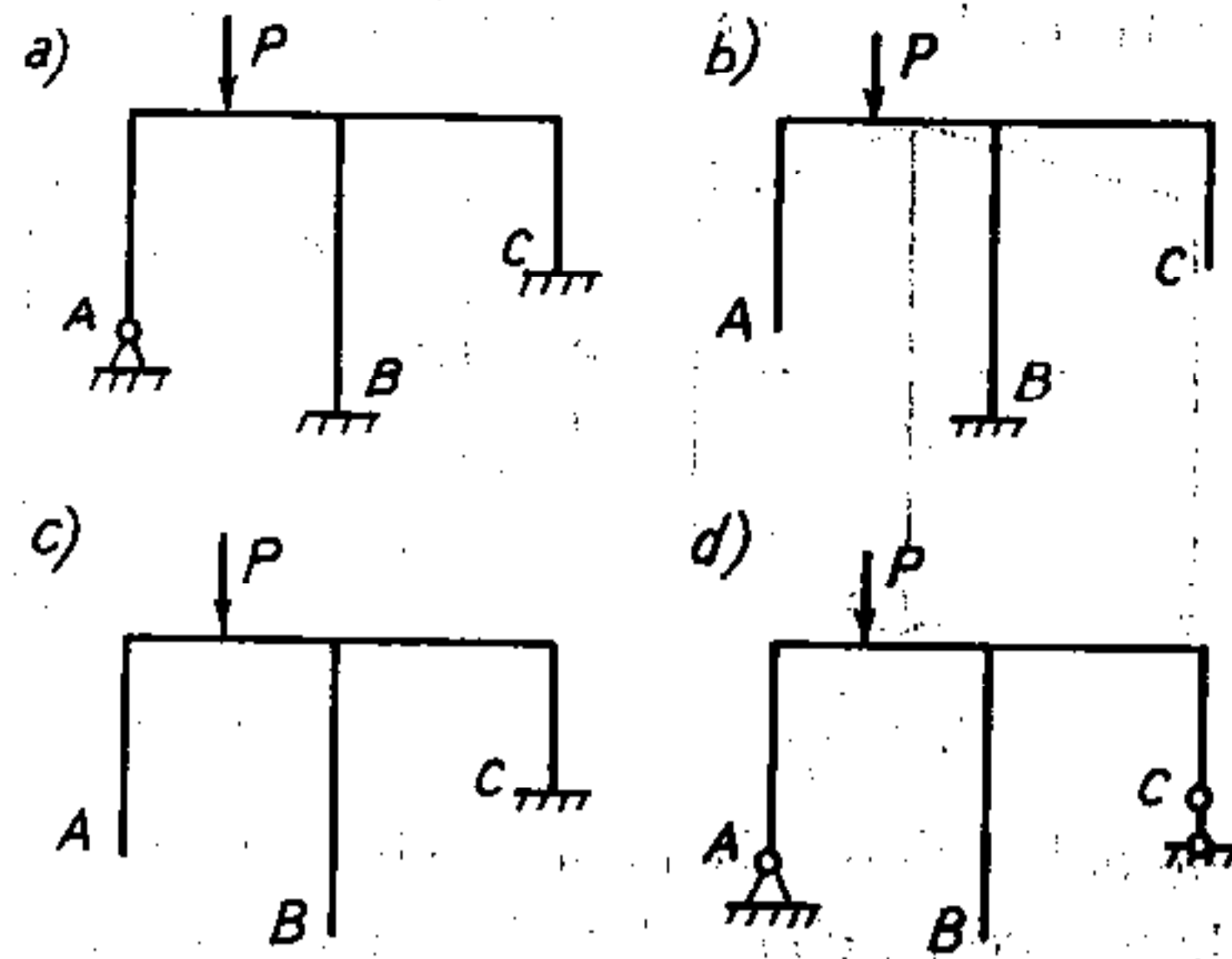
Như vậy, muốn cho hệ cơ bản làm việc giống hệ đã cho, ta cần:

- ❖ Trong hệ cơ bản, đặt các lực X_1, X_2, \dots, X_n tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ. Những lực này chưa biết và giữ vai trò ẩn số (hình 5.11). Vì các ẩn số là lực (lực tập trung hoặc mômen tập trung) nên phương pháp này mang tên là *phương pháp lực*.

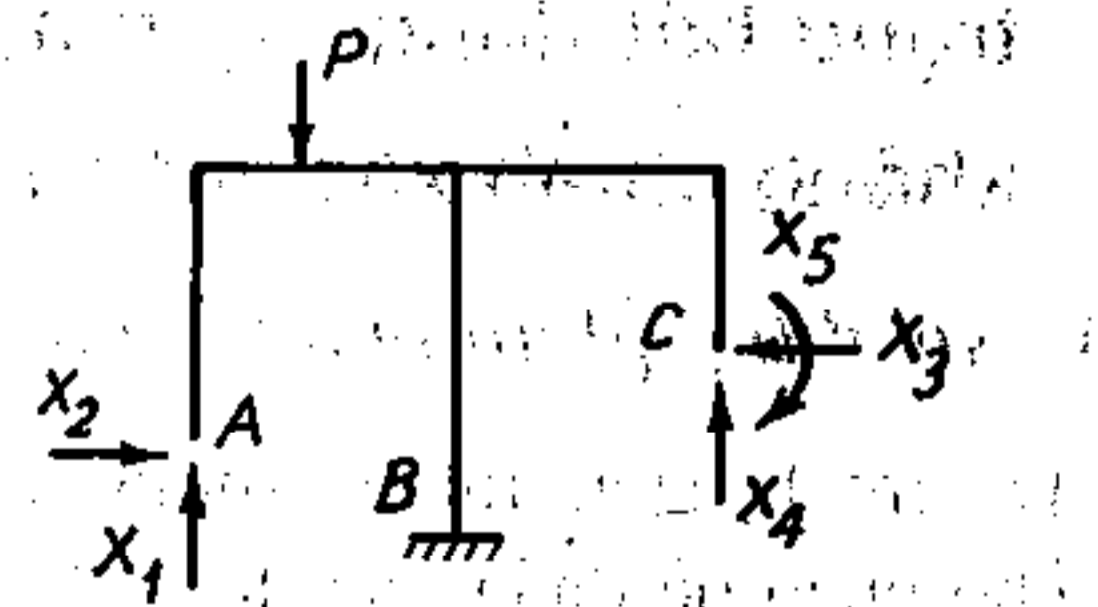
- ❖ Thiết lập điều kiện: chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ bằng không. Nói khác đi, chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của ẩn số X_1, X_2, \dots, X_n do các lực X_1, X_2, \dots, X_n và do các nguyên nhân bên ngoài (tải trọng P , sự thay đổi nhiệt độ t , sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác Δ , sự chuyển vị gối tựa Z) gây ra phải bằng không.

Nếu hệ có bậc siêu tĩnh là n và hệ cơ bản tĩnh định thì ta có n điều kiện:

$$\Delta X_k(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n, P, t, \Delta, Z) = 0 \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$



Hình 5.10



Hình 5.11

Các điều kiện (5.2) là các *phương trình cơ bản của phương pháp lực*. Hệ phương trình này nghiệm đúng với tất cả các hệ tuân theo cũng như không tuân theo nguyên lý công tác dụng.

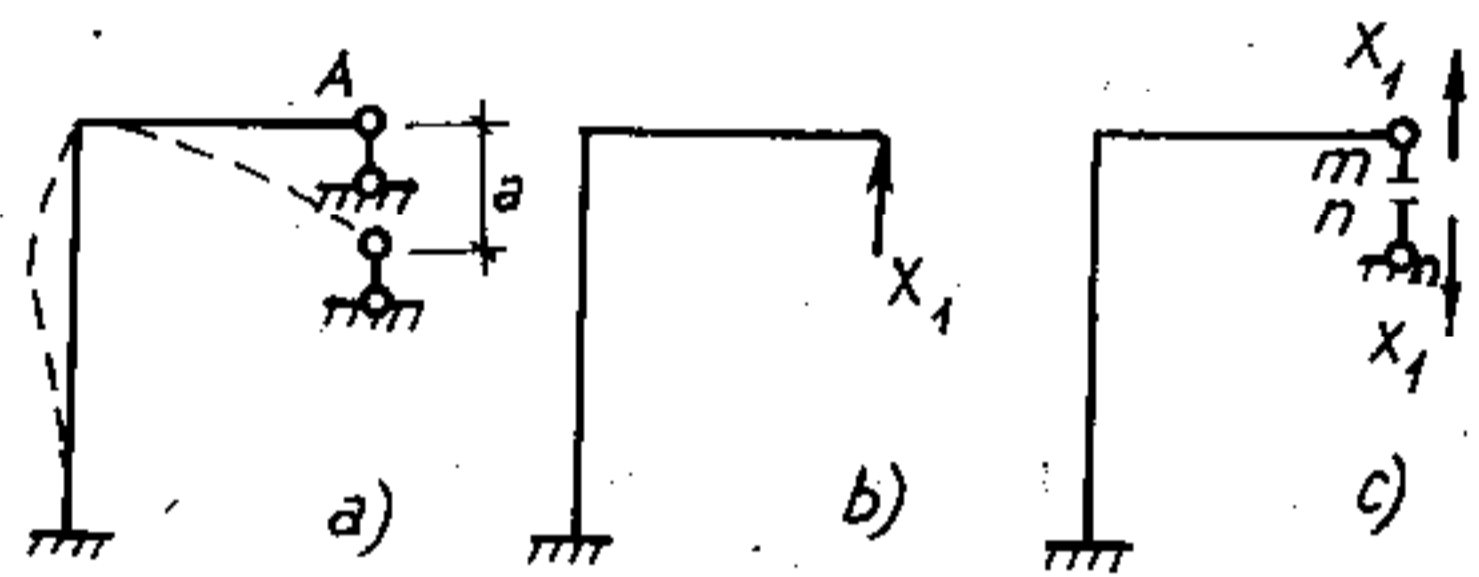
Với hệ có bậc siêu tĩnh là n ta thiết lập được n phương trình cơ bản đủ để xác định n ẩn số X_1, X_2, \dots, X_n . Sau khi tìm được các lực X_1, X_2, \dots, X_n ta xem chúng như các ngoại lực tác dụng trên hệ cơ bản (hình 5.11). Lúc này các lực tác dụng trên hệ cơ bản đều đã biết, ta có thể dễ dàng tìm được nội lực và biến dạng trong hệ cơ bản, đó chính là nội lực và biến dạng trong hệ siêu tĩnh đã cho bởi vì các lực X_i đã thỏa mãn hệ phương trình cơ bản tức là đã thỏa mãn điều kiện làm việc như nhau giữa hệ cơ bản với hệ đã cho.

Chú ý:

1) Khi chọn hệ cơ bản cho hệ siêu tĩnh chịu các chuyển vị cưỡng bức Z tại các gối tựa ta cần chú ý:

- ◆ Đối với liên kết thừa không có chuyển vị cưỡng bức: có thể loại bỏ và thay thế bằng các lực X_k .
- ◆ Đối với liên kết thừa có chuyển vị cưỡng bức ta quy định: chỉ được phép cắt và thay thế bằng cặp lực X_k ngược chiều nhau mà không được phép loại bỏ.

Thật vậy, giả sử xét hệ siêu tĩnh cho trên hình 5.12a nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết A có chuyển vị cưỡng bức (hình 5.12b) thì điều kiện biến dạng theo phương của ẩn số X_1 sẽ khác không.



Hình 5.12

Lúc này chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của X_1 do các ẩn số X và do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa gây ra sẽ có giá trị bằng chuyển vị cưỡng bức tương ứng

$$\Delta_{X_1}(X_1, X_2, \dots, X_n, Z) = -a \neq 0.$$

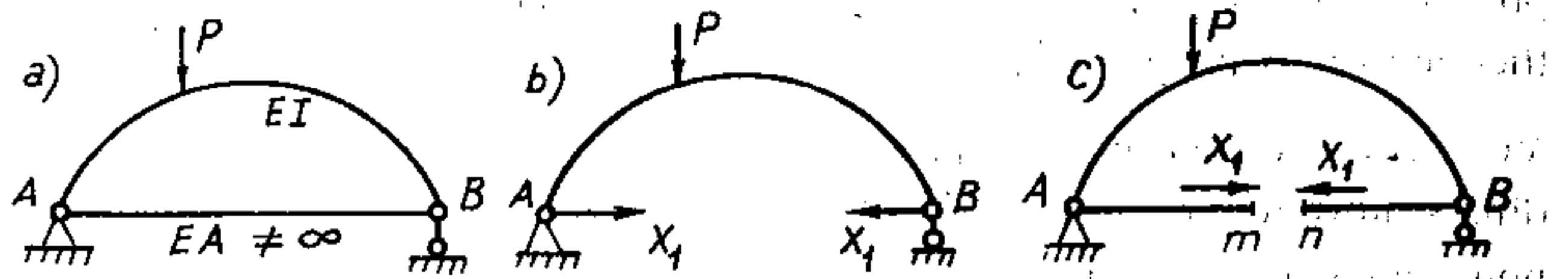
Nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt liên kết có chuyển vị thì điều kiện biến dạng vẫn bằng không (hình 5.12c) bởi vì lúc này chuyển vị tương ứng với cặp ẩn số X_1 là chuyển vị tương đối, tuy gối A có chuyển vị cưỡng bức nhưng chuyển vị tương đối giữa hai điểm cắt m và n vẫn bằng không

$$\Delta_{X_1}(X_1, X_2, \dots, X_n, Z) = 0.$$

Do đó, để thống nhất điều kiện biến dạng luôn luôn bằng không trong tất cả mọi trường hợp, ta quy định chỉ được phép cắt các liên kết tựa có chuyển vị cưỡng bức.

2) Khi chọn hệ cơ bản cho hệ dàn siêu tĩnh hoặc hệ siêu tĩnh có các thanh hai đầu khớp với độ cứng hữu hạn ($EA \neq \infty$) và tải trọng không tác dụng trên thanh, ta quy định chỉ được phép cắt và thay

thể bằng các cặp lực X_k ngược chiều nhau mà không được phép loại bỏ.



Hình 5.13

Cũng lập luận tương tự như trường hợp trên, với hệ trên hình 5.13a: nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ thanh căng AB (hình 5.13b) thì phương trình cơ bản biểu thị chuyển vị tương đối giữa A và B theo phương AB , chuyển vị này khác không vì trong thanh AB có biến dạng dọc trục; nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt thanh AB (hình 5.13c) thì chuyển vị tương đối giữa hai điểm m và n bằng không và phương trình cơ bản luôn bằng không.

B. Hệ phương trình chính tắc

Trong giáo trình này ta chỉ nghiên cứu những hệ có thể áp dụng được nguyên lý công tác dụng, với những hệ này ta có thể biểu thị phương trình cơ bản thứ k của hệ (5.2) dưới dạng:

$$\Delta_{X_k}(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n, P, t, \Delta, Z) = \Delta_{X_k X_1} + \Delta_{X_k X_2} + \dots + \Delta_{X_k X_k} + \dots + \Delta_{X_k X_n} + \Delta_{X_k P} + \Delta_{X_k t} + \Delta_{X_k \Delta} + \Delta_{X_k Z} = 0.$$

Để cho gọn, ta bỏ bớt các chỉ số X

$$\Delta_{k1} + \Delta_{k2} + \dots + \Delta_{kk} + \dots + \Delta_{kn} + \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta} + \Delta_{kZ} = 0.$$

trong đó:

Δ_{km} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_k do lực X_m gây ra trong hệ cơ bản;

$\Delta_{kP}, \Delta_{kt}, \Delta_{k\Delta}, \Delta_{kZ}$ – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_k do riêng tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác, chuyển vị gối tựa gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi δ_{km} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_k do riêng lực $X_m = 1$ gây ra trong hệ cơ bản, ta có:

$$\Delta_{km} = \delta_{km} X_m.$$

Do đó phương trình cơ bản thứ k có dạng

$$\delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \dots + \delta_{kk} X_k + \dots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta} + \Delta_{kZ} = 0.$$

Với hệ có bậc siêu tĩnh bằng n sau khi lần lượt cho $k = 1, 2, \dots, n$ ta sẽ có hệ n phương trình cơ bản của phương pháp lực như sau:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1k}X_k + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1I} + \Delta_{1\Delta} + \Delta_{1Z} = 0; \\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2k}X_k + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} + \Delta_{2I} + \Delta_{2\Delta} + \Delta_{2Z} = 0; \\
&\dots \\
&\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kk}X_k + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kP} + \Delta_{kI} + \Delta_{k\Delta} + \Delta_{kZ} = 0; \\
&\dots \\
&\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nk}X_k + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nI} + \Delta_{n\Delta} + \Delta_{nZ} = 0.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Hệ phương trình (5.3) gọi là *hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực*. Các hệ số δ_{km} (với $k \neq m$) của phương trình chính tắc gọi là *hệ số phụ*. Các hệ số δ_{kk} gọi là *hệ số chính*. Các số hạng Δ_{kP} , Δ_{kI} , $\Delta_{k\Delta}$, Δ_{kZ} gọi là *số hạng tự do*.

Ý nghĩa vật lý của các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình (5.3) là các chuyển vị, do đó muốn xác định chúng, ta cần vận dụng công thức chuyển vị đã biết trong chương 4.

1. Cách tính các hệ số phụ và hệ số chính

Trong công thức chuyển vị (4.25), thay $\Delta_{km} = \delta_{km} X_m$, ta được:

$$\delta_{km} X_m = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k Q_m}{GA} ds.$$

Chia cả hai vế cho X_m ta có:

$$\delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k \bar{Q}_m}{GA} ds. \tag{5.4}$$

Tương tự:

$$\delta_{kk} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_k}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_k}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k \bar{Q}_k}{GA} ds. \tag{5.5}$$

trong đó:

\bar{M}_k , \bar{N}_k , \bar{Q}_k – các biểu thức giải tích của mômen uốn, lực dọc và lực cắt do riêng lực không thứ nguyên $X_k=1$ gây ra trong hệ cơ bản;

\bar{M}_m , \bar{N}_m , \bar{Q}_m – cũng là những đại lượng trên nhưng do riêng lực không thứ nguyên $X_m=1$ gây ra trong hệ cơ bản.

Đối với những trường hợp có thể áp dụng cách "nhân biểu đồ" theo Vêrêxaghin, ta có:

$$\begin{aligned}
\delta_{km} &= (\bar{M}_k)(\bar{M}_m) + (\bar{N}_k)(\bar{N}_m) + (\bar{Q}_k)(\bar{Q}_m); \\
\delta_{kk} &= (\bar{M}_k)(\bar{M}_k) + (\bar{N}_k)(\bar{N}_k) + (\bar{Q}_k)(\bar{Q}_k).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

trong đó:

$(\bar{M}_k), (\bar{N}_k), (\bar{Q}_k)$ – các biểu đồ nội lực do riêng lực không thứ nguyên $X_k=1$ gây ra trong hệ cơ bản;

$(\bar{M}_m), (\bar{N}_m), (\bar{Q}_m)$ – các biểu đồ nội lực do riêng lực không thứ nguyên $X_m=1$ gây ra trong hệ cơ bản.

Từ các công thức trên ta thấy luôn luôn có:

$$\delta_{kk} > 0; \quad \delta_{km} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad (5.7)$$

vì trong công thức xác định δ_{kk} , các hàm số dưới dấu tích phân đều là bình phương của nội lực nên luôn luôn dương còn trong công thức xác định δ_{km} thì các hàm số đó có dấu bất kỳ. Ngoài ra theo định lý tương hỗ của các chuyển vị đơn vị, ta có:

$$\delta_{km} = \delta_{mk} \quad (5.8)$$

2. Cách tính các số hạng tự do

Ta lần lượt xác định số hạng tự do tương ứng với các nguyên nhân sau:

a) Tải trọng

Δ_{kP} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_k do riêng các tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Do đó khi áp dụng công thức chuyển vị (4.25) cho trường hợp này ta chỉ cần thay chỉ số m bằng chỉ số P . Ngoài ra để nhấn mạnh rằng chuyển vị Δ_{kP} là do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, ta thêm vào các biểu thức nội lực chỉ số o .

$$\Delta_{kP} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_P^o}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_P^o}{EA} ds + \sum \int \nu \frac{\bar{Q}_k Q_P^o}{GA} ds. \quad (5.9)$$

trong đó M_P^o, N_P^o, Q_P^o – biểu thức giải tích của mômen uốn, lực dọc và lực cắt do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Trong trường hợp có thể áp dụng cách "nhân biểu đồ" ta có

$$\Delta_{kP} = (\bar{M}_k)(M_P^o) + (\bar{N}_k)(N_P^o) + (\bar{Q}_k)(Q_P^o), \quad (5.10)$$

trong đó $(M_P^o), (N_P^o), (Q_P^o)$ – các biểu đồ nội lực do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Chú ý: Trong những cấu kiện chịu uốn của hệ, ta thường có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt so với ảnh hưởng của mômen uốn khi xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.

b) Sự thay đổi nhiệt độ

Δ_{kt} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_k , do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, ta xác định Δ_{kt} theo (4.30):

$$\Delta_{kt} = \sum \int \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{N}_k \alpha t_{cm} ds.$$

Trong trường hợp hệ gồm những thanh thẳng có tiết diện không đổi trong từng đoạn thanh và nhiệt độ thay đổi như nhau dọc theo chiều dài của từng đoạn thanh, ta dùng công thức (4.31) để xác định Δ_{kt} :

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k). \quad (5.11)$$

trong đó $\Omega(\bar{M}_k)$ và $\Omega(\bar{N}_k)$ – diện tích biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực dọc do riêng lực $X_k = I$ gây ra trong hệ cơ bản.

Các ký hiệu còn lại cũng có ý nghĩa như đã chỉ dẫn khi thiết lập công thức (4.31).

c) Sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác

$\Delta_{k\Delta}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_k do sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác gây ra trong hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, ta xác định $\Delta_{k\Delta}$ theo (4.32):

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_i, \quad (5.12)$$

trong đó:

Δ_i – độ dôi của thanh thứ i khi thanh được chế tạo dài hơn chiều dài cần thiết theo thiết kế;

\bar{N}_{ik} – lực dọc trong thanh thứ i do riêng lực $X_k = I$ gây ra trong hệ cơ bản tĩnh định.

Dấu tổng được thực hiện theo số lượng các thanh có chiều dài chế tạo không chính xác.

d) Chuyển vị gối tựa

Δ_{kZ} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_k do chuyển vị cưỡng bức Z tại các liên kết tựa gây ra trong hệ cơ bản và được xác định theo (4.25). Trong trường hợp hệ cơ bản là tĩnh định, theo (4.29), ta có:

$$\Delta_{kZ} = - \sum_j \bar{R}_{jk} Z_j, \quad (5.13)$$

trong đó:

Z_j – chuyển vị cưỡng bức cho biết tại liên kết thứ j của hệ siêu tĩnh;

\bar{R}_{jk} – phản lực tại liên kết j do lực $X_k = I$ gây ra trong hệ cơ bản tĩnh định.

Dấu tổng được thực hiện theo số lượng các kết tựa có chuyển vị cưỡng bức.

C. Cách tìm nội lực và biến dạng trong hệ siêu tĩnh

Khi tính hệ siêu tĩnh ta phải xác định được nội lực và biến dạng tại bất kỳ vị trí nào của hệ. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu cách xác định các đại lượng đó sau khi đã biết giá trị của các ẩn số X_1, X_2, \dots, X_n .

1. Cách tính trực tiếp

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc để tìm các ẩn số X_k , ta xem các lực này như ngoại lực tác dụng trên hệ cơ bản với giá trị vừa tìm được. Lúc này, có thể thay việc tính nội lực và biến dạng trên hệ siêu tĩnh bằng cách tính nội lực và biến dạng trên hệ cơ bản chịu các nguyên nhân bên ngoài và các lực X_k . Vì hệ cơ bản thường là tĩnh định nên có thể sử dụng các phương pháp đã quen biết để xác định các đại lượng cần tìm.

2. Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Giả sử cần tính đại lượng S tại một vị trí bất kỳ của hệ. Đại lượng S có thể là phản lực tại một gối tựa nào đó hay mômen uốn, lực dọc, lực cắt, chuyển vị tại một tiết diện nào đó. Theo cách tính trực tiếp nói trên, ta thay việc tính đại lượng S trong hệ siêu tĩnh bằng cách tính đại lượng S trong hệ cơ bản nhưng do các nguyên nhân bên ngoài và các lực X_k cùng đồng thời tác dụng gây ra.

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$S = S(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, \Delta, Z) = S_{X_1} + S_{X_2} + \dots + S_{X_n} + S_P^o + S_t^o + S_\Delta^o + S_Z^o$$

trong đó $S_{X_1}, S_{X_2}, \dots, S_{X_n}, S_P^o, S_t^o, S_\Delta^o, S_Z^o$ là giá trị của đại lượng S lần lượt do riêng từng nguyên nhân $X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, \Delta$ và Z gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi \bar{S}_k là giá trị của đại lượng S do riêng lực $X_k = I$ gây ra trong hệ cơ bản ta có:

$$S_{X_k} = \bar{S}_k X_k \quad (5.14)$$

Thay (5.14) vào biểu thức trên ta được biểu thức tổng quát để xác định nội lực và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh:

$$S = \bar{S}_1 X_1 + \bar{S}_2 X_2 + \dots + \bar{S}_n X_n + S_P^o + S_t^o + S_\Delta^o + S_Z^o \quad (5.15)$$

Trong trường hợp cần tìm các biểu đồ nội lực hay chuyển vị, cũng lý luận tương tự, ta có biểu thức tổng quát sau:

$$(S) = (\bar{S}_1)X_1 + (\bar{S}_2)X_2 + \dots + (\bar{S}_n)X_n + (S_P^o) + (S_t^o) + (S_\Delta^o) + (S_Z^o), \quad (5.16)$$

trong đó:

(\bar{S}_k) – biểu đồ của đại lượng S do riêng lực $X_k = 1$ gây ra trong hệ cơ bản;

$(S_P^o), (S_t^o), (S_\Delta^o), (S_Z^o)$ – biểu đồ của đại lượng S do riêng tải trọng, riêng sự thay đổi nhiệt độ, riêng sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác và riêng chuyển vị gối tựa gây ra trong hệ cơ bản.

Các biểu thức (5.15) và (5.16) áp dụng chung cho mọi trường hợp, giả sử muốn tìm mômen uốn M hay độ võng y , ta cần thay thế ký hiệu S bằng ký hiệu tương ứng M hay y .

Dùng các biểu thức này có lợi khi đã có sẵn các trạng thái đơn vị tức là đã biết các giá trị \bar{S}_k . Đối với dầm và khung siêu tĩnh, vẽ biểu đồ mômen uốn theo cách này rất tiện lợi vì đã có sẵn các biểu đồ mômen uốn đơn vị trong quá trình xác định các hệ số.

Chú ý: Nếu đại lượng S chỉ là phản lực hoặc nội lực (không phải chuyển vị) và hệ cơ bản là tĩnh định thì các đại lượng S_P^o, S_Δ^o, S_Z^o và các biểu đồ $(S_t^o), (S_\Delta^o), (S_Z^o)$ sẽ không tồn tại vì như ta đã biết những nguyên nhân này không gây ra phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định.

3. Cách vẽ biểu đồ lực cắt và lực dọc theo biểu đồ mômen uốn

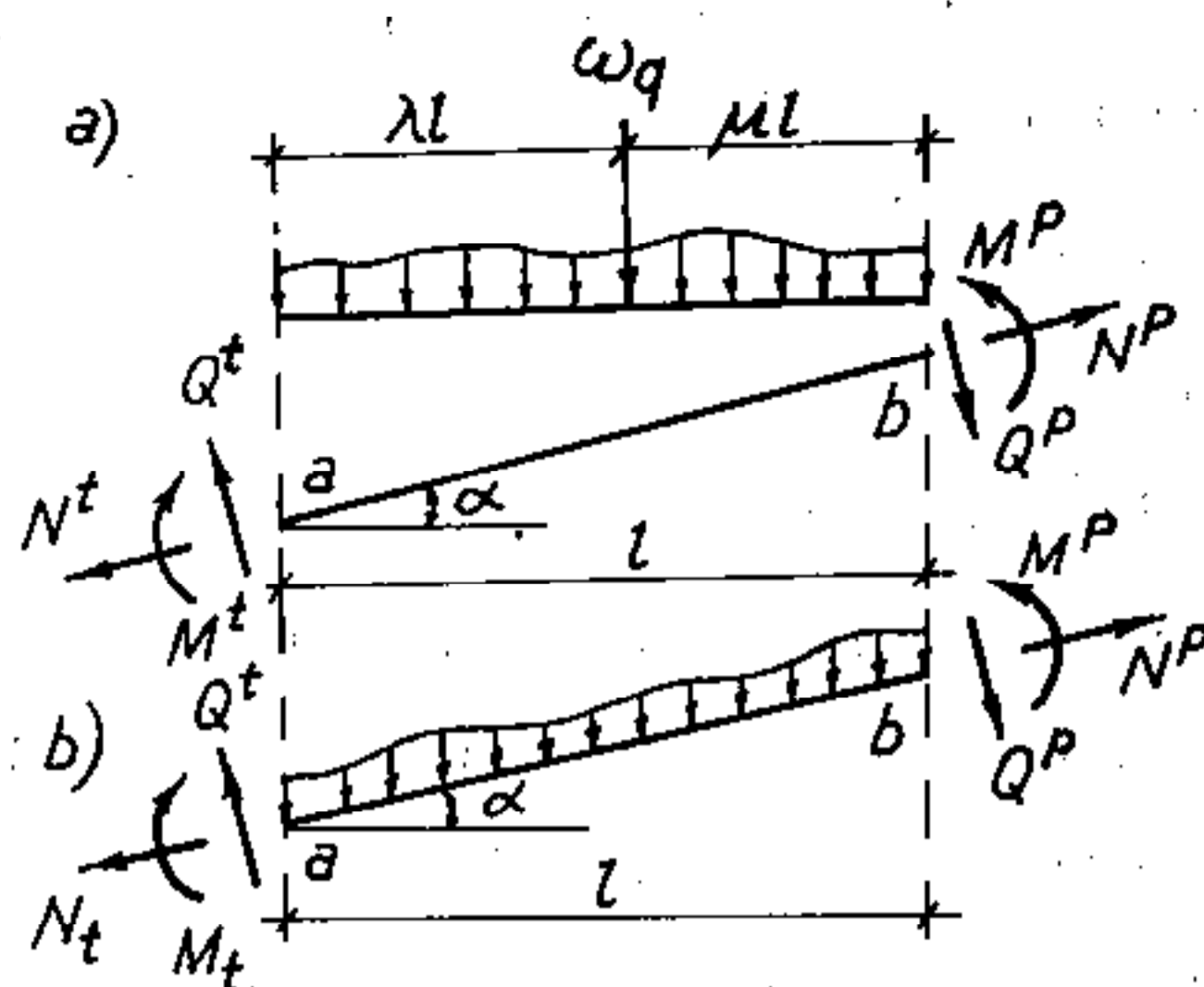
Trong trường hợp dầm và khung gồm những thanh thẳng, người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc, so với ảnh hưởng của mômen uốn khi xác định chuyển vị, do đó trong các khâu tính toán trung gian ta không cần vẽ các biểu đồ đơn vị (\bar{Q}_k) và (\bar{N}_k) . Bởi vậy, nếu vẽ biểu đồ (Q) và (N) theo cách trên sẽ bất lợi vì không có sẵn các biểu đồ (\bar{Q}_k) và (\bar{N}_k) . Trong những trường hợp này, nên vẽ biểu đồ (M) trước tiên theo biểu thức (5.16), sau đó căn cứ vào biểu đồ (M) để suy ra biểu đồ (Q) và (N) .

Cách vẽ biểu đồ (Q) theo biểu đồ (M) dựa trên cơ sở khảo sát sự cân bằng của từng đoạn thanh được tách riêng ra đồng thời chú ý tới liên hệ vi phân $Q = dM/dz$ như đã biết. Khi thực hiện, cần chú ý tách từng đoạn thanh trong đó tải trọng liên tục.

Để tiện lợi cho việc áp dụng ta hãy thiết lập công thức tổng quát xác định lực cắt ở hai đầu của một đoạn thanh thẳng chịu tải trọng phân bố liên tục hướng theo một phương bất kỳ và có quy luật bất kỳ như trên hình 5.14.

Sau khi tách thanh ab (hình 5.14) ra khỏi hệ thanh ta cần thay thế tác dụng của phần còn lại bằng các lực cắt, lực dọc chưa biết và các mômen uốn đã biết từ biểu đồ (M). Các nội lực chưa biết được giả thiết là dương và vẽ theo quy ước về dấu đã quy định.

Từ các điều kiện cân bằng tổng mômen đối với điểm b và điểm a , ta suy ra:



Hình 5.14

$$\begin{aligned} Q^t &= \left[\frac{l}{l}(M^p - M^t) + \mu\omega_q \right] \cos\alpha; \\ Q^p &= \left[\frac{l}{l}(M^p - M^t) - \mu\omega_q \right] \cos\alpha; \end{aligned} \quad (5.17)$$

trong đó:

Q^t , M^t và Q^p , M^p – lần lượt là lực cắt, mômen uốn tại đầu trái và đầu phải thanh ab đối với người quan sát đứng sao cho lực phân bố hướng xuống phía dưới;

ω_q – hợp lực của tải trọng phân bố hay diện tích biểu đồ tải trọng phân bố trên thanh ab ;

λ và μ – lần lượt là tỉ số khoảng cách từ hợp lực ω_q đến đầu trái và đầu phải thanh ab so với chiều dài theo phương ngang l của thanh ab .

Công thức (5.17) vẫn áp dụng được cho trường hợp tải trọng phân bố theo chiều dài thanh (hình 5.14b).

Sau khi xác định được lực cắt ở hai đầu thanh ta dễ dàng vẽ được biểu đồ lực cắt trong thanh theo quy cách đã trình bày trong chương 2.

Trường hợp đặc biệt khi thanh không chịu tải trọng phân bố thì biểu đồ lực cắt có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn và có giá trị được xác định bằng:

$$Q = \frac{M^p - M^t}{l} \cos\alpha. \quad (5.18)$$

Cách vẽ biểu đồ lực dọc theo biểu đồ lực cắt đã biết dựa trên cơ sở khảo sát cân bằng của các nút hoặc của từng phần hệ được tách ra khỏi hệ thanh.

Khi khảo sát cân bằng, ngoài tải trọng đặt ở nút hoặc đặt trên từng phần hệ ta cần thay thế những phần còn lại bằng các nội lực bao gồm mômen uốn, lực cắt đã biết và lực dọc chưa biết. Các lực dọc chưa biết được vẽ với giả thiết là dương. Sau khi vận dụng các phương trình cân bằng thích hợp ta có thể xác định được các lực dọc cần tìm. Nên dùng biện pháp này để xác định lực dọc ở hai đầu thanh. Ngoài ra, khi xác định ta cũng có thể vận dụng mối quan hệ giữa các lực dọc ở hai đầu thanh tìm được từ điều kiện cân bằng của thanh vẽ trên hình 5.14.

$$N_p = N^t + \omega_q \sin \alpha. \quad (5.19)$$

Sau khi xác định được lực dọc ở hai đầu mỗi thanh, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ lực dọc trong thanh theo quy cách đã trình bày trong chương 2.

Trường hợp đặc biệt khi thanh không chịu tải trọng phân bố hoặc khi tải trọng phân bố vuông góc với trục thanh thì biểu đồ lực dọc trong thanh đó sẽ có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn. Do đó, nếu biết giá trị lực dọc tại một đầu thanh ta sẽ dễ dàng vẽ được biểu đồ lực dọc trong thanh.

5.3. Áp dụng

A. Khung siêu tĩnh chịu tải trọng bất động

Ví dụ 5.3. Vẽ biểu đồ nội lực trong khung cho trên hình 5.15a.

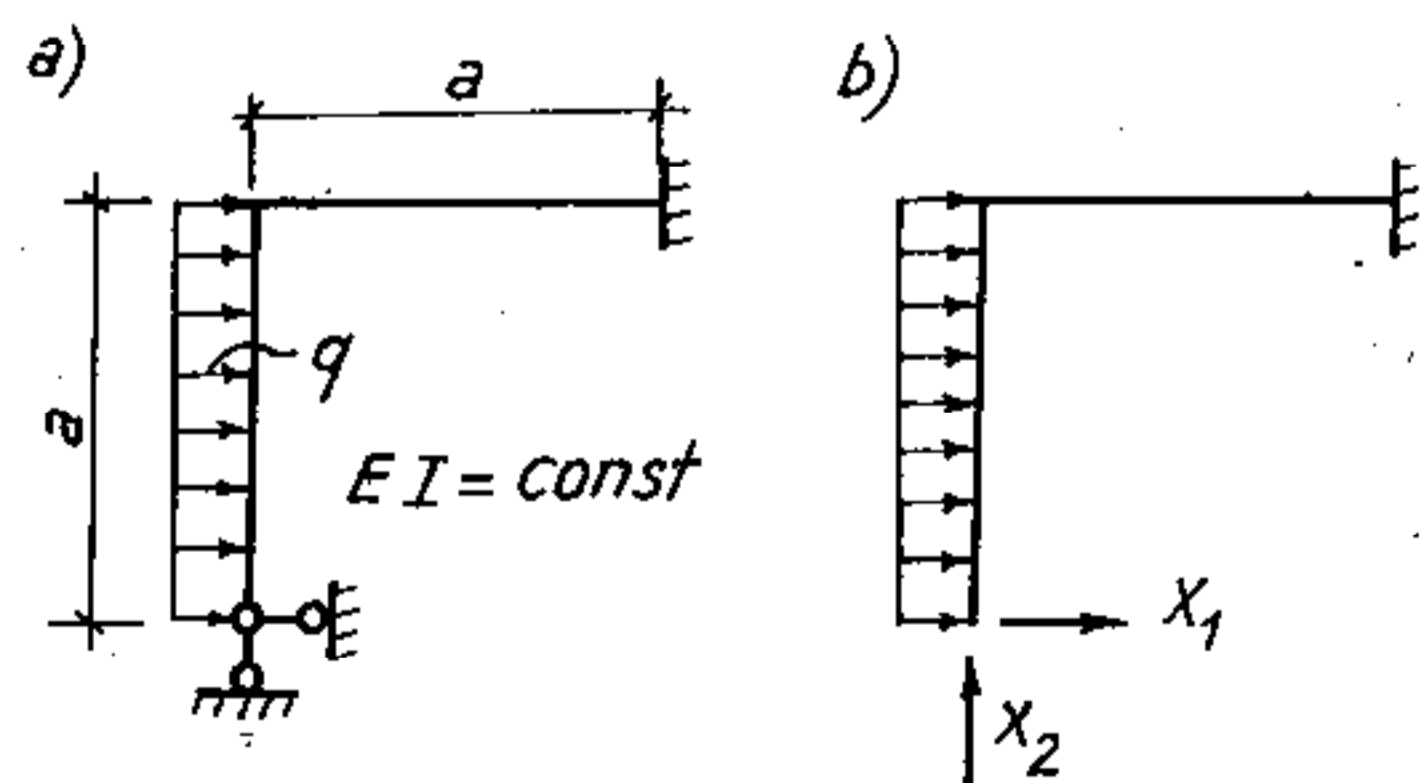
Quá trình tính toán được thực hiện theo thứ tự như sau:

- 1) *Xác định bậc siêu tĩnh.* Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng 2.
- 2) *Chọn hệ cơ bản.* Có nhiều cách chọn hệ cơ bản, ở đây ta chọn hệ cơ bản như trên hình 5.15b.
- 3) *Thiết lập hệ phương trình chính tắc.*

Hệ có bậc siêu tĩnh bằng 2 nên ta có hai phương trình chính tắc:

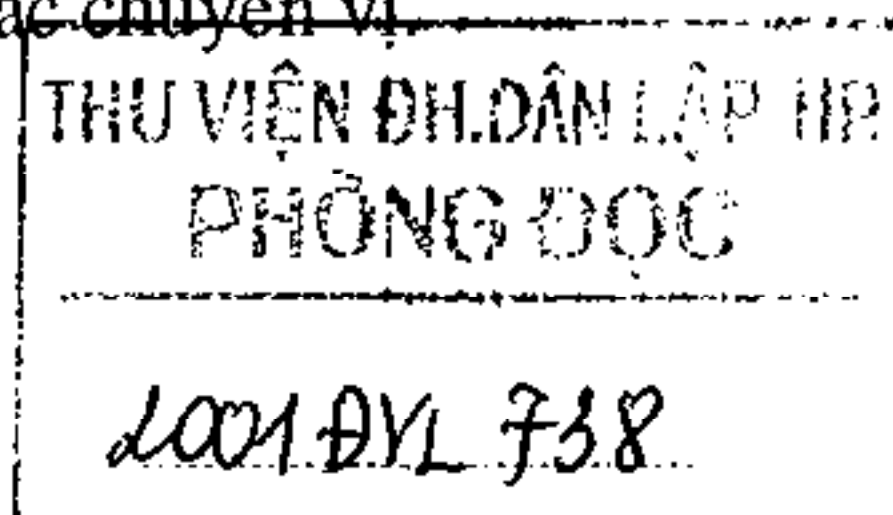
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

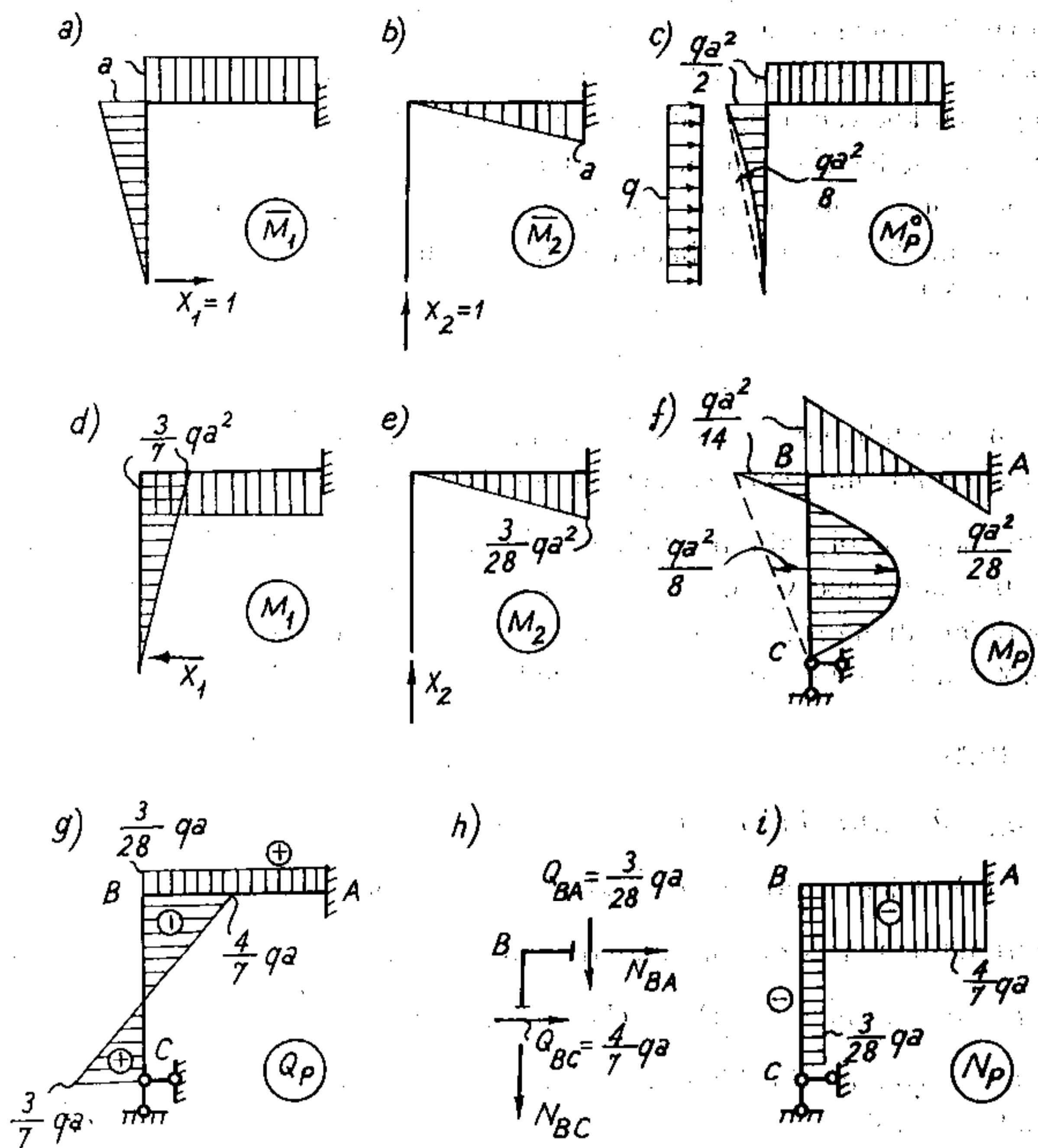
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$



Hình 5.15

Để xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc ta sử dụng các công thức (5.5), (5.6) và (5.9) đồng thời bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt khi tính các chuyển vị.





Hình 5.16

Muốn vậy, cần vẽ các biểu đồ mômen uốn lần lượt do $X_1 = 1$; $X_2 = 1$ và tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 5.16a, b, c). Ta có:

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left[\frac{a^2}{2} \frac{2a}{3} + a^2 \cdot a \right] = \frac{4a^3}{3EI};$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \frac{a^2}{2} \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = -\frac{1}{EI} \frac{a^2}{2} \cdot a = -\frac{a^3}{2EI};$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^0) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{qa^2}{2} a \frac{2a}{3} - \frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a \frac{a}{2} + \frac{qa^2}{2} a \cdot a \right] = \frac{5qa^4}{8EI}$$

$$\Delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_P^0) = -\frac{1}{EI} \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4EI}$$

Thay các kết quả vào hệ phương trình chính tắc, ta được:

$$\frac{4a^3}{3EI} X_1 - \frac{a^3}{2EI} X_2 + \frac{5qa^4}{8EI} = 0; \quad -\frac{a^3}{2EI} X_1 + \frac{a^3}{3EI} X_2 - \frac{qa^4}{4EI} = 0.$$

Hay $\frac{4}{3} X_1 - \frac{1}{2} X_2 + \frac{5}{8} qa = 0; \quad -\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 - \frac{1}{4} qa = 0.$

4) Giải hệ phương trình chính tắc để xác định các ẩn số X_1, X_2 . Kết quả:

$$X_1 = -\frac{3}{7} qa; \quad X_2 = \frac{3}{28} qa.$$

5) Vẽ biểu đồ mômen uốn. Trong ví dụ này ta vẽ biểu đồ mômen uốn theo nguyên lý cộng tác dụng. Từ biểu thức (5.16) ta có:

$$(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)X_2 + (M_P^0).$$

Như vậy, để vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu tĩnh đã cho ta cần:

- Nhân các tung độ của biểu đồ (\bar{M}_1) với giá trị $X_1 = -3qa/7$ sẽ được biểu đồ (M_1) ngược chiều thứ cặng với biểu đồ (\bar{M}_1) (hình 5.16d).
- Nhân các tung độ của biểu đồ (\bar{M}_2) với giá trị $X_2 = 3qa/28$ sẽ được biểu đồ (M_2) (hình 5.16e).
- Cộng ba biểu đồ: biểu đồ (M_1) (hình 5.16d), biểu đồ (M_2) (hình 5.16e) và biểu đồ (M_P^0) (hình 5.16c); ta sẽ được biểu đồ mômen uốn cuối cùng cần tìm (M_P) (hình 5.16f).

6) Vẽ biểu đồ lực cắt theo biểu đồ mômen uốn

- Trên thanh ngang: biểu đồ lực cắt có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn và có giá trị xác định theo (5.18):

$$Q_{BA} = \frac{1}{d} \left(\frac{qa^2}{28} + \frac{qa^2}{14} \right) = +\frac{3}{28} qa.$$

- Trên thanh đứng: biểu đồ lực cắt có dạng bậc nhất, ta chỉ cần xác định giá trị của lực cắt tại các đầu thanh Q_{CB} và Q_{BC} rồi nối lại với nhau bằng đường thẳng. Theo công thức (5.17) ta có:

$$Q_{CB} = Q^r = \frac{1}{a} \left(\frac{qa^2}{14} - 0 \right) + \frac{qa}{2} = +qa; \quad Q_{BC} = Q^p = \frac{1}{a} \left(\frac{qa^2}{14} - 0 \right) - \frac{qa}{2} = -\frac{4}{7}qa.$$

Biểu đồ lực cắt vẽ trên hình 5.16g.

7) Vẽ biểu đồ lực dọc theo biểu đồ lực cắt bằng cách tách nút

Trong trường hợp này $q_l = 0$ nên lực dọc không thay đổi trong từng thanh, do đó chỉ cần xác định một giá trị lực dọc tại một tiết diện nào đó trong mỗi thanh là đủ để vẽ biểu đồ.

Tách nút B (hình 5.16h), sau khi đặt tại những tiết diện bị cắt các lực cắt có giá trị và chiều đã biết theo biểu đồ Q đồng thời đặt các lực dọc N_{AB} và N_{BC} chưa biết (giả thiết là dương), ta viết phương trình cân bằng hình chiếu:

$$\sum X = N_{AB} + \frac{4}{7}qa = 0, \quad \text{suy ra} \quad N_{AB} = -\frac{4}{7}qa;$$

$$\sum Y = -N_{BC} - \frac{3}{28}qa = 0, \quad \text{suy ra} \quad N_{BC} = -\frac{3}{28}qa.$$

Biểu đồ lực dọc vẽ trên hình 5.16i

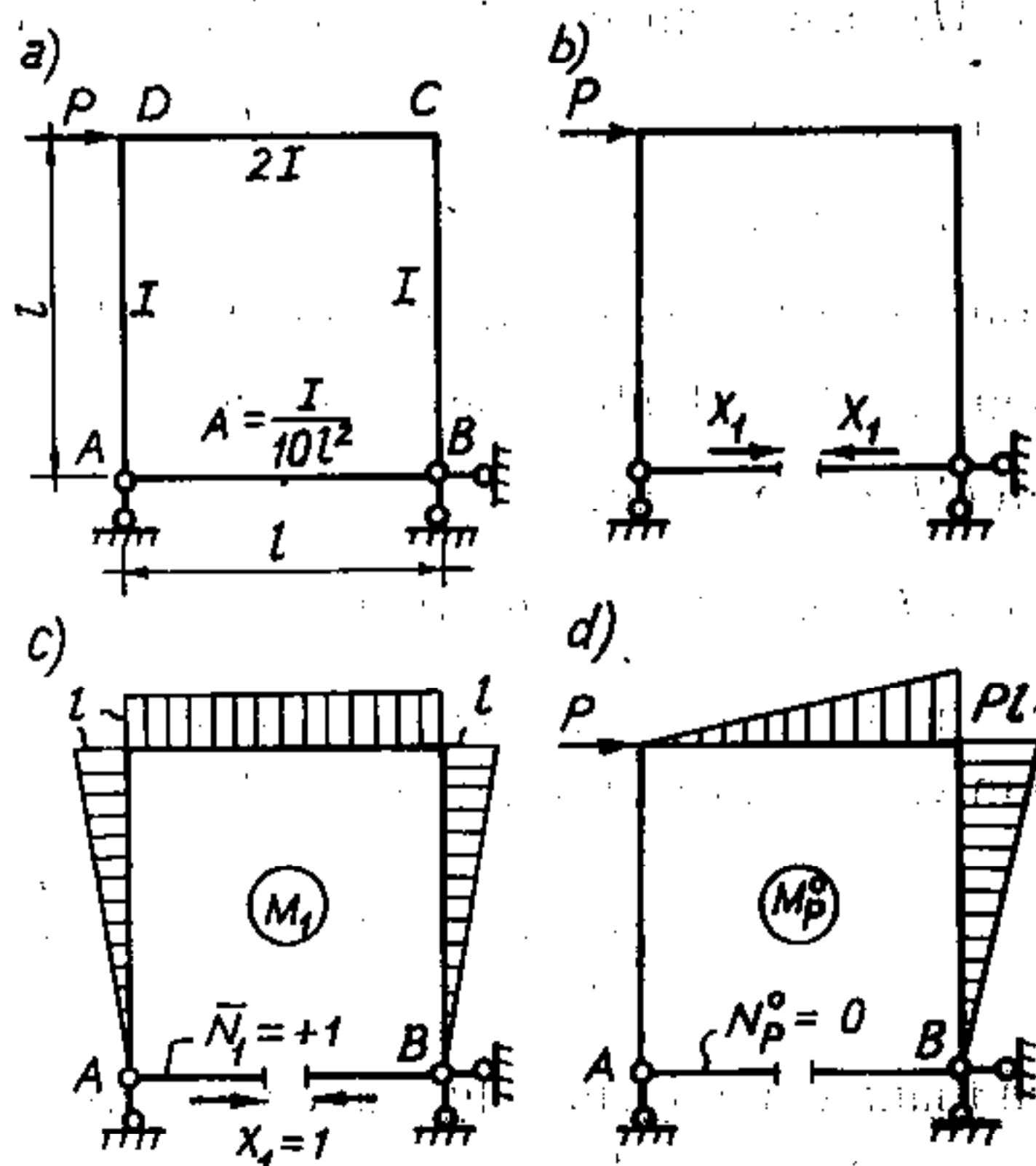
Ví dụ 5.4. Vẽ biểu đồ (M), (N), (Q) cho khung trên hình 5.17a. Ảnh hưởng của lực dọc cần được xét đến trong thanh AB khi tính chuyển vị.

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản như trên hình 5.17b. Phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Để xác định δ_{11} và Δ_{1P} ta cần vẽ biểu đồ (\bar{M}_1) và biểu đồ (M_P^0) (hình 5.17c, d).

Ngoài ra, vì chỉ yêu cầu xét đến ảnh hưởng của lực dọc trong thanh AB, nên ta chỉ cần xác định lực dọc trong thanh AB do $X_1 = 1$ gây ra và do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản, kết quả ghi trên hình 5.17c, d.



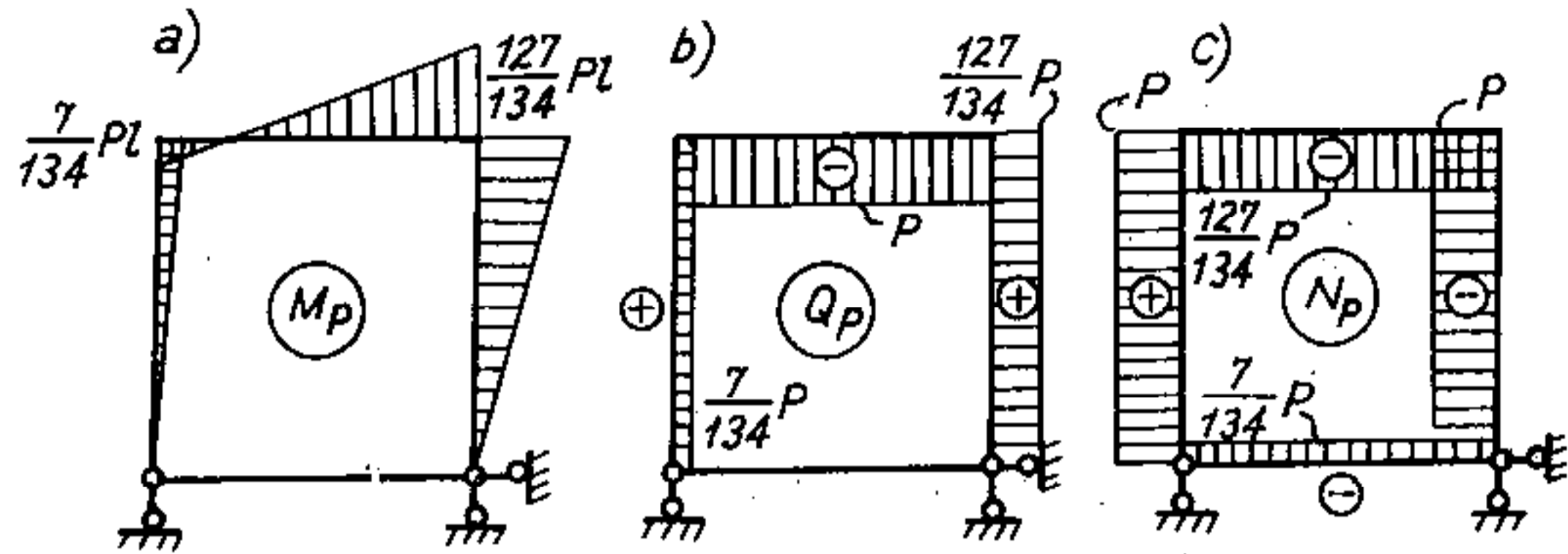
Hình 5.17

Xác định hệ số δ_{11} và số hạng tự do Δ_{1P} :

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) + (\bar{N}_1)(\bar{N}_1) = 2 \frac{1}{EI} \frac{l \cdot l \cdot 2l}{3} + \frac{l^3}{2EI} + \frac{1}{EA} l \cdot l \cdot l = \frac{67l^3}{6EI};$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^0) = \frac{1}{2EI} \frac{Pl^2}{2} l + \frac{1}{EI} \frac{Pl^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{7Pl^3}{12EI}.$$

Thay các trị số này vào phương trình chính tắc và giải ra ta được: $X_1 = -\frac{7P}{134}$.



Hình 5.18

Cũng thực hiện các bước tiếp theo tương tự như trong ví dụ trên, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ mômen uốn, lực cắt và lực dọc như trên hình (5.18a, b, c).

B. Hệ siêu tĩnh chịu sự thay đổi nhiệt độ

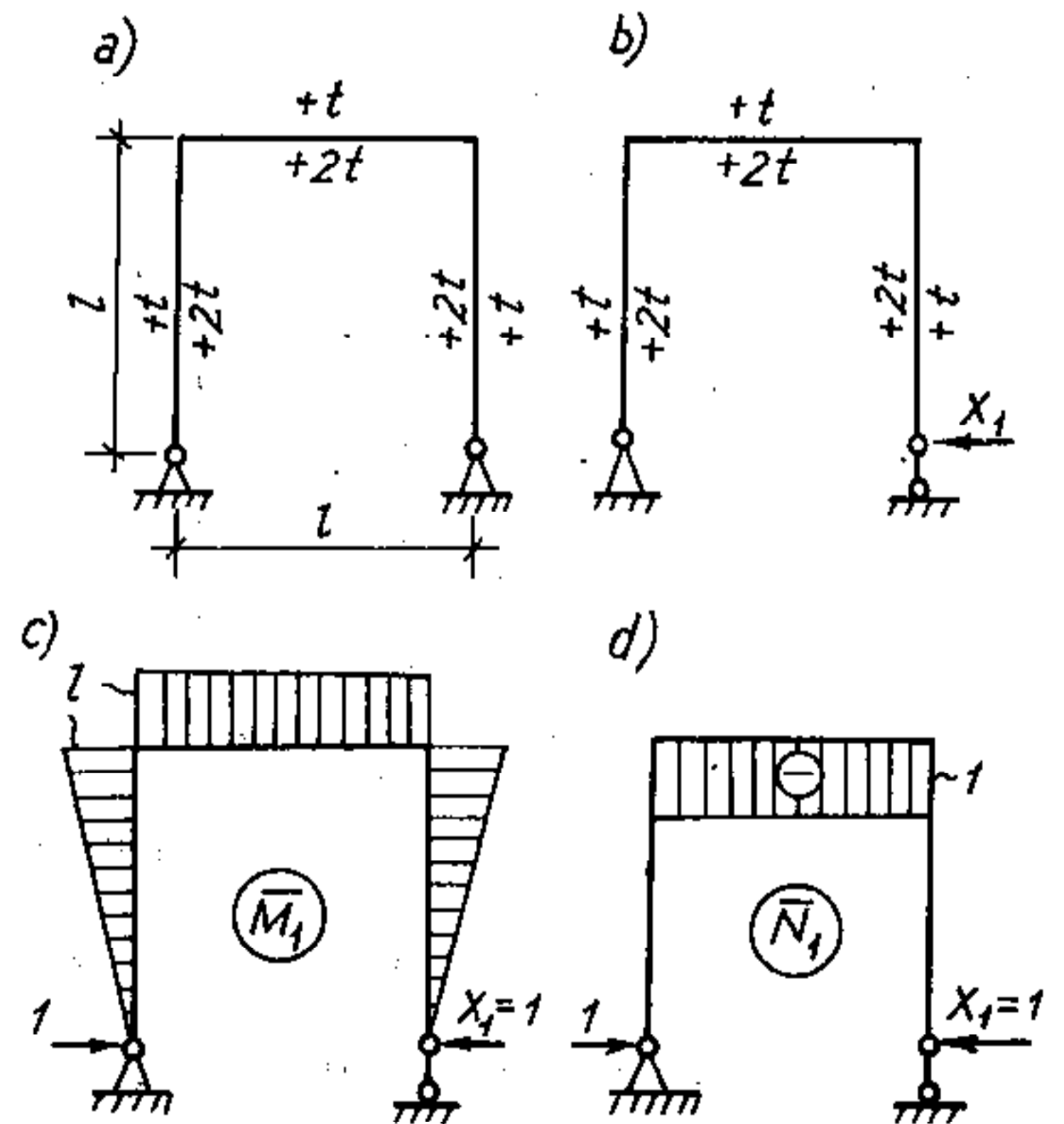
Ví dụ 5.5. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung chịu sự biến thiên nhiệt độ (hình 5.19a). Cho biết chiều cao h của các tiết diện không đổi, $EI = const$. Vật liệu của khung có hệ số giãn nở vì nhiệt là α .

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Hệ cơ bản chọn như trên hình 5.19b. Phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0.$$

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta cần vẽ các biểu đồ (\bar{M}_1) , (\bar{N}_1) (hình 5.19c, d).

Ta có:



Hình 5.19

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + 1 \cdot l \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2l}{3} \right) = \frac{5l^3}{3EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \sum \frac{\alpha}{h} (l_{2m} - l_{1m}) \Omega(\bar{M}_1) + \sum \alpha l_{cm} \Omega(\bar{N}_1) = \\ &= \frac{\alpha}{h} (2l - l) \left[-\frac{1}{2} l \cdot l - l \cdot l - \frac{1}{2} l \cdot l \right] + \alpha \frac{2l + l}{2} [-l \cdot l] = -\alpha l \left(\frac{3}{2} + \frac{2l}{h} \right). \end{aligned}$$

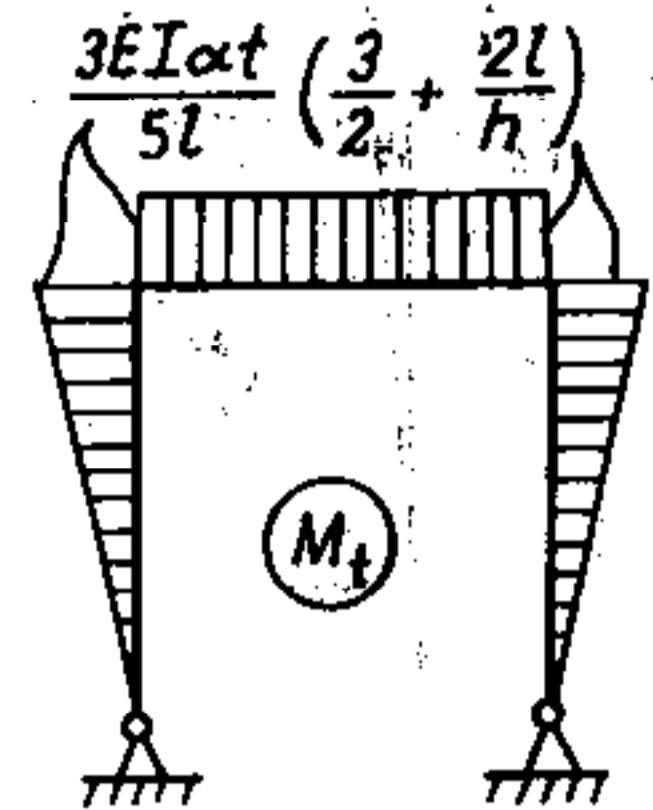
Thay các kết quả vào phương trình chính tắc, ta được:

$$X_1 = \frac{3EI\alpha t}{5l^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2l}{h} \right).$$

Vẽ biểu đồ mômen uốn theo biểu thức:

$$(M_i) = (\bar{M}_1) X_1.$$

Biểu đồ mômen uốn cần tìm vẽ trên hình 5.20. Để vẽ biểu đồ lực cắt và lực dọc ta cũng tiến hành theo cách đã trình bày trong ví dụ 5.4.

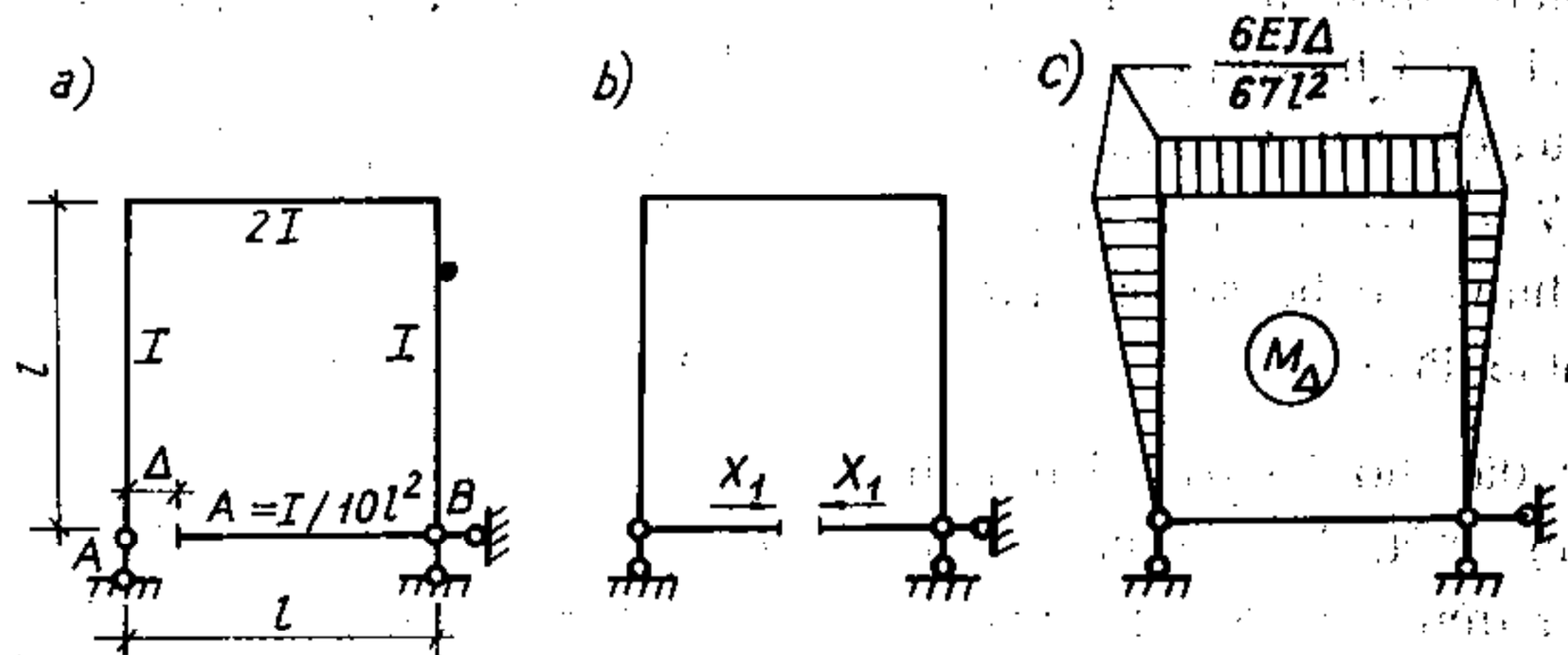


Hình 5.20

C. Hệ siêu tĩnh có thanh chế tạo chiều dài không chính xác

Ví dụ 5.6. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung siêu tĩnh cho trên hình 5.21 khi thanh AB có chiều dài bị chế tạo hụt là Δ .

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản như trên hình 5.21b.



Hình 5.21

Phương trình chính tắc có dạng: $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1A} = 0$.

Hệ này đã được khảo sát trong ví dụ 5.4 khi hệ chịu tải trọng, do đó ta có thể sử dụng một số số liệu đã có. Biểu đồ (\bar{M}_1) như trên hình 5.17c.

Hệ số chính có giá trị: $\delta_{11} = \frac{67l^3}{6EI}$.

Số hạng tự do Δ_{1A} biểu thị chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của các lực X_1 do độ hụt Δ của thanh AB gây ra trong hệ cơ bản.

Theo công thức (5.12):
$$\Delta_{kA} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_i,$$

Trong trường hợp này $i = 1$; $\Delta_i = -\Delta$; $\bar{N}_{11} = 1$. Do đó: $\Delta_{1A} = 1(-\Delta) = -\Delta$.

Nghiệm của phương trình chính tắc:
$$X_1 = \frac{6EI\Delta}{67l^3}.$$

Biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu tĩnh được xác định theo công thức

$$(M_A) = (\bar{M}_1) X_1.$$

Kết quả như trên hình 5.21c.

D. Hệ siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa

Ví dụ 5.7. Cho khung siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa như trên hình 5.22. Xác định các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng ba.

Ta sẽ xác định các số hạng tự do với hai cách chọn hệ cơ bản như sau:

a) Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt liên kết có chuyển vị như trên hình 5.23a.

Để xác định Δ_{kZ} , ta cần xác định các phản lực \bar{R}_{jk} tại các liên kết có chuyển vị cưỡng bức do lực $X_k = 1$ gây ra trong hệ cơ bản.

Trên hình 5.23b, c, d cho kết quả tìm các phản lực nói trên (trên hình không vẽ các phản lực có giá trị bằng không). Áp dụng công thức (5.13) ta được:

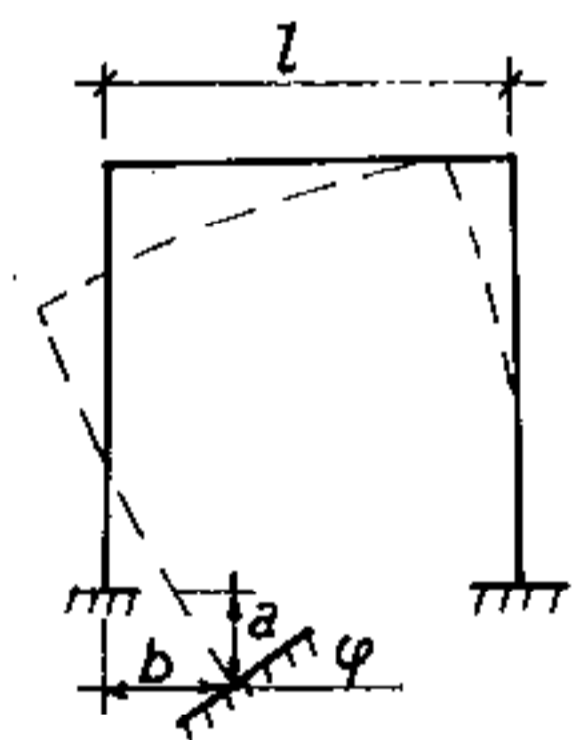
$$\Delta_{1Z} = -\sum_j \bar{R}_{j1} Z_j = -[-1 \cdot b] = b;$$

$$\Delta_{2Z} = -\sum_j \bar{R}_{j2} Z_j = -[-1 \cdot a] = a; \quad \Delta_{3Z} = -\sum_j \bar{R}_{j3} Z_j = -[-1 \cdot \varphi] = \varphi.$$

b) Chọn hệ cơ bản bằng cách loại trừ liên kết thừa không có chuyển vị cưỡng bức (hình 5.24a).

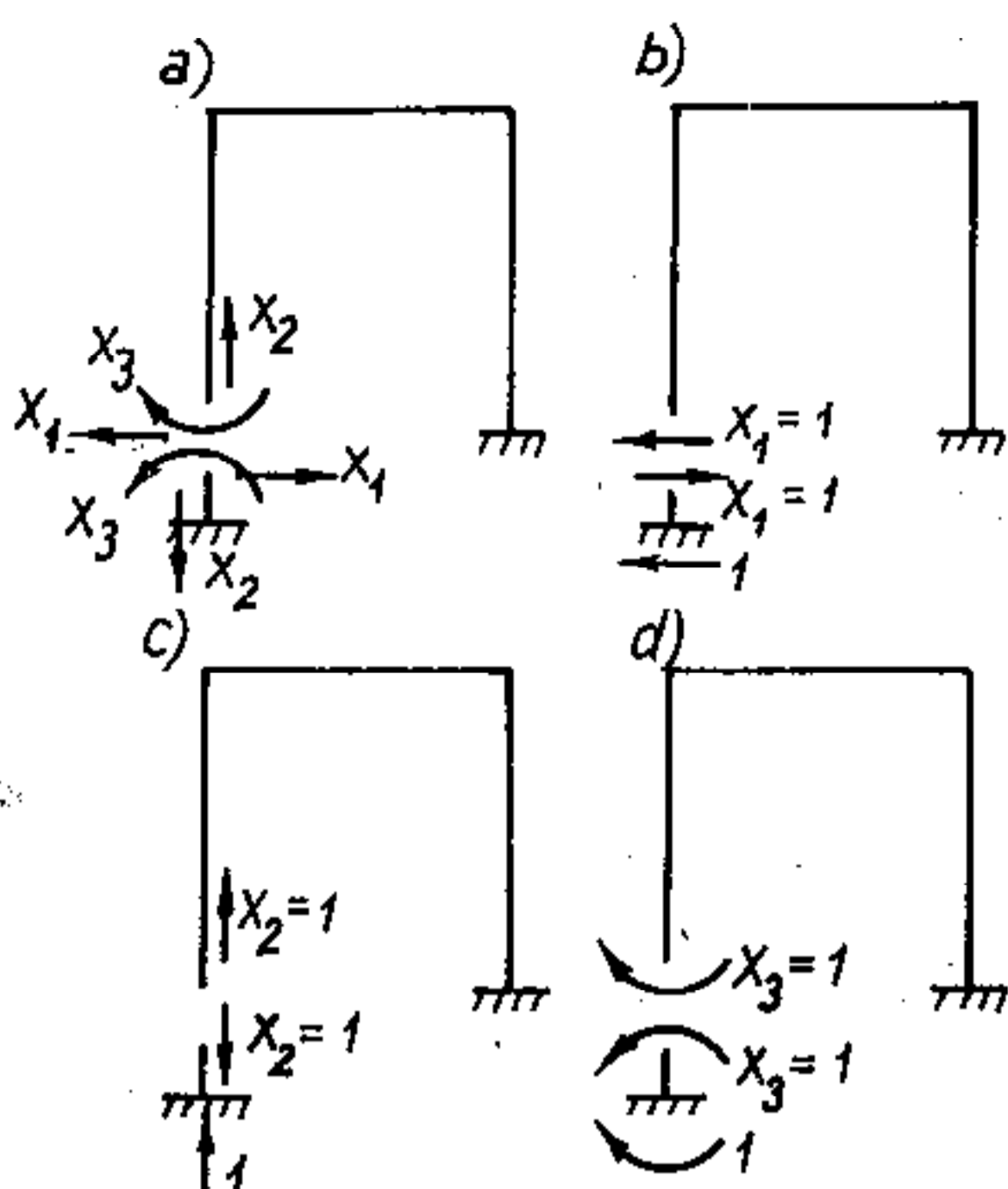
Trên các hình 5.24b, c, d ghi kết quả tính các phản lực \bar{R}_{jk} . Theo công thức (5.13), ta có:

$$\Delta_{1Z} = -\sum_j \bar{R}_{j1} Z_j = -[1 \cdot b] = -b;$$

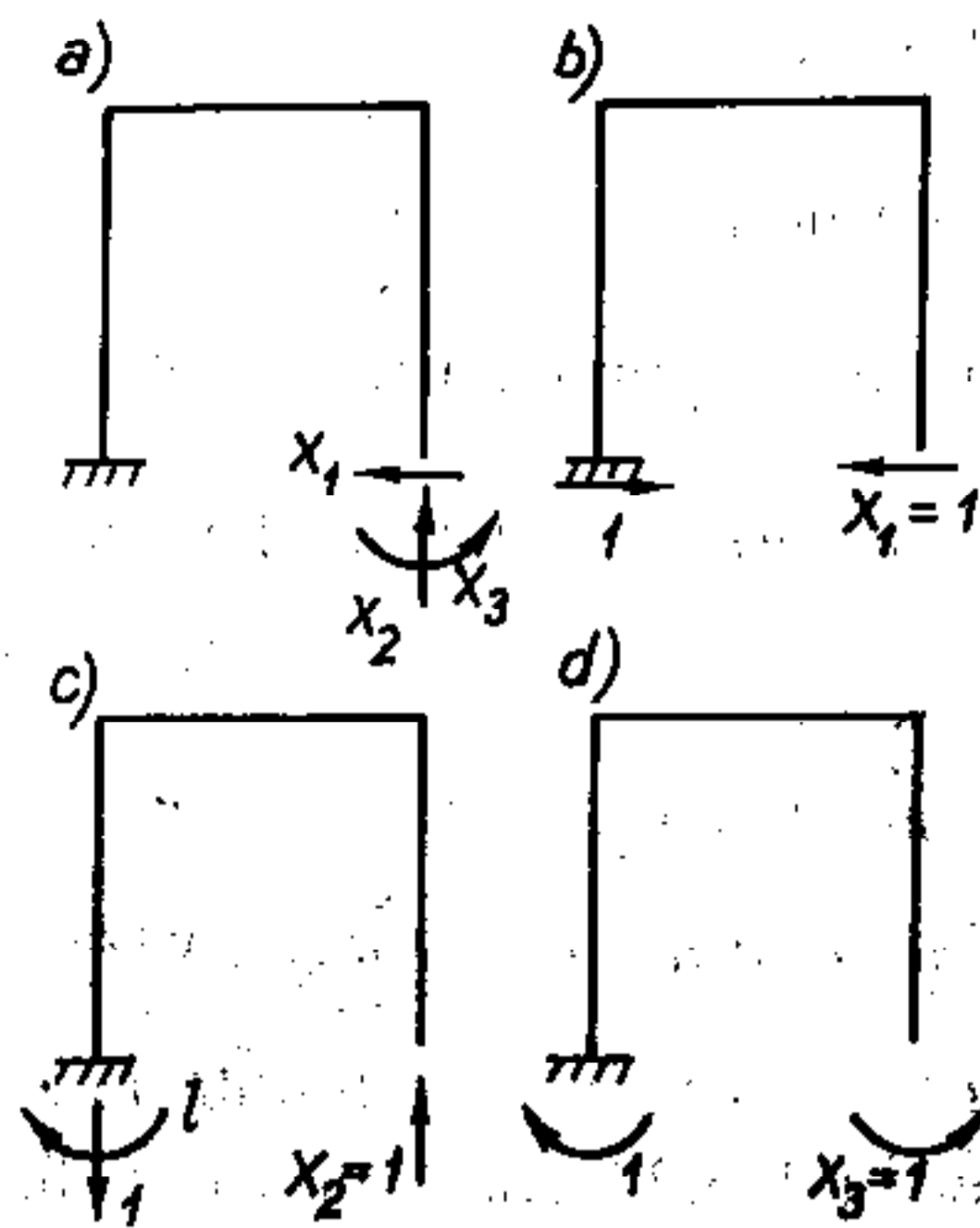


Hình 5.22

$$\Delta_{2Z} = -\sum_j \bar{R}_{j2} Z_j = -[l.a - l.\varphi] = \varphi.l - a; \quad \Delta_{3Z} = -\sum_j \bar{R}_{j3} Z_j = -[-l.\varphi] = \varphi.$$



Hình 5.23



Hình 5.24

E. Dàn siêu tĩnh

Trước khi thực hiện tính toán dàn siêu tĩnh, ta cần lưu ý một số đặc điểm của hệ dàn:

1. Bậc siêu tĩnh

Trong bài toán dàn, nên vận dụng trực tiếp các công thức (1.4) và (1.5) để xác định bậc siêu tĩnh.

◆ Đối với hệ dàn không nối với đất $n = D + 3 - 2M;$ (5.20)

◆ Đối với hệ dàn nối với đất $n = D + C - 2M,$ (5.21)

trong đó:

n - bậc siêu tĩnh;

D - số thanh trong dàn;

C - số liên kết tựa tương đương loại một;

M - số mắt dàn.

2. Hệ phương trình chính tắc

Hệ phương trình chính tắc vẫn có dạng (5.4). Song các công thức xác định các hệ số và số hạng tự do đơn giản hơn vì các thanh trong dàn chỉ chịu lực dọc.

* Các hệ số

$$\delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \bar{N}_{im}}{(EA)_i} l_i, \quad (5.22)$$

trong đó \bar{N}_{ik} và \bar{N}_{im} – lực dọc trong thanh thứ i do các ẩn số $X_k=1$ và $X_m=1$ gây ra trong hệ cơ bản.

*** Các số hạng tự do**

❖ *Do tải trọng*

$$\Delta_{kP} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{iP}^0}{(EA)_i} l_i, \quad (5.23)$$

N_{iP}^0 – lực dọc trong thanh thứ i do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

❖ *Do sự thay đổi nhiệt độ*

Áp dụng (5.10) cho trường hợp các thanh trong hệ chỉ chịu lực dọc, ta có:

$$\Delta_{kt} = \sum_i \alpha t_{ci} \Omega(\bar{N}_k) = \sum_i \alpha t_{ci} l_i \bar{N}_k, \quad (5.24)$$

trong đó t_{ci} – độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh thứ i .

❖ *Do chế tạo chiều dài thanh không chính xác. Theo (5.12):*

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_i, \quad (5.25)$$

Δ_i – độ dôi của thanh thứ i .

❖ *Do chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa. Theo (5.13):*

$$\Delta_{kZ} = - \sum_j \bar{R}_{jk} Z_j, \quad (5.26)$$

trong đó:

Z_j – chuyển vị cưỡng bức tại gối tựa thứ j ;

\bar{R}_{jk} – phản lực tại gối j do lực $X_k=1$ gây ra trong hệ cơ bản.

Chú ý: Dấu tổng trong các công thức (5.22), (5.23), (5.24), (5.25) áp dụng cho tất cả các thanh trong dàn, kể cả các thanh bị cắt khi chọn hệ cơ bản. Dấu tổng trong (5.26) áp dụng cho các gối tựa có chuyển vị cưỡng bức.

3. Xác định nội lực trong dàn siêu tĩnh

Lực dọc trong thanh thứ i của dàn siêu tĩnh được xác định theo biểu thức sau:

$$N_i = \bar{N}_{i1} X_1 + \bar{N}_{i2} X_2 + \dots + \bar{N}_{in} X_n + N_{iP}^0 + N_{it}^0 + N_{i\Delta}^0 + N_{iZ}^0, \quad (5.27)$$

trong đó $N_{iP}^0, N_{it}^0, N_{i\Delta}^0, N_{iZ}^0$ – lực dọc trong thanh thứ i lần lượt do các nguyên nhân P, t, Δ và Z gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu hệ cơ bản là tĩnh định thì:

$$N_i = \bar{N}_{i1}X_1 + \bar{N}_{i2}X_2 + \dots + \bar{N}_{in}X_n + N_{iP}^0 \quad (5.28)$$

Ví dụ 5.8. Cho dàn siêu tĩnh chịu tải trọng như trên hình 5.25a. Yêu cầu xác định lực dọc trong các thanh 2-8, 2-3 và 2-9. Cho biết $EA = const$.

1) *Tìm bậc siêu tĩnh.* Áp dụng công thức (5.21) cho trường hợp này ta có:

$$D = 21; C = 3; M = 10.$$

Do đó:

$$n = 21 + 3 - 2 \cdot 10 = 4.$$

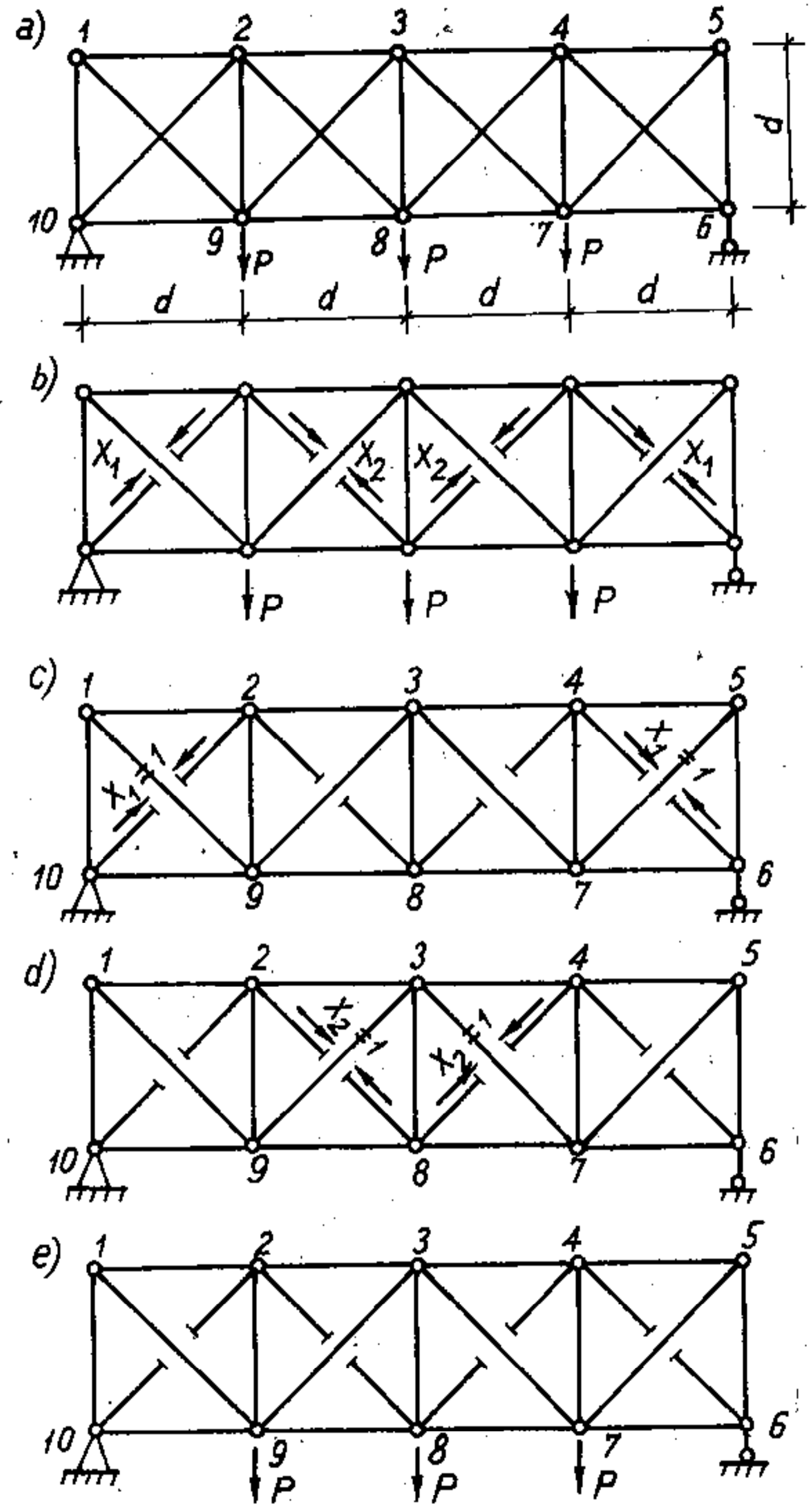
2) *Chọn hệ cơ bản.* Vì hệ đối xứng và tải trọng tác dụng cũng đối xứng cho nên nếu chọn hệ cơ bản đối xứng và dùng các cặp ẩn số đối xứng thì phương trình chính tắc và số ẩn số chỉ còn hai. Với hệ cơ bản chọn như trên hình 5.25b, nội lực ở các trạng thái đơn vị chỉ phân bố cục bộ trong từng khoang dàn.

3) *Hệ phương trình chính tắc:*

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta cần tính nội lực do các cặp lực X_1, X_2 và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Sơ đồ tính những nội lực này lần lượt vẽ trên hình 5.25c, d, e.



Hình 5.25

Theo (5.22) và (5.23) đồng thời chú ý là $EA = const$, ta có:

$$\delta_{km} = \frac{1}{EA} \sum_i \bar{N}_{ik} \bar{N}_{im} l_i ; \quad \Delta_{km} = \frac{1}{EA} \sum_i \bar{N}_{ik} N_{iP}^0 l_i$$

Bảng 5.2

| Thanh | l_i | \bar{N}_{i1} | \bar{N}_{i2} | N_{iP}^0 | $\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i1} l_i$ | $\bar{N}_{i2} \bar{N}_{i2} l_i$ | $\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i2} l_i$ | $\bar{N}_{i1} N_{iP}^0 l_i$ | $\bar{N}_{i2} N_{iP}^0 l_i$ |
|----------|----------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1-2 | d | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $-\frac{3}{2}P$ | $\frac{1}{2}d$ | 0 | 0 | $\frac{3\sqrt{2}}{4}Pd$ | 0 |
| 2-3 | d | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{3}{2}P$ | 0 | $\frac{1}{2}d$ | 0 | 0 | $\frac{3\sqrt{2}}{4}Pd$ |
| 1-10 | d | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $-\frac{3}{2}P$ | $\frac{1}{2}d$ | 0 | 0 | $\frac{3\sqrt{2}}{4}Pd$ | 0 |
| 2-9 | d | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}d$ | $\frac{1}{2}d$ | $\frac{1}{2}d$ | 0 | 0 |
| 1-9 | $\sqrt{2}d$ | 1 | 0 | $\frac{3\sqrt{2}}{2}P$ | $\sqrt{2}d$ | 0 | 0 | $3Pd$ | 0 |
| 10-2 | $\sqrt{2}d$ | 1 | 0 | 0 | $\sqrt{2}d$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2-8 | $\sqrt{2}d$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\sqrt{2}d$ | 0 | 0 | 0 |
| 9-3 | $\sqrt{2}d$ | 0 | 1 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}P$ | 0 | $\sqrt{2}d$ | 0 | 0 | $-Pd$ |
| 10-9 | d | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}d$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9-8 | d | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $2P$ | 0 | $\frac{1}{2}d$ | 0 | 0 | $-\sqrt{2}Pd$ |
| 3-8 | $\frac{1}{2}d$ | 0 | $-\sqrt{2}$ | P | 0 | d | 0 | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}Pd$ |
| Σ | | | | | $2(1+\sqrt{2})d$ | $(2,5+2\sqrt{2})d$ | $\frac{1}{2}d$ | $3(1+\frac{\sqrt{2}}{2})Pd$ | $(1+\frac{3\sqrt{2}}{4})Pd$ |

Các khâu tính toán được thực hiện trên bảng 5.2. Vì khung đối xứng và tải trọng cũng đối xứng nên chỉ cần tính với nửa hệ rồi nhân đôi kết quả. Để tiện tính toán ta chia đôi kết quả tính của thanh 3-8 trước, sau đó chỉ cần nhân đôi kết quả tổng cộng. Có thể thực hiện điều này bằng cách chia đôi chiều dài của thanh 3-8.

Trên cột 1 của bảng ghi tên các thanh. Trên cột 2 ghi chiều dài các thanh. Trên cột 3, 4 và 5 lần lượt ghi nội lực trong các thanh do lực $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ và do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản. Để xác định những nội lực này ta vận dụng phương pháp tách mắt hoặc mặt cắt đã quen biết.

Trên các cột 6, 7 và 8 lần lượt tính các tích số $(\bar{N}_{i1})^2 l_i$, $(\bar{N}_{i2})^2 l_i$, $(\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i2}) l_i$ cho từng thanh để phục vụ cho việc xác định δ_{11} , δ_{12} và δ_{22} . Lấy tổng kết quả tính trong những cột này rồi nhân với thừa số $2/EA$ ta được:

$$\delta_{11} = 4(1 + \sqrt{2}) \frac{d}{EA} = 9,656 \frac{d}{EA}; \quad \delta_{22} = (5 + 4\sqrt{2}) \frac{d}{EA} = 10,656 \frac{d}{EA}; \quad \delta_{12} = \frac{d}{EA}$$

Trên các cột 9, 10 ta xác định các tích số $\bar{N}_{i1} N_{iP}^o l_i$ và $\bar{N}_{i2} N_{iP}^o l_i$ cho từng thanh để phục vụ cho việc tính Δ_{1P} và Δ_{2P} . Lấy tổng các kết quả tính trong các cột rồi nhân với thừa số $2/EA$ ta được:

$$\Delta_{1P} = 3(2 + \sqrt{2}) \frac{Pd}{EA} = 10,242 \frac{Pd}{EA}; \quad \Delta_{2P} = -(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}) \frac{Pd}{EA} = -4,120 \frac{Pd}{EA}$$

Thay các giá trị của δ_{km} và Δ_{kP} vào hệ phương trình chính tắc ta được:

$$9,656 X_1 + X_2 + 10,242 P = 0; \quad X_1 + 10,656 X_2 - 4,120 P = 0.$$

$$\text{Nghiệm của hệ phương trình:} \quad X_1 = -1,11P; \quad X_2 = 0,49P.$$

4) *Xác định nội lực.* Áp dụng công thức (5.28) đồng thời sử dụng kết quả tính các \bar{N}_{i1} , \bar{N}_{i2} và N_{iP}^o trên bảng 5.2 ta có:

$$N_{28} = 0(-1,11P) + 1(0,49P) - 0 = 0,49P;$$

$$N_{23} = 0(-1,11P) - \frac{\sqrt{2}}{2}(0,49P) - \frac{3}{2}P = -1,85P;$$

$$N_{29} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,11P) - \frac{\sqrt{2}}{2}(0,49P) + 0 = 0,44P.$$

F. Hệ liên hợp siêu tĩnh

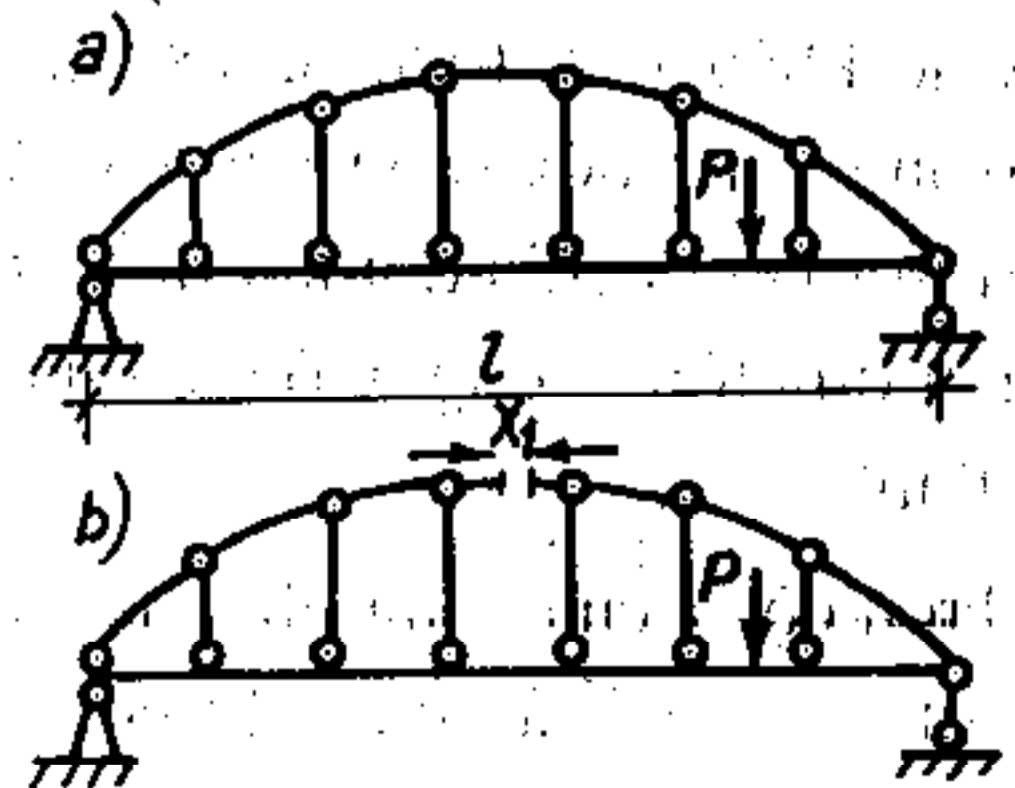
Hệ liên hợp siêu tĩnh tuy đa dạng nhưng về cách tính theo phương pháp lực thì cũng tương tự như nhau. Ta sẽ tìm hiểu cách tính hệ liên hợp siêu tĩnh theo phương pháp lực thông qua trường hợp hệ dầm cứng - vòm dẹt.

Ví dụ 5.9. Trình bày nguyên tắc tính hệ dầm cứng vòm dẹt trên hình 5.26a.

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt thanh chịu nén ở giữa nhịp (hình 5.26b). Phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

trong đó:



Hình 5.26

- ◆ δ_{11} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_1 do lực $X_1=1$ gây ra trong hệ cơ bản.

Chuyển vị này bao gồm ba thành phần:

- Do biến dạng dọc trục trong những thanh thuộc hệ vòm dẹt và trong những thanh chống đứng. Nếu gọi \bar{N}_{i1} là lực dọc trong thanh thứ i của hệ vòm dẹt hoặc hệ thanh chống đứng do lực $X_1=1$ gây ra trong hệ cơ bản thì thành phần này sẽ bằng $\sum (\bar{N}_{i1})^2 l_i / (EA)_i$. Trong đó l_i và A_i là chiều dài và diện tích tiết diện của thanh thứ i . Dấu tổng áp dụng cho tất cả các thanh thuộc hệ thống nói trên.
- Do biến dạng uốn của dầm dưới tác dụng của lực $X_1=1$. Nếu gọi (\bar{M}_1) là biểu đồ mômen uốn trong dầm do lực $X_1=1$ gây ra trong hệ cơ bản thì thành phần này sẽ là $(\bar{M}_1) (\bar{M}_1)$.
- Do biến dạng nén của dầm dưới tác dụng của lực xô. Từ hình 5.26b ta thấy lực xô do $X_1=1$ gây ra bằng 1 , do đó áp dụng công thức chuyển vị ta sẽ xác định được thành phần này bằng $1 \cdot 1L / (EA)_{dầm}$.

Vậy:
$$\delta_{11} = \sum_i \frac{\bar{N}_{i1}^2 l_i}{EA_i} + (\bar{M}_1) (\bar{M}_1) + \frac{L}{(EA)_{dầm}}$$

- ◆ Δ_{1P} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_1 do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Chuyển vị này chỉ bao gồm thành phần do biến dạng uốn của dầm nếu tải trọng tác dụng vuông góc với trục dầm. Hai thành phần còn lại bằng không vì tải trọng tác dụng trên hệ cơ bản không gây ra lực dọc trong các thanh thuộc hệ vòm dẹt, hệ thanh chống đứng và trong dầm. Nếu gọi (M_p^0) là biểu đồ mômen uốn trong dầm do tải trọng tác dụng trên hệ cơ bản thì

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1) (M_p^0).$$

Sau khi tìm được X_1 , có thể xác định nội lực trong hệ liên hợp theo công thức chung đã thiết lập trong 5.2. Trong trường hợp này, ta có:

- ❖ Nội lực tại tiết diện k trong dầm cứng:

$$M_k = \bar{M}_{k1} X_1 + M_k^0; \quad Q_k = \bar{Q}_{k1} X_1 + Q_k^0; \quad N_k = \bar{N}_{k1} X_1,$$

trong đó:

$\bar{M}_{k1}, \bar{Q}_{k1}, \bar{N}_{k1}$ – nội lực tại tiết diện k của dầm cứng do lực $X_1=1$ gây ra trong hệ cơ bản;

M_k^0, Q_k^0 – nội lực tại tiết diện k của dầm cứng do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

❖ Lực dọc trong thanh thứ i thuộc hệ vòm dẹt hoặc hệ thanh chống đứng

$$N_i = \bar{N}_{i1} X_1,$$

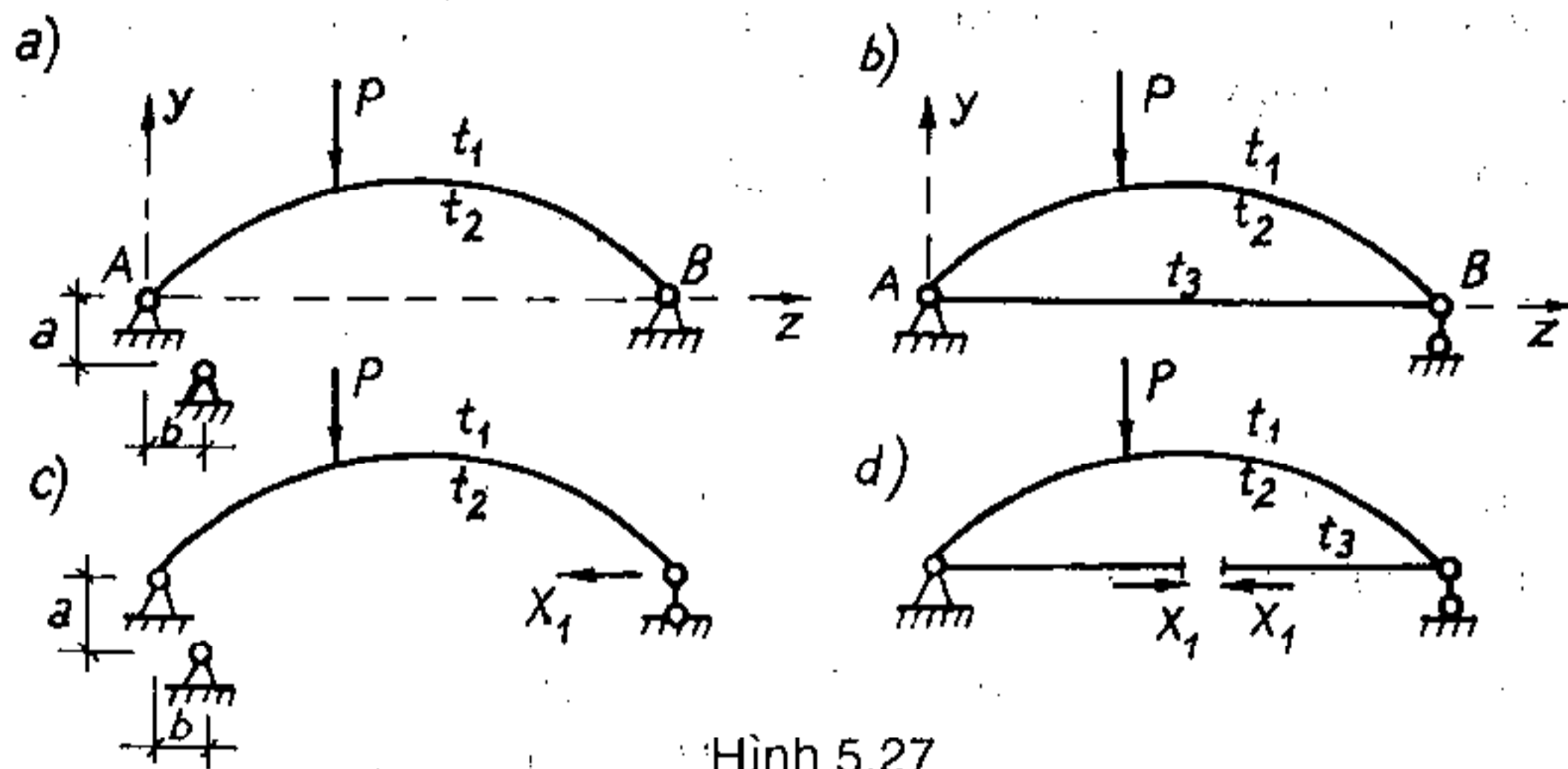
\bar{N}_{i1} – lực dọc trong thanh thứ i do lực $X_1=1$ gây ra trong hệ cơ bản.

G. Vòm siêu tĩnh

Ví dụ 5.10. Trình bày cách tính vòm hai khớp (hình 5.27a) và hệ vòm hai khớp có thanh căng (hình 5.27b) chịu các nguyên nhân: tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị gối tựa.

• Hệ có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản của vòm hai khớp như trên hình 5.27c. Hệ cơ bản của vòm hai khớp có thanh căng chọn bằng cách cắt thanh căng như trên hình 5.27d.

Phương trình chính tắc: $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1H} + \Delta_{1Z} = 0.$



Hình 5.27

1) Xác định δ_{11} theo (5.6):

$$\delta_{11} = \sum \int \bar{M}_1^2 \frac{ds}{EI} + \sum \int \bar{N}_1^2 \frac{ds}{EA} + \sum \int v \bar{Q}_1^2 \frac{ds}{GA}$$

a) Trường hợp vòm hai khớp có thanh căng: Các nội lực do lực $X_1=1$ gây ra trong hệ cơ bản bao gồm

- Nội lực trong vòm: $\bar{M}_1 = -l.y$; $\bar{N}_1 = -l.\cos\varphi$; $\bar{Q}_1 = -l.\sin\varphi$.
- Nội lực trong thanh căng: $\bar{N}_1^{tc} = 1$.

$$\text{Do đó: } \delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{dz}{EI \cos\varphi} + \int_0^l \cos\varphi \frac{dz}{EA} + \int_0^l v \sin^2\varphi \frac{dz}{GA \cos\varphi} + \frac{l}{(EA)_{tc}}$$

trong đó $(EA)_{tc}$ – độ cứng của thanh căng khi chịu kéo.

b) Trường hợp vòm hai khớp: Có thể xem vòm hai khớp như trường hợp đặc biệt của vòm hai khớp có thanh căng với $(EA)_{tc} = \infty$. Do đó ta có:

$$\delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{dz}{EI \cos \varphi} + \int_0^l \cos \varphi \frac{dz}{EA} + \int_0^l v \sin^2 \varphi \frac{dz}{GA \cos \varphi}$$

2) Xác định Δ_{1P} . Đối với cả hai loại vòm, số hạng này đều được xác định theo công thức (5.9):

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{(-y)M_P^0 dz}{EI \cos \varphi} + \sum \int \frac{\cos \varphi N_P^0 dz}{EA \cos \varphi} + \sum \int v \frac{(-\sin \varphi)Q_P^0 dz}{GA \cos \varphi}$$

3) Xác định Δ_{1t} . Giả sử nhiệt độ biến thiên như nhau dọc theo chiều dài vòm và thanh căng. Gọi t_1 và t_2 là độ biến thiên nhiệt độ ở các thớ trên và thớ dưới của vòm; t_3 là độ biến thiên nhiệt độ ở trên thanh căng.

Áp dụng công thức (5.10) cho trường hợp này, ta có:

$$\Delta_{1t} = \sum \int \bar{M}_1 \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) ds + \sum \int \bar{N}_1 \alpha t_c ds$$

a) Trường hợp vòm hai khớp có thanh căng

$$\Delta_{1t} = \int_0^l \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) (-y) \frac{dz}{\cos \varphi} - \int_0^l \cos \varphi \alpha t_c \frac{dz}{\cos \varphi} + \int_0^l 1 \alpha t_3 dz$$

Hay
$$\Delta_{1t} = - \int_0^l \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \frac{y dz}{\cos \varphi} - \alpha t_c l + \alpha t_3 l$$

trong đó αt_c - hệ số giãn nở vì nhiệt của vật liệu làm thanh căng.

b) Trường hợp vòm hai khớp. Lúc này số hạng cuối của biểu thức trên không tồn tại, ta có

$$\Delta_{1t} = - \int_0^l \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \frac{y dz}{\cos \varphi} - \alpha t_c l$$

Trường hợp đặc biệt khi nhiệt độ thay đổi đều như nhau trên toàn vòm với giá trị t ta có:

- Trong vòm hai khớp có thanh căng: $\Delta_{1t} = -\alpha t l + \alpha t_3 l$.

- Trong vòm hai khớp: $\Delta_{1t} = -\alpha t l$.

4) Xác định Δ_{1Z} . Theo (5.13):
$$\Delta_{1Z} = - \sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm}$$

a) Trường hợp vòm hai khớp có thanh căng. Ta dễ dàng nhận thấy số hạng Δ_{1Z} trong trường hợp này bằng không. Cần chú ý là vòm hai khớp có thanh căng là hệ siêu tĩnh nội, nên các gối tựa chuyển vị cưỡng bức không gây ra nội lực trong vòm.

b) Trường hợp vòm hai khớp

- Khi gối tựa A chuyển vị đứng với giá trị a (hình 5.28a).

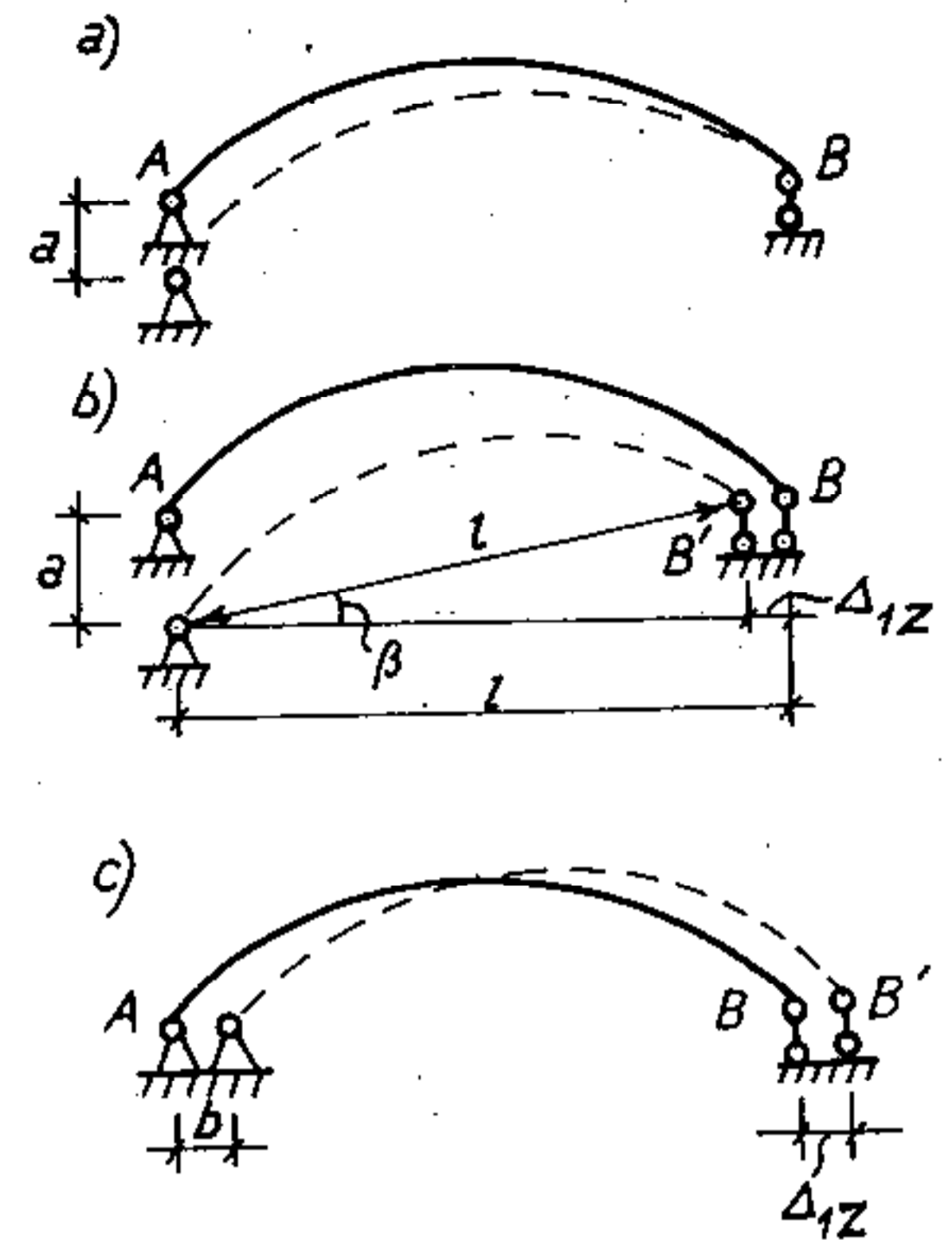
Nếu chuyển vị a là nhỏ thì theo (5.13) ta có $\Delta_{1Z} = 0$.

Nếu chuyển vị a khá lớn thì Δ_{1Z} sẽ tồn tại (hình 5.28b) vì gối B sẽ chuyển dời tới vị trí B' và ta có thể xác định bằng hình học như sau:

$$\Delta_{1Z} = l(1 - \cos\beta) = l - \sqrt{l^2 - a^2}$$

- Khi gối A chuyển vị ngang với giá trị b (hình 5.28c). Theo (5.13) hoặc cũng xác định bằng hình học, ta được:

$$\Delta_{1Z} = -(l \cdot b) = -b.$$



Hình 5.28

5) *Xác định nội lực.* Sau khi giải phương trình chính tắc để tìm X_1 ta có thể xác định nội lực trong vòm theo các biểu thức sau:

$$M = -y X_1 + M_P^0; \quad N = -\cos\varphi X_1 + N_P^0; \quad Q = -\sin\varphi X_1 + Q_P^0,$$

trong đó:

M, N, Q – các biểu thức giải tích của nội lực do các nguyên nhân gây ra trong vòm siêu tĩnh;

M_P^0, N_P^0, Q_P^0 – các biểu thức giải tích của nội lực do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Nội lực trong thanh căng (nếu có) được xác định bằng ẩn số X_1 : $N_{tc} = X_1$.

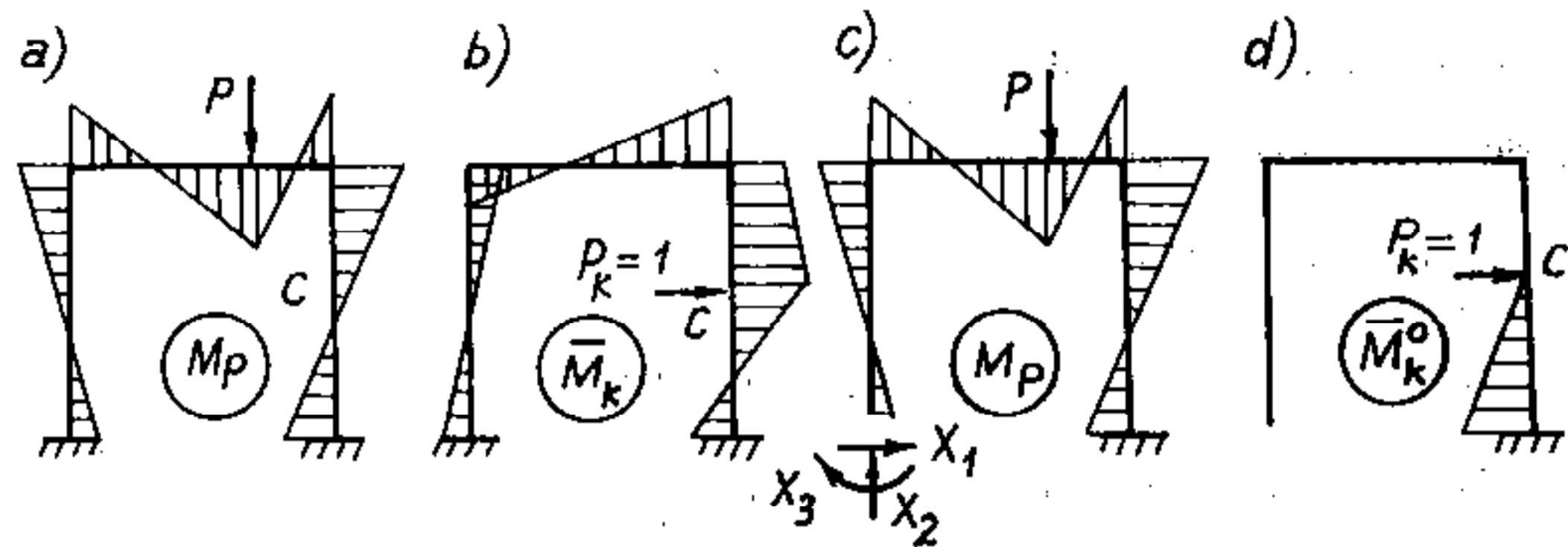
5.4. Cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh

Công thức chuyển vị (4.25) là tổng quát, áp dụng cho hệ siêu tĩnh cũng như tĩnh định. Khi sử dụng công thức này ta cần quan niệm hệ tương ứng với hai trạng thái: trạng thái "m" là trạng thái thực của hệ, trạng thái "k" là trạng thái khả dĩ tạo ra bằng cách đặt một lực $P_k = 1$ có vị trí và phương tương ứng với chuyển vị cần tìm. Ngoài ra cần chú ý là trạng thái "k" phải xảy ra trên hệ giống như hệ đã cho.

Như vậy, muốn tìm chuyển vị trong hệ siêu tĩnh theo công thức (4.25) ta cần:

- ◆ Tính trạng thái "m" tức là tính hệ siêu tĩnh cho ban đầu (hình 5.29a).

- ◆ Tính trạng thái "k" tức là tính hệ siêu tĩnh đó một lần nữa với lực $P_k = 1$. Trên hình 5.29b vẽ trạng thái "k" với giả thiết cần tìm chuyển vị ngang tại C.



Hình 5.29

Do đó, để tính một chuyển vị nào đó trong hệ siêu tĩnh ta cần phải tính hệ siêu tĩnh hai lần với hai nguyên nhân khác nhau. Khối lượng tính toán sẽ nặng nề.

Dưới đây ta sẽ nghiên cứu một cách khác tiện lợi hơn.

A. Trường hợp hệ siêu tĩnh chịu tải trọng

Ta sẽ chứng minh:

Để xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh chịu tải trọng ta cần:

- ◆ Tính trạng thái "m" tức là tính hệ siêu tĩnh cho ban đầu.
- ◆ Tính trạng thái "k". Trạng thái này chỉ cần thực hiện trên một hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho.
- ◆ Áp dụng các công thức chuyển vị đã biết ở chương 4. Nghĩa là:

$$\Delta_{kP} = (M_P)(\bar{M}_k^0) \quad (5.29)$$

Để cho đơn giản, từ đây về sau ta chỉ viết công thức chuyển vị cho trường hợp dầm và khung đồng thời biểu thị theo cách nhân biểu đồ; điều này không ảnh hưởng gì đến các kết luận chung.

Để chứng minh, ta xét hệ siêu tĩnh cho trên hình 5.29a. Giả sử chọn hệ cơ bản như trên hình 5.29c. So sánh hai hệ a) và c) ta thấy: nếu các lực X_1 , X_2 và X_3 là nghiệm của hệ phương trình chính tắc khi tính hệ siêu tĩnh a) theo hệ cơ bản c), thì hai hệ này sẽ làm việc hoàn toàn giống nhau nghĩa là nội lực, biến dạng chuyển vị trong hai hệ hoàn toàn như nhau. Do đó, muốn xác định chuyển vị trong hệ a), ta chỉ cần xác định chuyển vị trong hệ cơ bản c). Để tìm chuyển vị trong hệ c) ta cần tạo trạng thái "k" trên hệ tương ứng với hệ c) (hình 5.29d) tức là trên hệ cơ bản. Vậy: $\Delta_{kP} = (M_P)(\bar{M}_k^0)$. Đó là điều cần chứng minh.

Chú ý:

1. Vì có thể tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho, nên hệ cơ bản này có thể chọn khác với hệ cơ bản đã dùng khi tìm (M_P) . Nên chọn hệ cơ bản sao cho biểu đồ \bar{M}_k^0 đơn giản để nhân biểu đồ được dễ dàng.

2. Cũng có thể chứng minh được: $\Delta_{kP} = (M_P^0)(\bar{M}_k)$, (5.30)

(M_P^0) -- biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;

(\bar{M}_k) -- biểu đồ mômen uốn do lực $P_k = 1$ có vị trí và phương tương ứng với chuyển vị cần tìm, gây ra trong hệ siêu tĩnh ban đầu.

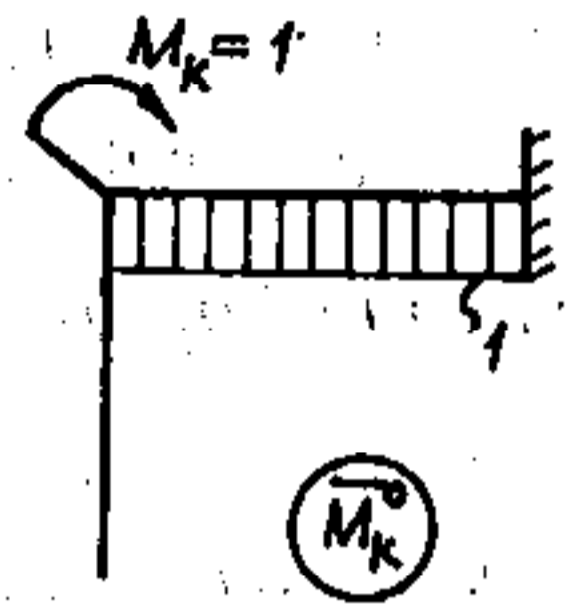
Ví dụ 5.11. Xác định góc xoay tại nút của khung đã xét trong ví dụ 5.3.

Trong ví dụ 5.3 ta đã vẽ được biểu đồ (M_P) của hệ (hình 5.16c).

Để xác định góc xoay ở nút ta chỉ cần tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản suy ra từ siêu tĩnh đã cho và vẽ biểu đồ (\bar{M}_k^0) (hình 5.30). Nhân biểu đồ (M_P) với biểu đồ (\bar{M}_k^0) , ta được:

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \frac{qa^2}{14} \cdot a \cdot 1 + \frac{1}{2} \frac{qa^2}{28} \cdot a \cdot 1 \right] = -\frac{qa^3}{56EI}$$

Góc xoay cần tìm quay ngược chiều kim đồng hồ.

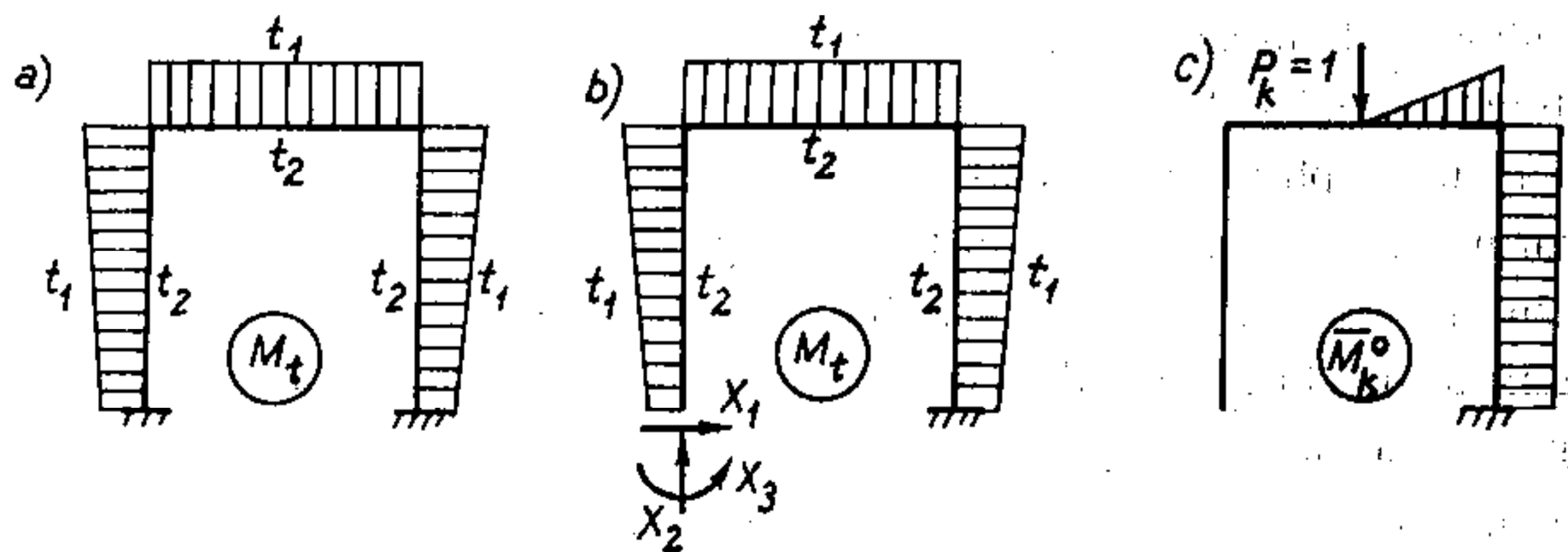


Hình 5.30

B. Trường hợp hệ siêu tĩnh chịu sự biến thiên nhiệt độ, sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác, chuyển vị gối tựa

Ta vận dụng cách lập luận tương tự như trên để nghiên cứu chuyển vị trong trường hợp này.

Xét khung siêu tĩnh chịu tác dụng của sự biến thiên nhiệt độ (hình 5.31a):



Hình 5.31

Giả sử khi tính nội lực ta chọn một hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho như trên hình 5.31b. Nếu các lực X là nghiệm của hệ phương trình chính tắc thì hệ $b)$ sẽ làm việc giống như hệ $a)$. Do đó, muốn tìm chuyển vị trong hệ $a)$ ta chỉ cần tìm chuyển vị trong hệ $b)$ và trạng thái "k" cần tạo ra khi xác định chuyển vị của hệ $b)$ có thể thực hiện trên hệ cơ bản (hình 5.31c).

Chuyển vị trong hệ $b)$ do hai nguyên nhân gây ra:

- ◆ *Do các ẩn số X*: Vì nội lực do các lực X gây ra chính là nội lực trong hệ siêu tĩnh nên thành phần chuyển vị này bằng $(\bar{M}_k^o)(M_t)$.
- ◆ *Do nhiệt độ*: Cần chú ý rằng nhiệt độ chỉ không gây ra nội lực trong hệ cơ bản tĩnh định nhưng vẫn gây ra chuyển vị. Gọi Δ_{kt}^o là thành phần chuyển vị do thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$\Delta_{kt} = (M_t)(\bar{M}_k^o) + \Delta_{kt}^o, \quad (5.31)$$

với
$$\Delta_{kt}^o = \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_k^o) + \sum \alpha t_c \Omega(\bar{N}_k^o),$$

trong đó $\Omega(\bar{M}_k^o)$ và $\Omega(\bar{N}_k^o)$ là diện tích biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực dọc trong các thanh của hệ ở trạng thái "k" được tạo ra trong hệ cơ bản tĩnh định tương ứng với hệ cơ bản tĩnh định đã chọn khi xác định thành phần thứ nhất của công thức (5.31).

Cũng lập luận tương tự như vậy đối với trường hợp hệ siêu tĩnh có các thanh chế tạo chiều dài không chính xác và hệ siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa, ta có:

$$\Delta_{kA} = (M_A)(\bar{M}_k^o) + \Delta_{kA}^o, \quad (5.32)$$

với
$$\Delta_{kA}^o = \sum_i \bar{N}_{ik}^o \Delta_i;$$

$$\Delta_{kZ} = (M_Z)(\bar{M}_k^o) + \Delta_{kZ}^o, \quad (5.33)$$

với
$$\Delta_{kZ}^o = -\sum_j \bar{R}_{jk}^o Z_j.$$

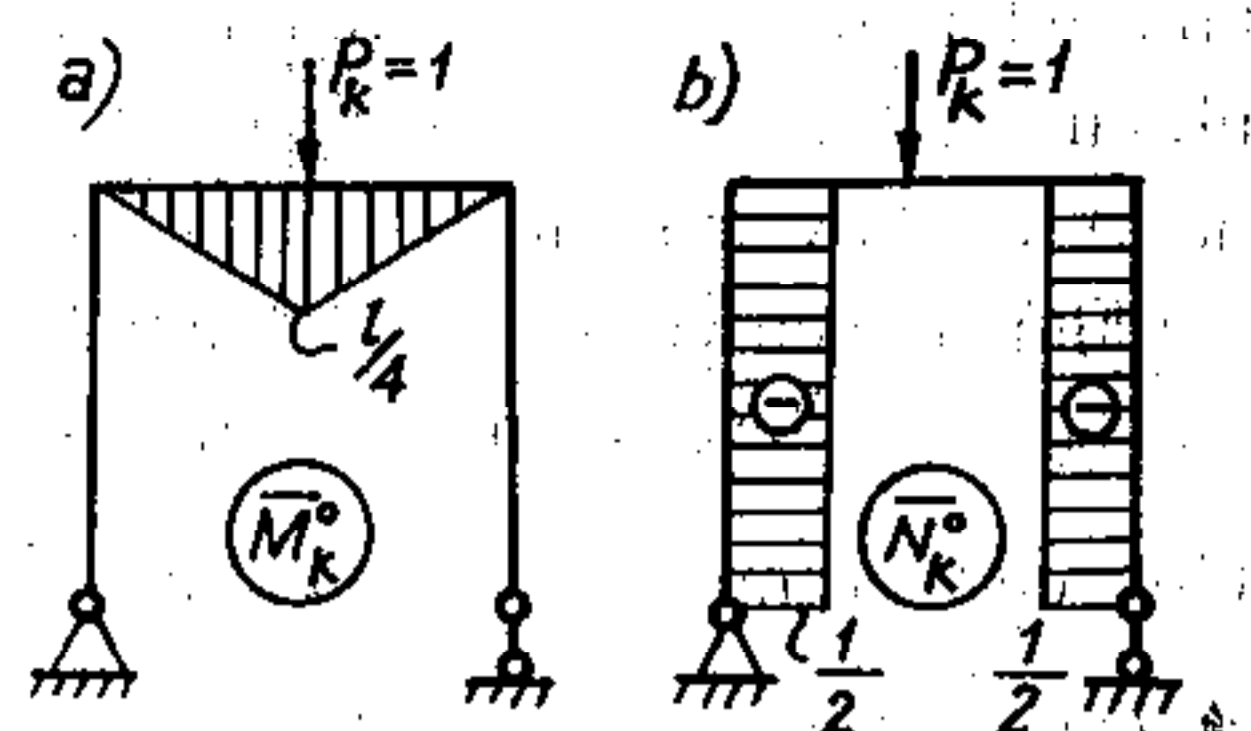
Trong đó, \bar{N}_{ik}^o và \bar{R}_{jk}^o lần lượt là lực dọc trong thanh thứ i và phản lực tại gối thứ j của hệ ở trạng thái "k" được tạo ra trong hệ cơ bản tĩnh định tương ứng với hệ cơ bản tĩnh định đã chọn khi xác định thành phần thứ nhất của các công thức (5.32) và (5.33).

Ví dụ 5.12. Xác định độ võng tại giữa nhịp thanh ngang của khung đã xét ở ví dụ 5.5.

Nguyên nhân gây ra chuyển vị trong khung là nhiệt độ, do đó ta sử dụng công thức (5.31) để xác định chuyển vị cần tìm.

Thứ tự thực hiện như sau:

- 1) *Vẽ biểu đồ (M_l).* Bài toán này đã được khảo sát trong ví dụ 5.5, kết quả tìm được như trên hình 5.20.
- 2) *Tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản tĩnh định và vẽ các biểu đồ (\bar{M}_k^o), (\bar{N}_k^o)* (hình 5.32a, b)
- 3) *Xác định chuyển vị theo (5.31):*



Hình 5.32

$$\begin{aligned} \Delta_{kl} &= (M_l)(\bar{M}_k^o) + \sum \frac{\alpha}{h} (l_2 - l_1) \Omega(\bar{M}_k^o) + \sum \alpha l_c \Omega(\bar{N}_k^o) = \\ &= -\frac{1}{EI} \frac{l}{2} \frac{3EI\alpha}{5l} \left[\frac{3}{2} + \frac{2l}{h} \right] + \frac{\alpha}{h} \frac{1}{2} \frac{l}{4} l + \frac{3}{2} \alpha l \left[-\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \right] = -\frac{\alpha l}{80} \left[129 + 2 \frac{l}{h} \right]. \end{aligned}$$

Dấu trừ chứng tỏ chuyển vị hướng ngược chiều với P_k tức là hướng lên trên.

C. Trường hợp hệ dàn siêu tĩnh

Để tìm chuyển vị trong hệ dàn siêu tĩnh ta có thể sử dụng các kết luận đã nêu ở trên và các công thức đã xây dựng trong chương 4. Trong trường hợp này, ta có:

$$\Delta_{km} = \sum_i \bar{N}_{ik}^o N_{im} \frac{l_i}{(EA)_i} + \sum_i \alpha l_i \bar{N}_{ik}^o + \sum_i \bar{N}_{ik}^o \Delta_i - \sum_j \bar{R}_{jk}^o Z_j, \quad (5.34)$$

trong đó:

- Δ_{km} – chuyển vị cần tìm do các nguyên nhân "m" gây ra trong hệ siêu tĩnh;
- N_{im} – lực dọc trong thanh thứ i do các nguyên nhân "m" gây ra trong dàn siêu tĩnh;
- \bar{N}_{ik}^o – lực dọc trong thanh thứ i do lực $P_k=1$ gây ra ở trạng thái "k";
- \bar{R}_{jk}^o – phản lực tại gối tựa thứ j do lực $P_k=1$ gây ra ở trạng thái "k".

Trạng thái "k" được tạo ra trong một hệ cơ bản tĩnh định bất kỳ suy ra từ dàn siêu tĩnh đã cho.

5.5. Cách kiểm tra kết quả

Khi giải bài toán siêu tĩnh ta cần thực hiện khá nhiều những phép tính trung gian, do đó dễ mắc phải những *sai lầm* hoặc *sai số* lớn trong kết quả cuối cùng.

Để tránh những sai số lớn ta phải tính chính xác các phép tính trung gian. Kinh nghiệm tính toán chứng tỏ rằng muốn bảo đảm cho kết quả cuối cùng được chính xác tới m con số thuộc phân thập phân thì các phép tính toán trung gian cần phải thực hiện tới $m+2$ con số thuộc phân thập phân.

Để tránh xảy ra những sai lầm ta cần tiến hành kiểm tra kết quả. Biện pháp kiểm tra tốt hơn cả là vận dụng một số tính chất nào đó độc lập với các phép tính toán đã sử dụng.

Ngoài việc kiểm tra kết quả cuối cùng ta cần tiến hành kiểm tra từng khâu trong quá trình tính toán để phát hiện ngay sai lầm đã mắc phải.

Dưới đây sẽ lần lượt trình bày cách kiểm tra kết quả trong từng khâu theo thứ tự khi giải bài toán siêu tĩnh. Trong trình bày, để cho gọn, ta sẽ biểu thị cách tính chuyển vị theo kiểu nhân biểu đồ đồng thời chỉ chú ý tới ảnh hưởng của mômen uốn. Tất nhiên, những kết luận dưới đây vẫn đúng cho các trường hợp tính chuyển vị theo kiểu tích phân hay kể cả ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

A. Kiểm tra quá trình tính toán

1. Kiểm tra các biểu đồ đơn vị (\bar{M}_k) và biểu đồ (M_p^0)

Vận dụng các liên hệ vi phân và điều kiện cân bằng của từng bộ phận được tách ra khỏi hệ như đã biết trong Sức bền vật liệu để kiểm tra.

2. Kiểm tra các hệ số δ_{km}

Gọi (\bar{M}_S) là *biểu đồ đơn vị tổng cộng* tức là biểu đồ mômen uốn do tất cả các ảnh $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ tác dụng đồng thời trong hệ cơ bản. Có thể tìm biểu đồ này một cách độc lập hoặc bằng cách cộng các biểu đồ đơn vị (\bar{M}_k):

$$(\bar{M}_S) = (\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) + \dots + (\bar{M}_k) + \dots + (\bar{M}_n). \quad (5.35)$$

Điều kiện kiểm tra

a) Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ đồng thời tác dụng do riêng lực $X_k = 1$ gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các hệ số thuộc hàng thứ k của hệ phương trình chính tắc. Nói khác đi, *kết quả nhân biểu đồ (\bar{M}_S) với một biểu đồ đơn vị (\bar{M}_k) nào đó phải bằng tổng các hệ số thuộc hàng thứ k của hệ phương trình chính tắc.*

$$(\bar{M}_k)(\bar{M}_S) = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kk} + \dots + \delta_{kn}. \quad (5.36)$$

Thật vậy, thay (5.35) vào vế trái của (5.36) rồi khai triển, ta được:

$$\begin{aligned} (\bar{M}_k)(\bar{M}_S) &= (\bar{M}_k)[(\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) + \dots + (\bar{M}_k) + \dots + (\bar{M}_n)] = \\ &= (\bar{M}_k)(\bar{M}_1) + (\bar{M}_k)(\bar{M}_2) + \dots + (\bar{M}_k)(\bar{M}_k) + \dots + (\bar{M}_k)(\bar{M}_n) = \\ &= \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kk} + \dots + \delta_{kn}. \end{aligned}$$

Đó là điều cần chứng minh. Dựa vào điều kiện này ta sẽ kiểm tra các hệ số δ_{km} theo từng hàng của hệ phương trình chính tắc.

- b) Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ đồng thời tác dụng do chính tập hợp các lực đó gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các hệ số δ_{km} của hệ phương trình chính tắc. Hay nói khác đi, kết quả nhân biểu đồ (\bar{M}_S) với chính biểu đồ (\bar{M}_S) phải bằng tổng các hệ số δ_{km} của hệ phương trình chính tắc.

$$(\bar{M}_S)(\bar{M}_S) = \sum_{k,m} \delta_{km}, \quad \text{với } k=1,2,\dots,n; m=1,2,\dots,n. \quad (5.37)$$

Ta dễ dàng chứng minh được điều kiện này nếu thay (5.35) vào vế trái của (5.37) rồi khai triển.

3. Kiểm tra các số hạng tự do

- a) Kiểm tra các Δ_{kP} : Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ đồng thời tác dụng do các tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các số hạng tự do Δ_{kP} . Hay nói khác đi, kết quả nhân biểu đồ (\bar{M}_S) với biểu đồ (M_P^0) phải bằng tổng các số hạng tự do Δ_{kP} của hệ phương trình chính tắc.

$$(\bar{M}_S)(M_P^0) = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{nP}. \quad (5.38)$$

Thật vậy, thay (5.35) vào vế trái của (5.38) rồi khai triển ta được:

$$\begin{aligned} (\bar{M}_S)(M_P^0) &= [(\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) + \dots + (\bar{M}_n)](M_P^0) = \\ &= (\bar{M}_1)(M_P^0) + (\bar{M}_2)(M_P^0) + \dots + (\bar{M}_n)(M_P^0) = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{nP}. \end{aligned}$$

Đó là điều cần chứng minh.

- b) Kiểm tra các Δ_{kt} : Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ đồng thời tác dụng do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các số hạng tự do Δ_{kt} .

$$\sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_S) + \sum \alpha t_c \Omega(\bar{N}_S) = \sum_{k=1}^n \Delta_{kt}, \quad (5.39)$$

trong đó $\Omega(\bar{M}_S)$ và $\Omega(\bar{N}_S)$ lần lượt là diện tích biểu đồ mômen uốn và diện tích biểu đồ lực dọc do các lực $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ đồng thời cùng tác dụng gây ra trong các đoạn thanh của hệ cơ bản.

Nếu chú ý là theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$\begin{aligned}\Omega(\bar{M}_S) &= \Omega(\bar{M}_1) + \Omega(\bar{M}_2) + \dots + \Omega(\bar{M}_k) + \dots + \Omega(\bar{M}_n); \\ \Omega(\bar{N}_S) &= \Omega(\bar{N}_1) + \Omega(\bar{N}_2) + \dots + \Omega(\bar{N}_k) + \dots + \Omega(\bar{N}_n),\end{aligned}$$

thì sau khi thay các biểu thức này vào vế trái của (5.39) ta dễ dàng chứng minh được điều kiện kiểm tra (5.39).

c) Kiểm tra các Δ_{kA} : kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ đồng thời tác dụng do sự chế tạo chiều dài của thanh không chính xác gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các số hạng tự do Δ_{kA} .

$$\sum_i \bar{N}_{iS} \Delta_i = \sum_{k=1}^n \Delta_{kA}, \quad (5.40)$$

\bar{N}_{iS} là lực dọc trong thanh thứ i do các lực $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ đồng thời cùng tác dụng gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu chú ý là $\bar{N}_{iS} = \bar{N}_{i1} + \bar{N}_{i2} + \dots + \bar{N}_{ik} + \dots + \bar{N}_{in}$

thì sau khi thay biểu thức này vào vế trái của (5.40) ta dễ dàng chứng minh được điều kiện kiểm tra (5.40).

d) Kiểm tra các Δ_{kZ} : Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ đồng thời tác dụng do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các số hạng tự do Δ_{kZ} nhưng trái dấu

$$\sum_i \bar{R}_{jS} Z_{jm} = - \sum_{k=1}^n \Delta_{kZ}, \quad (5.41)$$

\bar{R}_{jS} là phản lực tại liên kết thứ j do các lực $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ đồng thời cùng tác dụng gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu chú ý là $\bar{R}_{jS} = \bar{R}_{j1} + \bar{R}_{j2} + \dots + \bar{R}_{jk} + \dots + \bar{R}_{jn}$ thì sau khi thay biểu thức này vào vế trái của (5.41) ta sẽ chứng minh được điều kiện kiểm tra (5.41).

4. Kiểm tra kết quả giải hệ phương trình chính tắc.

Nếu cách giải hệ phương trình chính tắc được áp dụng không có điều kiện kiểm tra riêng biệt thì sau khi tìm được các ẩn số X_k ta cần thay những giá trị vừa tìm được của X_k vào hệ phương trình ban đầu, khi tìm được các ẩn số X_k

đúng thì các phương trình chính tắc đều bằng không. Tuy nhiên, trong thực hành tính toán, do hậu quả của việc làm tròn các số liệu tính toán trung gian đến một số hữu hạn các số thuộc phân thập phân, nên sau khi thay thế các lực X_k tìm được vào hệ phương trình chính tắc ban đầu, kết quả thường khác không. Để đánh giá sai số, trong mỗi phương trình ta có thể tập hợp các số liệu và biểu thị kết quả tính bằng hiệu của hai số A và B . Nói chung $A - B \neq 0$. Mức độ sai số được biểu thị qua sai số tỉ đối ε

$$\varepsilon = \frac{A - B}{A} \times 100 (\%).$$

Tùy theo yêu cầu về mức độ chính xác cần thiết của công tác thiết kế, người ta quy định sai số tỉ đối cho phép $[\varepsilon]$ và người thiết kế phải tính toán sao cho bảo đảm được điều kiện $\varepsilon \leq [\varepsilon]$.

B. Kiểm tra kết quả cuối cùng

1. Trường hợp hệ siêu tĩnh chịu tải trọng

Nếu biểu đồ cuối cùng (M_p) đúng thì kết quả nhân biểu đồ (M_p) với một biểu đồ đơn vị (\bar{M}_k) nào đó phải bằng không

$$(M_p) (\bar{M}_k) = 0. \quad (5.42)$$

Thật vậy, (\bar{M}_k) là biểu đồ mômen uốn do lực $X_k = 1$ gây ra trong hệ cơ bản, do đó, theo công thức (5.29) thì kết quả nhân biểu đồ (M_p) với (\bar{M}_k) chính là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_k do tải trọng gây ra trong hệ siêu tĩnh. Trong hệ siêu tĩnh, chuyển vị này không tồn tại vì có liên kết ngăn cản nên kết quả nhân (M_p) với (\bar{M}_k) phải bằng không.

2. Trường hợp hệ siêu tĩnh chịu tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ, sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác và chuyển vị gối tựa

Nếu biểu đồ (M_t) , (M_A) , (M_Z) đúng thì kết quả nhân những biểu đồ này với một biểu đồ (\bar{M}_k) nào đó phải bằng số hạng tự do Δ_{kt} , Δ_{kA} , Δ_{kZ} của phương trình chính tắc thứ k nhưng trái dấu

$$(M_t) (\bar{M}_k) = -\Delta_{kt}; \quad (5.43)$$

$$(M_A) (\bar{M}_k) = -\Delta_{kA}; \quad (5.44)$$

$$(M_Z) (\bar{M}_k) = -\Delta_{kZ}. \quad (5.45)$$

Ta sẽ chứng minh điều kiện (5.43) bằng cách vận dụng công thức (5.31). Trong trường hợp này, trạng thái "k" là trạng thái do ẩn số $X_k = 1$ gây ra trong hệ cơ bản nên:

- Chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của X_k trong hệ siêu tĩnh (vế trái của 5.31) bằng không.
- (\bar{M}_k) là biểu đồ mômen uốn do lực $X_k = 1$ gây ra trong hệ cơ bản, giữ vai trò (\bar{M}_k^0) trong công thức (5.31).
- Δ_{ki} là số hạng tự do của phương trình chính tắc thứ k tức là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của X_k do riêng nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản, giữ vai trò Δ_{ki}^0 trong (5.31).

Vậy theo (5.31), ta có $0 = (M_i)(\bar{M}_k) + \Delta_{ki}$, do đó $(M_i)(\bar{M}_k) = -\Delta_{ki}$.

Đó là điều cần chứng minh.

Cách chứng minh điều kiện (5.44) và (5.45) cũng tương tự.

Ta cũng có thể chứng minh các điều kiện (5.42), (5.43), (5.44), (5.45) bằng cách thay thế các biểu thức của (M_P) , (M_I) , (M_Δ) , (M_Z) vào vế trái của những điều kiện tương ứng rồi khai triển.

Chú ý: Nếu trong các điều kiện kiểm tra nói trên ta thay (\bar{M}_k) bằng (\bar{M}_S) thì cũng chứng minh tương tự ta được:

$$\begin{aligned} (M_P)(\bar{M}_S) &= 0; & (M_I)(\bar{M}_S) &= -\sum \Delta_{ki}; \\ (M_\Delta)(\bar{M}_S) &= -\sum \Delta_{k\Delta}; & (M_Z)(\bar{M}_S) &= -\sum \Delta_{kZ}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ví dụ 5.13. Kiểm tra kết quả tính toán trong ví dụ 5.3.

Để kiểm tra ta lập biểu đồ đơn vị tổng cộng (\bar{M}_S) (hình 5.33)

1. Kiểm tra các hệ số

- Theo hàng thứ nhất. Nhân (\bar{M}_S) với (\bar{M}_1) (xem hình 5.16a):

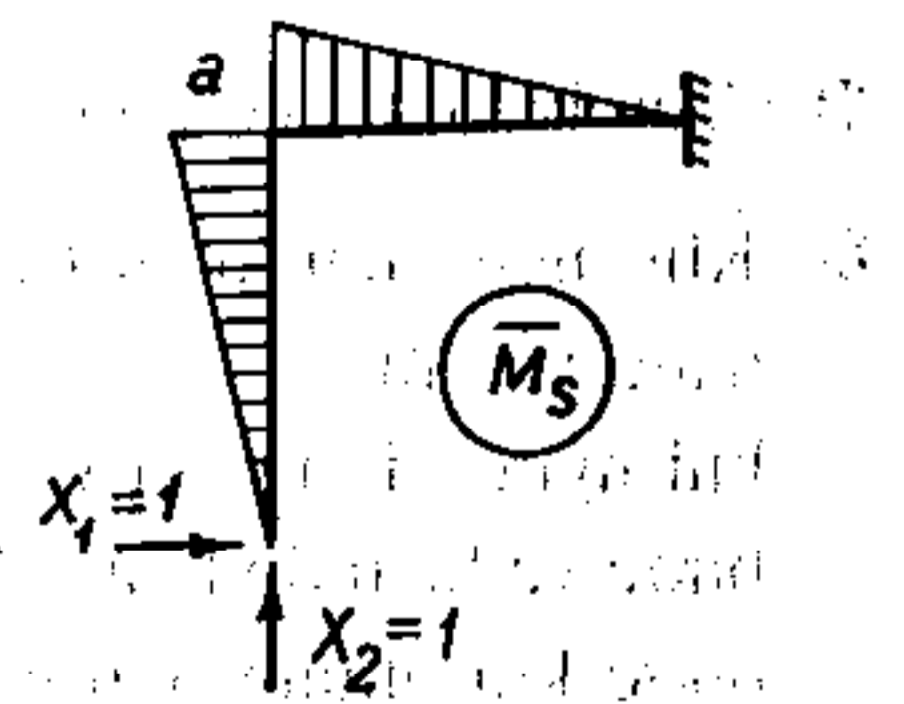
$$(\bar{M}_S)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} a \cdot a \cdot a \right] = \frac{5a^3}{6EI}$$

Mặt khác

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{4a^3}{3EI} - \frac{a^3}{2EI} = \frac{5a^3}{6EI} \text{ (đúng).}$$

- Theo hàng thứ hai. Nhân (\bar{M}_S) với (\bar{M}_2) (hình 5.16b):

$$(\bar{M}_S)(\bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{3} a \cdot a \right] = -\frac{a^3}{6EI}$$



Hình 5.33

Mặt khác $\delta_{21} + \delta_{22} = -\frac{a^3}{2EI} + \frac{a^3}{3EI} = -\frac{a^3}{6EI}$ (đúng).

- Kiểm tra toàn bộ các hệ số:

$$(\bar{M}_S)(\bar{M}_S) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right] = \frac{2a^3}{3EI}$$

Mặt khác $\sum_{k,m} \delta_{km} = \frac{4a^3}{3EI} - \frac{a^3}{2EI} - \frac{a^3}{2EI} + \frac{a^3}{3EI} = \frac{2a^3}{3EI}$ (đúng).

2. Kiểm tra các số hạng tự do. Nhân biểu đồ (\bar{M}_S) với (M_P^o) (hình 5.16c):

$$(\bar{M}_S)(M_P^o) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{3}{4} a + \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{1}{2} a \right] = \frac{3qa^4}{8EI}$$

Mặt khác $\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{5qa^4}{8EI} - \frac{qa^4}{4EI} = \frac{3qa^4}{8EI}$ (đúng).

3. Kiểm tra kết quả cuối cùng. Ta sẽ kiểm tra theo điều kiện đầu của (5.46). Biểu đồ (M_P) đã tìm được trên hình 5.16f. Ta có:

$$\begin{aligned} (M_P)(\bar{M}_S) &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{qa^2}{14} a \cdot \frac{2}{3} a - \frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a \cdot \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \frac{qa^2}{14} a \cdot \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} \frac{qa^2}{28} a \cdot \frac{1}{3} a \right] = \\ &= \frac{2qa^4}{EI} \left[\frac{1}{42} - \frac{1}{42} \right] = 0 \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Qua các nội dung trình bày ở trên ta thấy tuy cách kiểm tra có ưu điểm là độc lập với các phép tính đã dùng nhưng cũng bộc lộ một vài khuyết điểm sau:

- * Cách kiểm tra còn phức tạp, khối lượng công việc dùng để kiểm tra còn lớn.
- * Khi điều kiện kiểm tra thỏa mãn thì cũng chưa thể khẳng định loại trừ khả năng xảy ra sai lầm. Thật vậy, điều kiện kiểm tra vẫn có thể được thỏa mãn khi người tính toán và người kiểm tra cùng mắc sai lầm như nhau trong các bước vẽ biểu đồ hoặc nhân biểu đồ. Như vậy, cách kiểm tra chỉ có thể tin cậy được khi những người thực hiện không bị mắc sai lầm về nguyên tắc tính toán.

Cũng cần lưu ý là trong thực hành tính toán, do hậu quả của phép làm tròn các số liệu nên các điều kiện kiểm tra nói trên thường sẽ không đồng nhất bằng không hoặc bằng nhau. Lúc này ta cần đánh giá sai số theo quy cách đã trình bày trong phần kiểm tra việc giải hệ phương trình chính tắc.

5.6. Một số điều cần chú ý khi tính các hệ siêu tĩnh bậc cao

Trong các mục trên ta đã nghiên cứu nội dung phương pháp lực và thông qua một số ví dụ minh họa cách vận dụng phương pháp lực để tính các hệ siêu tĩnh bậc thấp. Trong thực tế ta thường gặp những hệ siêu tĩnh có bậc cao, khi tính những hệ này cần chú ý tìm các biện pháp để *nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán và giảm nhẹ khối lượng tính toán.*

A. Các biện pháp nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán

Ngoài các biện pháp kiểm tra các số liệu tính toán đã trình bày trong 5.5 để loại trừ những sai lầm, khi tính toán ta còn phải làm tròn các số liệu tính toán bằng số. Những sai số này sẽ có ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng. Thông thường, muốn bảo đảm cho kết quả cuối cùng đạt độ chính xác đến m con số thuộc phân thập phân, các số liệu tính toán trung gian cần đạt độ chính xác tối thiểu đến $m+2$ con số thuộc phân thập phân. Tuy vậy, vấn đề này trở nên đáng quan tâm khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao hay nói khác đi là khi giải một số lượng lớn các phương trình chính tắc. Thật vậy, nghiệm của hệ phương trình chính tắc thường là số nhỏ tìm được từ hiệu của hai số lớn, do đó việc làm tròn các số lớn có thể dẫn đến các sai số lớn đối với hiệu của chúng. Vấn đề này càng trở nên đáng lo ngại khi nghiệm của *hệ phương trình chính tắc không ổn định*. Những nghiệm được gọi là không ổn định khi ta thay đổi rất nhỏ giá trị của các phân tử của hệ phương trình sẽ gây ra những thay đổi lớn đối với kết quả cần tìm. Nói chung, khắc phục vấn đề này cũng tương đối khó khăn. Ngoài các biện pháp toán học, về mặt cơ học kết cấu ta có thể nêu ra một vài cách khắc phục như sau:

- 1) *Chọn phương pháp tính sao cho số lượng ẩn số là ít nhất.* Đối với mỗi bài toán cụ thể ta nên cân nhắc xem trong số các phương pháp như phương pháp lực, phương pháp chuyển vị (xem chương 6), phương pháp hỗn hợp (xem chương 7)... nên chọn phương pháp nào đòi hỏi số ẩn ít nhất.
- 2) *Khi dùng phương pháp lực ta nên chọn hệ cơ bản sao cho hệ làm việc càng sát với hệ siêu tĩnh càng tốt.* Hệ cơ bản làm việc sát với hệ siêu tĩnh là hệ cơ bản khi chịu các nguyên nhân bên ngoài sẽ phát sinh các nội lực và chuyển vị không chênh lệch nhiều so với nội lực chuyển vị trong hệ siêu tĩnh. Lúc này các lực X chỉ gây ra một phần ảnh hưởng nhỏ đến kết quả cuối cùng. Tất nhiên, biện pháp này đòi hỏi người thiết kế phải có nhiều kinh nghiệm.
- 3) *Dùng các biện pháp giảm thiểu số lượng các phương trình cần phải giải, sẽ trình bày trong điểm B.1 dưới đây.*

B. Các biện pháp giảm nhẹ khối lượng tính toán

Khi tính các hệ siêu tĩnh bậc càng cao thì khối lượng tính toán, đặc biệt là khối

lượng giải hệ phương trình càng tăng lên gấp bội. Bởi vậy, cần chú ý vận dụng các biện pháp dưới đây để giảm nhẹ khối lượng tính toán.

1. Các biện pháp giảm thiểu số lượng phương trình cần giải

a) Chọn phương pháp tính sao cho đn số là ít nhất (đã nói ở trên).

b) Khi tính hệ siêu tĩnh theo phương pháp lực ta không chọn hệ cơ bản tĩnh định mà chọn hệ cơ bản siêu tĩnh có bậc thấp hơn.

Biện pháp chọn hệ cơ bản siêu tĩnh cho phép ta thay thế việc giải hệ n phương trình bằng cách giải hai hệ có số lượng phương trình là n_1 và n_2 với $n_1+n_2=n$. Giải hai hệ có số phương trình n_1 và n_2 đòi hỏi tốn ít thời gian hơn giải một hệ có số phương trình là $n=n_1+n_2$.

Sự so sánh thời gian ở đây mới chỉ xét đơn thuần ở khâu giải hệ phương trình. Tất nhiên khi dùng biện pháp này thì khối lượng tính toán trong một số khâu khác sẽ tăng lên, song cần chú ý là khâu giải hệ phương trình là khâu chiếm khối lượng công việc nhiều nhất. Trong thực hành, đối với từng bài toán cụ thể ta cần có sự cân nhắc trước khi vận dụng biện pháp này.

c) Trong trường hợp hệ siêu tĩnh đã cho là hệ đối xứng, nên triệt để sử dụng tính chất đối xứng. Các biện pháp cụ thể sẽ được trình bày trong mục 5.7 dưới đây. Những biện pháp này cho phép ta thay thế việc giải hệ n phương trình bằng cách giải hai hệ phương trình nếu hệ có một trục đối xứng hoặc bốn hệ phương trình nếu hệ có hai trục đối xứng, trong đó tổng số các phương trình này bằng n . Cần chú ý là các biện pháp vận dụng tính chất đối xứng không làm tăng khối lượng tính toán trong các khâu khác mà còn góp phần làm nhẹ nhàng hơn.

2. Các biện pháp đơn giản hóa cấu trúc của hệ phương trình chính tắc

Hệ phương trình chính tắc có cấu trúc đơn giản là hệ phương trình có nhiều các hệ số phụ bằng không.

Giải hệ phương trình có càng nhiều hệ số phụ bằng không thì khối lượng tính toán càng được giảm nhẹ so với khi giải hệ phương trình có đầy đủ các hệ số phụ. Để đạt được mục đích đó, trong phạm vi cơ học kết cấu, ta có thể vận dụng các biện pháp sau:

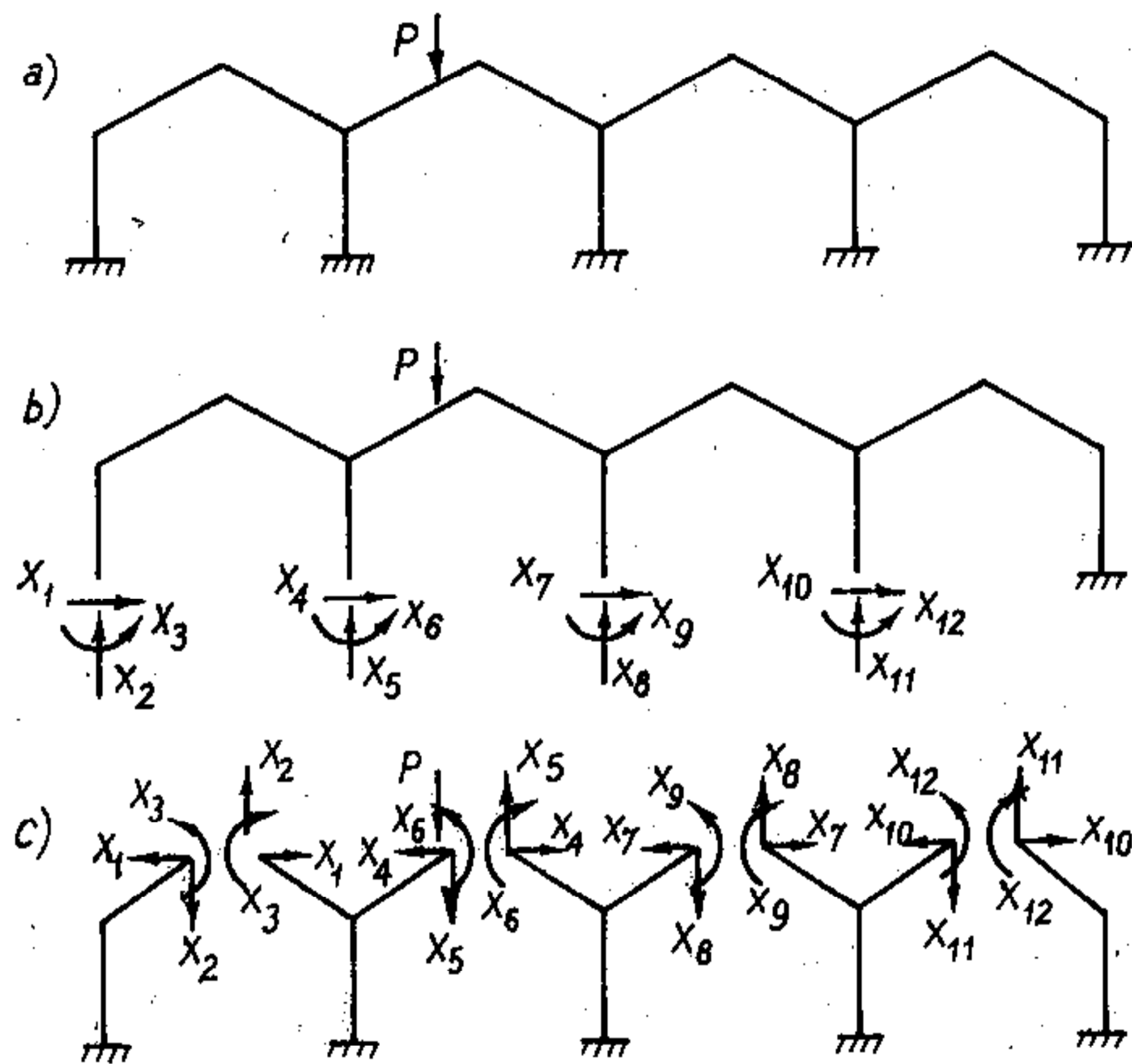
a) Nếu hệ có tính chất đối xứng, nên triệt để sử dụng tính chất đối xứng (xem 5.7), Kết quả của việc vận dụng tính chất đối xứng như đã nêu trong điểm 1c.

b) Chọn hệ cơ bản hợp lý. Tương ứng với mỗi hệ siêu tĩnh ta có thể chọn hệ cơ bản theo nhiều cách khác nhau miễn là hệ cơ bản phải bất biến hình. Việc

chọn dùng hệ cơ bản này hay hệ cơ bản khác có ảnh hưởng quan trọng đến khối lượng tính toán trong các khâu sau: xác định nội lực (vẽ biểu đồ), xác định các hệ số và số hạng tự do và đặc biệt là trong khâu giải hệ phương trình chính tắc. Như vậy, hệ cơ bản hợp lý là hệ cơ bản chọn sao cho việc tính toán được đơn giản trong các khâu đã nêu ở trên.

Để đạt được yêu cầu nêu trên, ta nên chọn hệ cơ bản bằng cách cắt hệ thành nhiều bộ phận độc lập với nhau. Lúc này, các biểu đồ đơn vị sẽ phân bố cục bộ, việc xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc sẽ đơn giản và triển vọng có nhiều hệ số phụ bằng không.

Ví dụ với hệ siêu tĩnh trên hình 5.34a, ta có thể nêu ra hai cách chọn hệ cơ bản như trên hình 5.34b và c để so sánh.



Hình 5.34

Hệ cơ bản 5.34b: Nội lực trong hệ này nói chung phân phối trên toàn hệ (chẳng hạn, dưới tác dụng của riêng lực $X_1 = 1$, biểu đồ \bar{M}_1 phân bố trên phần lớn các thanh của hệ cơ bản). Do đó, xác định các hệ số và số hạng tự do mất nhiều công sức, tất cả các hệ số phụ đều tồn tại.

Hệ cơ bản 5.35c: Hệ cơ bản này gồm nhiều bộ phận độc lập với nhau, mỗi biểu đồ nội lực đơn vị chỉ phân bố trong hai bộ phận lân cận của hệ cơ bản. Do đó, việc vẽ các biểu đồ đơn vị sẽ đơn giản hơn, xác định các hệ số và số

hạng tự do cũng dễ dàng và nhanh chóng, nhiều hệ số phụ bằng không (chẳng hạn $\delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = \dots = 0$).

Vậy hệ cơ bản 5.35c hợp lý hơn hệ cơ bản 5.35b.

c) *Biến đổi vị trí và phương của các ẩn số.* Biện pháp này sẽ được trình bày trong mục 5.8 dưới đây.

5.7. Cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ

Trong thực tế ta thường gặp những hệ có hình dạng, kích thước hình học và độ cứng đối xứng qua một trục. Như đã nêu trong 5.6, nếu biết cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ thì khối lượng tính toán sẽ được giảm nhẹ khá nhiều. Khi tính các hệ siêu tĩnh đối xứng ta có thể dùng một trong hai biện pháp cụ thể dưới đây để đơn giản hóa tính toán.

A. Biện pháp sử dụng các cặp ẩn số đối xứng và phản xứng

Giả sử xét hệ siêu tĩnh đối xứng như trên hình 5.35a. Chọn hệ cơ bản cũng có tính chất đối xứng như trên hình 5.35b. Các ẩn số trong hệ cơ bản đối xứng nói chung gồm hai loại:

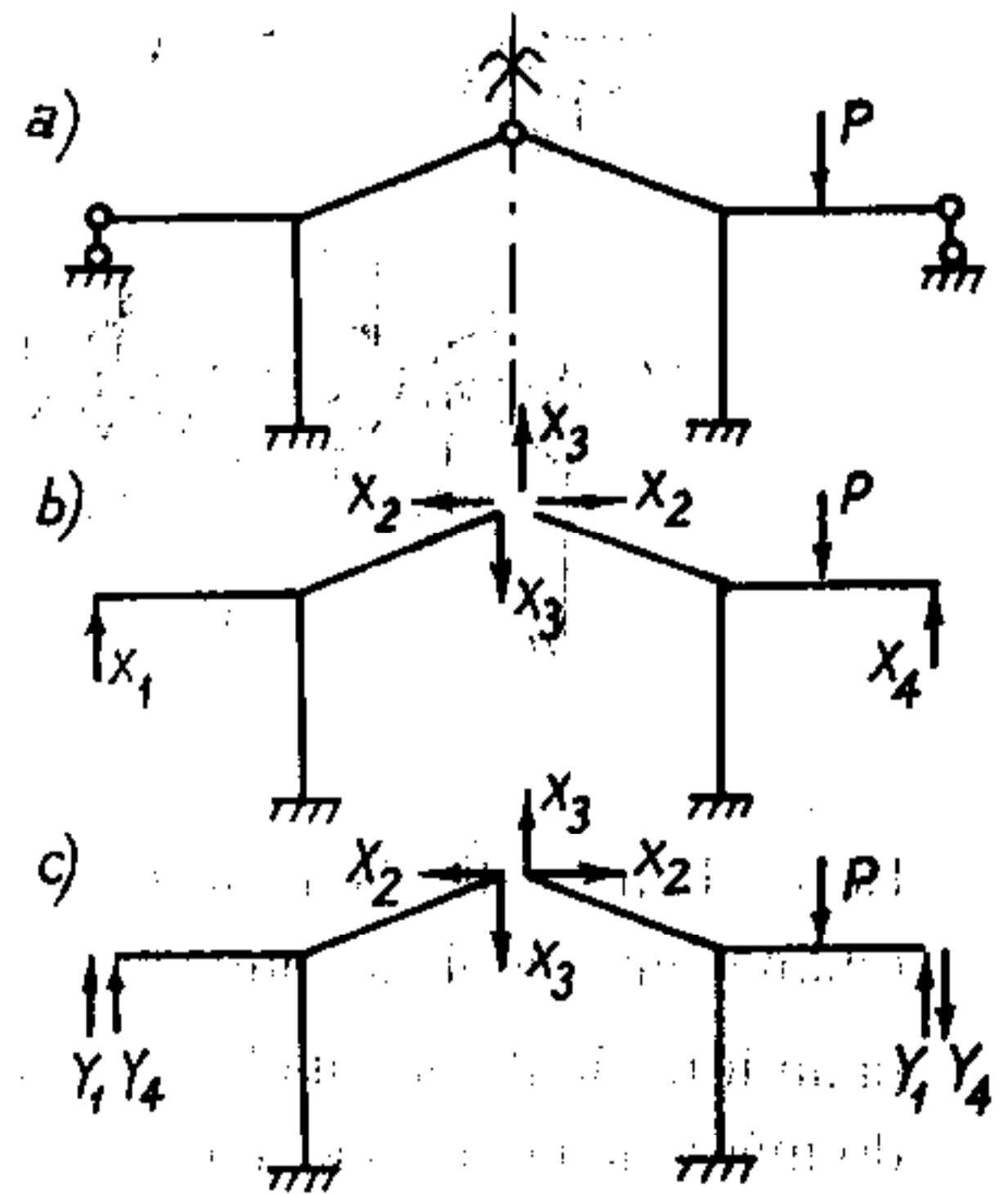
- * Loại ẩn số có tính chất đối xứng hay phản xứng. Ví dụ cặp ẩn số X_2 có tính đối xứng, cặp X_3 có tính phản xứng.
- * Loại ẩn số chỉ có vị trí đối xứng còn về trị số thì khác nhau. Ví dụ hai ẩn số X_1 và X_4 .

Để triệt để sử dụng tính chất đối xứng, ta phân tích từng hai ẩn số có vị trí đối xứng thành hai cặp ẩn số: một cặp đối xứng và một cặp phản xứng. Ví dụ, phân tích hai ẩn số X_1 và X_4 thành hai cặp: cặp Y_1 đối xứng và cặp Y_4 phản xứng (hình 5.35c). Tất nhiên hai cặp ẩn số mới Y_1 và Y_4 phải thỏa mãn điều kiện:

$$Y_1 + Y_4 = X_1; \quad Y_1 - Y_4 = X_4.$$

Cách phân tích này luôn luôn có thể thực hiện được vì Y_1 và Y_4 là nghiệm duy nhất của các ẩn số X_1 và X_4 .

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_4); \quad Y_4 = \frac{1}{2}(X_1 - X_4). \quad (5.47)$$



Hình 5.35

Sau khi đã phân tích như trên ta sẽ thực hiện tính toán với các ẩn số mới Y_1, Y_4 và các ẩn số về bản chất đã mang tính chất đối xứng hoặc phản xứng X_2 và X_3 .

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11}Y_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}Y_4 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}Y_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}Y_4 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31}Y_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}Y_4 + \Delta_{3P} = 0;$$

$$\delta_{41}Y_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}Y_4 + \Delta_{4P} = 0.$$

Trong trường hợp này, các cặp ẩn số Y_1 và X_2 đối xứng do đó các biểu đồ (\bar{M}_1) và (\bar{M}_2) đối xứng. Các cặp ẩn số X_3, Y_4 phản xứng do đó các biểu đồ (\bar{M}_3) và (\bar{M}_4) phản xứng. Như đã biết, kết quả nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản xứng sẽ bằng không. Do đó các chuyển vị δ_{km} sẽ bằng không khi một chỉ số của nó biểu thị cặp ẩn số đối xứng còn một chỉ số biểu thị cặp ẩn số phản xứng. Cụ thể là các chuyển vị $\delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{41} = \delta_{14} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{24} = \delta_{42} = 0$.

Lúc này hệ phương trình chính tắc sẽ chia ra thành hai hệ phương trình độc lập:

$$\delta_{11}Y_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \quad \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \quad (a)$$

$$\delta_{33}X_3 + \delta_{34}Y_4 + \Delta_{3P} = 0; \quad \delta_{43}X_3 + \delta_{44}Y_4 + \Delta_{4P} = 0. \quad (b)$$

Một hệ (hệ a) chỉ chứa những cặp ẩn số đối xứng còn một hệ (hệ b) chỉ chứa những cặp ẩn số phản xứng.

Với hệ siêu tĩnh đối xứng bậc n , nếu áp dụng các cặp ẩn số đối xứng và phản xứng như đã nói ở trên thì ta có thể đưa hệ phương trình chính tắc về hai hệ phương trình độc lập: một hệ có n_1 phương trình và một hệ có n_2 phương trình với $n_1 + n_2 = n$.

Kết luận vừa thu được ở trên không phụ thuộc vào nguyên nhân tác dụng, nghĩa là nguyên nhân tác dụng có thể bất kỳ. Trong trường hợp đặc biệt khi:

1. Nguyên nhân tác dụng đối xứng

Chẳng hạn hệ chịu tải trọng tác dụng đối xứng, lúc này biểu đồ (M_p^0) đối xứng nên $\Delta_{3P} = \Delta_{4P} = 0$.

Thay vào hệ (b) ta được hệ phương trình thuần nhất, vì định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc trong phương pháp lực luôn luôn khác không nên

$$X_3 = X_4 = 0.$$

Như vậy, ta có thể kết luận: nếu hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì các cặp ẩn số phản xứng bằng không.

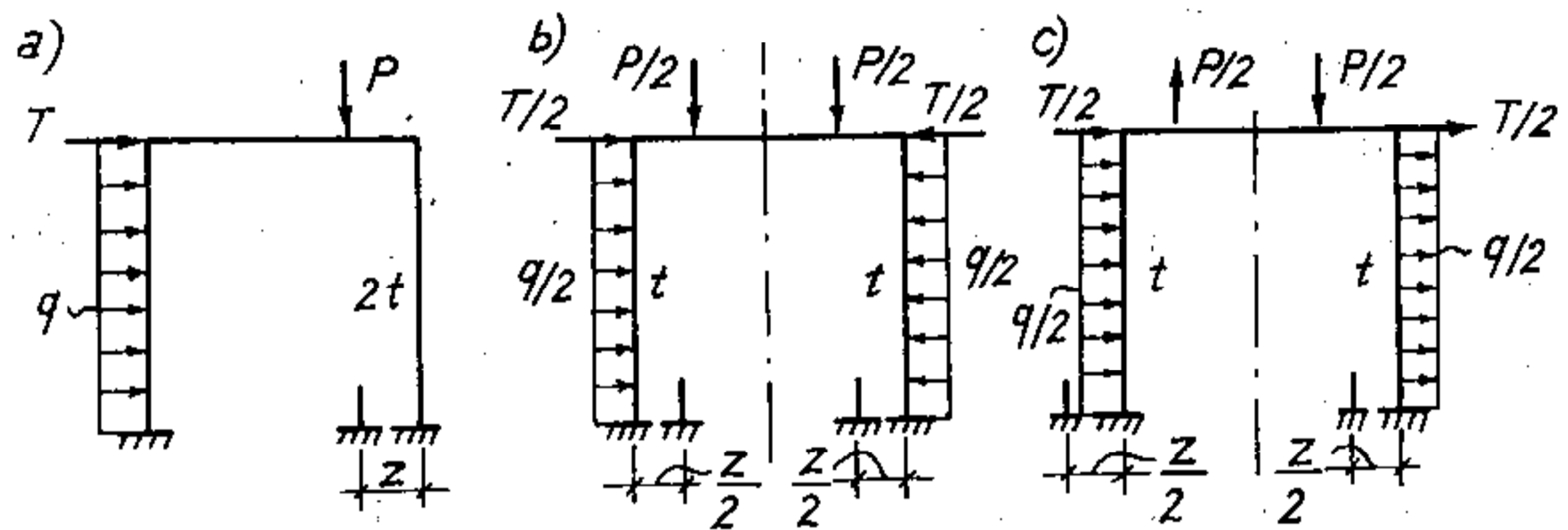
2. Nguyên nhân tác dụng phản xứng

Cũng lý luận tương tự như trên, ta đi đến kết luận sau: *nếu hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì các cặp ẩn số đối xứng bằng không.*

Chú thích: Trong trường hợp hệ có hai trục đối xứng, nếu cũng vận dụng biện pháp như đã nói ở trên với cả hai trục đối xứng thì hệ phương trình chính tắc sẽ phân thành bốn hệ phương trình độc lập. Gọi n_1, n_2, n_3, n_4 - lần lượt là số phương trình của bốn hệ nói trên, ta có $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$.

B. Biện pháp biến đổi sơ đồ tính

Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng bất kỳ (hình 5.36a) ta luôn có thể dựa vào nguyên lý cộng tác dụng để phân tích các nguyên nhân bất kỳ đó thành nguyên nhân tác dụng đối xứng (hình 5.36b) và nguyên nhân tác dụng phản xứng (hình 5.36c).



Hình 5.36

Như vậy ta có thể thay thế việc tính hệ siêu tĩnh đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ bằng việc tính hai hệ: hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng. Trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng, nội lực và chuyển vị trong hệ đã cho được xác định bằng tổng đại số các nội lực và chuyển vị trong hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và trong hệ chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng.

Bây giờ ta chỉ cần nghiên cứu cách biến đổi sơ đồ tính hệ đối xứng tương ứng với hai bài toán hệ chịu nguyên nhân đối xứng và hệ chịu nguyên nhân phản xứng. Ý đồ chính của biện pháp này là thay thế việc tính hệ đối xứng bằng việc tính nửa hệ với sơ đồ tính tương đương bảo đảm sao cho nội lực và biến dạng trong cả hai trường hợp là như nhau. Sau khi tìm được kết quả trên một nửa hệ ta dễ dàng suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo các tính chất sau:

- * Trong các hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng: đường biến dạng, mômen uốn, lực dọc có tính chất đối xứng, còn lực cắt có tính chất phản xứng.
- * Trong các hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng: đường biến dạng, mômen

uốn, lực dọc có tính chất phản xứng còn lực cắt có tính chất đối xứng.

Bạn đọc dễ dàng xác nhận tính chất đã nêu trên cơ sở lý luận về tính chất chẵn (đối xứng) hoặc lẻ (phản xứng) của các hàm đồng thời lưu ý đến các liên hệ vi phân đã quen biết giữa các hàm tải trọng, nội lực và chuyển vị.

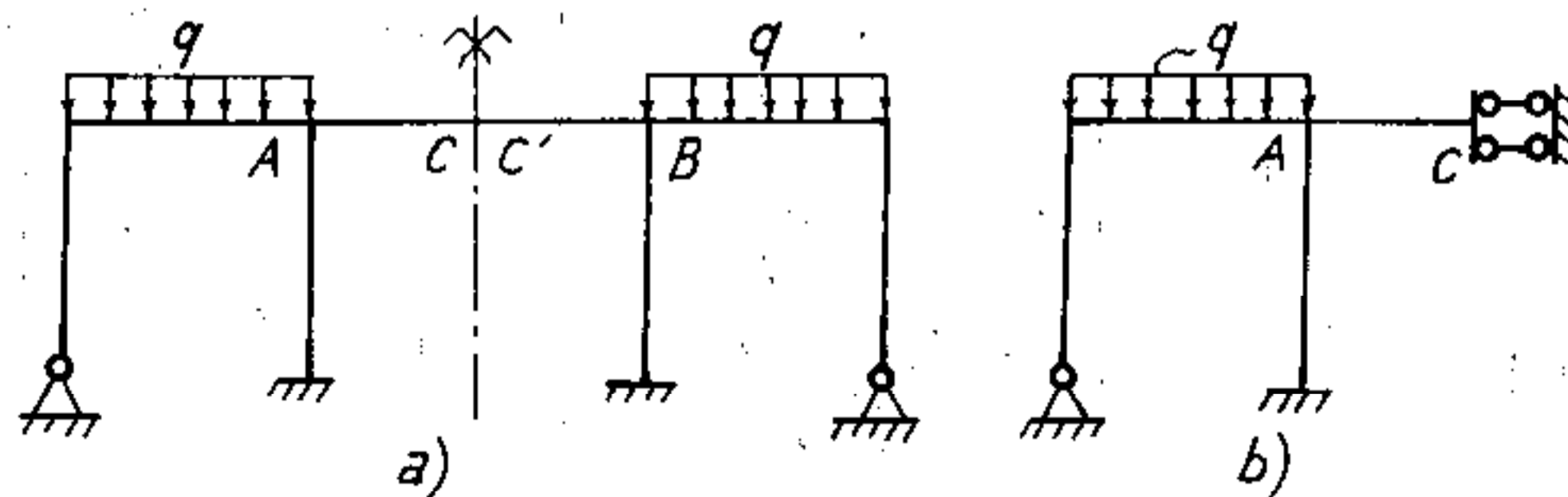
Như vậy, dưới đây ta chỉ cần bàn về cách tìm sơ đồ tính tương đương để thực hiện tính toán với một nửa hệ.

1. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng

Xét hai trường hợp sau:

a) *Trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ.*

Hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng trên hình 5.37a có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ. Nhận xét tiết diện C là giao điểm của trục đối xứng với thanh AB ta thấy: tiết diện C không thể xoay và cũng không thể có chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với trục đối xứng. Thật vậy, nếu tiết diện C có chuyển vị xoay thuận chiều kim đồng hồ thì theo tính chất biến dạng đối xứng của hệ, tiết diện C' sẽ phải có chuyển vị xoay ngược chiều kim đồng hồ. Điều đó vô lý vì thực ra C và C' là một tiết diện duy nhất. Chỉ có thể loại trừ điều vô lý này khi C và C' không có chuyển vị góc. Cũng lập luận tương tự về khả năng không có chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với trục đối xứng. Tuy nhiên, tiết diện C vẫn có thể chuyển vị theo phương của trục đối xứng bởi vì chuyển vị này không phá hoại dạng biến dạng đối xứng của hệ. Mặt khác, lực cắt tại tiết diện C phải bằng không bởi vì biểu đồ lực cắt có tính chất phản xứng. Như vậy tiết diện C có thể chuyển vị tự do theo phương của trục đối xứng. Từ nhận xét đó ta có thể thực hiện tính toán với nửa hệ theo sơ đồ tính tương đương trong đó ta đặt tại C một ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng như trên hình 5.37b.



Hình 5.37

Kết luận: *Khi tính hệ đối xứng có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ và chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ta chỉ cần đặt ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng*

tại những tiết diện nằm trên trục đối xứng rồi thực hiện tính toán với nửa hệ; cuối cùng suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo tính chất đã nêu ở trên.

b) Trục đối xứng trùng với trục của một hoặc một số thanh của hệ

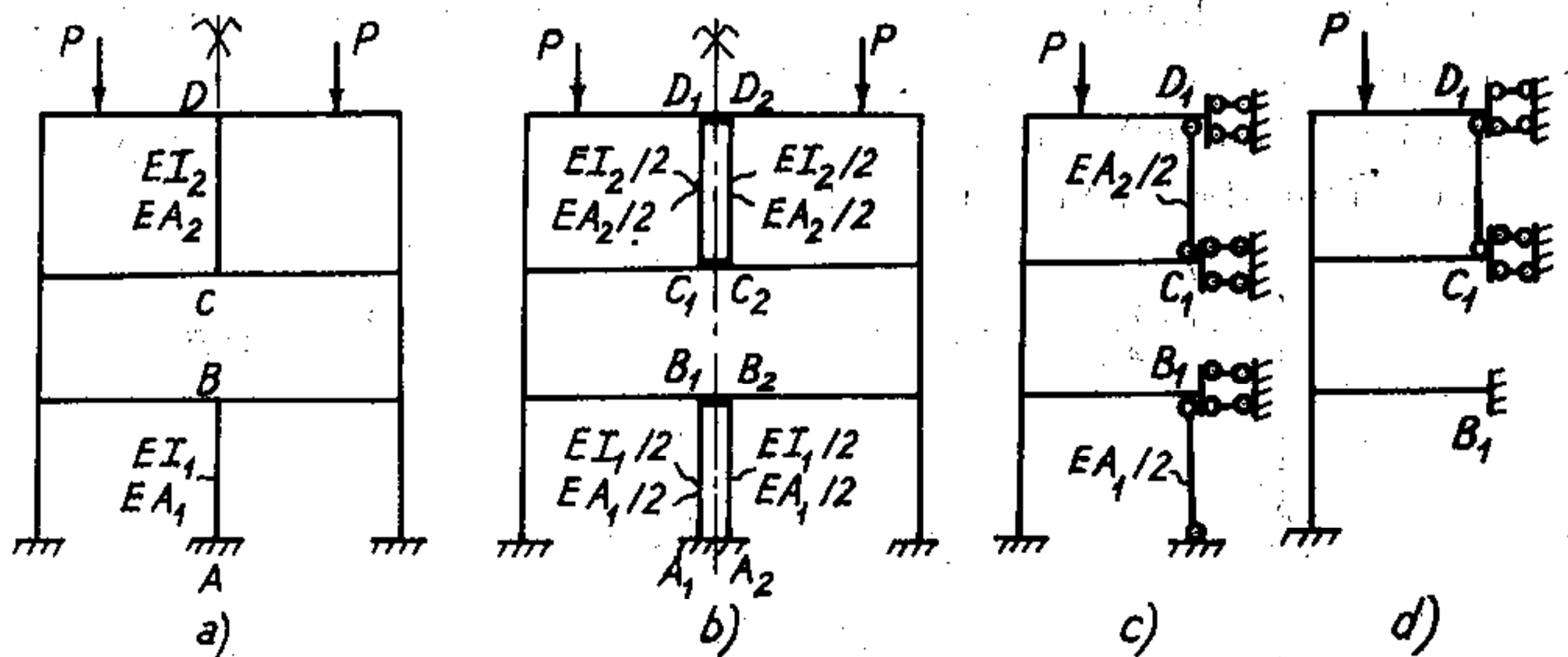
Hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng trên hình 5.38a thuộc trường hợp trục đối xứng trùng với trục của thanh AB và CD .

Để tìm sơ đồ tính đối với nửa hệ tương đương cho trường hợp này ta sẽ tìm cách đưa hệ về trường hợp trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ và vận dụng kết luận đã tìm được ở trên.

Muốn vậy ta tưởng tượng thay mỗi thanh có trục trùng với trục đối xứng bằng hai thanh; mỗi cặp hai thanh này được nối với nhau bằng các thanh vuông góc với trục đối xứng tại các đầu thanh.

Ví dụ, đối với hệ trên hình 5.38a ta thay các thanh AB và CD bằng các cặp hai thanh A_1B_1 , A_2B_2 và C_1D_1 , C_2D_2 và nối những cặp thanh này với nhau bằng các thanh ngang B_1B_2 , C_1C_2 và D_1D_2 ở các đầu thanh như trên hình 5.38b. Để bảo đảm cho hệ thay thế làm việc giống hệ bị thay thế, các cặp thanh thay thế phải có nội lực và chuyển vị tương đương với nội lực và chuyển vị trong các thanh bị thay thế.

Để thực hiện được yêu cầu đó đồng thời vẫn bảo đảm được tính chất đối xứng của hệ, mỗi thanh trong cặp hai thanh thay thế phải có độ cứng bằng nửa độ cứng của thanh bị thay thế tương ứng (tưởng tượng bổ dọc theo trục thanh bằng mặt cắt song song với mặt phẳng của hệ) còn các thanh nối ở đầu các cặp thanh thay thế phải có độ cứng bằng vô cùng.



Hình 5.38

Sau khi tìm được hệ thay thế (hình 5.38b) ta nhận thấy hệ này có trục đối

xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ nên tại các tiết diện trên trục đối xứng (B_1, C_1, D_1) của nửa hệ tương đương ta cần đặt các ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng. Ngoài ra ta còn nhận thấy tiết diện ở đầu các thanh A_1B_1 và C_1D_1 không có chuyển vị xoay cũng như không có chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với trục thanh nên trong thanh không phát sinh biến dạng uốn và biến dạng trượt mà chỉ có khả năng tồn tại biến dạng dọc trục. Nói khác đi, trong các thanh này không có mômen uốn và lực cắt mà chỉ tồn tại lực dọc. Do đó ta có thể thay thế các thanh này bằng các thanh có hai đầu khớp. Sơ đồ tính với nửa hệ tương đương lúc này có dạng như trên hình 5.38c.

Kết luận: Khi tính các hệ đối xứng có trục đối xứng trùng với trục của một hay một số thanh của hệ và chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ta cần đặt ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng đồng thời thay các thanh có trục trùng với đối xứng bằng các thanh có hai đầu khớp với độ cứng bằng nửa độ cứng của thanh bị thay thế. Sau khi thực hiện tính toán với nửa hệ tương đương ta suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo tính chất đã nêu ở trên. Khi tìm nội lực trong toàn hệ cần chú ý là lực dọc trong các thanh có trục trùng với trục đối xứng gấp hai lần lực dọc trong các thanh tương ứng khi tính với nửa hệ.

Trong trường hợp bỏ qua biến dạng dọc trục trong các thanh có trục trùng với trục đối xứng và thanh này được liên kết với trái đất bằng liên kết ngăn cản chuyển vị theo phương trục thanh thì chuyển vị theo phương dọc trục thanh tại đầu thanh sẽ bằng không nên ta có thể đặt liên kết ngàm tại đầu các thanh có trục trùng với trục đối xứng.

Trên hình 5.38d là sơ đồ tính với nửa hệ tương đương của hệ 5.38a khi bỏ qua biến dạng dọc trục trong thanh AB .

2. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng

Xét hai trường hợp sau:

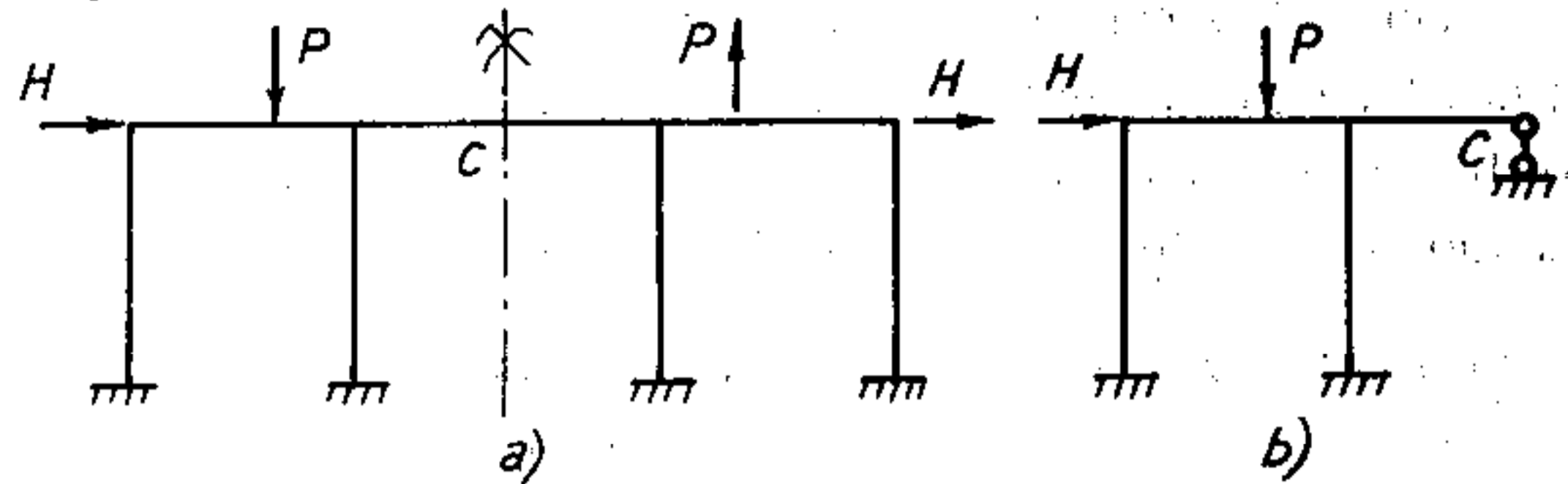
a) Trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ

Hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng trên hình 5.39a có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ. Nhận xét tiết diện C là giao điểm của trục đối xứng với thanh AB ta thấy:

- Tiết diện C có thể tự do chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với trục đối xứng. Thật vậy, dưới tác dụng của các nguyên nhân

phản xứng, các cặp lực đối xứng là mômen uốn và lực dọc tại C sẽ bằng không nên không có nội lực nào ngăn cản chuyển vị xoay tại C và chuyển vị thẳng tại C theo phương vuông góc với trục đối xứng.

- Tiết diện C không có khả năng chuyển vị thẳng theo phương của trục đối xứng. Thật vậy, nếu tiết diện C có chuyển vị thẳng theo phương của trục đối xứng thì hệ sẽ mất tính chất biến dạng phản xứng.



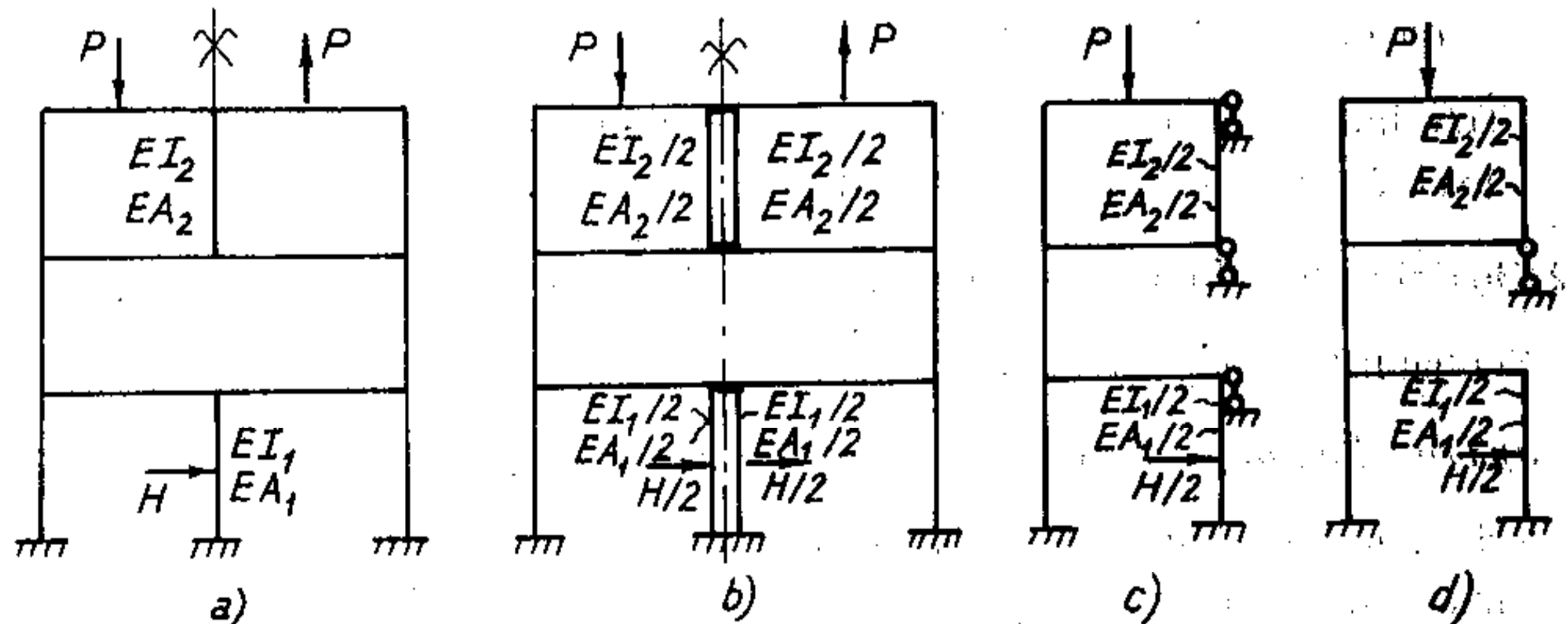
Hình 5.39

Do đó, khi tính với nửa hệ ta có thể đặt tại C một liên kết loại một (liên kết thanh) có trục trùng với trục đối xứng (hình 5.39b).

Kết luận: Khi tính hệ đối xứng có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ và chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng ta chỉ cần đặt liên kết thanh có trục trùng với trục đối xứng tại tiết diện nằm trên trục đối xứng rồi thực hiện tính toán với nửa hệ. Sau đó, suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo tính chất đã nêu ở trên.

b) Trục đối xứng trùng với trục của một hoặc một số thanh của hệ

Trên hình 5.40a là một ví dụ thuộc về trường hợp này.



Hình 5.40

Để tìm sơ đồ tính đối với nửa hệ tương đương ta cũng lý luận tương tự như đối với hệ đã xét trên hình 5.38 và được hệ tương đương thay thế như trên

hình 5.40b. Như vậy ta đã đưa hệ đang xét về trường hợp hệ đối xứng có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ. Sau khi áp dụng kết luận vừa nêu ở trên ta có sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 5.40c.

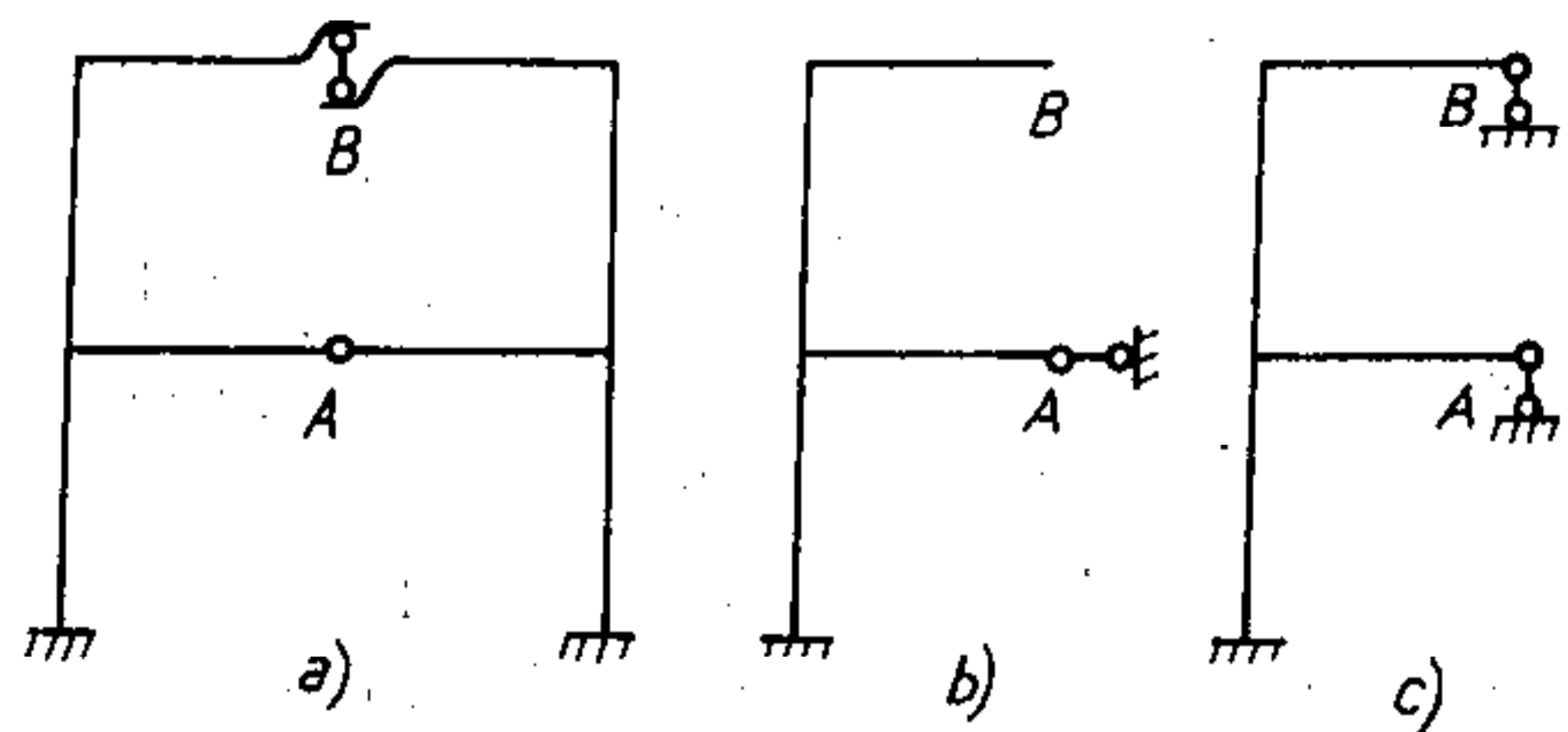
Kết luận: Khi tính các hệ đối xứng có trục đối xứng trùng với trục của một hay một số thanh của hệ và chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng ta cần chia đôi độ cứng của các thanh có trục trùng với trục đối xứng đồng thời đặt tại đầu các thanh này các liên kết thanh có trục trùng với trục đối xứng. Sau khi thực hiện tính toán với nửa hệ tương đương ta suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo tính chất đã nêu ở trên.

Khi tìm nội lực trong toàn hệ cần chú ý là trong thanh có trục trùng với trục đối xứng, mômen uốn và lực cắt gấp hai lần mômen uốn và lực cắt trong thanh tương ứng khi tính với nửa hệ còn lực dọc luôn luôn bằng không.

Khi tính theo phương pháp lực, để đơn giản tính toán ta có thể thay thế sơ đồ 5.40c bằng sơ đồ 5.40d nếu trong quá trình tính toán ta bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục trong các thanh có trục trùng với trục đối xứng.

Chú thích: Trên đây ta đã nghiên cứu cách tìm sơ đồ tính với nửa hệ cho bốn trường hợp hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng hoặc phản xứng. Đó là bốn trường hợp cơ bản, trên cơ sở lý luận này ta dễ dàng suy ra sơ đồ tính với nửa hệ cho các trường hợp khác, chẳng hạn như khi tại tiết diện trùng với trục đối xứng có đặt các liên kết khác với liên kết hàn. Trong những trường hợp này, ngoài các điều kiện như đã nêu ở trên ta còn có thêm các điều kiện thể hiện tính chất của liên kết, từ đó suy ra dạng liên kết tương ứng khi tìm sơ đồ với nửa hệ.

Hình 5.41



Ví dụ, với hệ đối xứng trên hình 5.41a ta thấy:

Tại tiết diện A trùng với trục đối xứng có liên kết khớp. Liên kết khớp cho ta thêm điều kiện mômen uốn tại A bằng không. Như vậy, khi hệ chịu các nguyên nhân tác dụng đối xứng, sau khi bổ sung điều kiện $M_A = 0$ ta có thể thay liên kết ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng (theo lý luận trên) bằng một liên kết thanh có phương vuông góc với

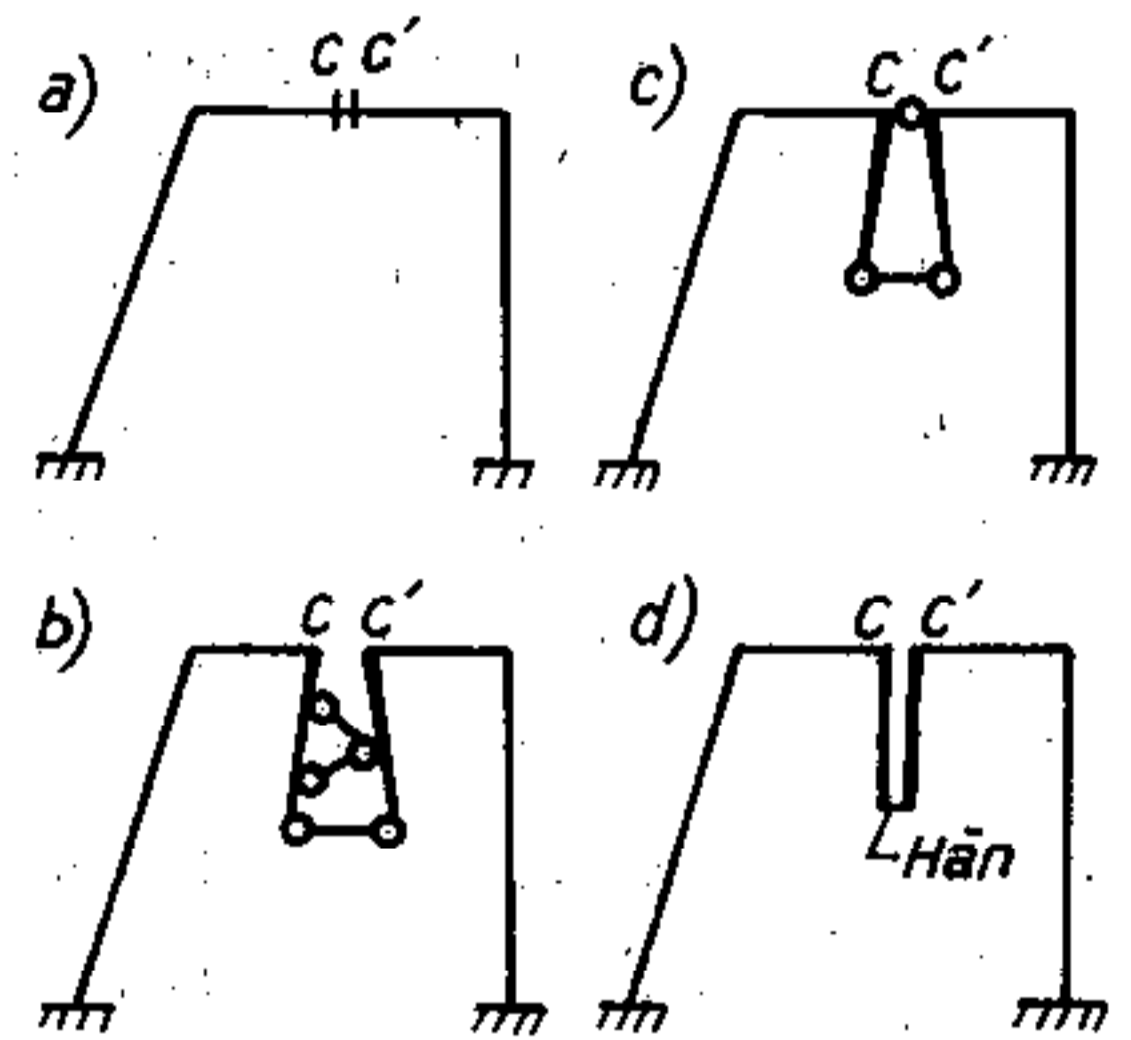
trục đối xứng như trên hình 5.41b. Khi hệ chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì điều kiện $M_A = 0$ không bổ sung điều gì mới đối với liên kết thanh có trục trùng với trục đối xứng (theo lý luận trên) nên tại A ta vẫn đặt liên kết thanh có trục trùng với trục đối xứng như trên hình 5.41c.

Tại tiết diện B trùng với trục đối xứng có liên kết thanh song song với trục đối xứng. Liên kết này cho ta thêm điều kiện $M_B = 0$ và $N_B = 0$. Sau khi bổ sung thêm hai điều kiện này ta có sơ đồ tính với nửa hệ như trên hình 5.41b. khi hệ chịu nguyên nhân đối xứng và như trên hình 5.41c khi hệ chịu nguyên nhân phản xứng.

5.8. Biện pháp đơn giản hóa bằng cách thay đổi vị trí và phương của các ản

Ý đồ chính của biện pháp này là dùng các thanh tuyệt đối cứng để đưa hệ đã cho về hệ tương đương để thực hiện tính toán. Với biện pháp này ta có thể khéo chọn vị trí và phương của các ản sao cho cấu trúc của hệ phương trình chính tắc được đơn giản, nghĩa là có nhiều hệ số phụ bằng không.

Xét hệ siêu tĩnh trên hình 5.42a. Giả sử cắt hệ tại một tiết diện bất kỳ rồi dùng liên kết hàn gắn vào hai tiết diện C và C' ở hai bên tiết diện bị cắt hai thanh có độ cứng bằng vô cùng. Nếu nối hai thanh tuyệt đối cứng này với nhau chẳng hạn bằng ba thanh (hình 5.42b) hoặc bằng một khớp và một thanh (hình 5.42c) hoặc bằng một mối hàn (hình 5.42d) thì hệ mới và hệ đã cho sẽ làm việc hoàn toàn như nhau.



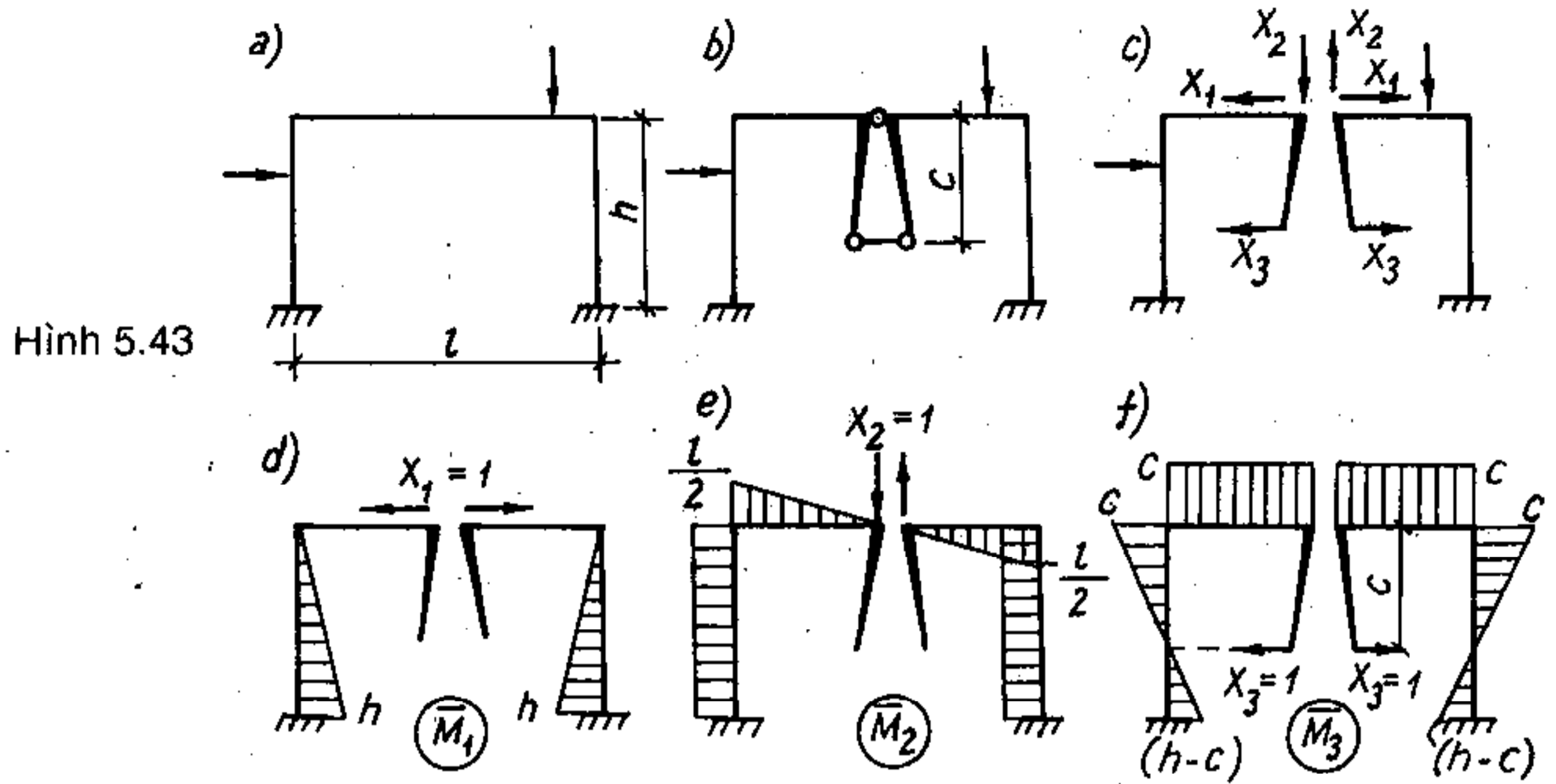
Hình 5.42

Thật vậy, dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài, các thanh tuyệt đối cứng không biến dạng được nên hai tiết diện C và C' phải chuyển vị như nhau, nghĩa là các chuyển vị tương đối giữa chúng bằng không. Điều đó hoàn toàn thống nhất với cách làm việc của hệ đã cho ban đầu.

Sau khi đưa hệ về hệ tương đương, ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết nối giữa hai thanh tuyệt đối cứng và thực hiện tính toán trên hệ tương đương như thường lệ. Vì có nhiều cách lập hệ tương đương nên ta cũng có nhiều cách chọn hệ cơ bản tương ứng hay nói khác đi, cũng có nhiều cách chọn vị trí và phương của các ản số. Như vậy, ta có thể chọn lựa để sao cho hệ phương trình chính tắc có càng nhiều hệ số phụ bằng không càng tốt.

Để thấy rõ được hiệu quả của biện pháp này, ta khảo sát một vài ví dụ đơn giản.

Ví dụ 5.14. Chọn hệ cơ bản cho khung trên hình 5.43a sao cho tất cả các hệ số phụ đều bằng không.

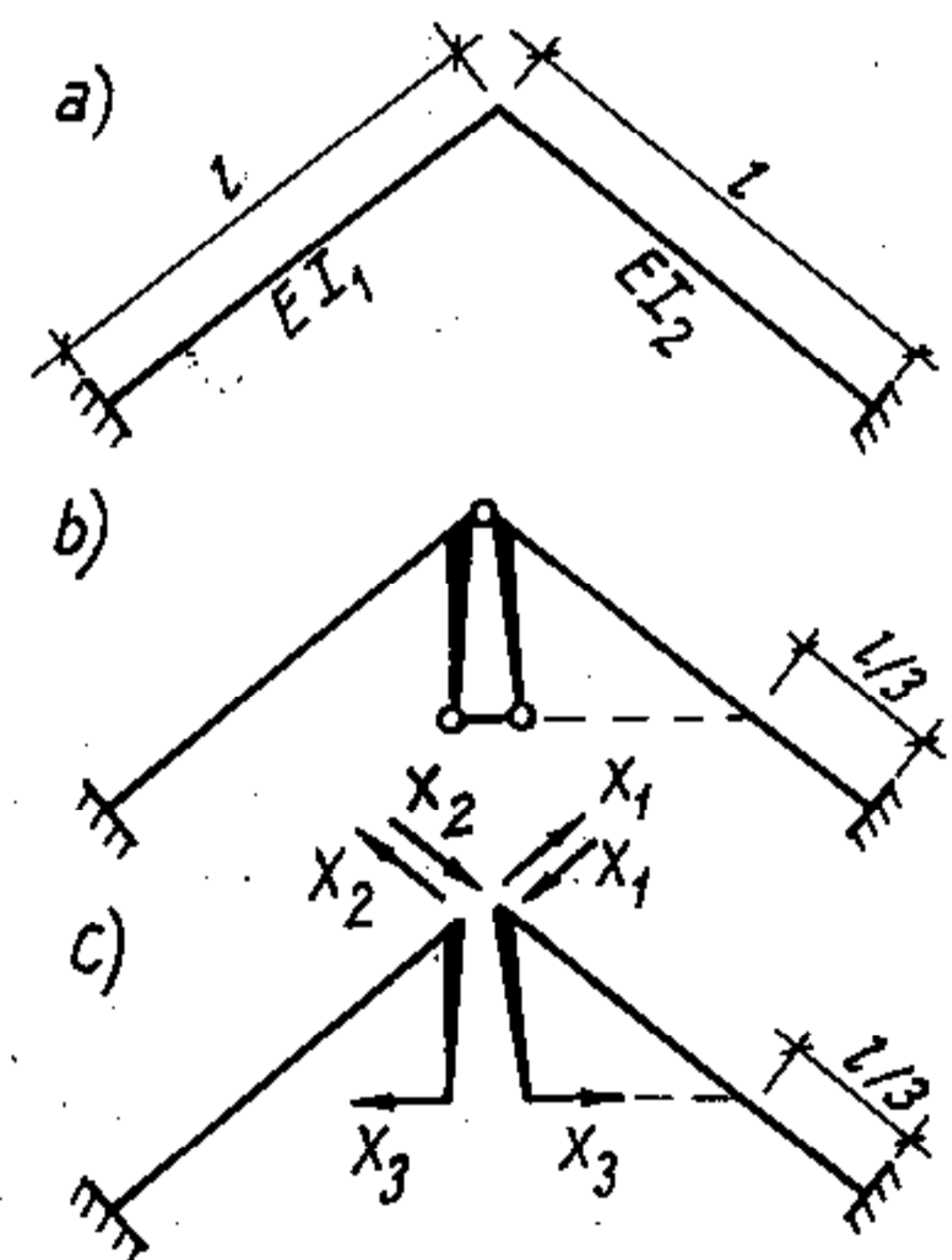


Hệ tương đương và hệ cơ bản tương ứng vẽ trên hình 5.43b, c. Các biểu đồ đơn vị vẽ trên hình 5.43d, e, f. Theo tính chất đối xứng, $\delta_{12} = \delta_{23} = 0$.

Muốn cho $\delta_{13} = 0$ ta chọn $c = 2h/3$ vì khi đó tung độ trên biểu đồ (\bar{M}_3) tương ứng với trọng tâm của biểu đồ (\bar{M}_1) trên thanh đứng sẽ bằng không.

Ví dụ 5.15. Chọn hệ cơ bản cho khung có dạng đối xứng nhưng có độ cứng không đối xứng trên hình 5.44a để sao cho tất cả các hệ số phụ đều bằng không.

Trên hình 5.44b và 5.44c giới thiệu hệ tương đương và hệ cơ bản tương ứng thỏa mãn yêu cầu trên. Đề nghị bạn đọc kiểm nghiệm lại.



Hình 5.44

Tâm đàn hồi

Đối với những hệ siêu tĩnh bậc ba tạo thành một chu vi kín (hình 5.45) ta có thể sử dụng khái niệm tâm đàn hồi. Biện pháp tâm đàn hồi là một trường hợp đặc biệt của biện pháp sử dụng thanh tuyệt đối cứng đã nêu ở trên.

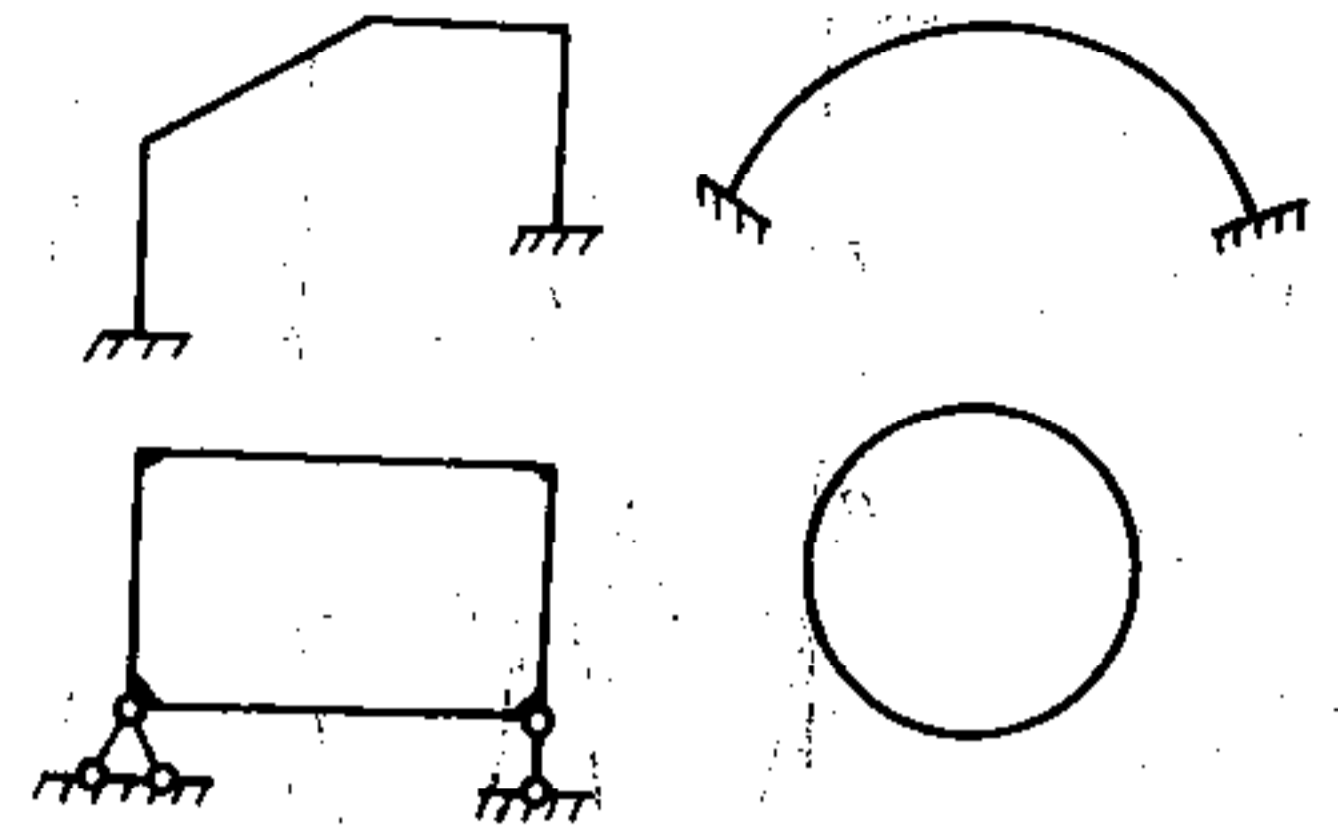
Giả sử xét hệ siêu tĩnh cho trên hình 5.46a. Biến đổi hệ đã cho bằng cách đặt thêm thanh tuyệt đối cứng như trên hình 5.46b. Hệ cơ bản tương ứng vẽ trên hình 5.46c. Vấn đề đặt ra là tìm vị trí của điểm C và phương của các lực X_1, X_2

để sao cho tất cả các hệ số phụ đều bằng không. Lúc này hệ phương trình chính thức có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0; \quad \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0; \quad \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0. \quad (5.48)$$

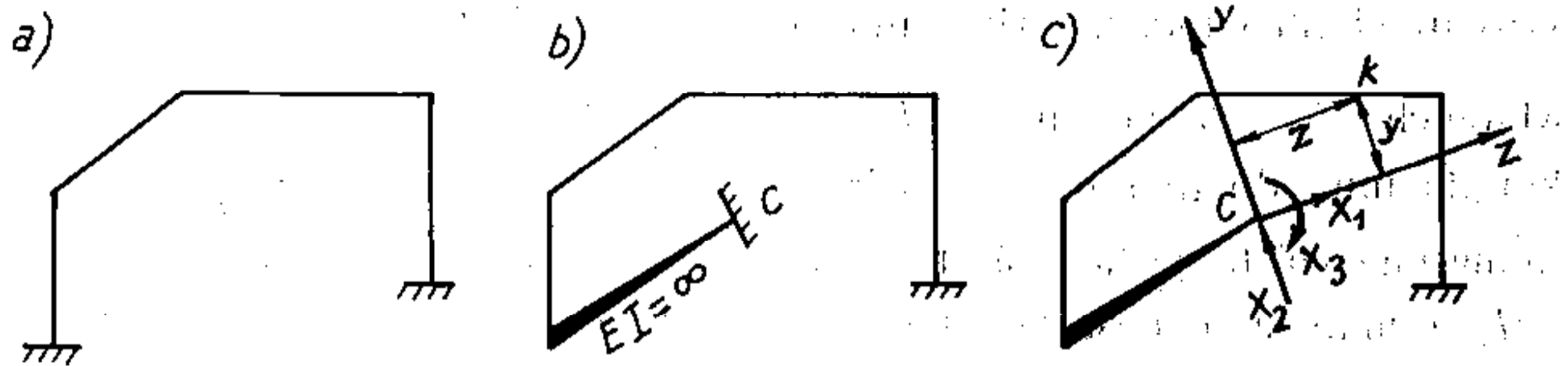
và việc giải hệ phương trình này sẽ rất dễ dàng. Điểm C có vị trí thỏa mãn với yêu cầu trên gọi là *tâm đàn hồi*.

Vị trí của tâm đàn hồi C và phương của các lực X_1, X_2 được xác định theo các điều kiện $\delta_{km} = 0$. Trước khi viết các điều kiện này, ta cần thiết lập các biểu thức giải tích của mômen uốn đơn vị. Từ hình 5.46c, ta có:



Hình 5.45

$$\bar{M}_1 = -l.y; \quad \bar{M}_2 = l.z; \quad \bar{M}_3 = l.$$



Hình 5.46

Từ các điều kiện $\delta_{km} = 0$, ta có:

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EI} ds = \sum \int (-y).l. \frac{ds}{EI} = 0;$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3}{EI} ds = \sum \int z.l. \frac{ds}{EI} = 0;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} ds = \sum \int (-y).z. \frac{ds}{EI} = 0.$$

Nếu ký hiệu $dv = ds / EI$ và gọi là *vi phân của tải trọng đàn hồi* thì các điều kiện trên sẽ có dạng:

$$\sum \int y dv = 0; \quad \sum \int z dv = 0; \quad \sum \int yz dv = 0. \quad (5.49)$$

Có thể giải thích ý nghĩa của (5.49) như sau: nếu tại mỗi trọng tâm của một phân tố chiều dài ds của kết cấu ta quy ước đặt một tải trọng đàn hồi có giá trị bằng $dv = ds / EI$ thì:

- ❖ Hai công thức đầu của (5.49) biểu thị điều kiện mômen tĩnh của các tải trọng đàn hồi đối với hệ trục yz bằng không. Do đó, *tâm đàn hồi C phải là trọng tâm của các tải trọng đàn hồi*.
- ❖ Công thức cuối của (5.49) biểu thị điều kiện mômen quán tính ly tâm của các tải trọng đàn hồi đối với hệ trục yz bằng không. Do đó *hệ trục vuông góc yz phải là hệ trục quán tính chính*.

Bởi vậy ta có thể sử dụng công thức xác định trọng tâm và trục quán tính chính của các lực để tìm vị trí của điểm C và phương của y, z theo thứ tự sau:

- 1) Chọn hệ trục bất kỳ y_0, z_0 (hình 5.47), xác định tọa độ y_{0c} và z_{0c} của điểm C theo công thức xác định tọa độ trọng tâm đã quen biết:

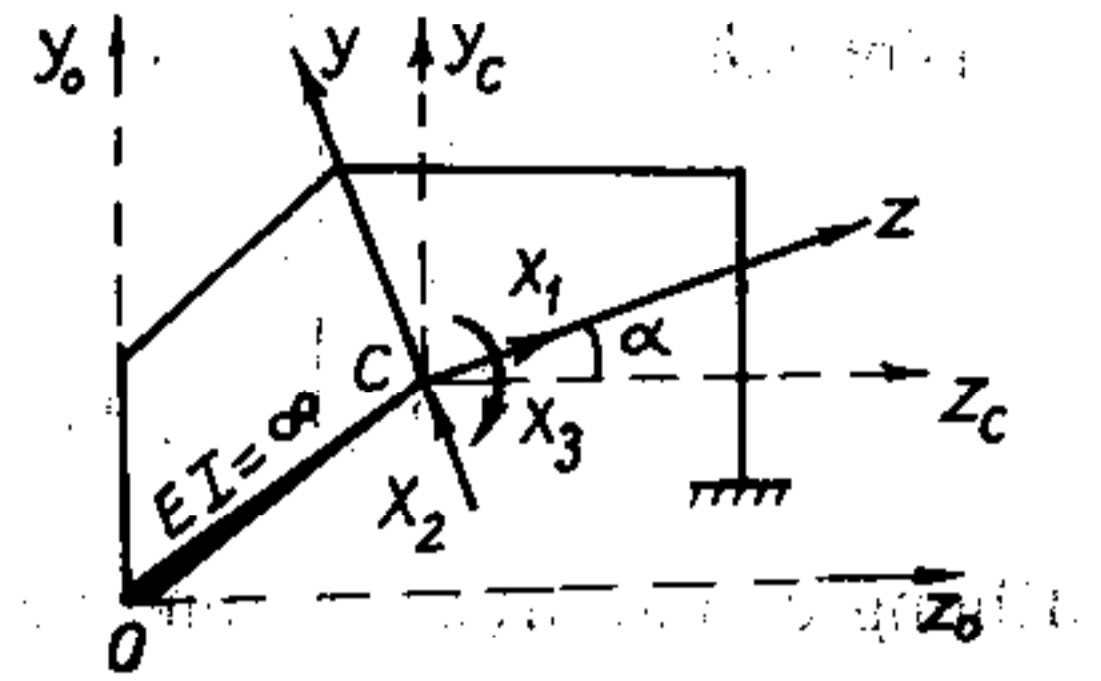
$$y_{0c} = \frac{\sum \int y_0 dv}{\sum \int dv}; \quad z_{0c} = \frac{\sum \int z_0 dv}{\sum \int dv} \quad (5.50)$$

- 2) Sau khi biết vị trí của C ta chọn hệ trục tọa độ y_c, z_c đi qua tâm đàn hồi và xác định góc nghiêng α giữa hệ trục quán tính chính y, z với hệ trục trung tâm y_c, z_c theo công thức:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \sum \int z_c y_c dv}{\sum \int y_c^2 dv - \sum \int z_c^2 dv} \quad (5.51)$$

Chú ý:

- ◆ Tâm đàn hồi và các trục quán tính chính của các tải trọng đàn hồi có đầy đủ tính chất của trọng tâm và của các trục quán tính chính của tải trọng. Chẳng hạn:
 - Hai trục quán tính chính luôn luôn vuông góc.
 - Nếu hệ đối xứng thì một trục chính trùng với trục đối xứng của hệ còn tâm đàn hồi cũng nằm trên trục đối xứng đó.
- ◆ Khi thiết lập các điều kiện (5.49) ta đã giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt. Nếu kể đến các ảnh hưởng này thì hai điều kiện đầu dùng để xác định vị trí của tâm đàn hồi sẽ không thay đổi vì lúc này $N_3 = Q_3 = 0$, còn điều kiện cuối cùng sẽ khác đi. Tuy nhiên ảnh hưởng này nói chung rất nhỏ.
- ◆ Việc xác định vị trí của tâm đàn hồi C tương đối dễ dàng nhưng việc xác định phương của trục chính thường phức tạp. Do đó, đối với những hệ không đối xứng ta chỉ nên tìm vị trí của C để có

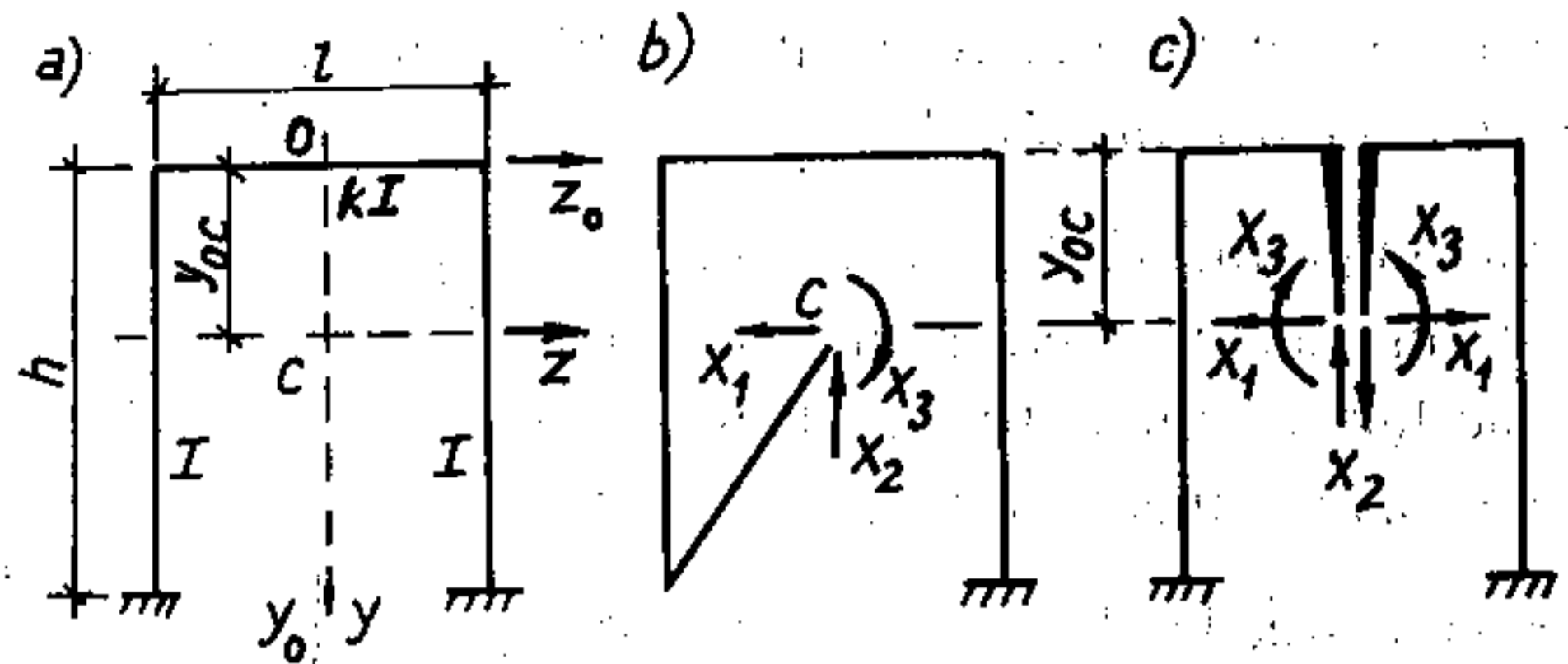


Hình 5.47

được hai cặp hệ số phụ $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ và $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ mà không nên tìm phương của trục chính (lúc này $\delta_{12} = \delta_{21} \neq 0$) vì kết quả thu được để có $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ không đủ bù đắp lại công sức khi tìm trục chính. Người ta thường dùng biện pháp tâm đàn hồi khi hệ có ít nhất là một trục đối xứng.

Ví dụ 5.16. Tìm tâm đàn hồi của hệ trên hình 5.48a.

Hình 5.48



Khung có một trục đối xứng nên tâm đàn hồi nằm trên trục đối xứng y và ta chỉ cần tìm tung độ y_{oc} . Áp dụng công thức (5.50), ta tìm được:

$$y_{oc} = \frac{\sum \int y_o dv}{\sum \int dv} = \frac{\int_0^h y_o \frac{dy_o}{EI} + 0 + \int_0^h y_o \frac{dy_o}{EI}}{\int_0^h \frac{dy_o}{EI} + \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz_o}{kI} + \int_0^h \frac{dy_o}{EI}} = \frac{kh^2}{2kh+l}$$

Một trục quán tính chính (y) trùng với trục đối xứng còn một trục (z) vuông góc với trục trên và đi qua C . Trên hình 5.48b và c trình bày hai kiểu chọn hệ cơ bản bằng cách dùng thanh tuyệt đối cứng để đưa các ẩn số về tâm đàn hồi.

Ví dụ 5.17. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong vòm không khớp trên hình 5.49.

Phương trình trục vòm $y = \frac{4f}{l^2} z^2$. Luật biến thiên của tiết diện $I(z) = \frac{I_o}{\cos \varphi}$

I_o – mômen quán tính chính trung tâm tại tiết diện ở đỉnh vòm;

φ – góc nghiêng của tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện có hoành độ z so với phương của trục z .

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.

Hệ có bậc siêu tĩnh $n = 3$. Để tính vòm, ta chọn hệ cơ bản như trên hình 5.49b với C là tâm đàn hồi. Tung độ c của tâm đàn hồi được xác định theo (5.50):

$$c = \frac{2 \int_0^{l/2} y dv}{2 \int_0^{l/2} dv} = \frac{\int_0^{l/2} y \frac{ds}{EI}}{\int_0^{l/2} \frac{ds}{EI}} = \frac{\int_0^{l/2} y \frac{dz}{EI \cos \varphi}}{\int_0^{l/2} \frac{dz}{EI \cos \varphi}} = \frac{\int_0^{l/2} y \frac{dz}{EI_o}}{\int_0^{l/2} \frac{dz}{EI_o}} = \frac{\int_0^{l/2} \frac{4f}{l^2} z^2 dz}{\int_0^{l/2} dz} = \frac{f}{3}$$

Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Xác định các hệ số chính:

Chú ý là

$$\bar{M}_1 = (y-c);$$

$$\bar{M}_2 = z;$$

$$\bar{M}_3 = 1.$$

$$\delta_{11} = 2 \int_0^{l/2} (y-c)^2 \frac{dz}{EI \cos \varphi} =$$

$$2 \int_0^{l/2} \left[\frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{f}{3} \right]^2 \frac{dz}{EI_0} =$$

$$= \frac{4f^2 l}{45EI_0};$$

$$\delta_{22} = 2 \int_0^{l/2} z^2 \frac{dz}{EI \cos \varphi} = 2 \int_0^{l/2} z^2 \frac{dz}{EI_0} = \frac{l^3}{12EI_0};$$

$$\delta_{33} = 2 \int_0^{l/2} \frac{dz}{EI \cos \varphi} = 2 \int_0^{l/2} \frac{dz}{EI_0} = \frac{l}{EI_0}.$$

Xác định các số hạng tự do: Biểu thức giải tích của M_P^0 :

• Khi $-l/2 \leq z \leq 0$ ta có

$$M_P^0 = -qz^2/2.$$

• Khi $0 \leq z \leq l/2$ ta có

$$M_P^0 = 0.$$

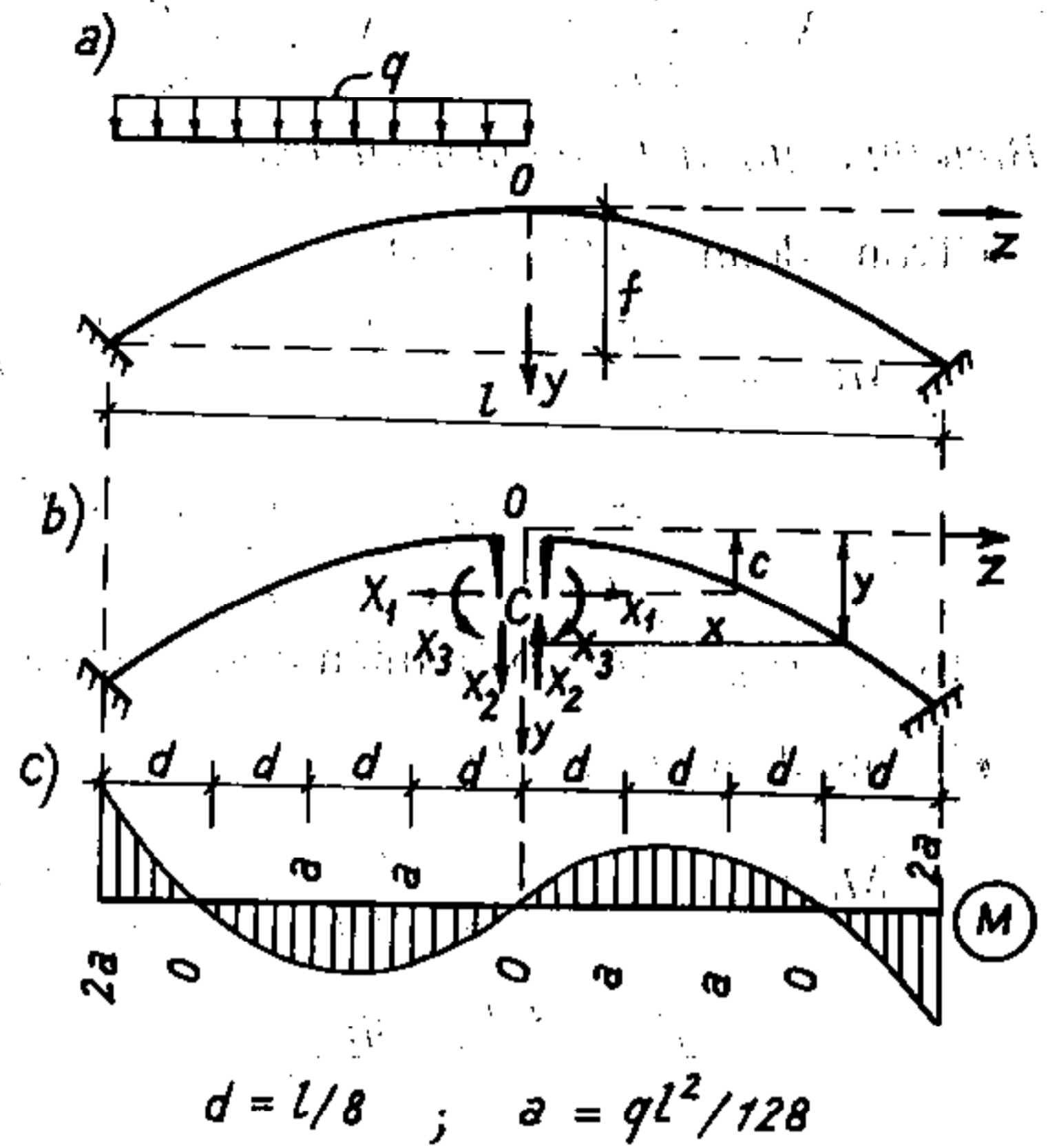
Do đó:

$$\Delta_{1P} = \sum \int (y-c) M_P^0 \frac{dz}{EI \cos \varphi} = \int_{-l/2}^0 \left[\frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{f}{3} \right] \left[-\frac{qz^2}{2} \right] \frac{dz}{EI_0} = -\frac{ql^3 f}{180EI_0};$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int z \cdot M_P^0 \frac{dz}{EI \cos \varphi} = \int_{-l/2}^0 z \left[-\frac{qz^2}{2} \right] \frac{dz}{EI_0} = -\frac{ql^4}{128EI_0};$$

$$\Delta_{3P} = \sum \int 1 \cdot M_P^0 \frac{dz}{EI \cos \varphi} = \int_{-l/2}^0 \left[-\frac{qz^2}{2} \right] \frac{dz}{EI_0} = -\frac{ql^3}{48EI_0}.$$

Thay các δ_{kk} và Δ_{kP} vào hệ phương trình chính tắc, ta được:



Hình 5.49

$$X_1 = \frac{ql^2}{16f}; \quad X_2 = -\frac{3ql}{32}; \quad X_3 = \frac{ql^2}{48}$$

Biểu thức giải tích của mômen uốn:

- Trong đoạn $-l/2 \leq z \leq 0$

$$\begin{aligned} M(z) &= \left[\frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{f}{3} \right] \frac{ql^2}{16f} + z \left[-\frac{3ql}{32} \right] + l \cdot \frac{ql^2}{48} - \frac{qz^2}{2} = \\ &= -\frac{qz^2}{4} - \frac{3ql}{32} z = -\frac{ql^2}{4} \xi^2 - \frac{3ql^2}{32} \xi, \end{aligned}$$

trong đó $\xi = z/l$, biến thiên trong khoảng $-0,5 \leq \xi \leq 0$.

- Trong đoạn $0 \leq z \leq l/2$

$$\begin{aligned} M(z) &= \left[\frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{f}{3} \right] \frac{ql^2}{16f} + z \left[-\frac{3ql}{32} \right] + l \cdot \frac{ql^2}{48} + 0 = \\ &= \frac{qz^2}{4} - \frac{3ql}{32} z = \frac{ql^2}{4} \xi^2 - \frac{3ql^2}{32} \xi, \end{aligned}$$

với $\xi = z/l$, biến thiên trong khoảng $0 \leq \xi \leq 0,5$.

Cho ξ nhiều giá trị khác nhau ta sẽ vẽ được biểu đồ mômen uốn trong vòm (hình 5.49c).

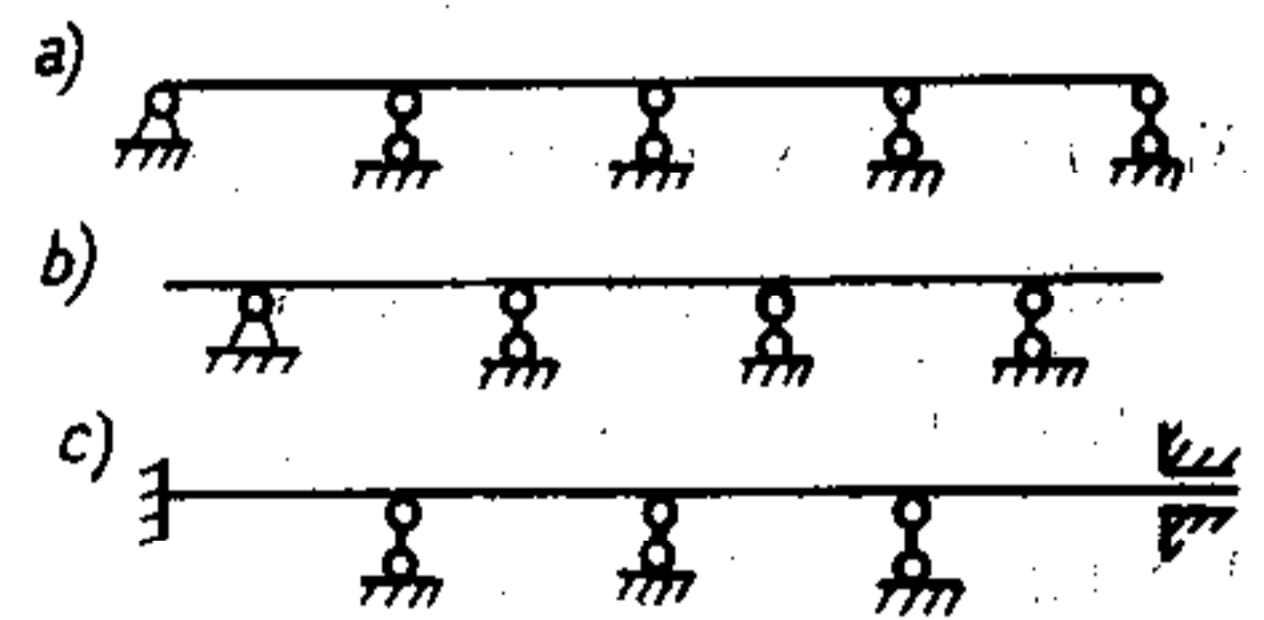
5.9. Cách tính dầm liên tục

Dầm liên tục là hệ chỉ có một thanh thẳng đặt trên nhiều gối tựa, trong đó số gối tựa lớn hơn hai.

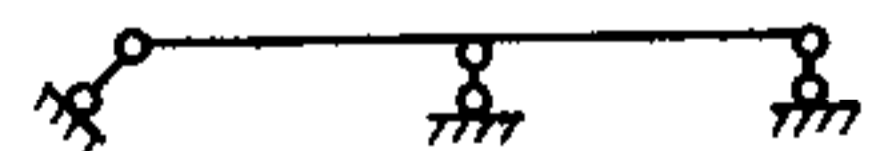
Trên hình 5.50a, b, c lần lượt trình bày ba loại dầm liên tục thường gặp trong thực tế là dầm liên tục đơn giản (hình 5.50a), dầm liên tục có đầu thừa (hình 5.50b), và dầm liên tục có đầu ngàm (hình 5.50c).

Trừ trường hợp đặc biệt trên hình 5.51 dầm là tĩnh định, còn nói chung dầm liên tục là siêu tĩnh.

Để xác định bậc siêu tĩnh của dầm liên tục ta có thể sử dụng công thức (1.3) đã nêu ở chương 1. Tuy nhiên, nếu chú ý là một dầm tĩnh định chỉ cần nối với trái đất bằng ba liên kết thanh sắp xếp hợp lý thì ta có thể tính ngay được bậc siêu tĩnh của dầm liên tục theo công thức sau:



Hình 5.50



Hình 5.51

$$n = C - 3,$$

trong đó: n – bậc siêu tĩnh của dầm liên tục;

C – số liên kết tựa tương đương loại một.

Ví dụ, với hệ trên hình 5.50c: $C = 8$ do đó bậc siêu tĩnh của hệ bằng $n = 8 - 3 = 5$.

Trong thực tế, dầm liên tục thường chịu tải trọng thẳng đứng lúc đó gối tựa cố định chỉ có hiệu quả tương đương gối tựa di động, nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục. Bởi vậy trong trường hợp này ta có thể tính bậc siêu tĩnh n của dầm theo công thức:

$$n = C_{tg} + N, \quad (5.52)$$

trong đó:

C_{tg} – số gối tựa trung gian (không tính hai liên kết ở ngoài cùng) của dầm, không cần phân biệt là gối di động hay gối tựa cố định;

N – số ngàm của dầm, không cần phân biệt là ngàm hay ngàm trượt.

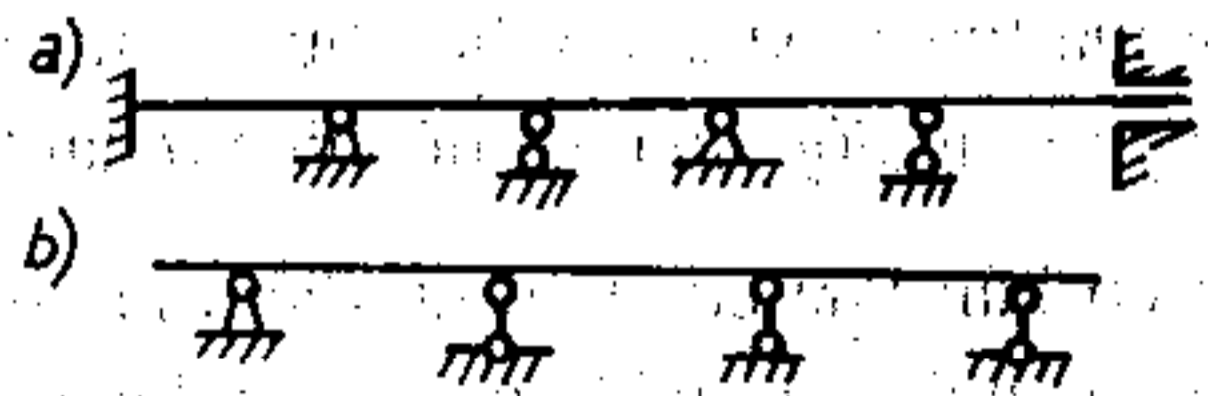
Ví dụ, trong trường hợp tải trọng tác dụng thẳng đứng:

• với hệ trên hình 5.52a, ta có

$C_{tg} = 4$; $N = 2$, do đó $n = 4 + 2 = 6$;

• với hệ trên hình 5.53b, ta có

$C_{tg} = 2$; $N = 0$; vậy $n = 2$.



Hình 5.52

Chú ý là để đảm bảo cho dầm liên tục không biến hình, ít nhất phải có một liên kết nối với trái đất có khả năng ngăn cản chuyển vị theo phương dọc trục, chẳng hạn một ngàm hay một gối tựa cố định.

A. Cách tính dầm liên tục theo phương trình ba mômen

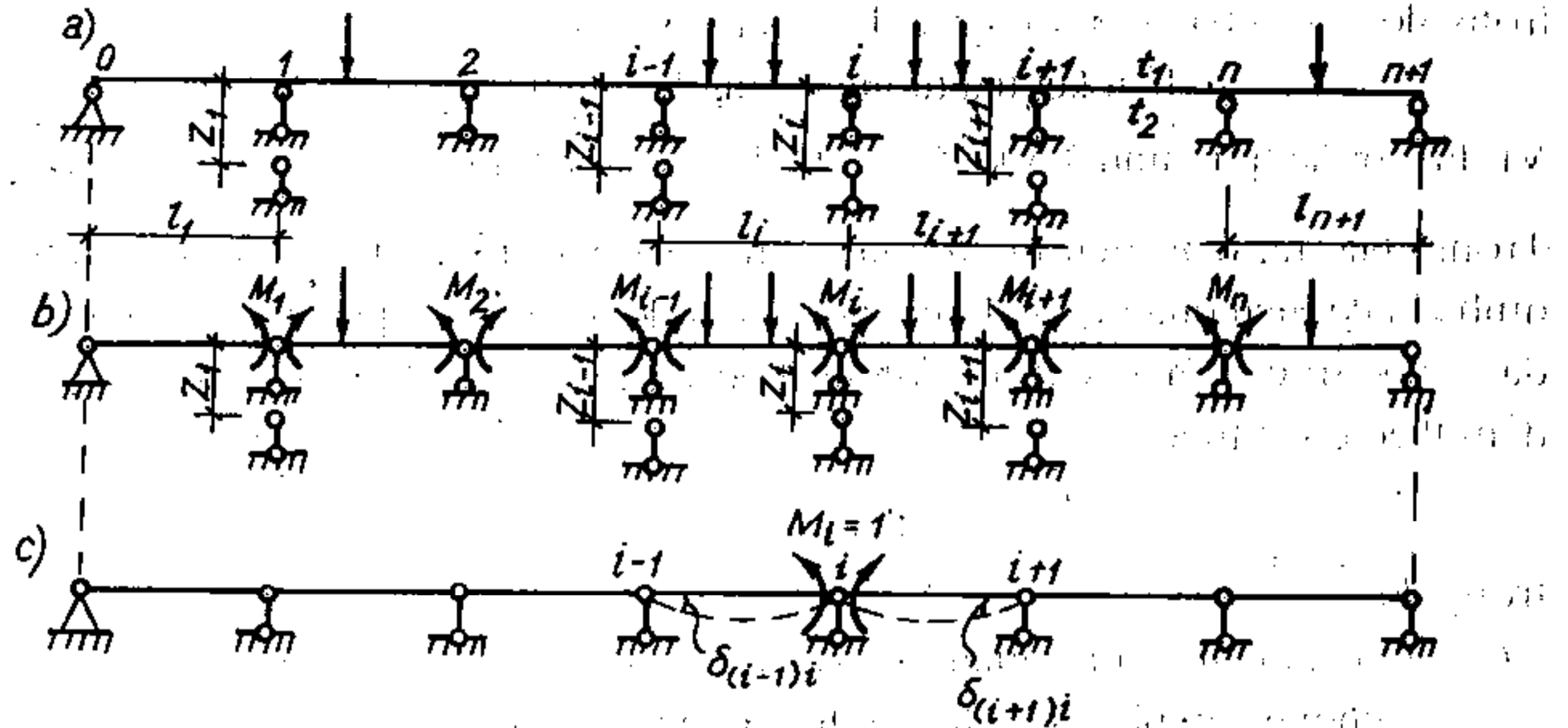
Dầm liên tục chỉ là trường hợp đặc biệt của hệ siêu tĩnh nói chung nên có thể vận dụng phương pháp lực đã nghiên cứu để tính toán. Trong trường hợp này ta có thể cụ thể hóa hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực nhằm phục vụ cho việc tính toán được nhanh chóng và đơn giản hơn.

Trước tiên, ta nghiên cứu cách tính dầm liên tục đơn giản, trên cơ sở đó dễ dàng suy ra cách tính dầm liên tục có đầu thừa hoặc đầu ngàm.

Xét dầm liên tục có tiết diện không đổi trong từng nhịp, chịu tác dụng đồng thời của tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa như trên hình 5.53a.

Giả sử dầm có n gối tựa trung gian tức là có $(n+1)$ nhịp; ta đánh số thứ tự các gối tựa và các nhịp theo đúng quy định như trên hình 5.53a. Với cách đánh số

như vậy, theo (5.52) bậc siêu tĩnh của hệ sẽ bằng n .



Hình 5.53

Chọn hệ cơ bản như trên hình 5.53b với các ẩn số X_i là các mômen uốn M_i tại gối tựa thứ i . Như vậy hệ phương trình chính tắc sẽ biểu thị điều kiện các góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên mỗi gối tựa trung gian bằng không.

Hệ cơ bản vừa chọn có ưu điểm là chia dầm thành nhiều bộ phận độc lập với nhau nên sẽ cho nhiều hệ số phụ bằng không. Thật vậy, dưới tác dụng của riêng ẩn số $M_i = 1$, biến dạng chỉ xảy ra trong hai nhịp lân cận thứ i và thứ $(i+1)$ (hình 5.53c) do đó chỉ tồn tại các chuyển vị xoay tương đối giữa hai tiết diện (chuyển vị tương ứng với các ẩn số) ở hai bên gối tựa trung gian thứ $(i-1)$, thứ i và thứ $(i+1)$. Như vậy, với hệ cơ bản đã chọn ta có các tính chất sau:

$$\begin{aligned} \delta_{ki} = \delta_{ik} = 0 & \quad \text{khi} \quad k \neq (i-1), i \text{ và } (i+1); \\ \delta_{ki} = \delta_{ik} \neq 0 & \quad \text{khi} \quad k = (i-1), i \text{ và } (i+1). \end{aligned}$$

Lúc này, phương trình thứ i của hệ phương trình chính tắc biểu thị điều kiện góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa trung gian thứ i bằng không, sẽ có dạng đơn giản như sau:

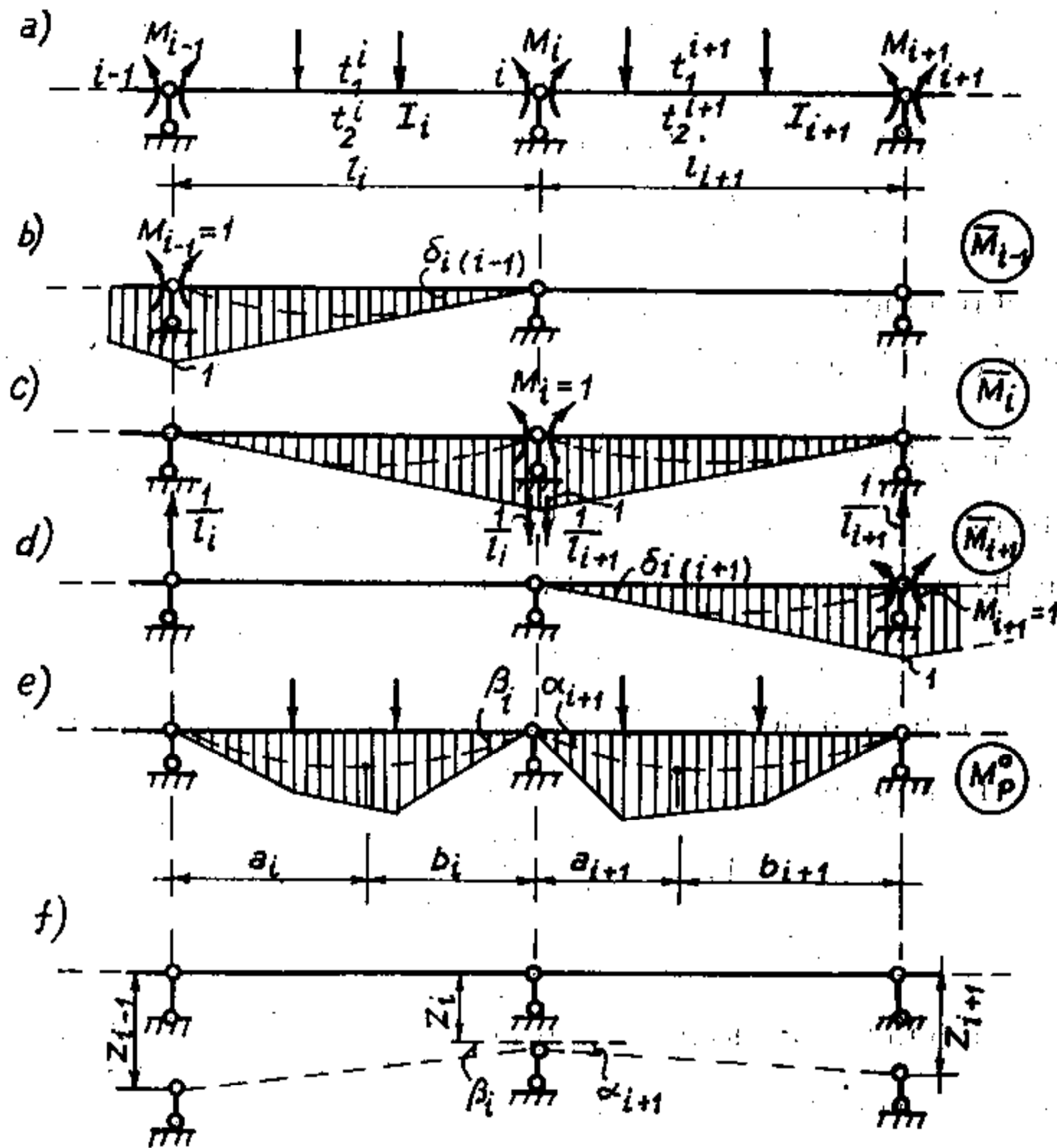
$$\delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{it} = 0, \quad (5.53)$$

trong đó:

$\delta_{i(i-1)}, \delta_{ii}, \delta_{i(i+1)}$ – góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i lần lượt do các mômen đơn vị M_{i-1}, M_i và $M_{(i+1)}$ gây ra trong hệ cơ bản;

$\Delta_{iP}, \Delta_{iZ}, \Delta_{it}$ – góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i lần lượt do tải trọng, do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa và do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Để tạo điều kiện thuận lợi cho việc tính toán, ta thiết lập sẵn các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc. Khi xác định các đại lượng này ta bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt, còn biến dạng dọc trục sẽ không tồn tại với sơ đồ tính đã chấp nhận và khi dầm chỉ chịu tải trọng vuông góc với trục dầm. Trên hình 5.54a, b, c, d là sơ đồ tính và các biểu đồ mômen uốn đơn vị cần thiết trong hệ cơ bản để xác định các hệ số.



Hình 5.54

Thực hiện nhân các biểu đồ, ta có:

$$\delta_{i(i-1)} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_{i-1}) = \frac{1}{EI_i} \cdot 1 \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_i}{6EI_i};$$

$$\delta_{ii} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_i) = \frac{1}{EI_i} \cdot 1 \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot 1 \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}};$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_{i+1}) = \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot 1 \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}.$$

Thay các trị số vừa tính được vào phương trình chính tắc (5.53) ta được

$$\frac{l_i}{6EI_i} M_{i-1} + \left[\frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}} \right] M_i + \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{iU} = 0.$$

Rút gọn phương trình trên bằng cách nhân hai vế với $6EI_0$, trong đó I_0 là hằng số bất kỳ thường lấy bằng mômen quán tính của một nhịp nào đó trong dầm

$$l_i \frac{I_0}{I_i} M_{i-1} + 2 \left[l_i \frac{I_0}{I_i} + l_{i+1} \frac{I_0}{I_{i+1}} \right] M_i + l_{i+1} \frac{I_0}{I_{i+1}} M_{i+1} + 6EI_0 (\Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{iU}) = 0.$$

Đặt

$$\lambda_i = l_i \frac{I_0}{I_i}, \quad (5.54)$$

và gọi là *chiều dài quy ước của nhịp i*, ta có:

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6EI_0 (\Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{iU}) = 0. \quad (5.55)$$

Phương trình chính tắc (5.55) gọi là *phương trình ba mômen* biểu thị sự liên hệ giữa ba mômen uốn chưa biết ở ba gối tựa trung gian liên tiếp M_{i-1} , M_i và M_{i+1} .

◆ Xác định số hạng tự do Δ_{iP} do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản

Góc xoay tương đối Δ_{iP} giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(M_p''),$$

trong đó (M_p'') là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 5.54e). Thực hiện nhân biểu đồ ta được:

$$\Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EI_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EI_{i+1}}, \quad (5.56)$$

trong đó:

ω_i và ω_{i+1} – diện tích biểu đồ mômen uốn (M_p'') tại nhịp i và nhịp $(i+1)$ do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;

a_i , b_i – khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mômen uốn (M_p'') trong nhịp i tính đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó;

a_{i+1} , b_{i+1} – các khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mômen uốn (M_p'') trong nhịp $(i+1)$ tính đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó.

◆ Xác định số hạng tự do Δ_{iZ} do chuyển vị gối tựa gây ra trong hệ cơ bản

Góc xoay tương đối Δ_{iZ} giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa i do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo (5.13):

$$\Delta_{iZ} = - \sum_j \bar{R}_j Z_j,$$

trong đó:

\bar{R}_j – phản lực tại gối j của hệ do các mômen $M_i = 1$ gây ra trong hệ cơ bản;

Z_j – chuyển vị cưỡng bức tại gối tựa thứ j .

Nếu quy ước các chuyển vị lún xuống dưới là dương ta được:

$$\Delta_{iZ} = - \left[-\frac{l}{l_i} Z_{i-1} + \frac{l}{l_i} Z_i + \frac{l}{l_{i+1}} Z_i - \frac{l}{l_{i+1}} Z_{i+1} \right],$$

hay
$$\Delta_{iZ} = \left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right], \quad (5.57)$$

trong đó Z_{i-1} , Z_i , Z_{i+1} – độ lún tại các gối tựa thứ $(i-1)$, thứ i và thứ $(i+1)$ với quy ước hướng xuống phía dưới là dương.

Cũng có thể thiết lập được công thức (5.57) qua hình 5.54f. Δ_{iZ} chính là tổng hai góc β_i và α_{i+1} ở hai bên gối tựa i :

$$\Delta_{iZ} = \beta_i + \alpha_{i+1} \approx \text{tg}\beta_i + \text{tg}\alpha_{i+1} = \left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right]$$

♦ Xác định số hạng tự do Δ_{it} do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản

Góc xoay tương đối Δ_{it} giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức (5.11).

Nếu chú ý là lực dọc trong dầm bằng không, ta có:

$$\Delta_{it} = \left[\frac{\alpha l_i}{2h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{\alpha l_{i+1}}{2h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right], \quad (5.58)$$

trong đó:

h_i , h_{i+1} – chiều cao của tiết diện dầm tại nhịp thứ i và $(i+1)$;

t_{1i} , $t_{1(i+1)}$ – độ biến thiên nhiệt độ tại thớ trên của nhịp thứ i và $(i+1)$;

t_{2i} , $t_{2(i+1)}$ – độ biến thiên nhiệt độ tại thớ dưới của nhịp thứ i và $(i+1)$.

Thay các số hạng tự do đã tính được vào phương trình chính tắc (5.55) ta được phương trình ba mômen viết cho gối tựa trung gian thứ i :

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6I_o \left[\frac{\omega_i a_i}{l_i E I_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} E I_{i+1}} \right] + 6E I_o \left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] + 6E I_o \left[\frac{\alpha l_i}{2h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{\alpha l_{i+1}}{2h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right] = 0. \quad (5.59)$$

Trường hợp dầm có tiết diện không đổi trong tất cả các nhịp ($I = \text{const}$) ta có thể lấy $I_o = I$, lúc đó phương trình ba mômen sẽ có dạng:

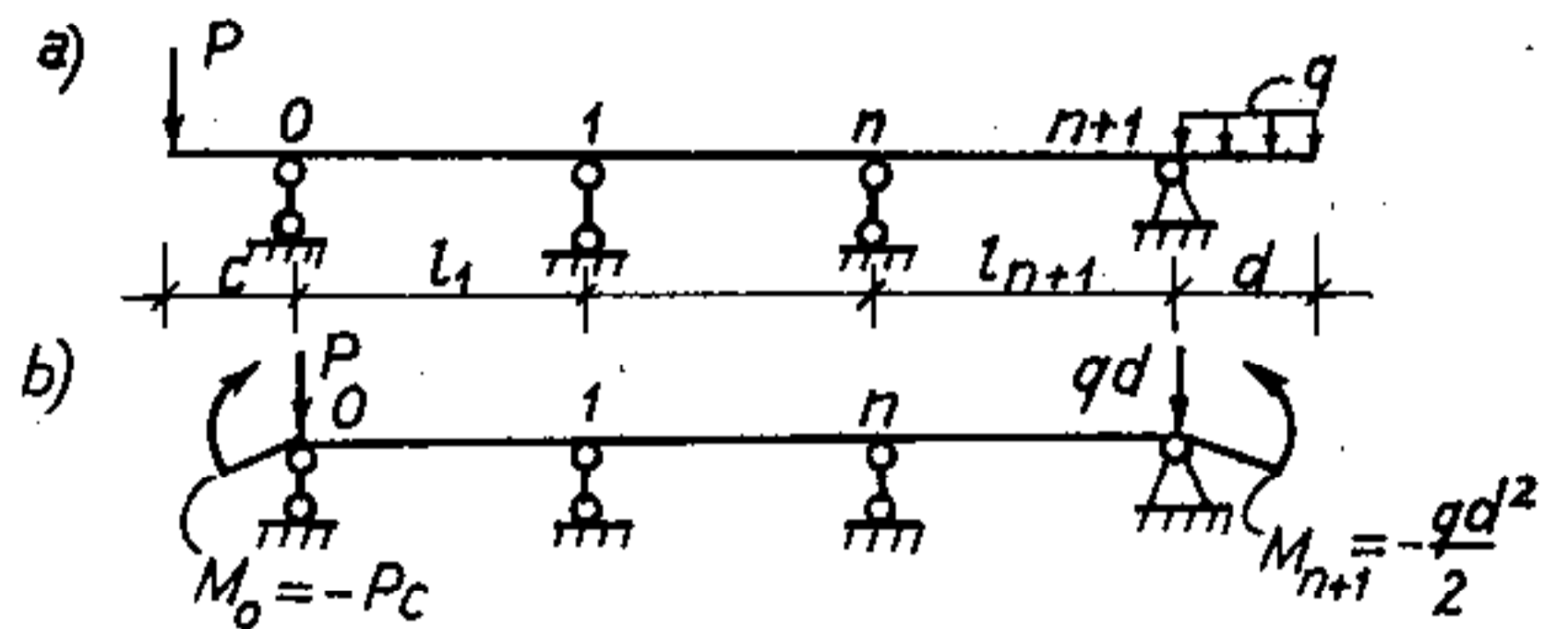
$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} + 6 \left[\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right] + 6EI \left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] + 3EI\alpha \left[\frac{l_i}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{l_{i+1}}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right] = 0. \quad (5.60)$$

Ứng với mỗi gối trung gian của dầm liên tục ta có một phương trình ba mômen, như vậy với dầm liên tục có bậc siêu tĩnh bằng n ta sẽ viết được n phương trình ba mômen cho n gối trung gian, đủ để xác định n ẩn số M_i .

*** Trường hợp dầm liên tục có đầu thừa**

Ta có thể đưa dầm có đầu thừa chịu tải trọng (hình 5.55a) về dầm liên tục đơn giản (hình 5.55b) bằng cách cắt bỏ các đầu thừa và thay tác dụng của phân đầu thừa bằng những ngoại lực đặt ở các gối biên của dầm liên tục đơn giản.

Nội lực của dầm liên tục đơn giản trên hình 5.55b được xác định bằng cách sử dụng phương trình ba mômen với mômen uốn tại các gối biên của dầm đã biết, chúng có giá trị bằng mômen tập trung M_0 và M_{n+1} .

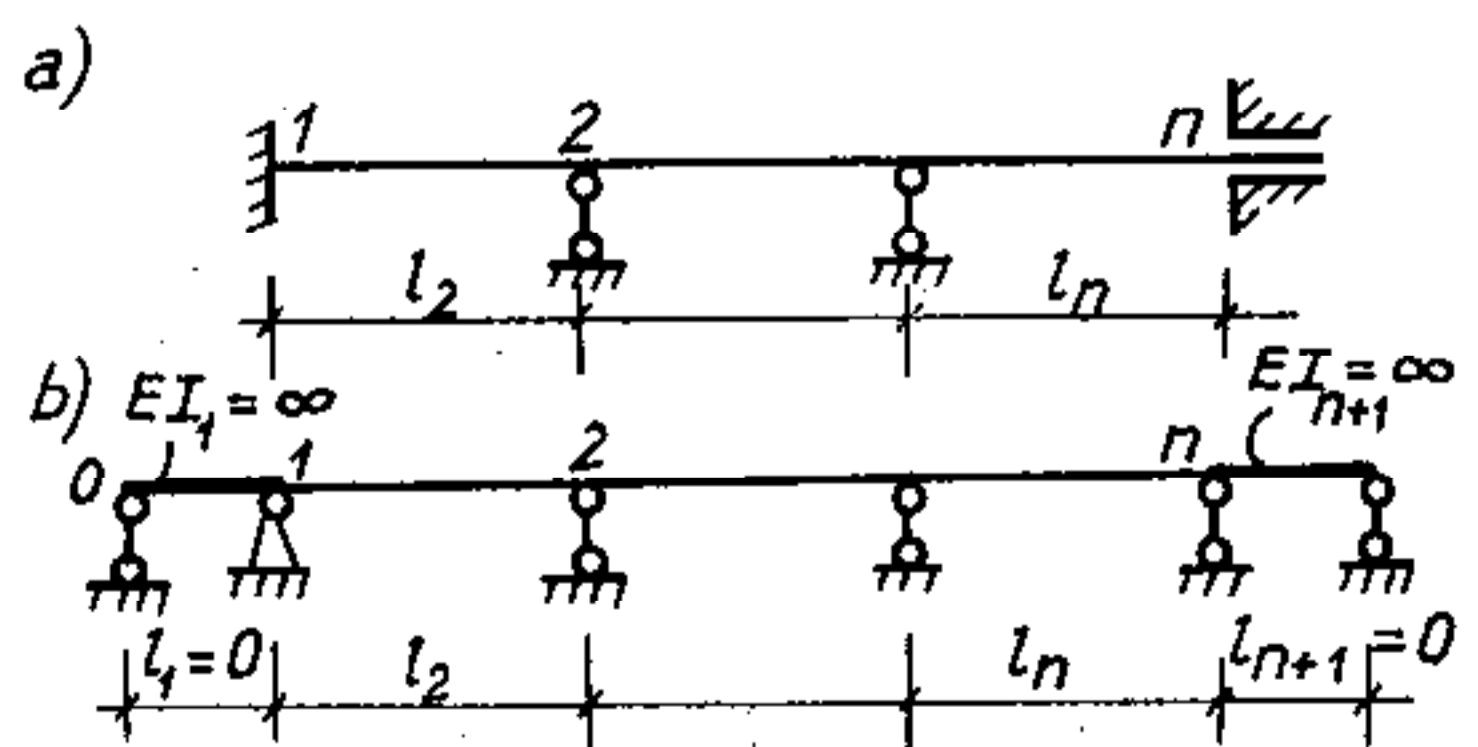


Hình 5.55

Cũng có thể coi các mômen tập trung ở hai đầu dầm như ngoại lực đặt trong nhịp thứ nhất và thứ $(n+1)$. Lúc này, mômen tựa M_0 và M_{n+1} sẽ bằng không còn các đại lượng ω_1 và ω_{n+1} cần được bổ sung phần ảnh hưởng do các mômen tập trung đó gây ra. Cách này thường phức tạp nên ít được sử dụng.

*** Trường hợp dầm liên tục có đầu ngàm**

Trong trường hợp dầm liên tục trên hình 5.56a, ta tưởng tượng thay ngàm và ngàm trượt bằng hai nhịp ở hai đầu có chiều dài bằng không hoặc có độ cứng $EI = \infty$ và có số liên kết tương đương với ngàm (hình 5.56b).



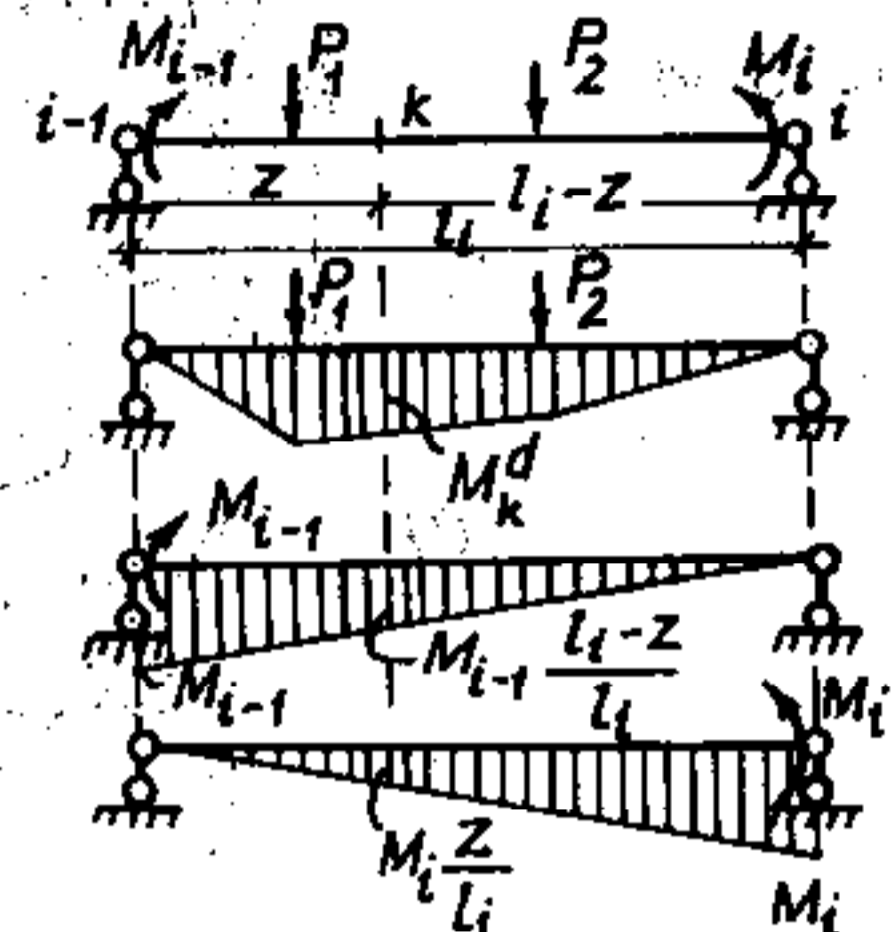
Hình 5.56

Ta đã đưa bài toán dầm liên tục có đầu ngàm về bài toán dầm liên tục đơn giản và có thể áp dụng được phương trình ba mômen như thường lệ.

Như vậy, đối với mỗi dầm liên tục bất kỳ khi quy về dầm liên tục đơn giản tương ứng, ta thiết lập được hệ phương trình ba mômen viết cho tất cả các gối trung gian. Sau khi giải hệ phương trình sẽ tìm được tất cả các mômen uốn tại các gối tựa gọi là *mômen tựa*.

Bây giờ còn phải xác định giá trị mômen uốn và lực cắt tại một tiết diện bất kỳ trong các nhịp của dầm liên tục.

Ta xem mỗi nhịp dầm liên tục như một dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối ở hai đầu nhịp, chịu tải trọng và các mômen uốn đã xác định được từ hệ phương trình ba mômen. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng (hình 5.57) ta sẽ tìm được biểu thức mômen uốn tại một tiết diện bất kỳ k có hoành độ z trong nhịp thứ i của dầm liên tục như sau:



Hình 5.57

$$M_k = M_k^d + \frac{l_i - z}{l_i} M_{i-1} + \frac{z}{l_i} M_i, \quad (5.61)$$

trong đó M_k^d – mômen uốn tại tiết diện k do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối tựa ở hai đầu nhịp.

Lấy đạo hàm biểu thức trên ta sẽ được biểu thức lực cắt tại tiết diện k của dầm liên tục:

$$Q_k = \frac{dM_k}{dz} = Q_k^d + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}, \quad (5.62)$$

trong đó Q_k^d – lực cắt tại tiết diện k do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối tựa ở hai đầu nhịp.

Để tìm phản lực tại gối tựa bất kỳ thứ i , ta chỉ cần xét cân bằng của phần dầm bị cắt xung quanh gối tựa thứ i .

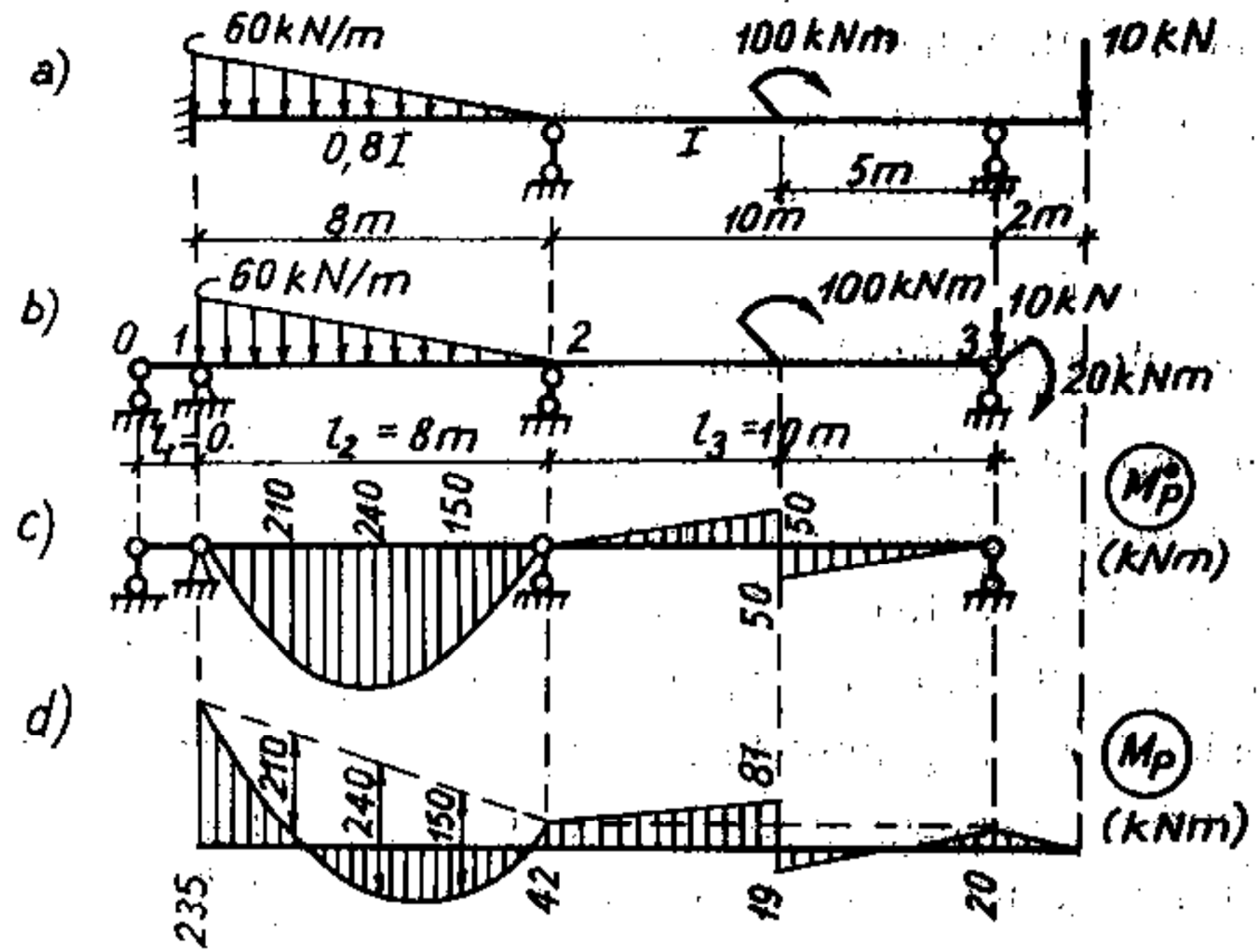
Ví dụ 5.18. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục trên hình 5.58a.

Sau khi cắt bỏ đầu thừa, thay tác dụng của phần đầu thừa bằng các lực đặt ở gối biên bên phải và thay ngàm bên trái bằng một nhịp có chiều dài $l_1 = 0$ ta được sơ đồ tính tương đương như trên hình 5.58b là dầm liên tục đơn giản. Đánh số các gối tựa và nhịp như trên hình 5.58b.

Chọn $I_0 = I$, theo (5.54) chiều dài quy ước của các nhịp sẽ là

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \frac{8I_0}{0,8I} = 10 \text{ m}; \quad \lambda_3 = \frac{10I_0}{I} = 10 \text{ m}.$$

Hình 5.58



1) Viết phương trình ba mômen cho các gối trung gian (gối 1 và gối 2), ta có

$$\text{khi } i = 1: \quad \lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6I \left[\frac{\omega_1 a_1}{l_1 I} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 \cdot 0,8I} \right] = 0;$$

$$\text{khi } i = 2: \quad \lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6I \left[\frac{\omega_2 a_2}{l_2 \cdot 0,8I} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 I} \right] = 0;$$

2) Vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Kết quả như trên hình 5.58c.

3) Xác định các đại lượng trong số hạng tự do của hệ phương trình ba mômen

$$\omega_1 = 0; \quad a_1 = 0; \quad \omega_2 = \frac{ql^3}{24} = \frac{60 \cdot 8^3}{24} = 1280 \text{ kNm}^2; \quad a_2 = \frac{7}{15} l_2 = \frac{7}{15} \cdot 8 = \frac{56}{15} \text{ m};$$

$$b_2 = \frac{8}{15} l_2 = \frac{8}{15} \cdot 8 = \frac{64}{15} \text{ m}; \quad \omega_3 b_3 = -\frac{5 \cdot 50}{2} \left(5 + \frac{5}{3} \right) + \frac{5 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3} = -\frac{1250}{3} \text{ kNm}^3.$$

4) Thay trị số của các hệ số vào hệ phương trình ba mômen đồng thời chú ý là $M_3 = -20 \text{ kNm}$; ta có:

$$0 + 2(0+10)M_1 + 10M_2 + 6I \left[0 + \frac{1280}{8 \cdot 0,8I} \cdot \frac{64}{15} \right] = 0;$$

$$10M_1 + 2(10+10)M_2 + 10(-20) + 6I \left[\frac{1280}{8 \cdot 0,8I} \cdot \frac{56}{15} - \frac{1250}{3 \cdot 10I} \right] = 0;$$

Hay $2M_1 + M_2 + 512 = 0; \quad M_1 + 4M_2 + 403 = 0.$

5) Giải hệ phương trình, ta được $M_1 = -235 \text{ kNm}$; $M_2 = -42 \text{ kNm}$.

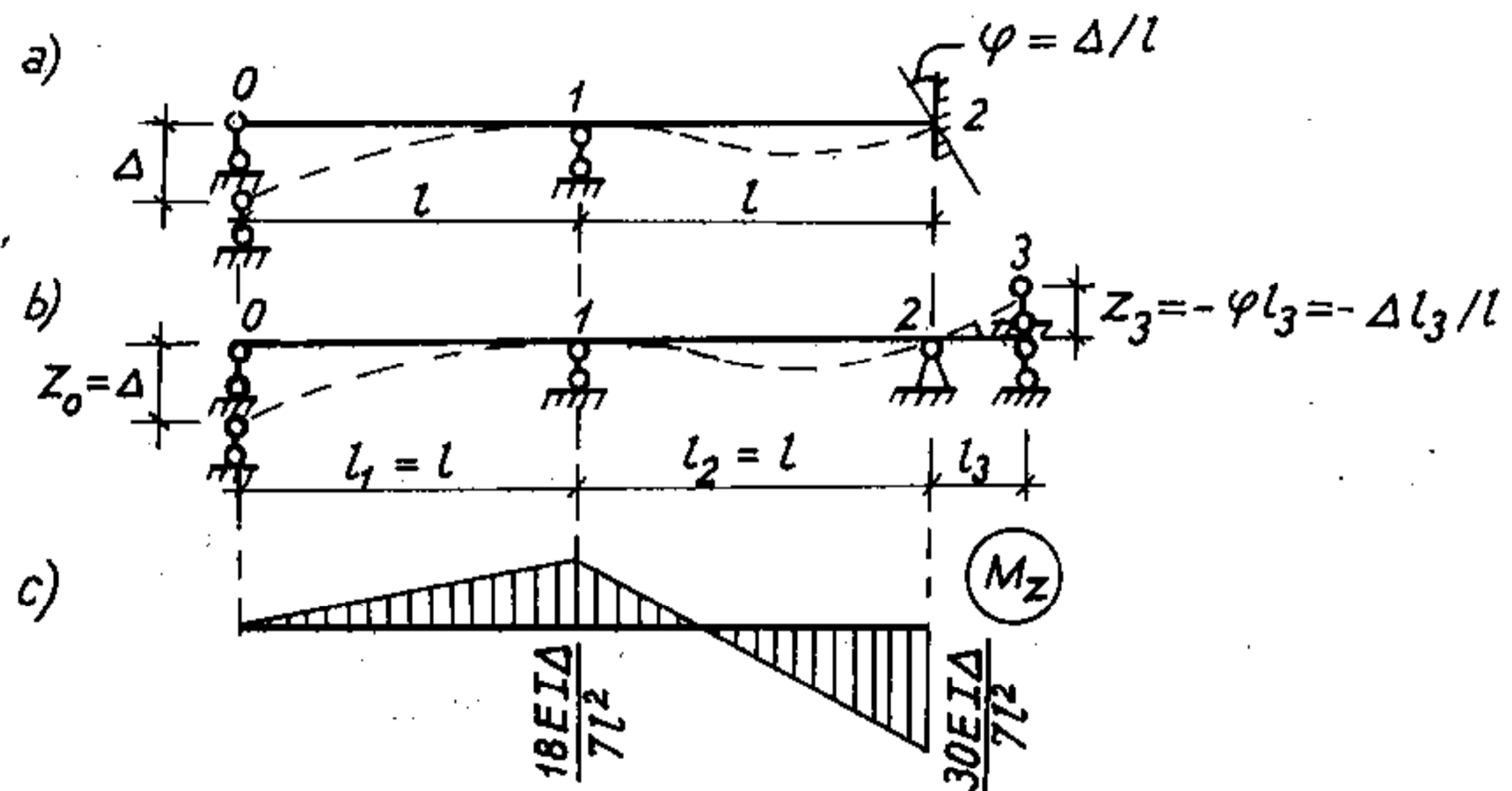
6) Tìm biểu đồ mômen uốn tổng cộng. Sau khi đã tìm được các mômen tựa M_1 , M_2 , M_3 ta vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản do riêng các mômen tựa gây ra. Trong mỗi nhịp biểu đồ này có dạng đường thẳng nối liền các tung độ biểu thị mômen tựa ở hai đầu nhịp (đường đứt nét trên hình 5.58d). Gọi biểu đồ này là *biểu đồ mômen tựa* và ký hiệu là $(M_{tựa})$. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ biểu đồ mômen uốn tổng cộng theo biểu thức sau:

$$(M_p) = (M_p^o) + (M_{tựa}).$$

Kết quả tìm được như trên hình 5.58d (chú ý là cần bổ sung phần biểu đồ mômen uốn ở đầu thừa bên phải).

Ví dụ 6.19. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục trên hình 5.59a khi gối 0 lún xuống một đoạn bằng Δ và ngàm xoay ngược chiều kim đồng hồ một góc $\varphi = \Delta/l$. Cho biết $EI = \text{const}$.

Trên hình 5.59b trình bày cách đưa dầm có đầu ngàm về dầm liên tục đơn giản. Nếu cho gối 3 của dầm thay thế dịch chuyển thẳng đứng một đoạn $Z_3 = -\varphi l_3 = -\Delta(l_3/l)$ (hướng lên trên) đồng thời cho l_3 tiến tới không thì cách làm việc của dầm này hoàn toàn giống cách làm việc của dầm cho ban đầu.



Hình 5.59

Thiết lập các phương trình ba mômen cho gối 1 và 2, theo (5.60) ta có:

$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 + 6EI \left[\frac{Z_0 - Z_1}{l_1} + \frac{Z_2 - Z_1}{l_2} \right] = 0;$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 + 6EI \left[\frac{Z_1 - Z_2}{l_2} + \frac{Z_3 - Z_2}{l_3} \right] = 0,$$

trong đó: $l_1 = l_2 = l$; $l_3 = 0$; $M_0 = M_3 = 0$; $Z_0 = \Delta$; $Z_1 = Z_2 = 0$; $Z_3 = -\Delta l_3/l$.

Sau khi thay thế những giá trị này vào hai phương trình trên, ta có:

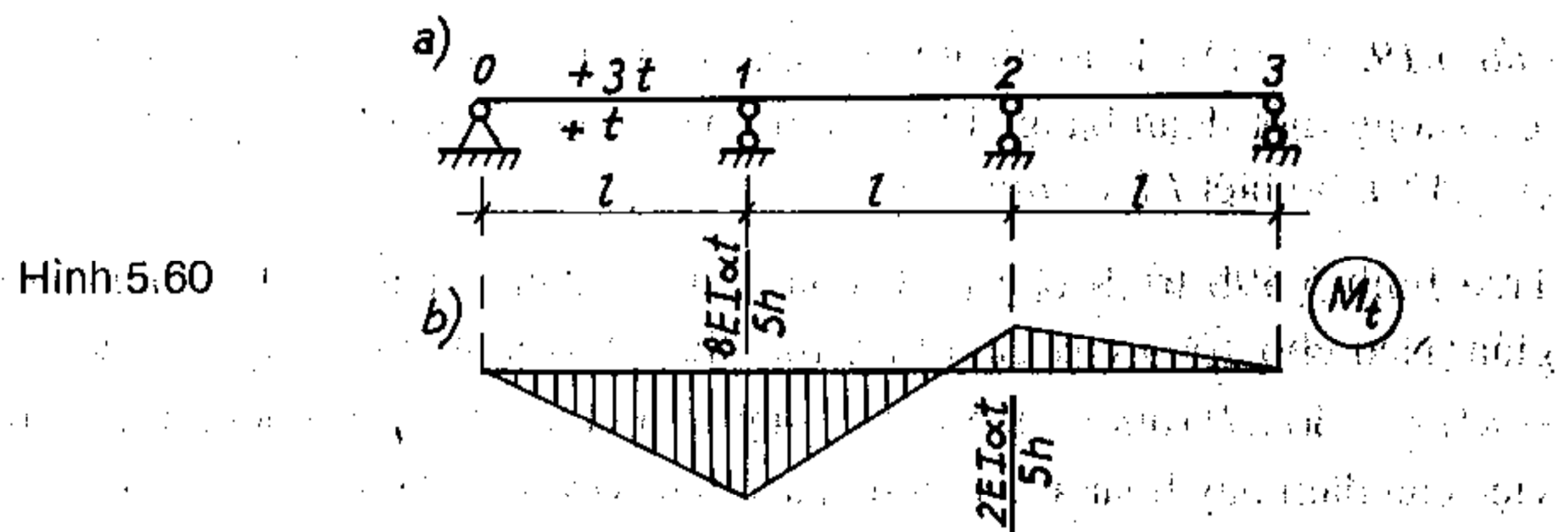
$$4M_1 + M_2 + \frac{6EI\Delta}{l^2} = 0; \quad M_1 + 2M_2 - \frac{6EI\Delta}{l^2} = 0.$$

Kết quả giải hệ phương trình:

$$M_1 = -\frac{18EI\Delta}{7l^2}; \quad M_2 = +\frac{30EI\Delta}{7l^2}$$

Trên hình 5.59c vẽ biểu đồ mômen tựa. Biểu đồ này cũng là biểu đồ cân tìm vì trên hệ không có tải trọng.

Ví dụ 5.20. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục chịu sự biến thiên nhiệt độ như trên hình 5.60a. Cho biết $EI = const$; $h = const$.



Phương trình ba mômen viết cho gối 1 và gối 2:

$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 + 3EI\alpha \left[\frac{l_1}{h_1}(t_{21} - t_{11}) + \frac{l_2}{h_2}(t_{22} + t_{12}) \right] = 0;$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 + 3EI\alpha \left[\frac{l_2}{h_2}(t_{22} - t_{12}) + \frac{l_3}{h_3}(t_{23} - t_{13}) \right] = 0,$$

trong đó: $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $M_0 = M_3 = 0$; $h_1 = h_2 = h_3 = h$;

$$t_{21} = +t; \quad t_{11} = +3t; \quad t_{22} = t_{12} = t_{23} = t_{13} = 0.$$

Thay các số liệu trên vào hệ phương trình và giải ra ta được:

$$M_1 = \frac{8EI\alpha t}{5h}; \quad M_2 = -\frac{2EI\alpha t}{5h}$$

Biểu đồ mômen uốn cân tìm vẽ trên hình 5.60b.

B. Cách tính dầm liên tục theo phương pháp tiêu cự mômen

Khi tính các dầm liên tục nhiều nhịp, nếu dùng phương trình ba mômen thì khối lượng tính toán vẫn còn khá lớn vì phải thiết lập và giải một hệ nhiều phương trình ba mômen. Trong những trường hợp này ta có thể dùng phương pháp tiêu cự mômen.

Để trình bày được đơn giản ta giả thiết dầm liên tục chỉ chịu tác dụng của tải

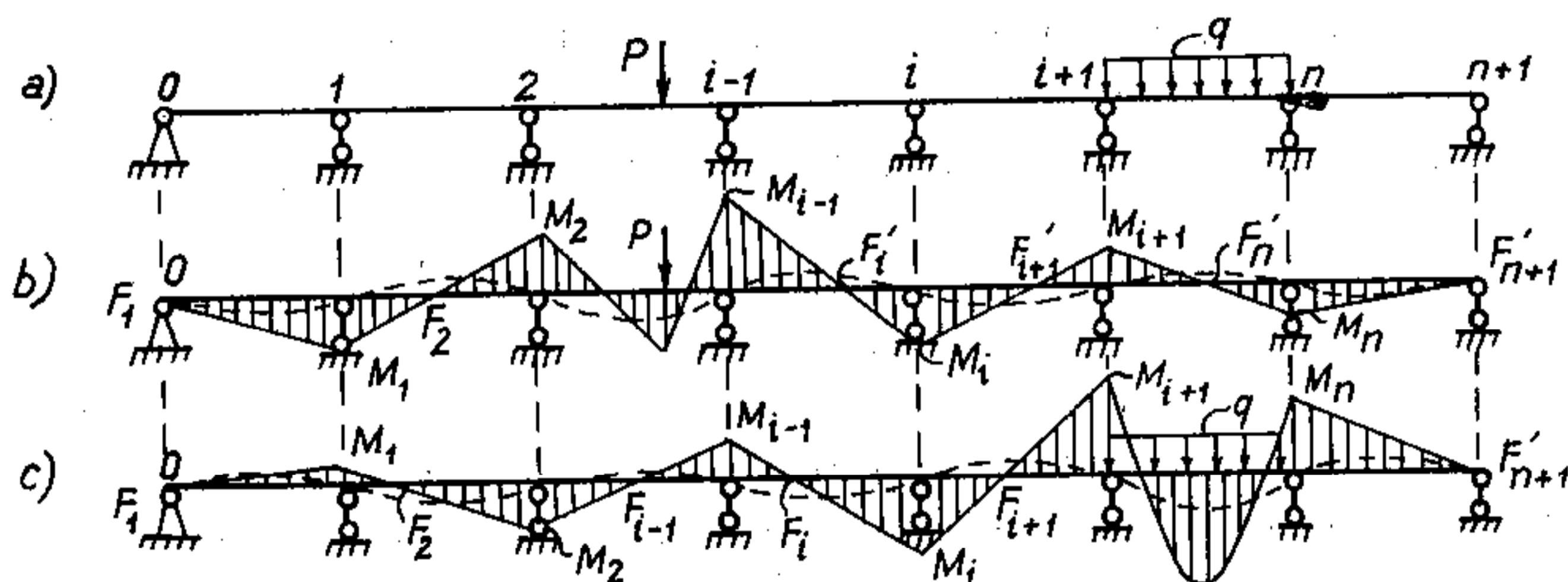
trọng. Trên cơ sở này bạn đọc có thể phát triển cách tính để giải bài toán khi dầm chịu tác dụng của các nguyên nhân khác.

Thực chất của phương pháp tiêu cự mômen là vận dụng khéo léo các phương trình ba mômen để tính dầm liên tục nhiều nhịp với điều kiện là *tải trọng chỉ tác dụng trên một nhịp*. Như vậy, trong phương pháp này, nếu cần tính dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng tác dụng trên một số nhịp của dầm ta cần áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để đưa về các bài toán trong đó dầm chỉ chịu tải trọng trên một nhịp. Ví dụ, với hệ trên hình 5.61a ta cần phải phân ra thành hai bài toán như trên hình 5.61b và 5.61c.

Như vậy, nếu tìm cách vẽ nhanh được biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục khi tải trọng chỉ đặt ở một nhịp dầm thì ta cũng có thể vẽ nhanh được biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục chịu tải trọng đặt trên một số nhịp dầm.

Quan sát kết quả tính các dầm 5.61b và 5.61c ta có các nhận xét sau:

- 1) Đường đàn hồi (đường đứt nét) của dầm luôn theo hình sóng kế tiếp nhau khi tải trọng chỉ tác dụng trên một nhịp dầm.



Hình 5.61

- 2) Trong những nhịp không chịu tải trọng, mômen uốn ở hai gối tựa kế tiếp nhau luôn luôn ngược dấu, mômen uốn tại gối tựa gần nhịp chịu tải trọng có giá trị lớn hơn. Biểu đồ mômen uốn trong những nhịp này có dạng đường thẳng. Những đường thẳng này cắt đường chuẩn tại những điểm (biểu thị mômen uốn bằng không) tương ứng với những điểm uốn trên đường đàn hồi của dầm. Ta gọi những điểm này là *tiêu điểm mômen*.

Trên hình 5.61b tiêu điểm F_1, F_2 nằm ở bên trái nhịp có tải trọng, và trên hình 5.61c những tiêu điểm $F_1, F_2, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}$ nằm ở bên trái nhịp có tải trọng. Ta gọi những tiêu điểm ở bên trái nhịp có tải trọng là những *tiêu điểm trái*.

Trên hình 5.61b, những tiêu điểm $F'_i, F'_{i+1}, F'_{i+2}, \dots, F'_{n+1}$ nằm ở bên phải

nhịp có tải trọng, và trên hình 5.61c tiêu điểm F'_{n+1} nằm ở bên phải nhịp có tải trọng. Ta gọi *những tiêu điểm nằm bên phải nhịp chịu tải trọng là những tiêu điểm phải*,

Như vậy, ở mỗi nhịp sẽ có hai tiêu điểm, chẳng hạn đối với nhịp i có hai tiêu điểm: tiêu điểm trái F_i và tiêu điểm phải F'_i .

- 3) Vị trí của tiêu điểm mômen trong mỗi nhịp không chịu tải trọng sẽ được xác định nếu biết tỷ số giữa hai mômen uốn tại gối tựa ở hai đầu nhịp. Do đó, ta định nghĩa: *tỷ số dương lớn hơn đơn vị giữa hai mômen uốn ở hai gối tựa trong nhịp không chịu tải trọng là tỷ số tiêu cự mômen*.

Nếu nhịp thứ i nằm bên trái nhịp có tải trọng thì gối tựa thứ i gần nhịp có tải trọng hơn gối tựa thứ $i-1$ cho nên mômen uốn M_i lớn hơn và ngược dấu với mômen uốn M_{i-1} , lúc đó ta gọi tỷ số tiêu cự của nhịp i là *tỷ số tiêu cự trái* k_i :

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}} \quad (5.63)$$

Nếu nhịp thứ i nằm ở bên phải nhịp có tải trọng thì gối tựa thứ $i-1$ ở gần nhịp có tải trọng hơn gối tựa thứ i cho nên mômen uốn M_{i-1} lớn hơn và ngược dấu với mômen uốn M_i , lúc này ta gọi tỷ số tiêu cự mômen của nhịp i là *tỷ số tiêu cự phải* k'_i :

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i} \quad (5.64)$$

Sau này, ta sẽ thấy các tỷ số tiêu cự hay nói khác đi là *vị trí của các tiêu điểm không phụ thuộc vào độ lớn và dạng tải trọng mà chỉ phụ thuộc kích thước của dầm*.

- 4) Từ các biểu đồ mômen uốn của hệ (trên hình 5.61b và 5.61c ta nhận thấy có thể vẽ ngay được các biểu đồ đó nếu biết hai yếu tố sau:

- * Mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng.
- * Vị trí các tiêu điểm mômen trên từng nhịp hay nói khác đi là các tỷ số tiêu cự trái của các nhịp ở bên trái nhịp có tải trọng và các tỷ số tiêu cự phải của các nhịp ở bên phải nhịp có tải trọng.

Dưới đây ta sẽ lần lượt tìm cách xác định hai yếu tố này.

1. Xác định các tỷ số tiêu cự trái và phải

Ta hãy thiết lập công thức xác định tỷ số tiêu cự trái k_i cho nhịp thứ i .

Xét hai nhịp không chịu tải trọng và ở bên trái nhịp có tải trọng (hình 5.62).

Viết phương trình ba mômen cho gối tựa $i-1$ của dầm:

$$\lambda_{i-1} M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) M_{i-1} + \lambda_i M_i = 0.$$

Phương trình này không có số hạng tự do bởi vì các nhịp này không chịu tải trọng. Biến đổi phương trình trên bằng cách chia hai vế cho M_{i-1} ta có:

$$\lambda_{i-1} \frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) + \lambda_i \frac{M_i}{M_{i-1}} = 0.$$

Theo định nghĩa về tỷ số tiêu cự trái ta có:

$$-\frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} = k_{i-1} \quad \text{và} \quad -\frac{M_i}{M_{i-1}} = k_i$$

nên có thể viết phương trình trên dưới dạng:

$$-\lambda_{i-1} \frac{1}{k_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) - \lambda_i k_i = 0.$$

Suy ra

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \left[2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right] \quad (5.65)$$

Công thức này có tính chất truy hồi nghĩa là có thể tính được tỷ số tiêu cự trái k_i ở nhịp i nếu biết tỷ số tiêu cự trái k_{i-1} ở nhịp thứ $i-1$ v.v...

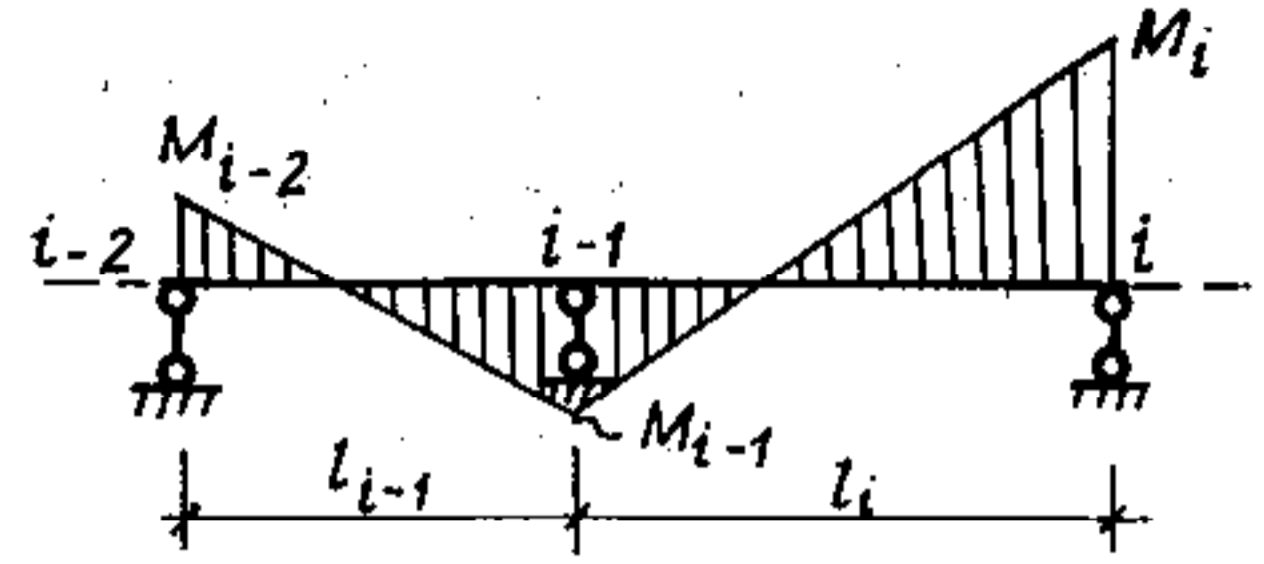
Ta tìm được ngay tỷ số tiêu cự trái của nhịp thứ nhất k_1 như sau:

◆ Nếu nhịp thứ nhất có đầu bên trái là khớp (hình 5.63a) thì mômen uốn ở khớp phải bằng không nghĩa là $M_0 = 0$. Do đó, theo định nghĩa tỷ số tiêu cự trái của nhịp thứ nhất:

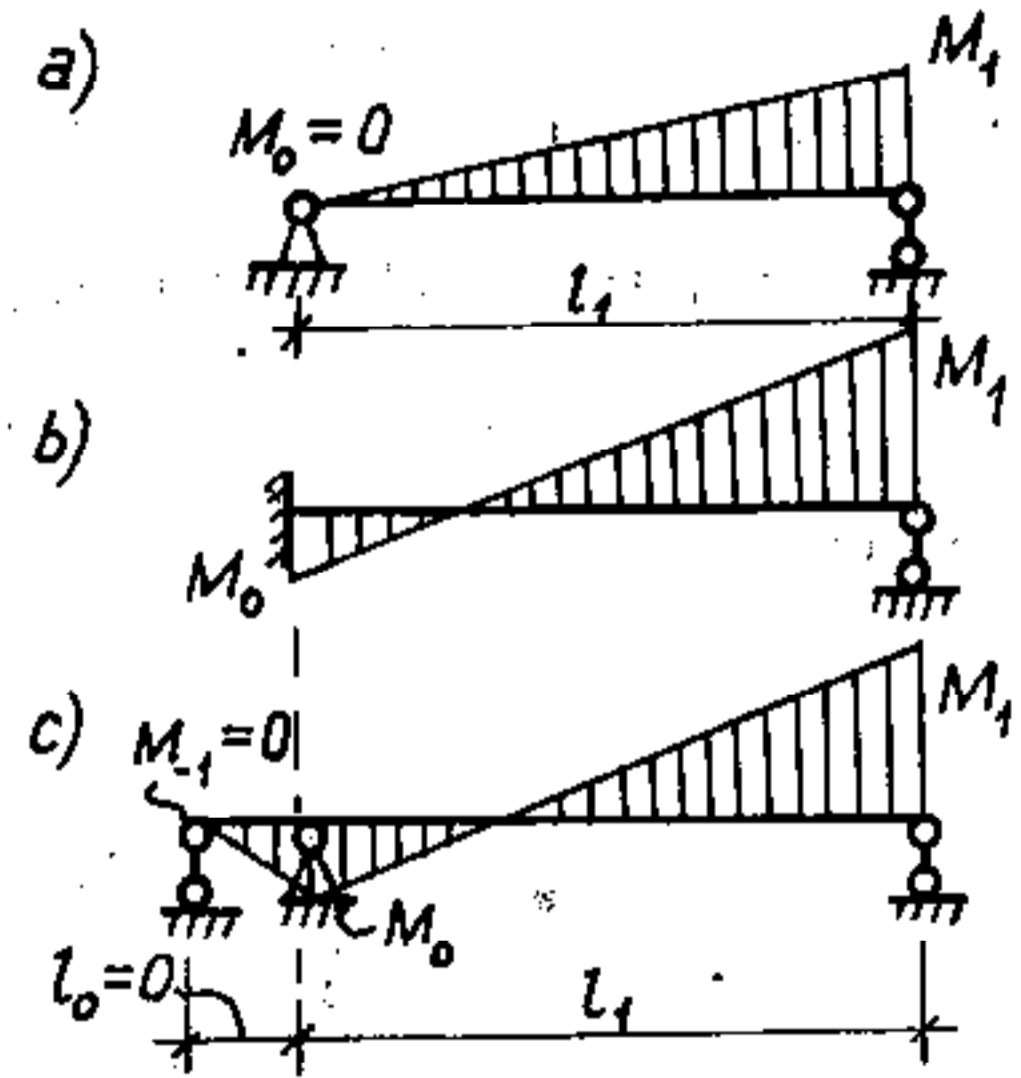
$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0}$$

Vì M_1 là lượng hữu hạn nên $k_1 = \infty$.

◆ Nếu nhịp thứ nhất có đầu bên trái là ngàm (hình 5.63b) thì ta tưởng tượng thay ngàm bằng một nhịp có độ dài vô cùng bé như trên hình 5.63c. Lúc đó $M_{-1} = 0$, còn M_0 bằng một lượng hữu hạn nào đó. Theo định nghĩa tỷ số tiêu cự trái của nhịp số 0, ta có $k_0 = \infty$. Từ công thức truy hồi (5.65) ta tính được tỷ số tiêu cự trái của nhịp thứ nhất với $i = 1$:



Hình 5.62



Hình 5.63

$$k_1 = 2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \left[2 - \frac{l}{k_0} \right] = 2 + \frac{0}{\lambda_1} \left[2 - \frac{l}{\infty} \right] = 2.$$

- Tóm lại: ❖ nếu nhịp đầu tiên của dầm liên tục có đầu trái là khớp thì $k_1 = \infty$;
❖ nếu nhịp đầu tiên của dầm liên tục có đầu trái là ngàm thì $k_1 = 2$.

Sau khi đã biết tỷ số tiêu cự trái k_1 của nhịp đầu tiên, dựa vào (5.65) ta sẽ tìm được tỷ số tiêu cự trái của nhịp bất kỳ thứ i bằng cách lần lượt tính k_2, k_3, k_4, \dots

Tương tự như thế, nếu xét hai nhịp dầm không chịu tải trọng và ở bên phải nhịp có tải trọng ta sẽ lập được công thức cho phép tính truy hồi tỷ số tiêu cự phải như sau:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \left[2 - \frac{l}{k'_{i+1}} \right]. \quad (5.66)$$

Dùng công thức (5.66) ta có thể tìm được tỷ số tiêu cự phải ở nhịp thứ i nếu đã biết tỷ số tiêu cự phải ở nhịp thứ $i+1$. Cũng lý luận như trên, nếu dầm có $n+1$ nhịp, thì tỷ số tiêu cự phải của nhịp cuối cùng thứ $n+1$ được xác định như sau:

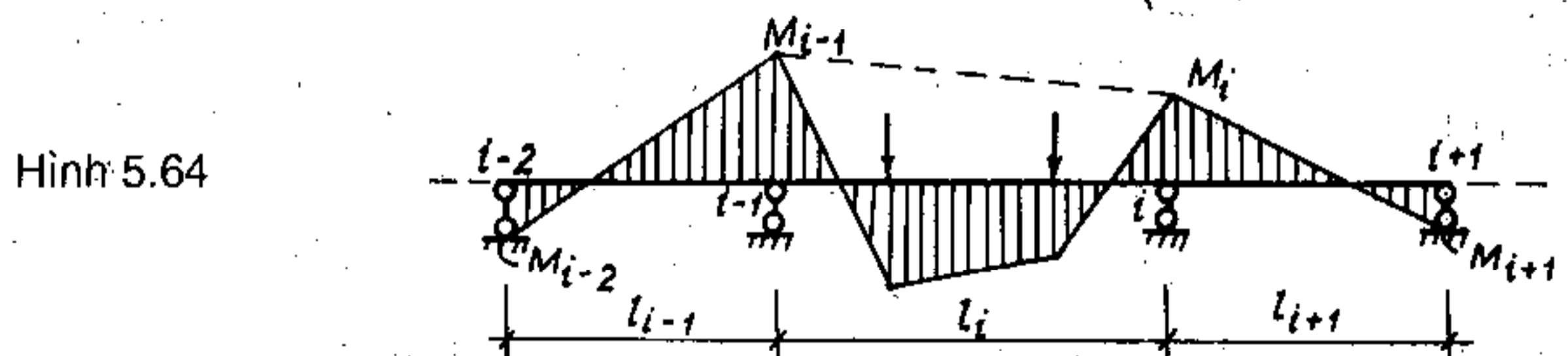
- ❖ nếu nhịp cuối cùng có đầu bên phải là khớp thì $k'_{n+1} = \infty$;
- ❖ nếu nhịp cuối cùng có đầu bên phải là ngàm thì $k'_{n+1} = 2$.

Do đó ta sẽ tìm được tỷ số tiêu cự phải cho bất kỳ nhịp dầm nào.

Nhận xét công thức (5.65) và (5.66) ta thấy các tỷ số tiêu cự trái và phải chỉ phụ thuộc độ dài quy ước của các nhịp dầm, không phụ thuộc tải trọng.

2. Xác định mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng

Giả sử nhịp i là nhịp có tải trọng tác dụng, yêu cầu xác định giá trị của hai mômen tựa M_{i-1} và M_i ở hai bên nhịp có tải trọng (hình 5.64)



Viết các phương trình ba mômen cho gối tựa thứ $i-1$ và gối tựa thứ i , ta được

$$\lambda_{i-1} M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) M_{i-1} + \lambda_i M_i + 6EI_0 \Delta_{(i-1)P} = 0;$$

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6EI_0 \Delta_{iP} = 0.$$

Trong hai phương trình này có bốn ẩn chưa biết là các mômen tựa $M_{i-2}, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}$. Nếu chú ý đến (5.63) và (5.64) ta có thể đưa hai phương trình trên

về dạng chỉ chứa hai ẩn M_{i-1} và M_i như sau:

$$-\frac{\lambda_{i-1}}{k_{i-1}} M_{i-1} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i M_i + 6EI_o \Delta_{(i-1)P} = 0;$$

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i - \frac{\lambda_{i+1}}{k'_{i+1}} M_{i+1} + 6EI_o \Delta_{iP} = 0.$$

Chú ý đến các công thức (5.65) và (5.66), sau khi biến đổi ta có:

$$M_{i-1} k_i + M_i + \frac{6EI_o}{\lambda_i} \Delta_{(i-1)P} = 0; \quad M_{i-1} + M_i k'_i + \frac{6EI_o}{\lambda_i} \Delta_{iP} = 0.$$

Suy ra

$$M_{i-1} = -\frac{6EI_o}{\lambda_i} \frac{\Delta_{(i-1)P} k'_i - \Delta_{iP}}{k_i k'_i - 1}; \quad M_i = -\frac{6EI_o}{\lambda_i} \frac{\Delta_{iP} k_i - \Delta_{(i-1)P}}{k_i k'_i - 1} \quad (5.67)$$

Trong trường hợp dầm chỉ chịu tải trọng tác dụng, theo (6.56) với chú ý là tải trọng chỉ đặt ở nhịp i , ta có:

$$\Delta_{(i-1)P} = \frac{\omega_i b_i}{l_i EI_i}; \quad \Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EI_i}.$$

Do đó:

$$M_{i-1} = -\frac{6I_o \omega_i}{\lambda_i l_i I_i} \frac{(b_i k'_i - a_i)}{k_i k'_i - 1}; \quad M_i = -\frac{6I_o \omega_i}{\lambda_i l_i I_i} \frac{(a_i k_i - b_i)}{k_i k'_i - 1} \quad (5.68)$$

Công thức này cho phép ta tìm được mômen tựa ở hai đầu nhịp có tải trọng. Khi sử dụng công thức (5.68) có thể xảy ra hai trường hợp đặc biệt sau:

1) Nếu dầm liên tục có gối tựa đầu tiên là khớp và tải trọng tác dụng ngay trong nhịp thứ nhất thì ta biết ngay mômen tựa ở khớp đầu tiên $M_0 = 0$, còn mômen tựa M_1 tính theo công thức (5.68) sẽ có dạng vô định bởi vì tỷ số tiêu cự trái $k_1 = \infty$. Muốn khử dạng vô định đó để tìm M_1 , ta viết:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{6I_o \omega_1}{\lambda_1 l_1 I_1} \frac{(a_1 k_1 - b_1)}{k_1 k'_1 - 1} = -\frac{6I_o \omega_1}{\lambda_1 l_1 I_1} \left[\frac{a_1 k_1 / k_1 - b_1 / k_1}{k_1 k'_1 / k_1 - 1 / k_1} \right] = \\ &= -\frac{6I_o \omega_1}{\lambda_1 l_1 I_1} \left[\frac{a_1 - b_1 / \infty}{k'_1 - 1 / \infty} \right] = -\frac{6I_o \omega_1 a_1}{\lambda_1 l_1 k'_1 I_1} \end{aligned}$$

Như vậy nếu dầm liên tục có gối tựa đầu tiên là khớp và tải trọng tác dụng ngay trong nhịp thứ nhất của dầm thì ta có các công thức sau:

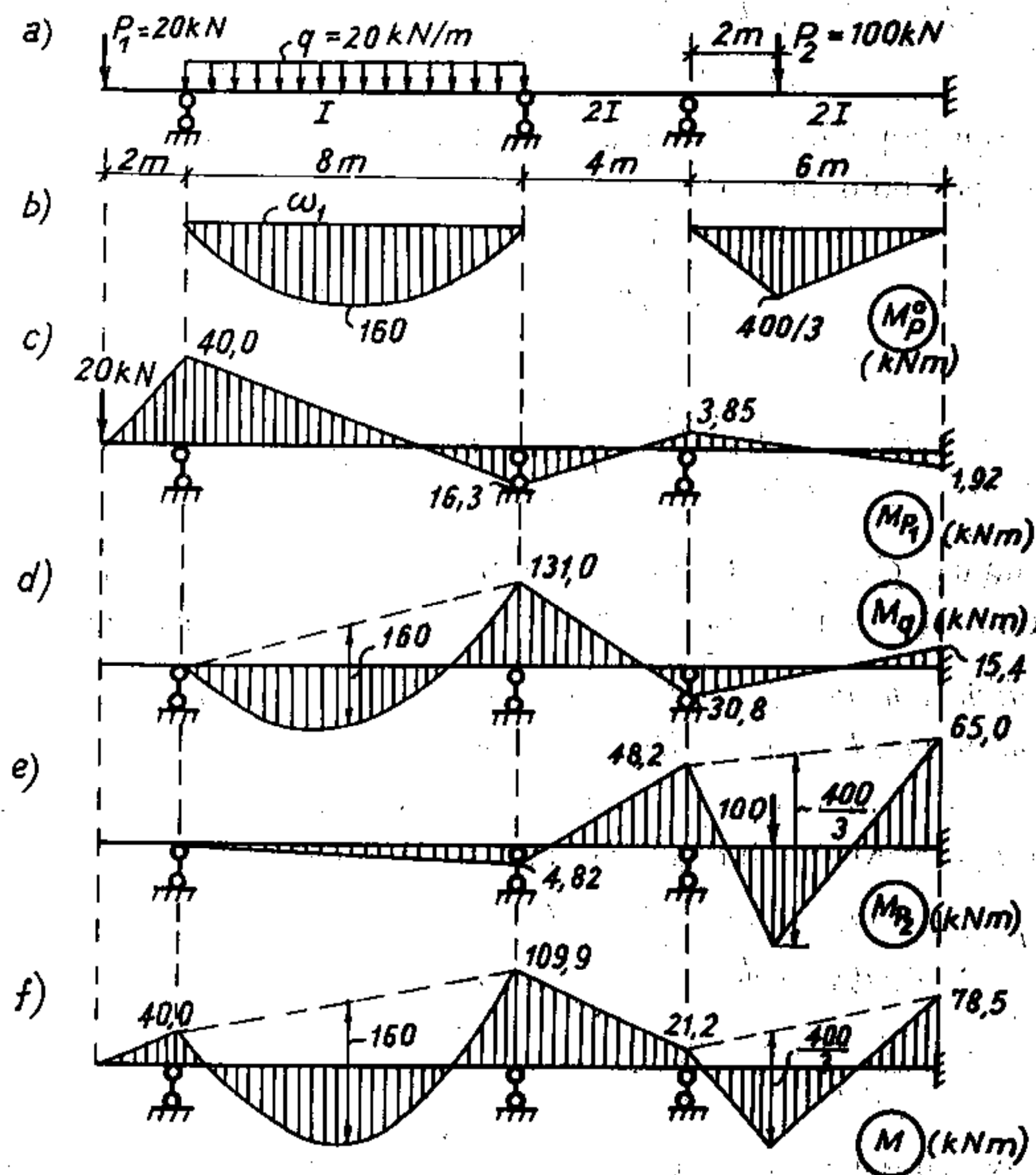
$$M_0 = 0; \quad M_1 = -\frac{6I_o \omega_1 a_1}{\lambda_1 l_1 k'_1 I_1} \quad (5.69)$$

2) Cũng chứng minh tương tự, nếu dầm liên tục có gối tựa cuối cùng là khớp và tải trọng tác dụng ở nhịp cuối thứ $(n+1)$ của dầm thì ta có các công thức:

$$M_n = -\frac{6I_o\omega_{n+1}b_{n+1}}{\lambda_{n+1}l_{n+1}k_{n+1}I_{n+1}}; \quad M_{n+1} = 0. \quad (5.70)$$

Ví dụ 5.21. Vận dụng phương pháp tiêu cự mômen để vẽ biểu đồ mômen uốn cho dầm trên hình 5.65a.

Dầm liên tục trên hình 5.65a chịu tải trọng tác dụng trên ba nhịp. Khi áp dụng phương pháp tiêu cự mômen ta cần chia bài toán đã cho thành ba bài toán riêng rẽ, trong mỗi bài tải trọng chỉ tác dụng ở một nhịp rồi cộng các kết quả theo nguyên lý cộng tác dụng.



Hình 5.65

Ta lần lượt giải bài toán theo thứ tự như sau:

1) Xác định các nhịp quy ước. Chọn $I_o = 2I$ ta có:

$$\lambda_1 = l_1 I_o / I = 8 \cdot 2I / I = 16 \text{ m}; \quad \lambda_2 = 4 \cdot I = 4 \text{ m}; \quad \lambda_3 = 6 \text{ m};$$

2) Xác định các tỷ số tiêu cự theo (5.65) và (5.66)

Tỷ số tiêu cự trái: $k_1 = \infty$; $k_2 = 2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(2 - \frac{l}{k_1} \right) = 2 + \frac{16}{4} \left(2 - \frac{l}{\infty} \right) = 10$;

$$k_3 = 2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \left(2 - \frac{l}{k_2} \right) = 2 + \frac{4}{6} \left(2 - \frac{l}{10} \right) = 3,268.$$

Tỷ số tiêu cự phải: $k'_3 = 2$; $k'_2 = 2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \left(2 - \frac{l}{k'_3} \right) = 2 + \frac{6}{4} \left(2 - \frac{l}{2} \right) = 4,25$;

$$k'_1 = 2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(2 - \frac{l}{k'_2} \right) = 2 + \frac{4}{16} \left(2 - \frac{l}{4,25} \right) = 2,442.$$

3) Xác định mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng và vẽ biểu đồ mômen uốn cho từng trường hợp tải trọng

◆ Trường hợp dầm chỉ chịu lực tập trung $P_1 = 20$ kN đặt ở đầu thừa.

Lúc này tất cả các mômen tựa khác được xác định từ mômen gối tựa $M_0 = -20 \cdot 2 = -40$ kNm theo các tỷ số tiêu cự phải:

$$M_0 = -40 \text{ kNm};$$

$$M_1 = -M_0/k'_1 = -(-40)/2,442 = 16,3 \text{ kNm};$$

$$M_2 = -M_1/k'_2 = -16,3/4,25 = -3,85 \text{ kNm};$$

$$M_3 = -M_2/k'_3 = -(-3,85)/2 = 1,92 \text{ kNm}.$$

Từ các giá trị mômen tựa này ta vẽ được biểu đồ mômen uốn do lực P_1 gây ra như trên hình 5.65c.

◆ Trường hợp dầm chịu tải trọng phân bố đều $q = 20$ kN/m đặt trên nhịp I.

Sử dụng các công thức (5.69) ta có:

$$M_0 = 0; \quad M_1 = -\frac{6I_0\omega_1 a_1}{\lambda_1 l_1 k'_1 I_1}$$

trong đó: $I_0 = 2I$; $I_1 = I$; $\lambda_1 = 16$ m; $l_1 = 8$ m; $a_1 = b_1 = 4$ m;

$$k'_1 = 2,442; \quad \omega_1 = ql_1^3/12 = 20 \cdot 8^3/12 = 2560/3 \text{ kNm}^2.$$

Do đó:
$$M_1 = -\frac{6 \cdot 2I}{16 \cdot 8I} \cdot \frac{2560}{3} \cdot \frac{4}{2,442} = -131 \text{ kNm}.$$

Sau khi đã xác định được các mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng ta tìm các mômen tựa khác theo tỷ số tiêu cự đã biết:

$$M_2 = -M_1/k'_2 = 131/4,25 = 30,8 \text{ kNm};$$

$$M_3 = -M_2/k'_3 = -30,8/2 = -15,4 \text{ kNm}.$$

Từ các giá trị mômen tựa này ta vẽ được biểu đồ mômen uốn do riêng tải trọng $q = 20$ kN/m đặt trong nhịp I gây ra như trên hình 5.65d.

♦ Trường hợp dầm chịu tải trọng $P_2 = 100$ kNm đặt trên nhịp 3.

Sử dụng các công thức (5.68) ta tìm được mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng:

$$M_2 = -\frac{6.21.400}{6.6.21} \times \frac{3,33.2 - 2,67}{3,268.2 - 1} = -48,2 \text{ kNm};$$

$$M_3 = -\frac{6.21.400}{6.6.21} \times \frac{2,67.3,268 - 3,33}{3,268.2 - 1} = -65,0 \text{ kNm}.$$

Sau khi tìm được các mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng ta tìm các mômen tựa còn lại theo các tỷ số tiêu cự đã biết:

$$M_1 = -M_2/k_2 = 48,2/10 = 4,82 \text{ kNm};$$

$$M_0 = -M_1/k_1 = -4,82/\infty = 0 \text{ kNm}.$$

Từ các trị số mômen tựa tìm được ta vẽ biểu đồ mômen uốn do riêng tải trọng $P_2 = 100$ kN gây ra (hình 5.65e).

Biểu đồ mômen uốn tổng cộng là tổng của ba biểu đồ mômen uốn vẽ trên các hình 5.65c, d, e tìm được như trên hình 5.65f.

5.10. Cách tính dầm liên tục đặt trên các gối tựa đàn hồi

Trong thực tế ta có thể gặp các dầm liên tục đặt trên các cột có chiều dài hữu hạn, đặt trên các hệ đàn hồi khác hoặc đặt trên các gối phao v.v... Dưới tác dụng của tải trọng, các gối này có thể chuyển vị đàn hồi theo phương vuông góc với trục dầm. Ta gọi những dầm này là *dầm liên tục đặt trên các gối tựa đàn hồi*.

Sơ đồ tính của dầm như trên hình 5.66a. Giả sử hệ chỉ chịu tải trọng (với các nguyên nhân khác cách giải quyết cũng tương tự).

Gọi k_i là hệ số đàn hồi của gối tựa thứ i . Về ý nghĩa, k_i là chuyển vị của gối tựa thứ i khi gối chịu lực dọc bằng đơn vị. Ví dụ, hệ số đàn hồi của cột thứ i có tiết diện A_i , chiều cao d_i sẽ bằng $k_i = 1. d_i / EA_i$.

Như vậy, nếu phản lực tại gối tựa thứ i là R_i thì giữa R_i và chuyển vị y_i của gối có sự liên hệ:

$$y_i = k_i R_i. \quad (5.71)$$

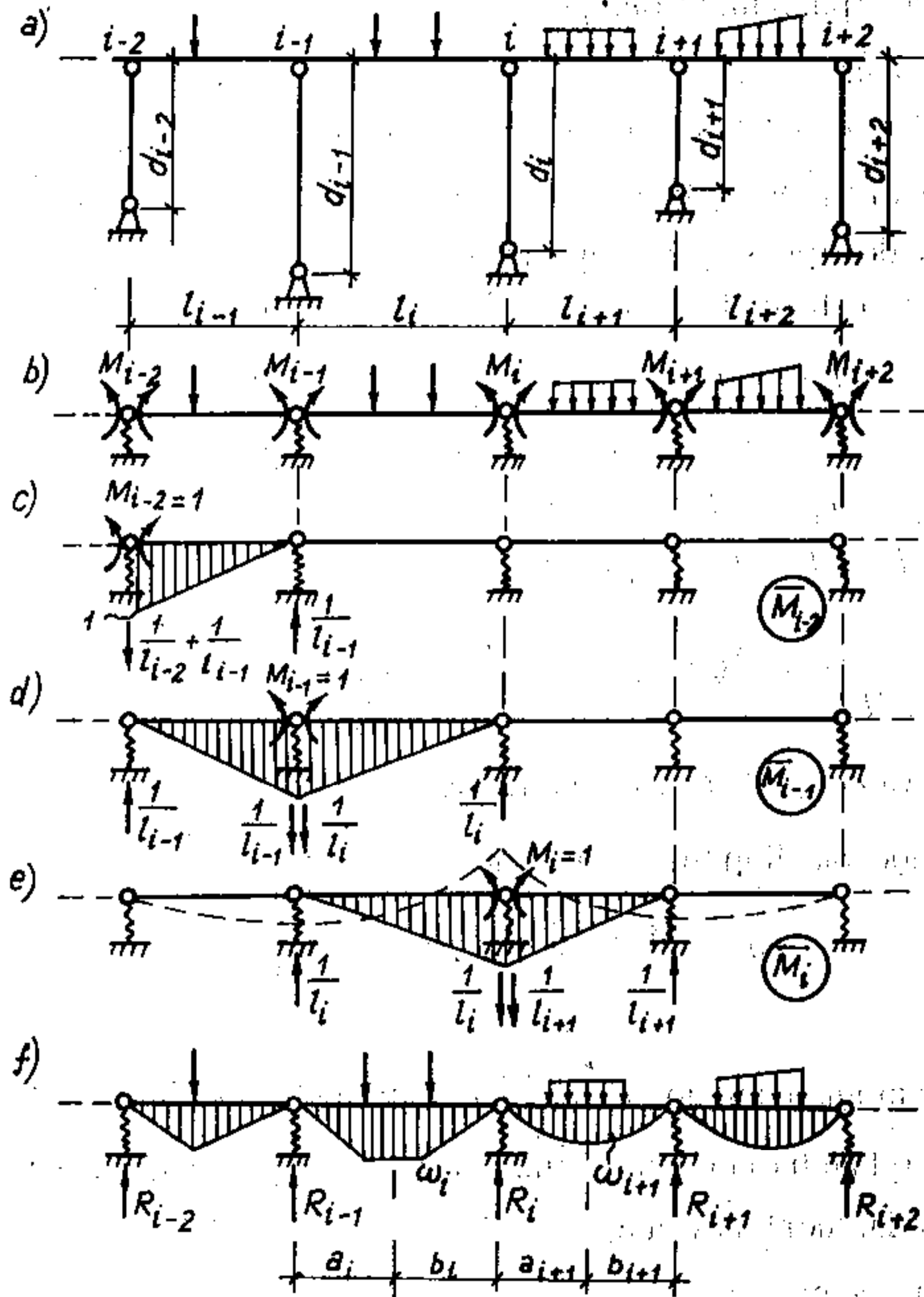
Ta biểu thị các gối tựa đàn hồi bằng các liên kết lò xo và đặc trưng bằng hệ số k_i .

Để tính dầm ta vận dụng phương pháp lực, chọn hệ cơ bản như trên hình 5.66b, ẩn số là mômen uốn tại tiết diện trên các gối tựa trung gian. Với hệ cơ bản đã chọn ta nhận thấy mômen M_i chỉ gây ra chuyển vị trong phạm vi các nhịp $(i-1)$, i , $(i+1)$ và $(i+2)$ như đường đứt nét trên hình 5.66e. Như vậy mômen M_i chỉ gây ra

chuyển vị tương ứng với các ẩn số M_{i-2} , M_{i-1} , M_i , M_{i+1} và M_{i+2} nghĩa là chỉ tồn tại các hệ số $\delta_{(i-2)i} = \delta_{i(i-2)}$; $\delta_{(i-1)i} = \delta_{i(i-1)}$; δ_{ii} ; $\delta_{(i+1)i} = \delta_{i(i+1)}$; $\delta_{(i+2)i} = \delta_{i(i+2)}$, còn các hệ số phụ khác đều bằng không. Phương trình chính tắc viết cho gối tựa trung gian thứ i có dạng:

$$\delta_{i(i-2)}M_{(i-2)} + \delta_{i(i-1)}M_{(i-1)} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i(i+1)}M_{(i+1)} + \delta_{i(i+2)}M_{(i+2)} + \Delta_{iP} = 0. \quad (5.72)$$

Phương trình này chứa năm mômen tựa chưa biết tại năm gối kế tiếp nhau nên gọi là *phương trình năm mômen*.



Hình 5.66

Ứng với mỗi gối tựa trung gian của dầm ta lập được một phương trình năm mômen. Do đó, với dầm có n gối tựa trung gian ta sẽ lập được hệ n phương trình năm mômen đủ để xác định n ẩn số mômen tựa.

Bây giờ ta xác định các hệ số và số hạng tự do của phương trình năm mômen. Khi

tìm các hệ số này, ngoài ảnh hưởng của biến dạng uốn ta còn phải chú ý đến ảnh hưởng của biến dạng dọc trục trong các gối tựa đàn hồi (bỏ qua biến dạng trượt). Theo công thức xác định chuyển vị ta có:

$$\delta_{ij} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_j) + \sum_k \bar{N}_{ki} \bar{N}_{kj} \frac{d_k}{EA_k},$$

trong đó:

$(\bar{M}_i), (\bar{M}_j)$ – các biểu đồ mômen uốn do $M_i = 1$ và $M_j = 1$ gây ra trong hệ cơ bản;

$\bar{N}_{ki}, \bar{N}_{kj}$ – lực dọc (phản lực) trong gối tựa thứ k do $M_i = 1$ và $M_j = 1$ gây ra trong hệ cơ bản.

Dấu tổng được thực hiện cho tất cả các gối tựa đàn hồi.

Để làm ví dụ, ta xác định các hệ số $\delta_{i(i-2)}$; $\delta_{i(i-1)}$ và δ_{ii} . Các biểu đồ mômen uốn đơn vị và các lực dọc (phản lực) trong các gối tựa đàn hồi do các $M_{i-2} = 1$; $M_{i-1} = 1$ và $M_i = 1$ gây ra trong hệ cơ bản được xác định như trên hình 5.66c, d, e. Ta có:

$$\delta_{i(i-2)} = 0 + \left(-\frac{1}{l_i}\right) \left(-\frac{1}{l_{i-1}}\right) \frac{d_{i-1}}{EA_{i-1}} = \frac{1}{l_i l_{i-1}} \times \frac{d_{i-1}}{EA_{i-1}} = \frac{k_{i-1}}{l_i l_{i-1}};$$

$$\delta_{i(i-1)} = \frac{l_i}{6EI_i} - \frac{k_{i-1}}{l_i} \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right) - \frac{k_i}{l_i} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right);$$

$$\delta_{ii} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i^2} + k_i \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}^2}.$$

Các hệ số $\delta_{i(i+1)}$ và $\delta_{i(i+2)}$ được xác định tương tự.

Số hạng tự do được xác định theo công thức sau:

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(M_P^o) + \sum_k \bar{N}_{ki} N_{kP}^o \frac{d_k}{EA_k},$$

trong đó:

(M_P^o) – biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 5.66f);

N_{kP}^o – lực dọc (phản lực) tại gối tựa thứ k do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Ký hiệu đại lượng này là R_k (hình 5.66f).

Sau khi thực hiện các phép tính, ta được:

$$\Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EI_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EI_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i} R_{i-1} - k_i R_i \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} R_{i+1}.$$

Các đại lượng ω, a, b vẫn có ý nghĩa tương tự như đã trình bày trong mục 5.9.

Sau khi thay các hệ số và số hạng tự do vào phương trình (5.72) ta sẽ được phương trình năm mômen dưới dạng khai triển.

Trong trường hợp đặc biệt khi dầm có độ cứng $EI = \text{const}$, chiều dài của các nhịp đều nhau và các gối đàn hồi có hệ số đàn hồi k như nhau, phương trình năm mômen có dạng đơn giản như sau:

$$\alpha M_{i-2} + (1-4\alpha) M_{i-1} + (4+6\alpha) M_i + (1-4\alpha) M_{i+1} + \alpha M_{i+2} + \frac{6}{l^2} (\omega_i a_i + \omega_{i+1} b_{i+1}) + \alpha l (R_{i-1} - 2R_i + R_{i+1}) = 0. \quad (5.73)$$

trong đó α là đại lượng không thứ nguyên,

$$\alpha = \frac{6EI}{l^3} k. \quad (5.74)$$

Sau khi giải hệ phương trình năm mômen để xác định các mômen tựa M_i ta vẽ được các biểu đồ mômen uốn, biểu đồ lực cắt và xác định phản lực trong các gối tựa theo cách thức đã trình bày trong mục 5.9.

5.11. Cách tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng di động

Như đã biết từ chương 3, nhiệm vụ của bài toán tính hệ chịu tải trọng di động bao gồm: xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng trên công trình và xác định giá trị để tính của đại lượng nghiên cứu S . Để thực hiện nhiệm vụ này ta đã xây dựng khái niệm về đường ảnh hưởng, tiếp đó vận dụng đường ảnh hưởng để xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng và xác định giá trị để tính của đại lượng nghiên cứu S như đã trình bày trong 3.7; 3.8; 3.9. Lý thuyết trình bày trong các mục đó là tổng quát, áp dụng cho các đ.a.h. trong hệ tĩnh định cũng như trong hệ siêu tĩnh nên ở đây chỉ cần trình bày về cách vẽ đ.a.h. trong hệ siêu tĩnh mà không cần bàn thêm về cách vận dụng đ.a.h. để thực hiện hai nhiệm vụ nói trên.

Nguyên tắc tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng di động cũng tương tự như nguyên tắc tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng bất động. Như đã biết, muốn xác định một đại lượng nào đó trong hệ siêu tĩnh thì trước tiên phải tìm các ẩn số X_k . Do đó, muốn vẽ đ.a.h. của một đại lượng bất kỳ trong hệ siêu tĩnh thì trước tiên ta cũng phải vẽ được đ.a.h. của các ẩn số X_k . Những đ.a.h. X_k gọi là "đường ảnh hưởng cơ bản". Sau đó vẽ các đ.a.h. của những đại lượng khác theo các đ.a.h. cơ bản.

A. Đường ảnh hưởng cơ bản

Đường ảnh hưởng cơ bản X_k được xác định từ hệ phương trình chính tắc (5.4) nhưng khi vẽ đ.a.h. ta chỉ cho một lực $P = 1$ duy nhất di động trên hệ nên số hạng tự do Δ_{kP} biểu thị chuyển vị theo phương X_k do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản trở thành δ_{kP} vì nguyên nhân gây ra chuyển vị này bằng đơn vị.

Do đó, hệ phương trình chính tắc khi vẽ đ.a.h. có dạng:

D – định thức các hệ số trong hệ phương trình (5.75):

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1i} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2i} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \dots & \delta_{ki} & \dots & \delta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{ni} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix};$$

D_{ik} – định thức suy ra từ định thức D bằng cách loại bỏ hàng thứ i cột thứ k (hoặc hàng thứ k cột thứ i).

B. Đường ảnh hưởng phản lực, nội lực và chuyển vị

Sau khi tìm được các đ.a.h. cơ bản, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đ.a.h. của đại lượng S (phản lực, nội lực hay chuyển vị) theo biểu thức sau:

$$\text{Đ.a.h.} S = \bar{S}_1(\text{đ.a.h.} X_1) + \bar{S}_2(\text{đ.a.h.} X_2) + \dots + \bar{S}_n(\text{đ.a.h.} X_n) + \text{đ.a.h.} S^o, \quad (5.78)$$

trong đó:

$\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ – giá trị của đại lượng cần vẽ đ.a.h. do riêng từng lực X_1, X_2, \dots, X_n bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản, chúng là những đại lượng có giá trị xác định;

$\text{đ.a.h.} X_1, \text{đ.a.h.} X_2, \dots, \text{đ.a.h.} X_n$ – các đường ảnh hưởng cơ bản;

$\text{đ.a.h.} S^o$ – đường ảnh hưởng của đại lượng S trong hệ cơ bản.

Khi vẽ những đường ảnh hưởng này ta nên thiết lập bảng tính (xem ví dụ).

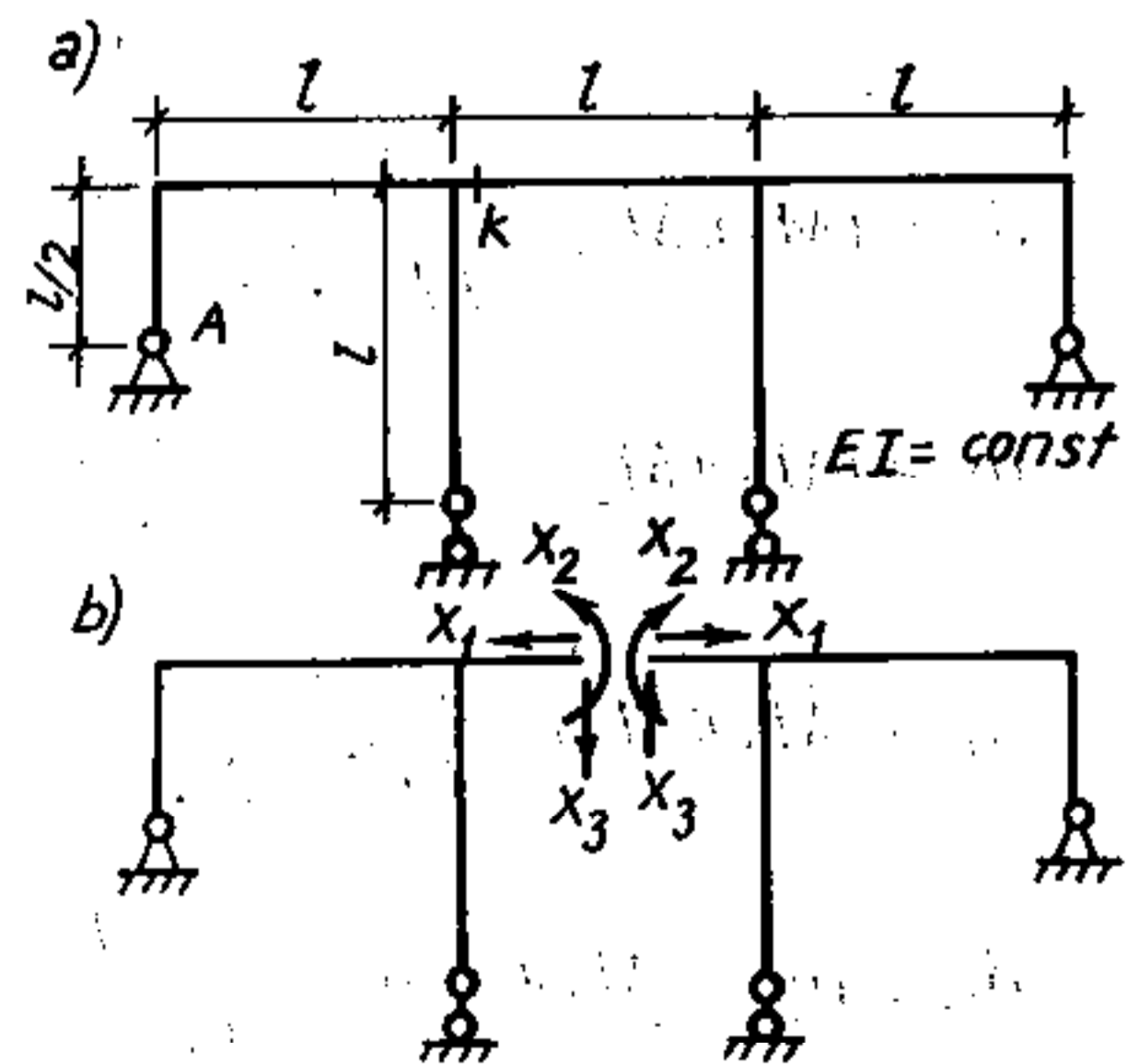
Ví dụ 5.22. Cho khung siêu tĩnh như trên hình 5.67a. Yêu cầu:

- Vẽ các đường ảnh hưởng cơ bản.
- Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn và lực cắt tại tiết diện ở chính giữa hệ và tại tiết diện k .
- Vẽ đường ảnh hưởng của thành phần phản lực thẳng đứng tại gối tựa A .

1) Vẽ các đường ảnh hưởng cơ bản

Hệ có bậc siêu tĩnh bằng ba.

Chọn hệ cơ bản như trên hình 5.67b.



Hình 5.67

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \delta_{3P} = 0.$$

Vì hệ cơ bản chọn đối xứng nên các biểu đồ (\bar{M}_1) , (\bar{M}_2) có tính chất đối xứng còn biểu đồ (\bar{M}_3) có tính chất phản xứng. Như đã biết, kết quả nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản xứng bằng không. Do đó, trong trường hợp này ta có $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ và $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$.

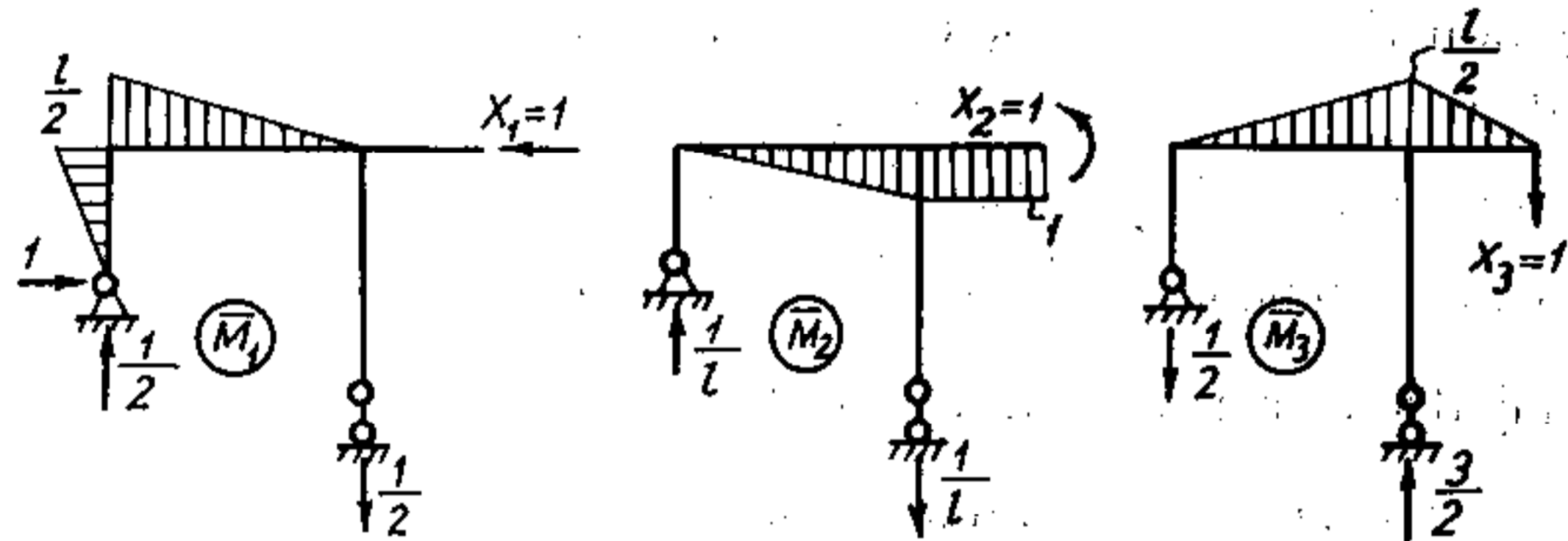
Hệ phương trình chính tắc phân thành hai nhóm độc lập:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{33} X_3 + \delta_{3P} = 0.$$

Để xác định các hệ số δ_{km} ta chỉ cần thực hiện tính toán với nửa hệ rồi nhân đôi kết quả. Các biểu đồ đơn vị vẽ trên hình 5.68.



Hình 5.68

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{l^3}{4EI};$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] = \frac{5l}{3EI};$$

$$\delta_{33} = (\bar{M}_3)(\bar{M}_3) = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{l^3}{4EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = -\frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right] = -\frac{l^2}{6EI};$$

Thay các kết quả vào hệ phương trình chính tắc, sau khi biến đổi ta được:

$$\frac{l^3}{4} X_1 - \frac{l^2}{6} X_2 + EI \delta_{1P} = 0;$$

$$-\frac{l^2}{6} X_1 + \frac{5l}{3} X_2 + EI \delta_{2P} = 0;$$

$$\frac{l^3}{4} X_3 + EI \delta_{3P} = 0.$$

Từ phương trình thứ ba ta có $X_3 = -\frac{4EI}{l^3} \delta_{3P}$. (a)

Để giải hai phương trình đầu, ta sử dụng phương pháp hệ số ảnh hưởng:

$$X_1 = EI (\beta_{11} \delta_{1P} + \beta_{12} \delta_{2P});$$

$$X_2 = EI (\beta_{21} \delta_{1P} + \beta_{22} \delta_{2P}).$$

Định thức các hệ số:

$$D = \begin{vmatrix} l^3/4 & -l^2/6 \\ -l^2/6 & 5l/3 \end{vmatrix} = \frac{7l^4}{18}.$$

$$\beta_{11} = (-1)^{(1+1+1)} \frac{5l}{3} \cdot \frac{18}{7l^4} = -\frac{30}{7l^3};$$

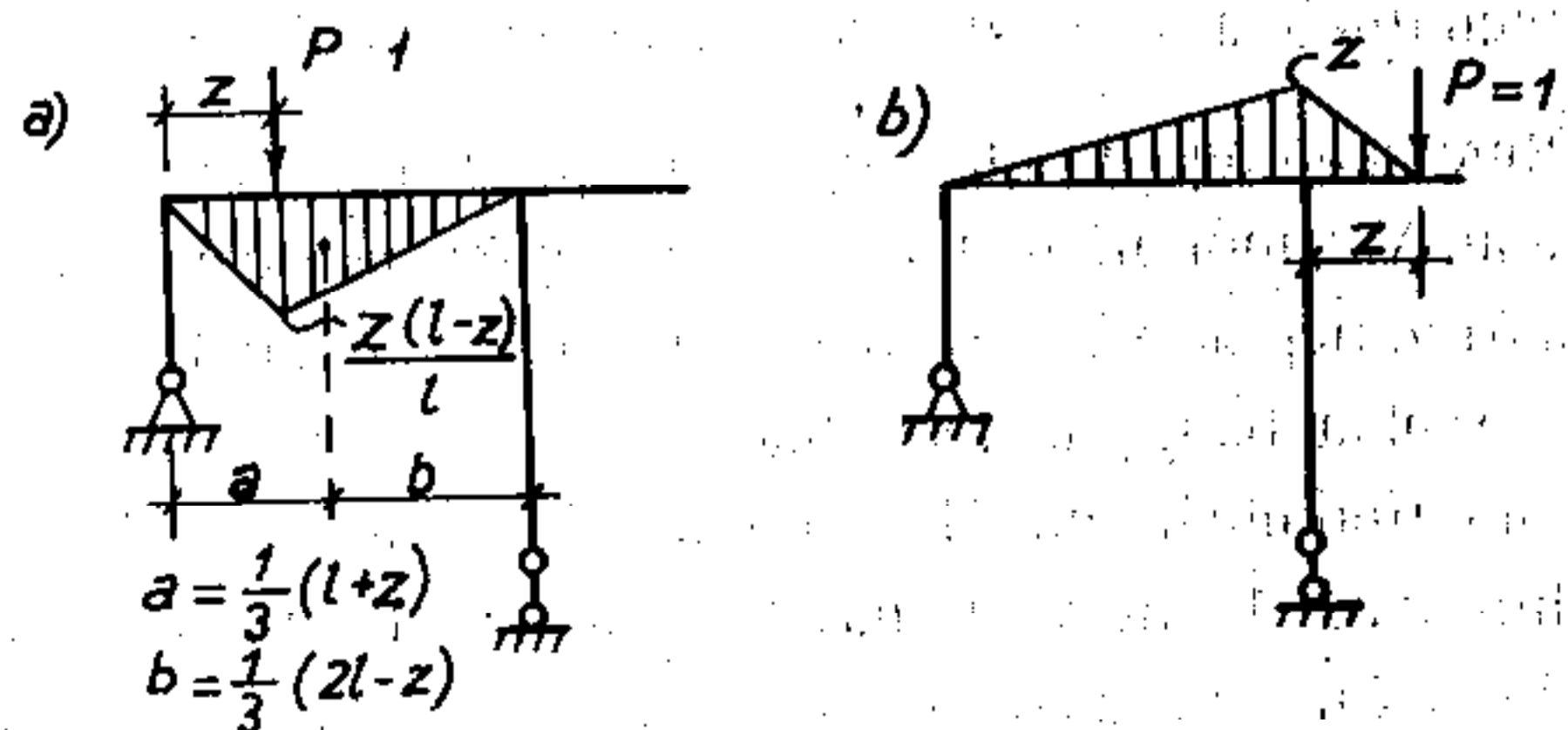
$$\beta_{22} = (-1)^{(2+2+1)} \frac{l^3}{4} \cdot \frac{18}{7l^4} = -\frac{9}{14l};$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = (-1)^{(1+2+1)} \left(-\frac{l^2}{6} \right) \cdot \frac{18}{7l^4} = -\frac{3}{7l^2}.$$

Vậy $X_1 = -\frac{3EI}{7l^3} (10 \delta_{1P} + l \delta_{2P})$; (b)

$X_2 = -\frac{3EI}{14l^2} (2 \delta_{1P} + 3l \delta_{2P})$. (c)

Để xác định δ_{kP} ta lần lượt cho $P=1$ di động trong từng nhịp.



Hình 5.69

◆ Khi $P=1$ di động trên nhịp bên trái, (M_p^o) có dạng như trên hình 5.69a.

$$\delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_p^o) = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{z(l-z)}{l} \cdot \frac{2l-z}{3l} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{12EI} z(l-z)(2l-z);$$

$$\delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_p^o) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{z(l-z)}{l} \cdot \frac{l+z}{3l} \cdot l = \frac{1}{6lEI} z(l^2 - z^2);$$

$$\delta_{3P} = (\bar{M}_3)(M_p^o) = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{z(l-z)}{l} \cdot \frac{l+z}{3l} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{12lEI} z(l^2 - z^2).$$

Nếu ký hiệu $u = z/l$ thì

$$\delta_{1P} = -\frac{l^3}{12EI} u(1-u)(2-u) = -\frac{l^3}{12EI} f_1(u);$$

$$\delta_{2P} = \frac{l^2}{6EI} u(1-u^2) = \frac{l^2}{6EI} f_2(u);$$

$$\delta_{3P} = -\frac{l^3}{12EI} u(1-u^2) = -\frac{l^3}{12EI} f_2(u),$$

với $f_1(u) = u(1-u)(2-u)$; $f_2(u) = u(1-u^2)$.

Thay những số liệu này vào (a), (b) và (c) ta sẽ tìm được phương trình các đường ảnh hưởng cơ bản trong nhịp bên trái:

$$X_1 = -\frac{3EI}{7l^3} \left[-\frac{10l^3}{12EI} f_1(u) + \frac{l^3}{6EI} f_2(u) \right] = \frac{l}{14} [5f_1(u) - f_2(u)]; \quad (d)$$

$$X_2 = -\frac{3EI}{14l^2} \left[-\frac{2l^3}{12EI} f_1(u) + \frac{3l^3}{6EI} f_2(u) \right] = \frac{l}{28} [f_1(u) - 3f_2(u)]; \quad (e)$$

$$X_3 = \frac{4EI}{l^3} \cdot \frac{l^3}{12EI} f_2(u) = \frac{1}{3} f_2(u). \quad (f)$$

Cho u biến thiên ta sẽ vẽ được các đường ảnh hưởng cơ bản trong nhịp trái.

Trong thực hành người ta thường chia nhịp thành những đoạn có khoảng cách bằng nhau. Với mỗi điểm chia (ranh giới giữa các đoạn chia) ta xác định được một giá trị u ; tiếp đó xác định được một tung độ đ.a.h. tương ứng. Nối các tung độ này với nhau bằng các đoạn thẳng ta sẽ được đường ảnh hưởng cần tìm. Tất nhiên càng tính nhiều tung độ đ.a.h. tại nhiều điểm chia khác nhau thì kết quả càng chính xác. Trong ví dụ này ta chọn các điểm chia như trên hình 5.70a. Kết quả tính tung độ các đ.a.h. tương ứng tại các điểm chia ghi trong bảng 5.3.

Bảng 5.3

| Điểm | u | $f_1(u)$ | $f_2(u)$ | Đ.a.h. X_1 , (theo d) | Đ.a.h. X_2 , (theo e) | Đ.a.h. X_3 , (theo f) |
|------|------|----------|----------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0 | 0,00 | 0,0000 | 0,0000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1 | 0,25 | 0,3281 | 0,2344 | 0,100 | -0,0131 | 0,078 |
| 2 | 0,50 | 0,3750 | 0,3750 | 0,107 | -0,0271 | 0,125 |
| 3 | 0,75 | 0,2344 | 0,3281 | 0,060 | -0,0271 | 0,109 |
| 4 | 1,00 | 0,0000 | 0,0000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Dựa vào những số liệu này ta sẽ vẽ được các đ.a.h. cơ bản trong nhịp trái (hình 5.70b, c, d).

◆ Khi $P=1$ di động trên phần trái của nhịp giữa, (M_P^o) có dạng như trên hình 5.69b.

$$\delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^o) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot z \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{12EI} z = \frac{l^3}{12EI} u;$$

$$\delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_P^o) = -\frac{1}{EI} \left[\frac{zl}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{z \cdot z}{2} \cdot 1 \right] = -\frac{1}{6EI} z(2l + 3z) =$$

$$= -\frac{l^3}{6EI} u(2 + 3u) = -\frac{l^3}{6EI} f_3(u);$$

$$\delta_{3P} = (\bar{M}_3)(M_P^o) = \frac{1}{EI} \left[\frac{zl}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{z \cdot z}{2} \cdot \frac{(l/2 - z/3)}{l/2} \right] = \frac{1}{6EI} z \left[l^2 + \frac{3}{2}zl - z^2 \right] =$$

$$= \frac{l^3}{12EI} u(2 + 3u - 2u^2) = \frac{l^3}{12EI} f_4(u),$$

trong đó: $f_3(u) = u(2 + 3u);$ $f_4(u) = u(2 + 3u - 2u^2).$

Thay các số liệu vào (a), (b), và (c) ta được:

$$X_1 = -\frac{3EI}{7l^3} \left[\frac{10l^3}{12EI} u - \frac{l^3}{6EI} f_3(u) \right] = \frac{l}{14} [f_3(u) - 5u]; \quad (g)$$

$$X_2 = -\frac{3EI}{14l^2} \left[\frac{2l^3}{12EI} u - \frac{3l^3}{6EI} f_3(u) \right] = \frac{l}{28} [3f_3(u) - u]; \quad (h)$$

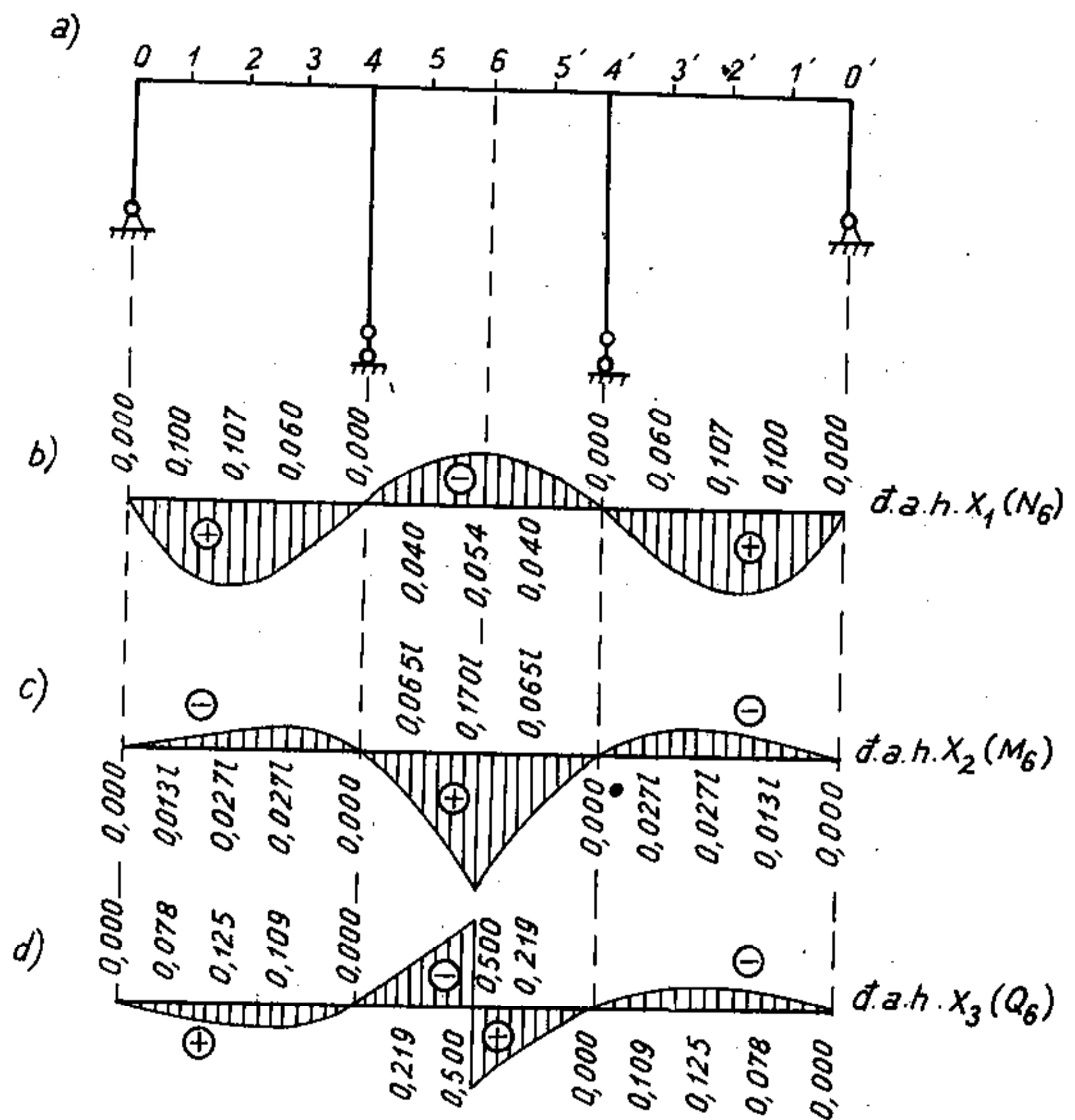
$$X_3 = -\frac{4EI}{l^3} \cdot \frac{l^3}{12EI} f_4(u) = -\frac{1}{3} f_4(u). \quad (i)$$

Kết quả tính các tung độ của đ.a.h. cơ bản trên nửa phần bên trái của nhịp giữa ghi trong bảng 5.4.

Bảng 5.4

| Điểm | u | $f_3(u)$ | $f_4(u)$ | Đ.a.h. X_1 , (theo g) | Đ.a.h. X_2 , (theo h) | Đ.a.h. X_3 , (theo i) |
|------|------|----------|----------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 4 | 0,00 | 0,0000 | 0,0000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 5 | 0,25 | 0,6875 | 0,6563 | -0,040 | 0,065.1 | -0,219 |
| 6 | 0,50 | 1,7500 | 1,5000 | -0,054 | 0,170.1 | -0,500 |

Dựa vào những số liệu này ta sẽ vẽ được các đường ảnh hưởng cơ bản trên nửa phần bên trái của nhịp giữa.



Hình 5.70

Vì khung đối xứng và các cặp ẩn số có tính đối xứng hoặc phản xứng nên ta không cần cho $P=I$ di động trên nửa phần bên phải của khung để tính toán mà suy ra như sau: các tung độ của đ.a.h. X_1 , đ.a.h. X_2 tại những điểm thuộc phần bên phải khung và các tung độ tại những điểm đối xứng thuộc phần bên trái

khung có giá trị và dấu như nhau, còn đối với *d.a.h.* X_3 thì hai tung độ này có giá trị bằng nhau nhưng trái dấu (hình 5.70b, c, d).

2) *Vẽ đường ảnh hưởng nội lực và phản lực*

Đường ảnh hưởng mômen uốn và lực cắt tại tiết diện ở giữa khung chính là *d.a.h.* X_2 và *d.a.h.* X_3 .

Để vẽ các *d.a.h.* M_k , Q_k , R_A , ta áp dụng công thức (5.78):

$$\text{Đ.a.h.} M_k = \bar{M}_{k1}(\text{đ.a.h.} X_1) + \bar{M}_{k2}(\text{đ.a.h.} X_2) + \bar{M}_{k3}(\text{đ.a.h.} X_3) + \text{đ.a.h.} M_k^0;$$

$$\text{Đ.a.h.} Q_k = \bar{Q}_{k1}(\text{đ.a.h.} X_1) + \bar{Q}_{k2}(\text{đ.a.h.} X_2) + \bar{Q}_{k3}(\text{đ.a.h.} X_3) + \text{đ.a.h.} Q_k^0;$$

$$\text{Đ.a.h.} R_A = \bar{R}_{A1}(\text{đ.a.h.} X_1) + \bar{R}_{A2}(\text{đ.a.h.} X_2) + \bar{R}_{A3}(\text{đ.a.h.} X_3) + \text{đ.a.h.} R_A^0.$$

Từ hình 5.68 ta dễ dàng xác định được:

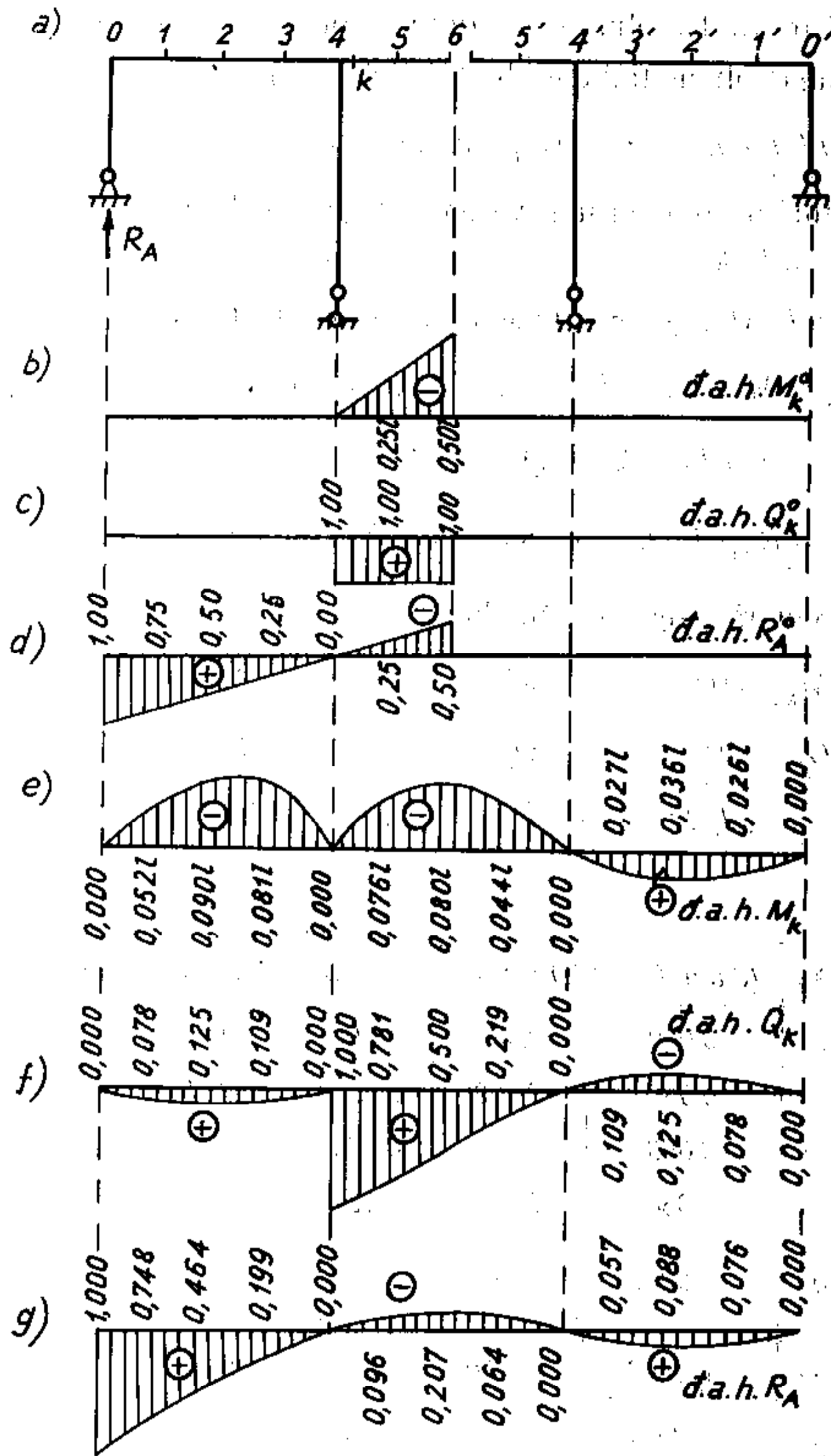
$$\bar{M}_{k1} = 0; \quad \bar{M}_{k2} = 1; \quad \bar{M}_{k3} = -1/2;$$

$$\bar{Q}_{k1} = 0; \quad \bar{Q}_{k2} = 0; \quad \bar{Q}_{k3} = 1;$$

$$\bar{R}_{A1} = 1/2; \quad \bar{R}_{A2} = 1/l; \quad \bar{R}_{A3} = -1/2.$$

Bảng 5.5

| Điểm | Đ.a.h. X_2 | -(đ.a.h. X_3) /2 | Đ.a.h. M_k^0 | Đ.a.h. M_k | Đ.a.h. X_3 | Đ.a.h. Q_k^0 | Đ.a.h. Q_k |
|------|--------------|---------------------|----------------|--------------|--------------|----------------|--------------|
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1 | -0,013.l | -0,039.l | 0,000 | -0,052.l | 0,078 | 0,000 | 0,078 |
| 2 | -0,027.l | -0,063.l | 0,000 | -0,090.l | 0,125 | 0,000 | 0,125 |
| 3 | -0,027.l | -0,054.l | 0,000 | -0,081.l | 0,109 | 0,000 | 0,109 |
| 4 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| | | | | | | 1,000 | 1,000 |
| 5 | 0,065.l | 0,109.l | -0,250.l | -0,076.l | -0,219 | 1,000 | 0,781 |
| 6 | 0,170.l | 0,250.l | -0,500.l | -0,080.l | -0,500 | 1,000 | 0,500 |
| | | -0,250.l | 0,000 | | 0,500 | 0,000 | |
| 5' | 0,065.l | -0,109.l | 0,000 | -0,044.l | 0,219 | 0,000 | 0,219 |
| 4' | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 3' | -0,027.l | 0,054.l | 0,000 | 0,027.l | -0,109 | 0,000 | -0,109 |
| 2' | -0,027.l | 0,063.l | 0,000 | 0,036.l | -0,125 | 0,000 | -0,125 |
| 1' | -0,013.l | 0,039.l | 0,000 | 0,026.l | -0,078 | 0,000 | -0,078 |
| 0' | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |



Hình 5.71

Vậy:
$$\text{Đ.a.h.}M_k = \text{đ.a.h.}X_2 - \frac{l}{2}(\text{đ.a.h.}X_3) + \text{đ.a.h.}M_k^0;$$

$$\text{Đ.a.h.}Q_k = \text{đ.a.h.}X_3 + \text{đ.a.h.}Q_k^0;$$

$$\text{Đ.a.h.}R_A = \frac{1}{2}(\text{đ.a.h.}X_1) + \frac{1}{l}(\text{đ.a.h.}X_2) - \frac{1}{2}(\text{đ.a.h.}X_3) + \text{đ.a.h.}R_A^0.$$

Các $d.a.h. M_k^o$, $d.a.h. Q_k^o$ và $d.a.h. R_A^o$ trong hệ cơ bản vẽ trên hình 5.71b, c, d.

Bảng 5.6

| Điểm | $(d.a.h.X_1) / 2$ | $-(d.a.h.X_2) / 1$ | $-(d.a.h.X_3) / 2$ | $d.a.h.R_A^o$ | $d.a.h.R_A$ |
|------|-------------------|--------------------|--------------------|---------------|-------------|
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 1,000 | 1,000 |
| 1 | 0,050 | -0,013 | -0,039 | 0,750 | 0,748 |
| 2 | 0,053 | -0,027 | -0,063 | 0,500 | 0,464 |
| 3 | 0,030 | -0,027 | -0,054 | 0,250 | 0,199 |
| 4 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 5 | -0,020 | 0,065 | 0,109 | -0,250 | -0,096 |
| 6 | -0,027 | 0,170 | 0,250 | -0,500 | -0,207 |
| | | | -0,250 | 0,000 | |
| 5' | -0,020 | 0,065 | 0,109 | 0,000 | -0,064 |
| 4' | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 3' | 0,030 | -0,027 | 0,054 | 0,000 | 0,057 |
| 2' | 0,053 | -0,027 | 0,063 | 0,000 | 0,088 |
| 1' | 0,050 | -0,013 | 0,039 | 0,000 | 0,076 |
| 0' | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Trên bảng 5.5 ghi các số liệu tính tung độ $d.a.h.M_k$ và $d.a.h.Q_k$. Trên bảng 5.6 ghi các số liệu tính tung độ $d.a.h.R_A$.

Từ kết quả tính toán trên bảng 5.5 và 5.6 ta vẽ được $d.a.h.M_k$; $d.a.h.Q_k$ và $d.a.h.R_A$ (hình 5.71e, f, g).

5.12. Biểu đồ bao nội lực trong hệ siêu tĩnh

Khi thiết kế kết cấu ta phải xác định tiết diện của hệ theo những giá trị đại số lớn nhất và bé nhất của nội lực. Do đó cần phải xác định các giá trị đại số lớn nhất (max) và bé nhất (min) của nội lực tại tất cả các tiết diện trên hệ do tải trọng tác dụng lâu dài cũng như do tải trọng tác dụng tạm thời gây ra. Nói khác đi là phải vẽ biểu đồ bao của nội lực.

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ biểu đồ bao nội lực trong hệ siêu tĩnh thông qua trường hợp dầm liên tục.

Muốn giải quyết chính xác bài toán này ta cần phải vẽ đường ảnh hưởng của nội lực tại nhiều tiết diện khác nhau, tìm vị trí bất lợi của các tải trọng tạm thời và tiếp đó thực hiện theo các quy cách đã trình bày trong 3.9. Tuy nhiên, cần thấy

rằng đối với các hệ siêu tĩnh, cách làm này thường đòi hỏi tốn nhiều công phu.

Để cho bài toán được đơn giản ta có thể xem tải trọng tạm thời tác dụng trên từng nhịp dầm có vị trí cố định, có thể vắng mặt hoặc có mặt đồng thời trên một số nhịp để sao cho gây ảnh hưởng bất lợi nhất đối với nội lực tại tiết diện đang xét.

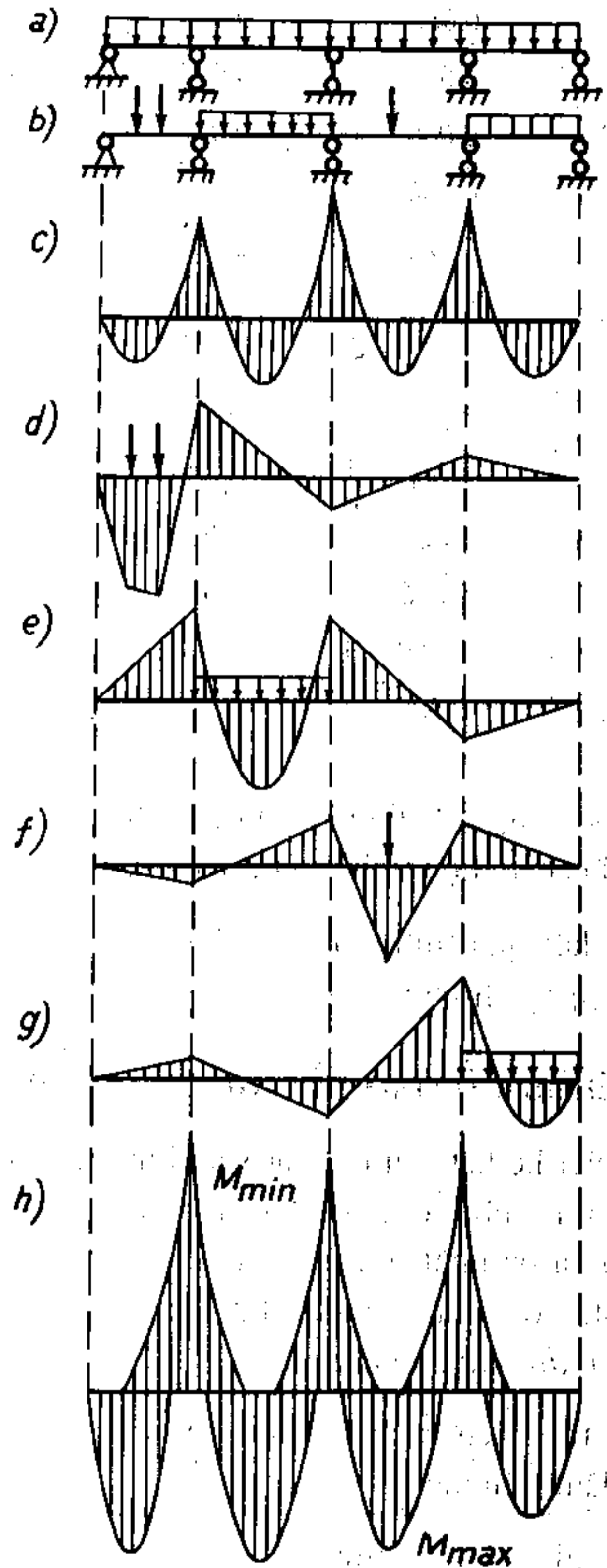
Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách giải quyết thông qua trường hợp dầm liên tục bốn nhịp cho trên hình 5.72a. Giả sử dầm chịu tải trọng lâu dài như trên hình 5.72a và chịu tải trọng tạm thời như trên hình 5.72b. Hình 5.72c là biểu đồ mômen uốn do tải trọng lâu dài gây ra còn các hình 5.72d, e, f, g là biểu đồ mômen uốn do tải trọng tạm thời lần lượt đặt trong từng nhịp gây ra.

Để tìm giá trị $M_{k,max}$ cho tiết diện k bất kỳ của dầm liên tục ta cộng đại số giá trị mômen M_k^* tương ứng tại tiết diện đó do tải trọng lâu dài gây ra (tìm theo biểu đồ 5.72c) với những giá trị mômen dương M_k^+ do tải trọng tạm thời trên từng nhịp dầm gây ra. Các tải trọng gây ra mômen âm tại tiết diện không gây ảnh hưởng bất lợi khi tìm $M_{k,max}$ nên coi như không có mặt. Như vậy ta có:

$$M_{k,max} = M_k^* + \sum M_k^+$$

Tương tự, để tìm giá trị $M_{k,min}$ cho tiết diện k bất kỳ ta cộng đại số giá trị của mômen M_k^* do tải trọng lâu dài gây ra với các giá trị mômen âm M_k^- do tải trọng tạm thời trên từng nhịp gây ra:

$$M_{k,min} = M_k^* + \sum M_k^-$$



Hình 5.72

Như vậy, với mỗi tiết diện k của dầm liên tục ta có một giá trị $M_{k,max}$ và một giá trị $M_{k,min}$. Dựa vào những giá trị này ta vẽ được hai đường cong gọi là biểu đồ bao mômen uốn trong dầm (hình 5.72h).

Để vẽ biểu đồ bao lực cắt của dầm ta cũng thực hiện các bước tính tương tự.

CÂU HỎI ÔN TẬP

- 5.1. Định nghĩa hệ siêu tĩnh. Thông qua các ví dụ, nêu các tính chất của hệ siêu tĩnh so với hệ tĩnh định có cùng điều kiện làm việc như nhau.
- 5.2. Nêu các công thức xác định bậc siêu tĩnh và các điều cần chú ý khi sử dụng công thức.
- 5.3. Trình bày tóm tắt nội dung phương pháp lực.
- 5.4. Nêu cách chọn hệ cơ bản. Thế nào là hệ cơ bản hợp lý, cho ví dụ minh họa.
- 5.5. Nêu cách chọn hệ cơ bản trong trường hợp hệ siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức của gối tựa.
- 5.6. Trình bày cách tính khung siêu tĩnh chịu tải trọng bất động.
- 5.7. Trình bày cách tính dàn siêu tĩnh chịu tải trọng bất động.
- 5.8. Trình bày cách tính vòm siêu tĩnh chịu tải trọng bất động.
- 5.9. Trình bày cách tính hệ liên hợp siêu tĩnh chịu tải trọng bất động.
- 5.10. Trình bày trình tự tính hệ siêu tĩnh chịu sự biến thiên nhiệt độ, sự chế tạo chiều dài không chính xác của các thanh và chuyển vị cưỡng bức của liên kết tựa.
- 5.11. Nêu các công thức kiểm tra đối với các hệ số và số hạng tự do trong hệ phương trình chính tắc. Nêu cách kiểm tra biểu đồ nội lực trong kết quả cuối cùng.
- 5.12. Trình bày cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh.
- 5.13. Lập bảng đối chiếu cách tính hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân khác nhau qua từng khâu tính toán, khi chọn hệ cơ bản tĩnh định.
- 5.14. Trình bày các biện pháp nhằm giảm nhẹ khối lượng tính toán khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao.

- 5.15. Trình bày cách vận dụng cặp ẩn số để tính các hệ đối xứng.
- 5.16. Trình bày cách biến đổi sơ đồ khi tính các hệ đối xứng.
- 5.17. Trình bày cách sử dụng thanh tuyệt đối cứng để biến đổi vị trí và phương của các ẩn số nhằm đơn giản hóa tính toán.
- 5.18. Trình bày khái niệm, hiệu quả và điều kiện áp dụng tâm đàn hồi.
- 5.19. Viết và giải thích các đại lượng trong phương trình ba mômen để tính dầm liên tục chịu tải trọng bất động, chịu sự biến thiên nhiệt độ và chịu chuyển vị cưỡng bức của liên kết tựa
- 5.20. Thiết lập công thức tính các hệ số và số hạng tự do trong phương trình ba mômen.
- 5.21. Trình bày cách thiết lập phương trình năm mômen để tính dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi chịu tải trọng bất động.
- 5.22. Nêu ý nghĩa của tung độ biểu đồ bao nội lực và trình bày các bước thực hiện để vẽ biểu đồ bao nội lực trong dầm liên tục.

6 Phương pháp chuyển vị và cách tính hệ phẳng siêu động

6.1. Khái niệm

Khác với phương pháp lực, trong phương pháp chuyển vị ta dùng tập hợp các biến dạng ở hai đầu mỗi thanh làm các đại lượng cần tìm. Những đại lượng này sẽ tìm được nếu biết chuyển vị tại các nút của hệ. Như vậy, theo phương pháp này ta sẽ chọn ẩn là chuyển vị tại các nút của hệ. Chính vì lẽ đó mà phương pháp được gọi là *phương pháp chuyển vị* (đôi khi còn gọi là phương pháp biến dạng). Sau khi xác định được chuyển vị tại các nút tức là chuyển vị tại các đầu thanh ta sẽ xác định được nội lực, chuyển vị tại tiết diện bất kỳ trong hệ (chẳng hạn vận dụng phương pháp thông số ban đầu đã quen biết trong Sức bền vật liệu).

A. Các giả thiết

Ngoài các giả thiết đã nêu trong chương mở đầu, khi tính hệ thanh theo phương pháp chuyển vị ta thường chấp nhận thêm các giả thiết sau:

1) Các nút của hệ được xem là cứng. Do đó, khi biến dạng, các đầu thanh quy tụ tại mỗi nút sẽ có chuyển vị góc và chuyển vị thẳng như nhau.

Giả thiết này cho phép ta thay thế việc xác định chuyển vị và biến dạng tại đầu các thanh bằng cách xác định chuyển vị tại các nút. Như vậy, số lượng ẩn sẽ giảm xuống được khá nhiều.

Giả thiết này thường được áp dụng khi tính các hệ khung. Trên thực tế, khi tính hệ khung theo phương pháp lực ta vẫn thường chấp nhận giả thiết này.

2) Khi xét biến dạng của các thanh chịu uốn, ta bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt so với ảnh hưởng của biến dạng uốn.

Giả thiết này tương đương với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt so với ảnh hưởng của biến dạng uốn khi xác định chuyển vị như đã quen biết trong phương pháp lực.

Giả thiết này không có ảnh hưởng đến số lượng ẩn của phương pháp chuyển vị. Nếu không chấp nhận giả thiết này thì về cơ bản, khối lượng tính toán không tăng lên song khi nghiên cứu trạng thái biến dạng và nội lực trong các

thanh ta cần xét đến ảnh hưởng của các biến dạng trượt (khi thiết lập các số liệu trong các bảng 6.1 và 6.2).

3) Khi xét biến dạng của các thanh chịu uốn, ta bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn. Biến dạng dọc trục vì nhiệt không được phép bỏ qua.

Giả thiết này tương đương với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn khi xác định chuyển vị như đã quen biết trong phương pháp lực.

Từ giả thiết này và giả thiết chuyển vị của hệ được xem là nhỏ, ta suy ra kết luận sau:

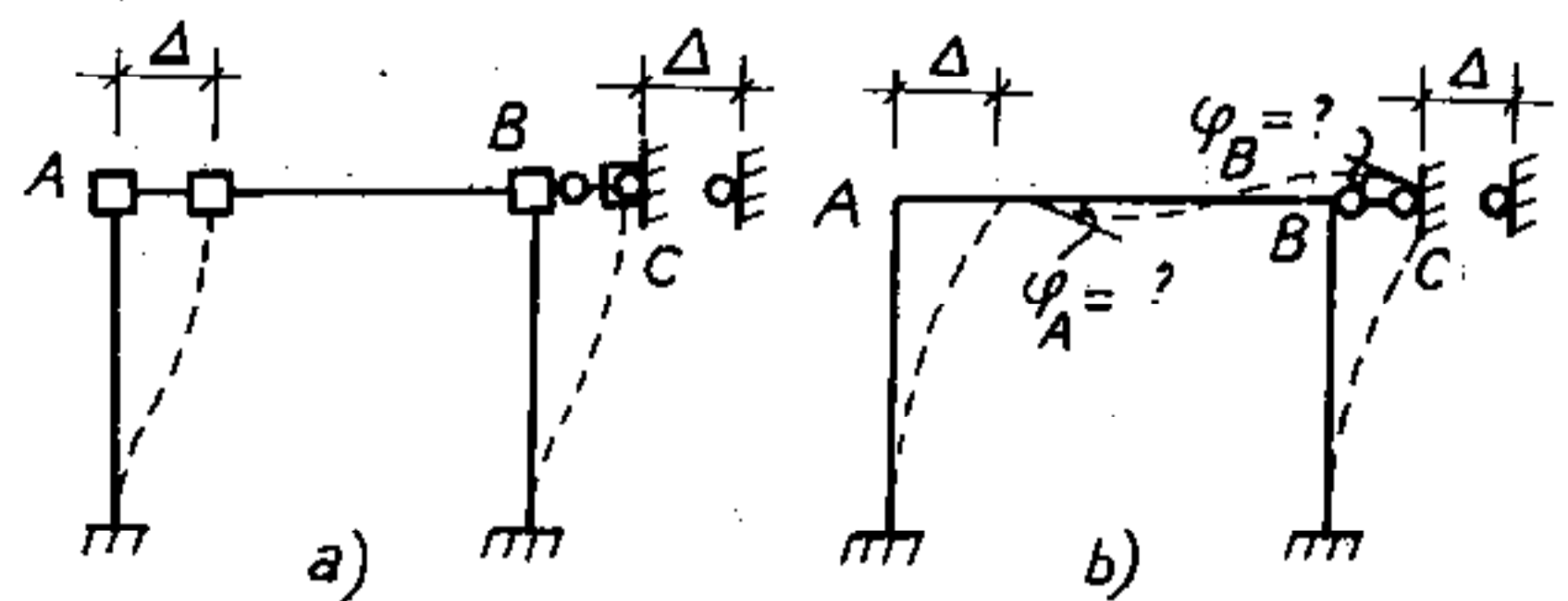
Trước và sau biến dạng, khoảng cách giữa hai nút ở hai đầu mỗi thanh, theo phương ban đầu của thanh, không thay đổi trừ trường hợp thanh có biến dạng dọc trục vì nhiệt độ và thanh có hai đầu khớp với độ cứng EA khác vô cùng.

Phần ảnh hưởng của biến dạng dọc trục trong các kết cấu dầm hoặc khung thường nhỏ so với phần ảnh hưởng của biến dạng uốn nên trong thực tế người ta thường chấp nhận giả thiết này. Nếu chấp nhận giả thiết này thì số lượng chuyển vị thẳng cần tìm tại các nút sẽ giảm xuống khá nhiều.

Cũng có thể phủ nhận giả thiết này để tăng độ chính xác của kết quả tính toán. Lúc này, nội dung phương pháp sẽ trình bày trong các mục dưới đây không có gì thay đổi song số lượng ẩn sẽ tăng lên khá nhiều nên thường phải thực hiện tính toán trên máy tính điện tử.

B. Khái niệm về hệ xác định động và hệ siêu động

Hệ xác định động là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức ta có thể xác định được biến dạng tại các đầu cấu kiện theo các điều kiện động học (hình học).



Hình 6.1

Hệ trên hình 6.1a, trong đó tại các nút A và B có đặt liên kết mômen ngăn cản chuyển vị xoay, là hệ xác định động nếu thừa nhận giả thiết 3. Khi cho liên kết C chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang là Δ thì từ các điều kiện hình học ta dễ dàng thấy được các nút A và B có cùng chuyển vị ngang là Δ và không có

chuyển vị xoay. Nếu thừa nhận giả thiết 1 thì biến dạng ở hai đầu mỗi cấu kiện có thể xác định theo chuyển vị ở các nút hệ. Do đó, ta cũng có thể phát biểu:

Hệ xác định động là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức ta có thể xác định được chuyển vị tại các nút theo các điều kiện hình học.

Ngược lại, hệ siêu động là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu ta chỉ dùng các điều kiện động học (hình học) không thôi thì chưa đủ để xác định tất cả các chuyển vị tại các nút hệ. Lúc này, cần bổ sung các điều kiện cân bằng.

Hệ trên hình 6.1b là siêu động. Khi liên kết C chuyển vị ngang là Δ , nếu thừa nhận giả thiết 3 thì ta cũng chỉ xác định được chuyển vị thẳng tại nút A và B theo điều kiện hình học còn chuyển vị xoay tại A và B vẫn chưa biết.

Qua hai ví dụ trên ta nhận thấy khái niệm về hệ xác định động và hệ siêu động có liên quan đến việc chấp nhận các giả thiết. Thật vậy, nếu phủ nhận giả thiết 3 thì hệ trên hình 6.1a vẫn là siêu động bởi vì tuy đã biết chuyển vị ngang tại nút B là Δ nhưng vẫn chưa thể xác định chuyển vị ngang tại A nếu không dùng các điều kiện cân bằng. Hơn nữa, lúc này tại nút A và B có thể tồn tại chuyển vị đứng chưa biết.

Trong thực tế, phần lớn các hệ là siêu động. Phương pháp chuyển vị được xây dựng để nghiên cứu các hệ siêu động. Song hệ siêu động đồng thời có thể là siêu tĩnh hay tĩnh định. Ta chỉ vận dụng phương pháp chuyển vị để tính hệ siêu động đồng thời là siêu tĩnh. Còn đối với hệ siêu động đồng thời là tĩnh định thì việc xác định nội lực và chuyển vị đã quen thuộc sau khi nghiên cứu phân kết cấu tĩnh định.

C. Bậc siêu động

Trong phương pháp lực ta đã xây dựng khái niệm về bậc siêu tĩnh. Tương tự, để tính hệ thanh theo phương pháp chuyển vị, ta cần xây dựng khái niệm về bậc siêu động.

Bậc siêu động của hệ siêu động được xác định bằng số chuyển vị độc lập chưa biết của các nút trong hệ.

Nếu thừa nhận các giả thiết đã nêu ở trên thì bậc siêu động được xác định theo công thức sau:

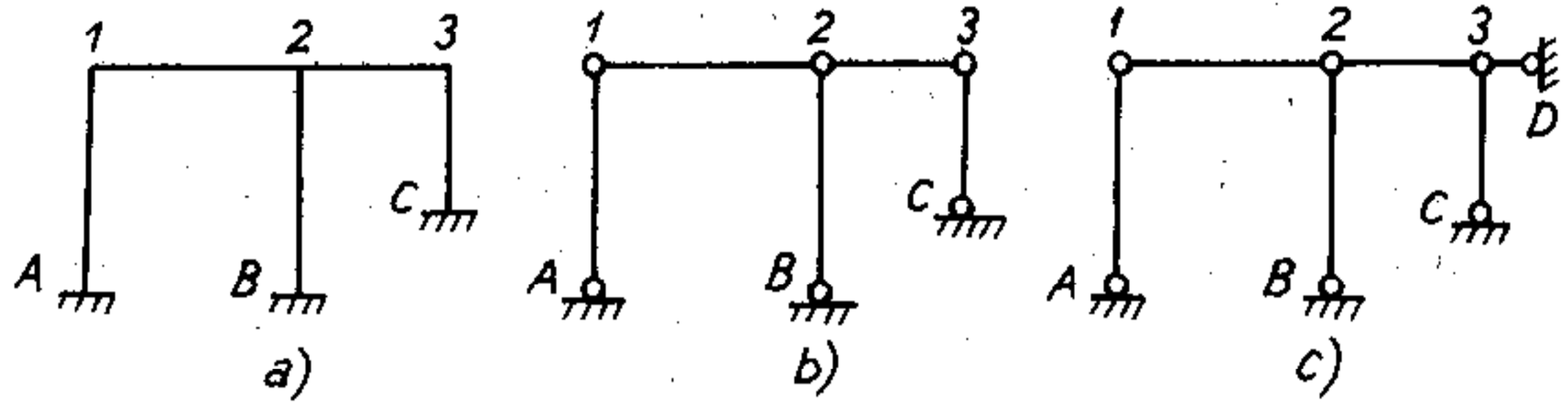
$$n = n_1 + n_2 \quad (6.1)$$

n_1 – số chuyển vị xoay độc lập chưa biết của các nút trong hệ;

n_2 – số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút trong hệ.

Số chuyển vị xoay độc lập chưa biết được xác định dễ dàng theo số nút của hệ. Ví dụ, với hệ trên hình 6.2a và 6.3a, ta có $n_1 = 3$.

Số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút thường khó thấy ngay được vì chuyển vị thẳng của các nút trong hệ thường không độc lập mà có liên quan với nhau theo giả thiết 3.

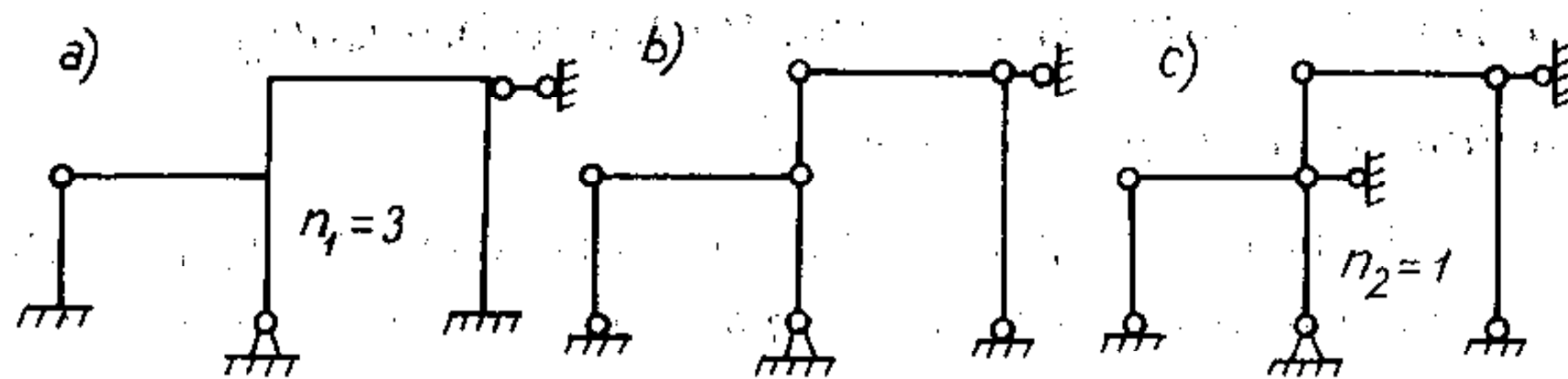


Hình 6.2

Để thấy rõ điều này, ta hãy xét khung cho trên hình 6.2a. Các nút 1, 2, 3 lần lượt bị các thanh A-1, B-2, C-3 ngăn cản nên không có chuyển vị theo phương thẳng đứng, chúng chỉ có thể chuyển vị theo phương ngang. Nhưng khi chuyển vị theo phương ngang, theo giả thiết 3, chiều dài của các thanh 1-2 và 2-3 không đổi, cho nên chuyển vị thẳng theo phương ngang của ba nút 1, 2, 3 phải bằng nhau. Nói khác đi, ta chỉ cần biết chuyển vị của một trong ba nút đó là đủ, nghĩa là hệ chỉ có một chuyển vị thẳng theo phương ngang chưa biết nên $n_2 = 1$. Tuy nhiên, cách lập luận vừa trình bày chỉ có thể áp dụng dễ dàng cho những hệ đơn giản. Cần có một cách tìm thực hành tổng quát để xác định số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết n_2 .

Nếu chấp nhận giả thiết 3, ta có thể xác định n_2 theo cách sau: *Tương tự thay các nút và các liên kết ngàm của hệ bằng các khớp sẽ được một hệ mới, nói chung là biến hình. Thêm vào hệ mới đó các liên kết loại một (liên kết thanh) vừa đủ để sao cho hệ trở thành bất biến hình. Số liên kết cần thêm vào đó chính là số n_2 cần tìm.*

Thật vậy, nếu chỉ nhằm mục đích tìm số lượng chuyển vị thẳng chưa biết của các nút thì sơ đồ hệ đã thay khớp cho ta hình dung được rõ ràng những chuyển vị thẳng của hệ đồng thời thỏa mãn giả thiết 3 khi khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ. Khi thêm các liên kết loại một vừa đủ để cho hệ bất biến hình tức là ngăn cản các chuyển vị thẳng có thể xảy ra tại các nút hệ, do đó số liên kết thanh phải thêm vào hệ đã thay khớp chính là số chuyển vị thẳng độc lập còn chưa biết của hệ cho ban đầu. Ví dụ, với hệ trên hình 6.3a, sau khi đặt khớp vào các nút và ngàm ta được hệ mới như trên hình 6.3b, để cho hệ này trở thành bất biến hình cần đặt thêm một liên kết thanh như trên hình 6.3c, như vậy $n_2 = 1$.



Hình 6.3

Nếu phủ nhận giả thiết 3 thì n_1 không đổi còn n_2 sẽ tăng lên. Thật vậy, khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thì chuyển vị thẳng tại các nút sẽ độc lập với nhau, tại mỗi nút và khớp nối chung tồn tại hai chuyển vị thẳng chưa biết. Do đó n_2 được xác định bằng hai lần số nút và khớp trừ cho số chuyển vị thẳng đã biết (khi tại đó có đặt liên kết ngăn cản chuyển vị thẳng). Ví dụ với hệ trên hình 6.3a, ta có $n_2 = 2.4 - 1 = 7$.

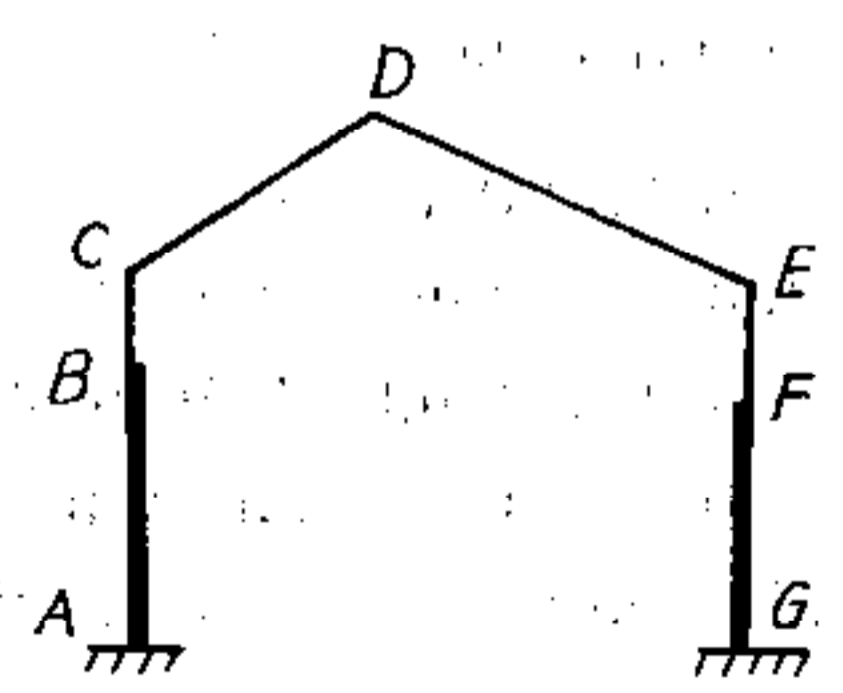
Ta thấy, trong phương pháp lực, khái niệm về bậc siêu tĩnh là không đổi. Trong phương pháp chuyển vị, khái niệm về bậc siêu động có tính chất quy ước, có thể thay đổi và phụ thuộc vào ba yếu tố sau:

- * Phụ thuộc các giả thiết chấp nhận (như đã trình bày ở trên).
- * Phụ thuộc sơ đồ tính rời rạc hóa chấp nhận.

Chẳng hạn, khi tính hệ có thanh cong, ta thay thanh cong bằng thanh gãy khúc, bậc siêu động phụ thuộc số đỉnh của thanh gãy khúc thay thế.

- * Phụ thuộc các phần tử mẫu mà người thiết kế đã có sẵn.

Khi tính toán hệ thanh theo phương pháp chuyển vị ta cần vận dụng các phần tử mẫu đã được nghiên cứu trước. Phần tử mẫu đơn giản nhất là thanh thẳng có tiết diện không đổi. Trong một số tài liệu người ta còn cung cấp các phần tử mẫu phức tạp hơn như: thanh gãy khúc hình tam giác, thanh cong, thanh có tiết diện thay đổi...



Hình 6.4

Nếu vận dụng các phần tử mẫu phức tạp này thì bậc siêu động của hệ sẽ giảm xuống. Với hệ trên hình 6.4, nếu chỉ dùng các phần tử mẫu dưới dạng thanh thẳng có tiết diện không đổi thì hệ có sáu phần tử, năm nút, do đó $n = 5 + 4 = 9$. Nếu dùng phần tử dưới dạng thanh gãy khúc (CDE) và thanh có tiết diện thay đổi (ABC và EFG) thì hệ có ba phần tử, hai nút C và E với hai chuyển vị ngang độc lập tại C và E, do đó $n = 2 + 2 = 4$.

6.2. Cách tính hệ siêu động chịu tải trọng bất động

A. Nội dung phương pháp chuyển vị

Tương tự như phương pháp lực, có thể tóm tắt nội dung phương pháp chuyển vị như sau: để tính hệ siêu động, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà thực hiện tính toán trên hệ cơ bản đồng thời bổ sung các điều kiện đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống như hệ thực.

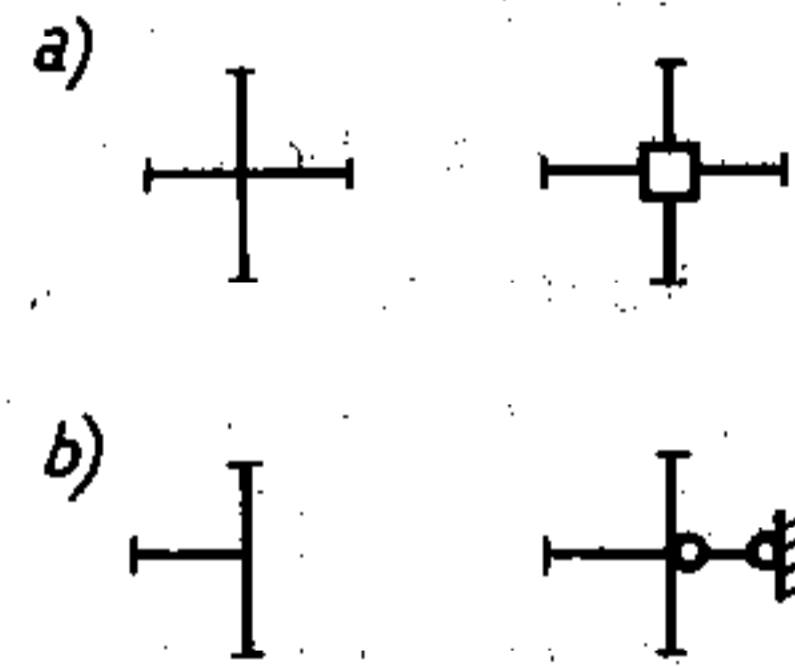
Dưới đây ta sẽ lần lượt triển khai cụ thể nội dung đã nêu của phương pháp.

B. Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị

Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là hệ suy ra từ hệ siêu động đã cho bằng cách đặt thêm vào hệ những liên kết phụ nhằm ngăn cản chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng của các nút trong hệ.

Những liên kết phụ đặt thêm vào hệ gồm hai loại:

◆ **Liên kết mômen:** đặt vào các nút có chuyển vị xoay, có tác dụng làm cho nút không thể xoay được nhưng vẫn có thể chuyển vị thẳng (khác với liên kết ngàm vì liên kết ngàm còn ngăn cản cả chuyển vị thẳng). Quy ước vẽ liên kết mômen như trên hình 6.5a. Trong liên kết mômen chỉ phát sinh phản lực mômen (phản lực dưới dạng mômen).

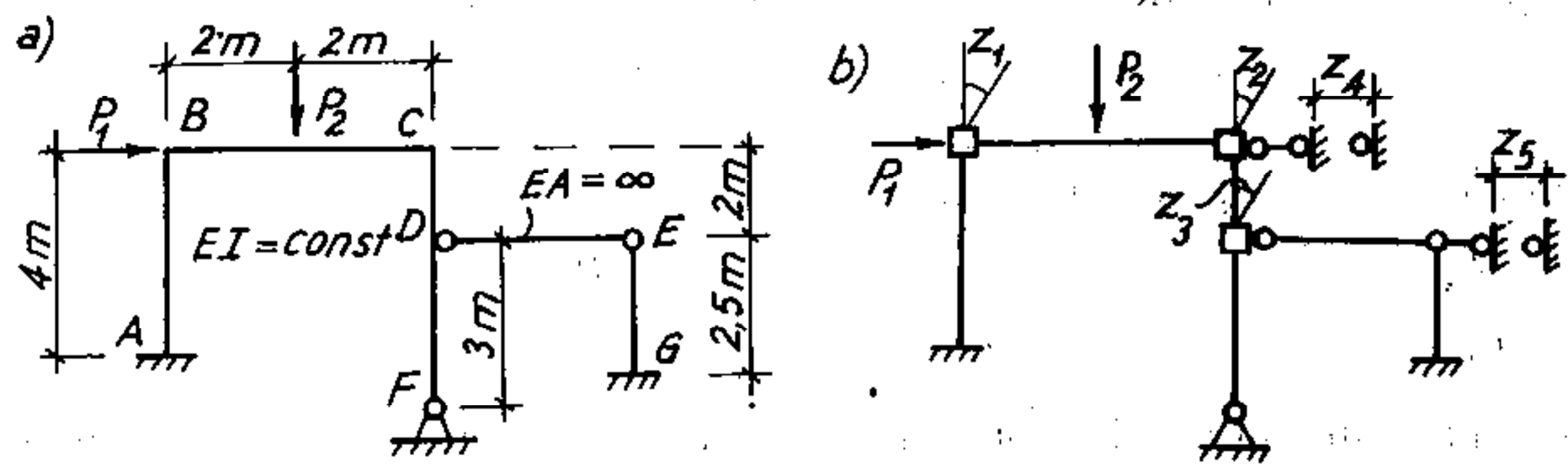


Hình 6.5

◆ **Liên kết lực:** đặt vào các nút có chuyển vị thẳng được chọn làm ẩn số, có tác dụng làm cho nút không chuyển vị thẳng được. Liên kết lực được biểu diễn bằng liên kết thanh. Trên hình 6.5b là liên kết lực ngăn cản chuyển vị thẳng theo phương ngang của nút. Trong liên kết lực chỉ phát sinh phản lực lực (phản lực dưới dạng lực) dọc theo trục của liên kết.

Với hệ trên hình 6.6a, sau khi thêm các liên kết phụ ngăn cản toàn bộ chuyển vị của các nút, ta được hệ cơ bản như trên hình 6.6b.

Hệ cơ bản có thể là xác định động hoặc siêu động. Nếu số liên kết đặt thêm vào hệ bằng số bậc siêu động (tức là với số liên kết đó thì có thể ngăn cản toàn bộ chuyển vị tại các nút) thì hệ cơ bản là xác định động. Nếu số liên kết đặt thêm vào hệ ít hơn số bậc siêu động (tức là với số liên kết đó thì chưa ngăn cản được toàn bộ chuyển vị tại các nút) thì hệ cơ bản là siêu động với bậc thấp hơn.



Hình 6.6

Điều quan trọng khi lập hệ cơ bản là trong hệ cơ bản chỉ tồn tại những phân tử mẫu đã được nghiên cứu trước. Nếu dùng hệ cơ bản xác định động thì yêu cầu này luôn thỏa mãn.

Khác với hệ cơ bản của phương pháp lực, hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị là duy nhất nếu các yếu tố có ảnh hưởng đến bậc siêu động nêu ở trên đã được xác định.

C. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị

Tương tự như trong phương pháp lực, hệ phương trình chính tắc trong phương pháp chuyển vị là điều kiện bổ sung nhằm đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực. Do đó, để xây dựng hệ phương trình chính tắc ta cần so sánh sự khác nhau về mặt chuyển vị và phản lực giữa hệ cơ bản và hệ thực.

Giả sử xét hệ siêu động như trên hình 6.6a và hệ cơ bản tương ứng như trên hình 6.6b ta thấy:

- ❖ Trong hệ siêu động cho ban đầu, chuyển vị tại các nút (chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng theo phương ngang tại các nút B, C, D) nói chung tồn tại. Vì không có các liên kết đặt thêm vào nút nên không có phản lực ngăn cản những chuyển vị này.
- ❖ Trong hệ cơ bản, chuyển vị tại các nút nêu ở trên không có vì tại đó tồn tại các liên kết ngăn cản. Trong các liên kết, nói chung tồn tại các thành phần phản lực tương ứng.

Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực, ta cần tạo ra trong hệ cơ bản những chuyển vị cưỡng bức tương ứng tại các liên kết đặt thêm vào hệ. Nếu hệ cơ bản là xác định động, lần lượt ký hiệu các chuyển vị là $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n$, với Z_k là chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ k đặt thêm vào hệ. Các chuyển vị này chưa biết và giữ vai trò là ẩn số của phương pháp chuyển vị. Tất nhiên, các chuyển vị Z_k cần phải có giá trị để sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do chúng gây ra và do tải trọng gây ra phải bằng không.

Như vậy, ta có n điều kiện để xác định n chuyển vị Z_k cần tìm như sau:

$$R_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n, P) = 0 \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2)$$

Theo nguyên lý công tác dụng ta có thể viết:

$$R_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n, P) = R_{kZ_1} + R_{kZ_2} + \dots + R_{kZ_k} + \dots + R_{kZ_n} + R_{kP},$$

trong đó:

R_{kZ_i} – phản lực tại liên kết thứ k trong hệ cơ bản, do chuyển vị cường bậc tại liên kết thứ i gây ra;

R_{kP} – phản lực tại liên kết thứ k do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi r_{ki} là phản lực tại liên kết thứ k do chuyển vị cường bậc $Z_i=1$ tại liên kết thứ i gây ra trong hệ cơ bản ta có:

$$R_{kZ_i} = r_{ki}Z_i$$

Như vậy, điều kiện (6.2) sẽ có dạng:

$$\boxed{r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kk}Z_k + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kP} = 0,} \quad (6.3)$$

với $k = 1, 2, \dots, n.$

Đó là hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị.

Trong hệ phương trình chính tắc, r_{kk} là hệ số chính; r_{ki} là hệ số phụ còn R_{kP} là số hạng tự do. Để thống nhất, ta quy ước chiều dương của các phản lực này cùng chiều với chiều dương của các chuyển vị cường bậc. Theo định lý tương hỗ của các phản lực đơn vị, ta có

$$r_{ki} = r_{ik}$$

D. Cách xác định nội lực trong hệ cơ bản xác định động

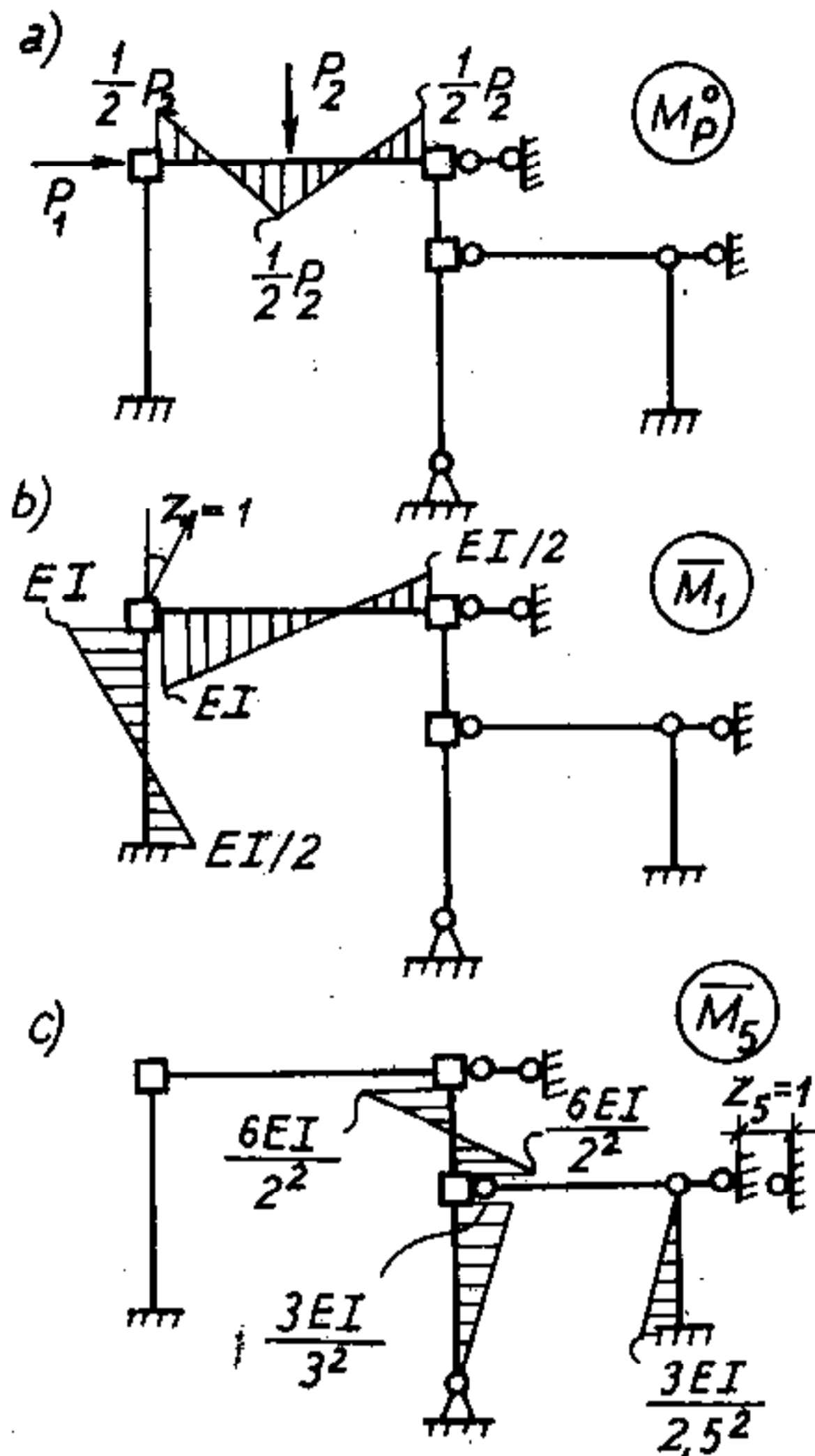
Để chuẩn bị cho việc xác định các hệ số, số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc và xác định nội lực trong hệ siêu động sau này, ta cần biết cách vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản xác định động chịu tác dụng của các nguyên nhân khác nhau.

1. Biểu đồ nội lực do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản

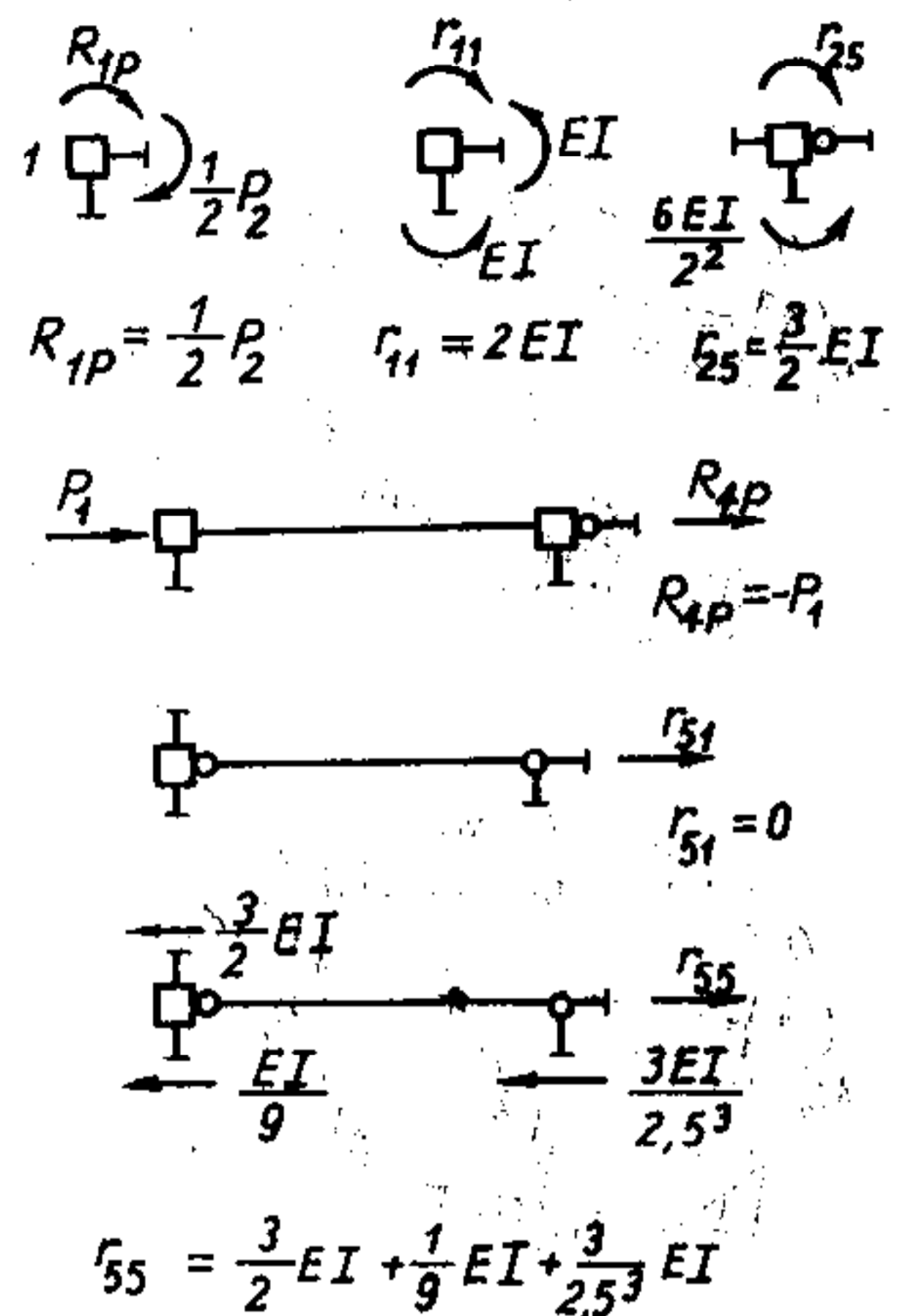
Như đã biết, trong hệ cơ bản xác định động chỉ bao gồm những phần tử đơn giản, tức là những thanh thẳng có tiết diện không đổi, liên kết ở hai đầu có thể là ngàm, khớp hoặc ngàm trượt. Do đó, tải trọng tác dụng trên hệ cơ bản chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trong từng phần tử. Bởi vậy, để vẽ biểu đồ nội lực, S_{ki} trên toàn hệ cơ bản ta chỉ cần vẽ riêng rẽ trên từng phần tử đơn giản của hệ.

Để thuận tiện cho việc tính toán, người ta đã sử dụng phương pháp lực xác định sẵn nội lực trong những phần tử đơn giản tương ứng với các dạng tải trọng khác nhau thường gặp trong thực tế. Nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt thì kết quả thu được như trong bảng 6.1.

Với hệ cơ bản của hệ siêu động cho trên hình 6.6a, tải trọng chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trong phạm vi thanh BC. Sử dụng các số liệu cho trong bảng 6.1 ta vẽ được biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản như trên hình 6.7a.



Hình 6.7



Hình 6.8

2. Biểu đồ nội lực do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản

Cũng tương tự như trên, để phục vụ cho việc tính toán, người ta dùng phương pháp lực hoặc phương pháp thông số ban đầu xác định sẵn nội lực trong những phần tử đơn giản chịu tác dụng của các chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị. Nếu bỏ qua biến dạng trượt thì kết quả thu được như trong bảng 6.2.

Trên hình 6.7b và c là các biểu đồ mômen uốn lần lượt do các chuyển vị cưỡng bức Z_1 và Z_5 bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản.

Bảng 6.1

| TT | Sơ đồ | M_0 | M_1 | Q_0 | Q_1 |
|----|-------|---|--|---|--|
| 1 | | $\frac{Pab^2}{l^2}$ | $\frac{Pa^2b}{l^2}$ | $\frac{Pb^2}{l^3} \times (l+2a) \cos \alpha$ | $\frac{Pa^2}{l^3} \times (3l-2a) \cos \alpha$ |
| 2 | | $\frac{Mb}{l^2} (2a-b)$ | $-\frac{Ma}{l^2} (a-2b)$ | $-\frac{6Mab}{l^3} \cos \alpha$ | |
| 3 | | $-\frac{ql^2}{12}$ | $\frac{ql^2}{12}$ | $\frac{ql}{2} \cos \alpha$ | $-\frac{ql}{2} \cos \alpha$ |
| 4 | | $\frac{2\omega_M}{l} \times (3\mu - 1)$ | $-\frac{2\omega_M}{l} \times (3\lambda - 1)$ | $\left[R_0^0 - \frac{M_0 + M_1}{l} \right] \times \cos \alpha$ | $\left[-R_1^0 - \frac{M_0 + M_1}{l} \right] \times \cos \alpha$ |
| 5 | | $-\frac{\alpha_1 EJ}{h} (t_2 - t_1)$ | | 0 | 0 |

Bảng 6.1 (tiếp)

| TT | Sơ đồ | M_0 | M_1 | Q_0 | Q_1 |
|----|-------|---|-------------------|---|--|
| 6 | | $-\frac{Pab}{2l^2} \times (2l-a)$ | 0 | $\frac{Pb}{2l} \times \left[3 - \frac{b^2}{l^2} \right] \cos \alpha$ | $-\frac{Pa^2}{2l^2} \times \left[3 - \frac{a}{b} \right] \cos \alpha$ |
| 7 | | $\frac{M}{2} \left[1 - \frac{3b^2}{l^2} \right]$ | 0 | $-\frac{3M}{2l^3} (l^2 - b^2) \cos \alpha$ | |
| 8 | | $-\frac{ql^2}{8}$ | 0 | $\frac{5ql}{8} \cos \alpha$ | $-\frac{3ql}{8} \cos \alpha$ |
| 9 | | $-\frac{3\omega M}{l} \mu$ | 0 | $\left[R_0^0 - \frac{M_0}{l} \right] \cos \alpha$ | $\left[R_1^0 - \frac{M_0}{l} \right] \cos \alpha$ |
| 10 | | $-\frac{3\alpha_1 EI}{2h} \times (t_2 - t_1)$ | 0 | $\frac{3\alpha_1 EI}{2hl} (t_2 - t_1) \cos \alpha$ | $\alpha_1 - \text{hệ số dẫn nở dài vì nhiệt}$ |
| 11 | | $-\frac{Pa}{2} \left[2 - \frac{a}{l} \right]$ | $\frac{Pa^2}{2l}$ | P | 0 |

Bảng 6.1 (tiếp)

| TT | Sơ đồ | M_0 | M_1 | Q_0 | Q_1 |
|----|-------|---|--|-----------------|-------|
| 12 | | $\frac{M_b}{l}$ | $\frac{M_a}{l}$ | 0 | 0 |
| 13 | | $\frac{ql^2}{3}$ | $\frac{ql^2}{6}$ | ql | 0 |
| 14 | | $\frac{\omega_M}{l} - \frac{R_1^0 l}{2}$ | $\frac{\omega_M}{l} + \frac{R_1^0 l}{2}$ | $R_0^0 + R_1^0$ | 0 |
| 15 | | $-\frac{\alpha_1 EI}{h} (t_2 - t_1)$ | | 0 | 0 |
| 16 | | Kết quả giống như trường hợp đầu phải bị ngàm cứng tương ứng với từng nguyên nhân | | | |

Chú thích:

- ω_M - diện tích biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản có hai đầu khớp và được tính theo chiều dài nhịp l .
- λ và μ - các tỷ số khoảng cách từ trọng tâm của diện tích ω_M đến đầu trái và đầu phải so với chiều dài nhịp.
- R_0^0 và R_1^0 - phản lực tại đầu trái và đầu phải thành do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản có hai đầu khớp.
- Trường hợp tải trọng thẳng đứng phân bố theo chiều dài xiên của trục thanh, tất cả các số liệu cần được chia cho $\cos \alpha$.

Bảng 6.2

| TT | Sơ đồ và biểu đồ mômen uốn | M_0 | M_1 | $Q_0 = Q_1$ |
|----|----------------------------|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1 | | $\frac{4EI}{l} \cos \alpha$ | $-\frac{2EI}{l} \cos \alpha$ | $-\frac{6EI}{l^2} \cos^2 \alpha$ |
| 2 | | $-\frac{6EI}{l^2} \cos^2 \alpha$ | $\frac{6EI}{l^2} \cos^2 \alpha$ | $\frac{12EI}{l^3} \cos^3 \alpha$ |
| 3 | | $\frac{3EI}{l} \cos \alpha$ | 0 | $\frac{3EI}{l^2} \cos^2 \alpha$ |
| 4 | | $-\frac{3EI}{l^2} \cos^2 \alpha$ | 0 | $\frac{3EI}{l^3} \cos^3 \alpha$ |
| 5 | | $\frac{EI}{l}$ | $\frac{EI}{l}$ | 0 |

Chú thích:

1. Trong trường hợp 1 và 2, nếu ngàm bên phải là ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song nhưng không song song với trục thanh như trường hợp 5, kết quả tính mômen uốn và lực cắt không thay đổi.
2. Trong trường hợp 3 và 4, nếu gối tựa bên phải không thẳng đứng mà nghiêng một góc bất kỳ, kết quả tính mômen uốn và lực cắt không thay đổi.

E. Cách xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc

Về ý nghĩa, các hệ số r_{ki} và số hạng tự do R_{kP} chính là phản lực tại liên kết thứ k lần lượt do chuyển vị cưỡng bức $Z_i = 1$ và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Do đó, tuy có nhiều cách xác định khác nhau nhưng biện pháp đơn giản nhất là vận dụng các điều kiện cân bằng tĩnh học. Sau khi vẽ được biểu đồ mômen uốn do các nguyên nhân $Z_i = 1$ và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản ta dễ dàng xác định được phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ tức là xác định được các hệ số và số hạng tự do.

1. Trường hợp liên kết k là liên kết mômen

- ◆ Để xác định r_{ki} ta tách nút có đặt thêm liên kết mômen thứ k trên biểu đồ mômen uốn \bar{M}_i do $Z_i = 1$ gây ra trên hệ cơ bản. Từ điều kiện cân bằng mômen của nút đó ta sẽ suy ra giá trị của r_{ki} cần tìm.
- ◆ Để xác định R_{kP} ta tách nút có đặt thêm liên kết mômen thứ k trên biểu đồ mômen uốn M_P^o do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Từ điều kiện cân bằng mômen của nút đó ta sẽ suy ra giá trị cần tìm của R_{kP} .

2. Trường hợp liên kết k là liên kết lực

- ◆ Để xác định r_{ki} ta thực hiện mặt cắt qua liên kết k trên biểu đồ mômen uốn \bar{M}_i do riêng $Z_i = 1$ gây ra trong hệ cơ bản nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận bất kỳ sao cho dễ dàng tìm được giá trị r_{ki} từ điều kiện cân bằng hình chiếu.
- ◆ Để xác định R_{kP} ta thực hiện mặt cắt qua liên kết k trên biểu đồ mômen uốn M_P^o do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận nào đó để khảo sát cân bằng.

Trên hình 6.8 lần lượt trình bày cách xác định R_{1P} , r_{11} , r_{25} , R_{4P} , r_{51} , r_{55} .

Khi xác định cần chú ý:

- ❖ Chiều dương của các chuyển vị và phản lực tương ứng cần chọn thống nhất.
- ❖ Các hệ số chính luôn luôn dương, còn các hệ số phụ $r_{ki} = r_{ik}$ có thể mang dấu bất kỳ hoặc bằng không.
- ❖ Khi liên kết k là liên kết mômen, ta chỉ cần xác định các mômen uốn quanh nút k là đủ để viết điều kiện cân bằng mômen. Khi liên kết k là liên kết lực, ta chỉ cần xác định các lực cắt hoặc lực dọc vừa đủ để tham gia phương trình cân bằng hình chiếu.

F. Cách xác định nội lực trong hệ siêu động

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc, ta xác định được các chuyển vị Z_k . Đó là những giá trị của chuyển vị cần tìm nhằm đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực. Như vậy, nội lực trong hệ siêu động cho ban đầu chính là nội lực trong hệ cơ bản do tải trọng và do các chuyển vị cưỡng bức Z_k vừa tìm được gây ra. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$(S_P) = (S_{Z_1}) + (S_{Z_2}) + \dots + (S_{Z_k}) + \dots + (S_{Z_n}) + (S_P^0),$$

trong đó:

(S_P) – biểu đồ nội lực do tải trọng gây ra trong hệ siêu động;

(S_P^0) – biểu đồ nội lực do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, cách xác định đã được trình bày ở điểm D;

(S_{Z_k}) – biểu đồ nội lực do chuyển vị cưỡng bức Z_k gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi (\bar{S}_k) là biểu đồ nội lực do riêng chuyển vị cưỡng bức $Z_k=1$ gây trong hệ cơ bản (cách tìm biểu đồ này đã được trình bày ở điểm D), ta có:

$$(S_{Z_k}) = (\bar{S}_k)Z_k$$

Như vậy, ta có thể xác định nội lực trong hệ siêu động theo biểu thức sau:

$$(S_P) = (\bar{S}_1)Z_1 + (\bar{S}_2)Z_2 + \dots + (\bar{S}_k)Z_k + \dots + (\bar{S}_n)Z_n + (S_P^0), \quad (6.4)$$

Biểu thức (6.4) áp dụng chung cho mọi trường hợp, giả sử muốn tìm mômen uốn M hay độ võng y , ta cần thay thế ký hiệu S bằng ký hiệu tương ứng M hay y . Đối với dầm và khung siêu động, vẽ biểu đồ mômen uốn theo cách này rất tiện lợi vì đã có sẵn các biểu đồ mômen uốn đơn vị trong quá trình xác định các hệ số. Sau khi có biểu đồ mômen uốn ta dễ dàng tìm được các biểu đồ lực cắt và lực dọc như đã thực hiện trong phương pháp lực.

Sau khi tìm được các nội lực, ta cần thực hiện kiểm tra kết quả. Trong thực hành, chỉ cần sử dụng điều kiện cân bằng của các nút và của các bộ phận bất kỳ của hệ để kiểm tra kết quả tìm được.

G. Cách xác định chuyển vị trong hệ siêu động

1. Chuyển vị tại nút: nếu chuyển vị cần tìm là chuyển vị xoay hoặc chuyển vị thẳng tại các nút thì chính là các chuyển vị Z_k tương ứng đã tìm được sau khi giải hệ phương trình chính tắc.

2. Chuyển vị tại tiết diện bất kỳ ở bên trong các phần tử: có thể xác định theo một trong ba cách sau:

- Ngay từ đầu, coi tiết diện có chuyển vị cần tìm như một nút của hệ. Như vậy,

ta đã đưa bài toán xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ về bài toán tìm chuyển vị tại nút và thực hiện như đã nêu ở trên. Biện pháp này đơn giản, không cần phải thực hiện tính bổ sung nhưng làm tăng số lượng ẩn số.

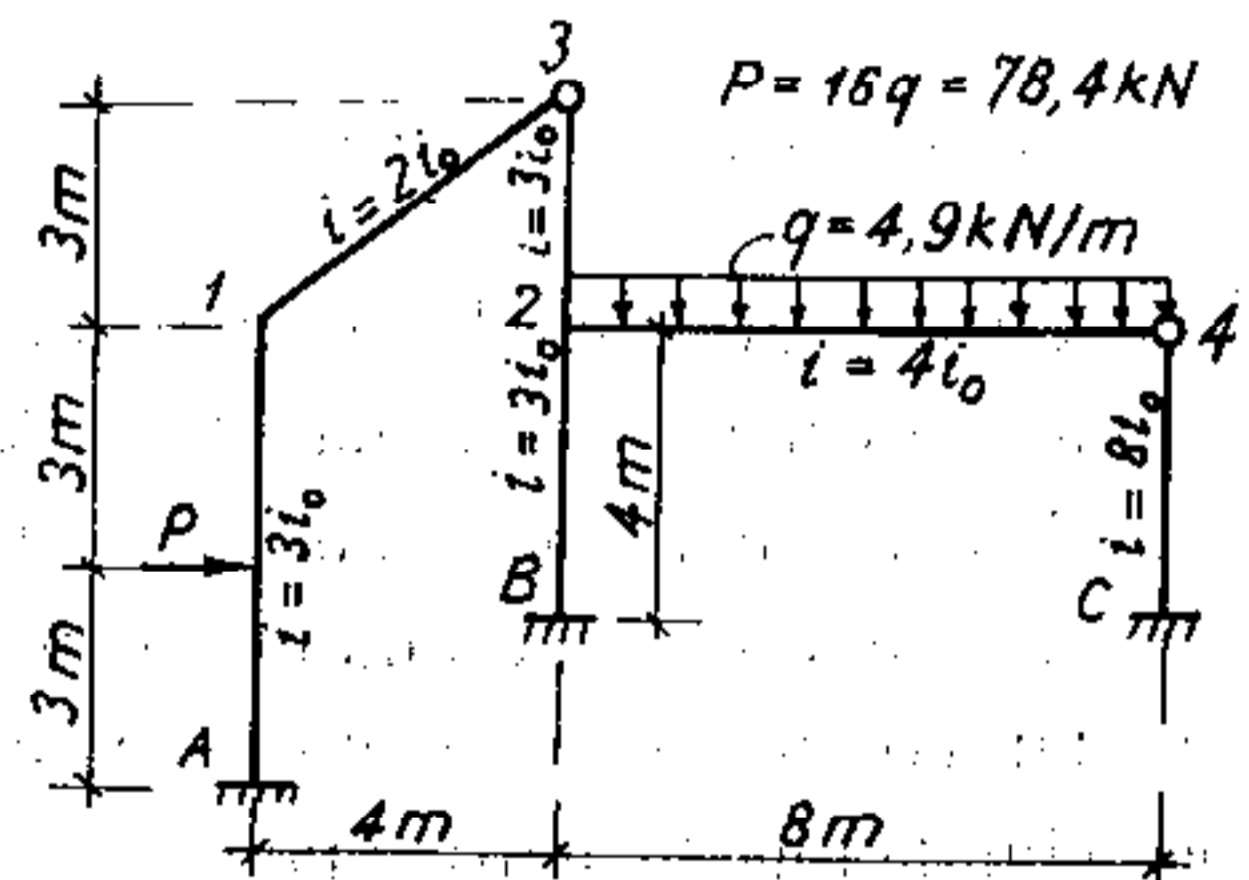
- Sau khi đã biết chuyển vị và nội lực ở hai đầu mỗi phần tử, ta có thể xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ ở bên trong phần tử đó theo các phương pháp đã quen biết, chẳng hạn phương pháp xác định chuyển vị đã trình bày trong chương 4 hoặc phương pháp thông số ban đầu.
- Sau khi đã biết nội lực trong hệ siêu động, ta xem hệ là hệ siêu tĩnh với các nội lực đã biết và áp dụng cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh đã trình bày trong chương 5. Trong thực hành, nên áp dụng cách này.

H. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 6.1. Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cho trên hình 6.9. Trên hình cho biết các số liệu về độ cứng đơn vị $i = EI/I$ của từng phần tử, biểu thị theo độ cứng đơn vị quy ước i_0 . Tìm chuyển vị ngang tại 4 và tại điểm đặt lực P .

Để giải bài toán, ta thực hiện theo thứ tự như sau:

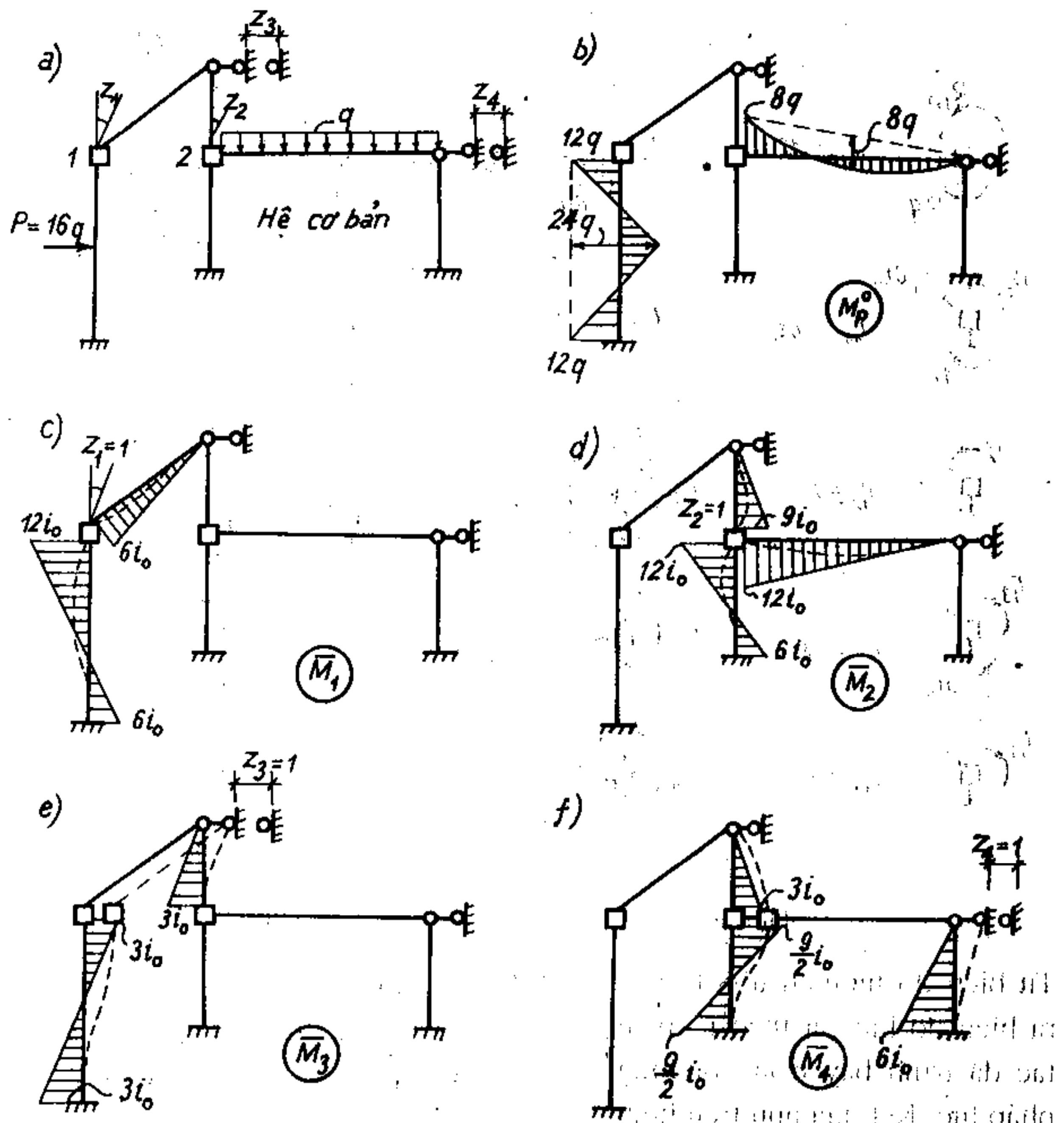
1) Xác định bậc siêu động và lập hệ cơ bản. Số chuyển vị xoay chưa biết là 2 (tại nút 1 và 2). Số chuyển vị thẳng dọc lập chưa biết là 2 (tại khớp 3 và 4). Do đó $n = 4$. Hệ cơ bản tương ứng như trên hình 6.10a, trong đó ta gọi các ẩn Z_1, Z_2 là chuyển vị xoay tại nút 1, 2 còn các ẩn Z_3, Z_4 là chuyển vị thẳng theo phương ngang tại khớp 3 và 4.



Hình 6.9

- 2) Vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản. Vận dụng các số liệu trong bảng 6.1, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ. M_P^0 như trên hình 6.10b.
- 3) Vẽ biểu đồ mômen uốn do từng chuyển vị đơn vị gây ra trong hệ cơ bản. Vận dụng các số liệu trong bảng 6.2, ta vẽ được các biểu đồ lần lượt do Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản như trên các hình 6.10c, d, e, f.
- 4) Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc. Để xác định các hệ số và số hạng tự do biểu thị phần lực trong liên kết mômen, ta tách các nút 1 và 2 và khảo sát cân bằng. Kết quả ghi trên hình 6.11. Để xác định các hệ số và số hạng tự do biểu thị phần lực trong các liên kết lực 3 và

4, ta lần lượt tách các bộ phận của hệ như trên hình 6.12 và 6.13 để xét cân bằng. Kết quả ghi trên hình vẽ tương ứng.



Hình 6.10

5) Thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc. Trong trường hợp này, ta có:

$$18i_0Z_1 - 3i_0Z_3 + 12q = 0;$$

$$33i_0Z_2 - 3i_0Z_3 - 1,5i_0Z_4 - 8q = 0;$$

$$-3i_0Z_1 - 3i_0Z_2 + 2i_0Z_3 - i_0Z_4 - 8q = 0;$$

$$-1,5i_0Z_2 - i_0Z_3 + 4,75i_0Z_4 = 0.$$

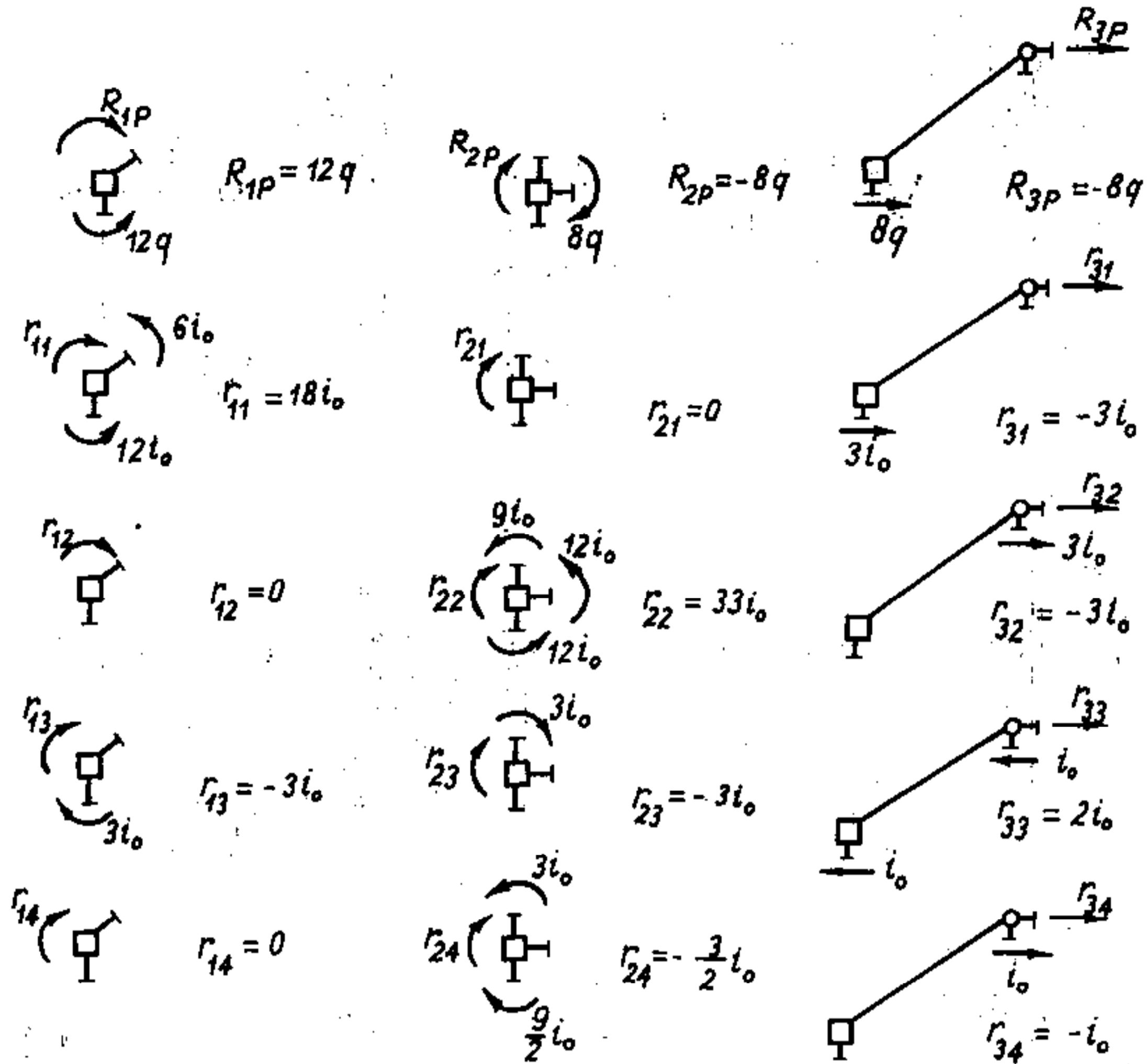
Sau khi thay giá trị $q = 4,9 \text{ kN/m}$, và giải hệ phương trình trên, ta được:

$$Z_1 = 2,5833/i_0 \text{ rad}; \quad Z_2 = 4,7833/i_0 \text{ rad}; \quad Z_3 = 35,1/i_0 \text{ m}; \quad Z_4 = 8,9/i_0 \text{ m}.$$

6) Vẽ các biểu đồ nội lực. Biểu đồ mômen uốn được xác định theo công thức:

$$(M_P) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (\bar{M}_3)Z_3 + (\bar{M}_4)Z_4 + (M_P^0),$$

Kết quả tìm được như trên hình 6.14a.

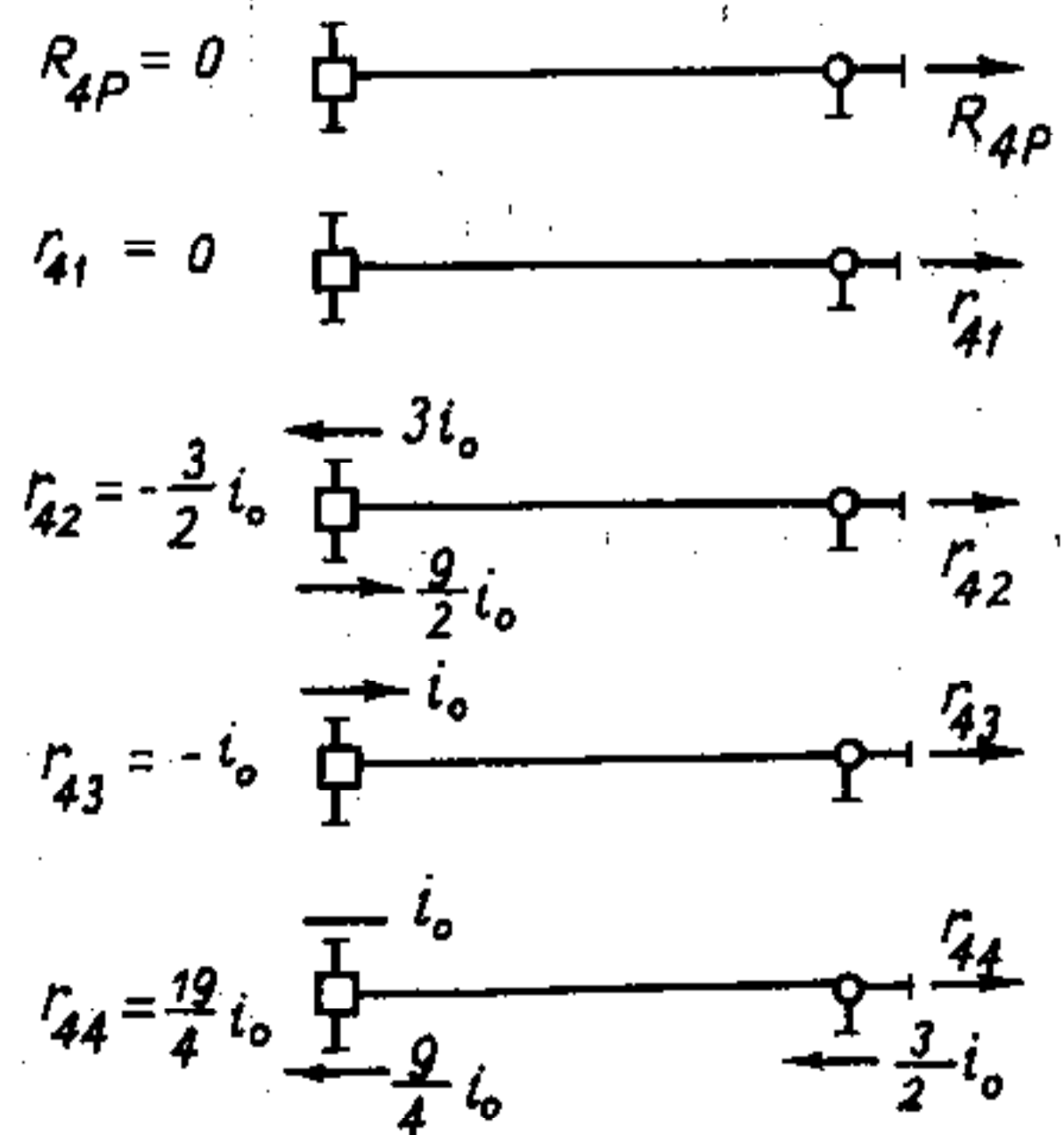


Hình 6.11

Hình 6.12

Từ biểu đồ mômen uốn ta suy ra biểu đồ lực cắt theo nguyên tắc đã trình bày trong phương pháp lực. Kết quả như trên hình 6.14b. Từ biểu đồ lực cắt, lần lượt tách các nút theo thứ tự 1, 3, 2, 4 để khảo sát cân bằng, ta sẽ vẽ được biểu đồ lực dọc như trên hình 6.14c.

7) Kiểm tra kết quả: xét điều kiện cân bằng tại các nút, tiếp đó xét điều kiện cân bằng của một vài bộ phận nào đó của hệ.



Hình 6.13

Ví dụ, kiểm tra cân bằng của phần bên trên hệ bằng cách thực hiện mặt cắt

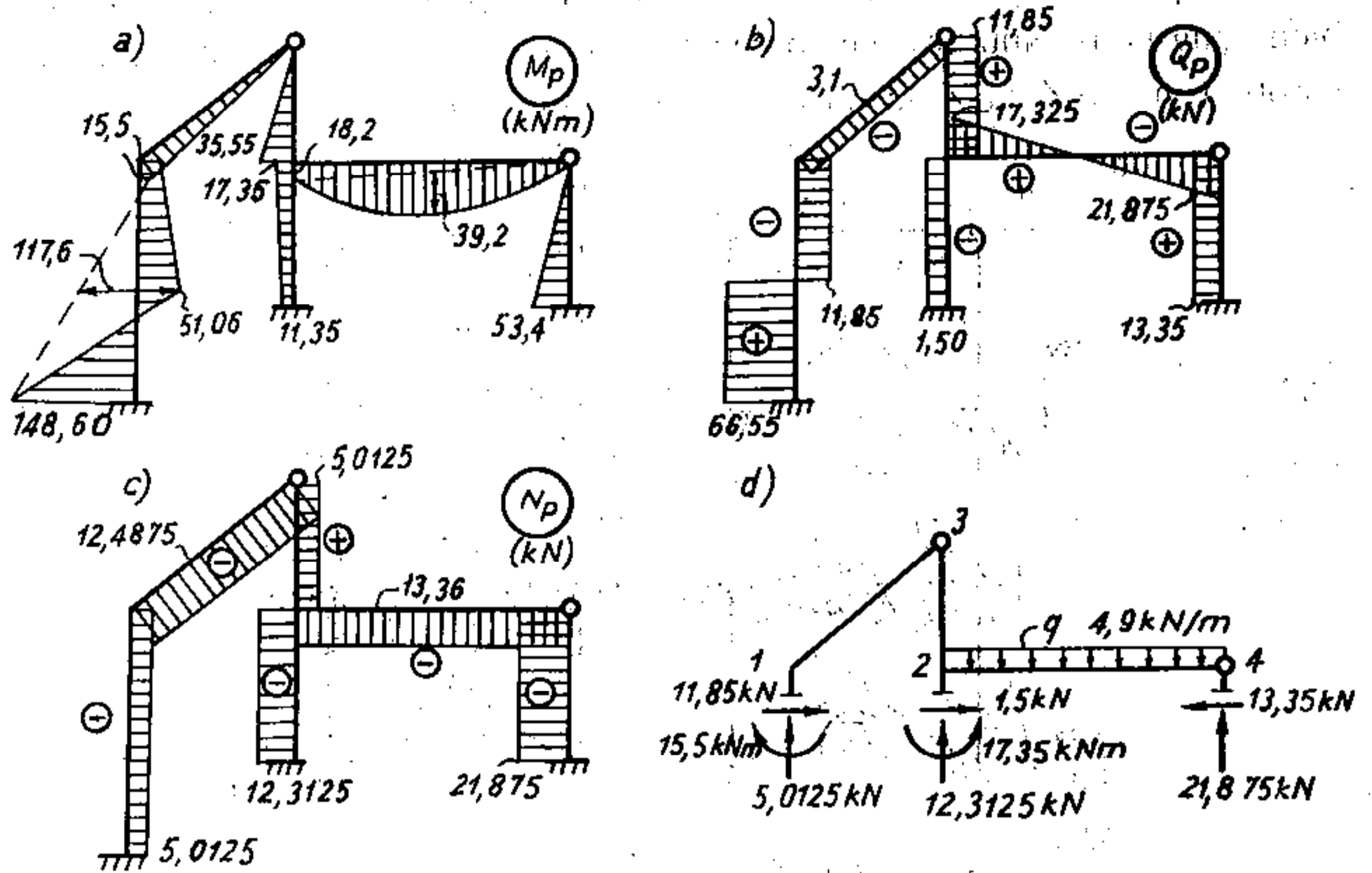
ngang qua các tiết diện kê bên các nút 1, 2 và khớp 4 (hình 6.14d). Ta có:

$$\sum X = 11,85 + 1,5 - 13,35 = 0;$$

$$\sum Y = 5,0125 + 12,3125 + 21,875 - 4,9 \cdot 8 = 0;$$

$$\sum M_2 = 5,0125 \cdot 4 + 15,5 - 17,35 - 21,875 \cdot 8 + 4,9 \cdot 8 \cdot 4 = 0.$$

Các điều kiện cân bằng đều được thỏa mãn.

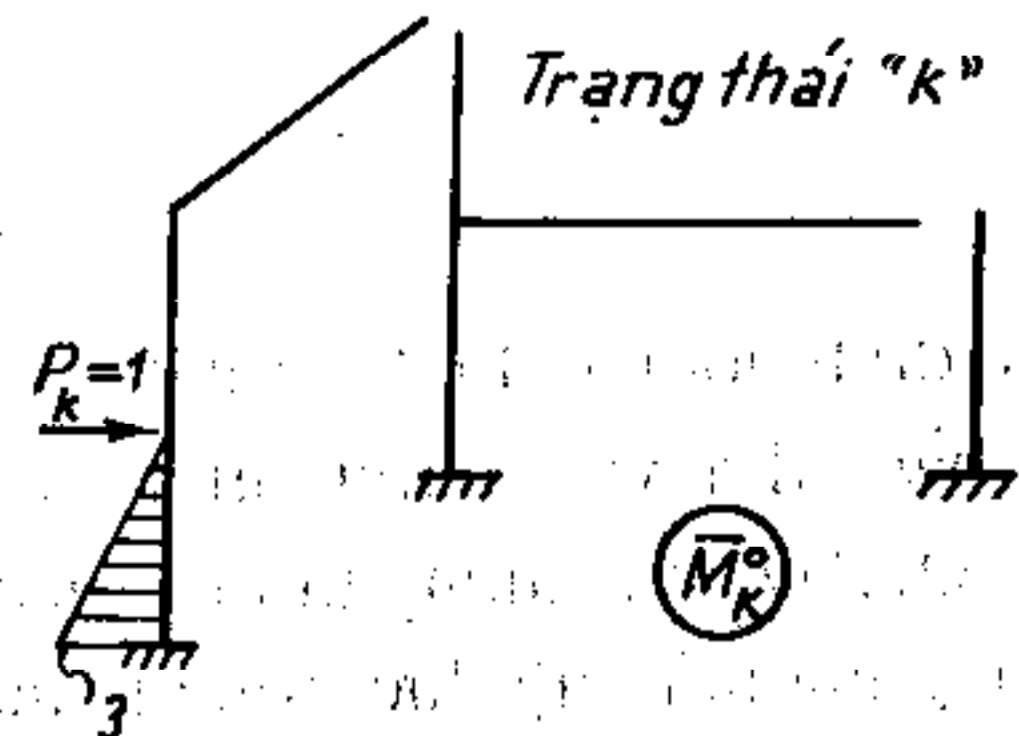


Hình 6.14

8) Xác định chuyển vị:

Chuyển vị ngang tại khớp 4 chính là chuyển vị Z_4 vừa tìm được ở trên, do đó $x_4 = 8,9/i_0$ m (hướng về bên phải).

Để xác định chuyển vị ngang tại điểm đặt lực P , ta tạo trạng thái "k" trong hệ cơ bản tĩnh định bất kỳ của phương pháp lực như trên hình 6.15. Vẽ biểu đồ mômen uốn ở trạng thái "k" tiếp đó đem nhân với biểu đồ mômen uốn (M_p) vừa tìm được ở trên (hình 6.14a). Kết quả:



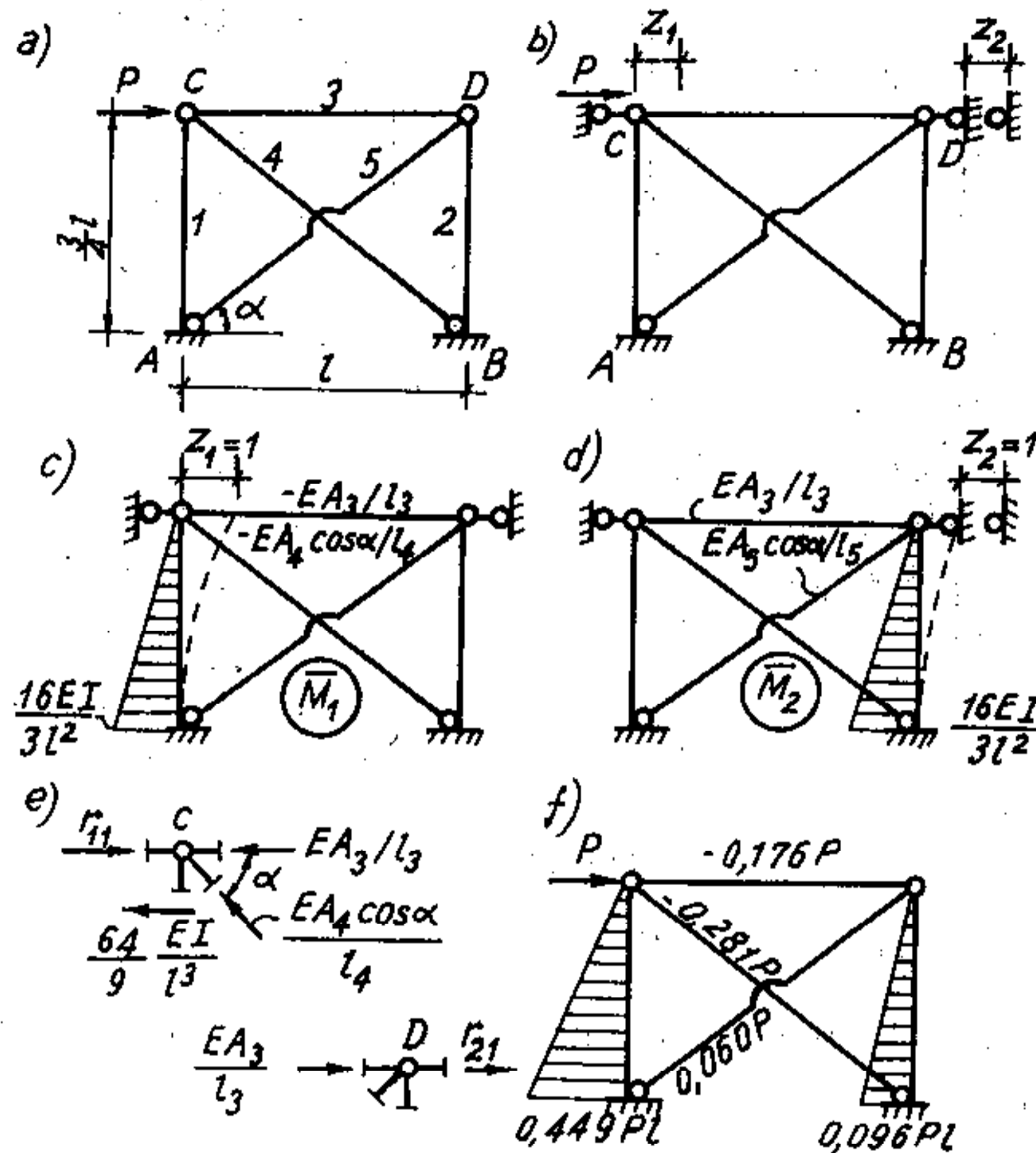
Hình 6.15

$$x_p = \frac{1}{EI} \left[\frac{148,6 \cdot 3}{2} \cdot 2 - \frac{51,05 \cdot 3}{2} \cdot 1 \right] = \frac{20,5125}{i_0} \text{ m}$$

Ví dụ 6.2. Xác định mômen uốn trong các thanh 1, 2 và lực dọc trong các thanh 3, 4, 5 của hệ cho trên hình 6.16a. Các thanh 1, 2 có độ cứng khi uốn là EI . Các thanh 3, 4, 5 có độ cứng khi kéo hoặc nén là

$$EA_3 = 8EI/3l^2; EA_4 = EA_5 = 125EI/24l^2.$$

Trong bài toán này, các thanh 3, 4, 5 chỉ chịu kéo hoặc nén cho nên cần phải xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc trục (chú ý là theo các giả thiết đã nêu ta chỉ được phép bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn). Như vậy, hệ có bậc siêu động là 2. Hệ cơ bản như trên hình 6.16b, trong đó Z_1 và Z_2 là chuyển vị ngang tại C và D.



Hình 6.16

Để xác định nội lực do $Z_1=1$ gây ra trong hệ cơ bản, ta cho khớp C chuyển vị ngang bằng đơn vị như trên hình 6.16c. Lúc này, khớp D không chuyển vị nên các thanh AD, BD không bị biến dạng và không phát sinh nội lực. Thanh AC có biến dạng uốn, nội lực trong thanh được xác định dễ dàng theo các số liệu cho trong bảng 6.2. Thanh CD chịu biến dạng nén bằng đơn vị, theo định luật Hooke lực dọc phát sinh trong thanh sẽ có giá trị là EA_3/l_3 . Thanh CB chịu biến dạng nén với giá trị bằng hình chiếu của chuyển vị ngang đơn vị lên phương CB, tức là bằng $\cos\alpha=4/5$. Như vậy, trong thanh CB sẽ phát sinh lực

đọc nên với giá trị bằng $(EA_4 \cos \alpha)/l_4$. Giá trị các nội lực tìm được ghi trên hình 6.16c.

Tương tự, khi cho Z_2 chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị, ta xác định được các nội lực như đã ghi trên hình 6.16d.

Trong trường hợp này, tải trọng P đặt ngay tại khớp C nên không gây ra nội lực trong hệ cơ bản.

Để xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc, ta lần lượt tách khớp C và khớp D tương ứng với từng trạng thái. Trên hình 6.16e, trình bày cách thực hiện để xác định r_{11} và r_{21} . Từ các phương trình cân bằng hình chiếu theo phương ngang, ta có:

$$r_{11} = \frac{64EI}{9l^3} + \frac{EA_3}{l_3} + \frac{EA_4}{l_4} \cos^2 \alpha = \frac{112EI}{9l^3}; \quad r_{21} = r_{12} = -\frac{EA_3}{l_3} = -\frac{8EI}{3l^3}$$

Cũng thực hiện tương tự như vậy, ta sẽ xác định được:

$$r_{22} = \frac{112EI}{9l^3}; \quad R_{1P} = -P; \quad R_{2P} = 0.$$

Hệ phương trình chính tắc:

$$14Z_1 - 3Z_2 - \frac{9Pl^3}{8EI} = 0; \quad -3Z_1 + 14Z_2 = 0.$$

Sau khi giải hệ phương trình trên, ta được: $Z_1 = \frac{63Pl^3}{748EI}$; $Z_2 = \frac{27Pl^3}{1496EI}$.

Biểu đồ mômen uốn và lực dọc trong thanh thứ j được xác định như sau:

$$(M_j) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2; \quad N_j = \bar{N}_{j1}Z_1 + \bar{N}_{j2}Z_2,$$

trong đó: $\bar{N}_{j1}, \bar{N}_{j2}$ - lực dọc trong thanh thứ j do chuyển vị cưỡng bức Z_1 và Z_2 bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản.

Kết quả tìm được như trên hình 6.16f.

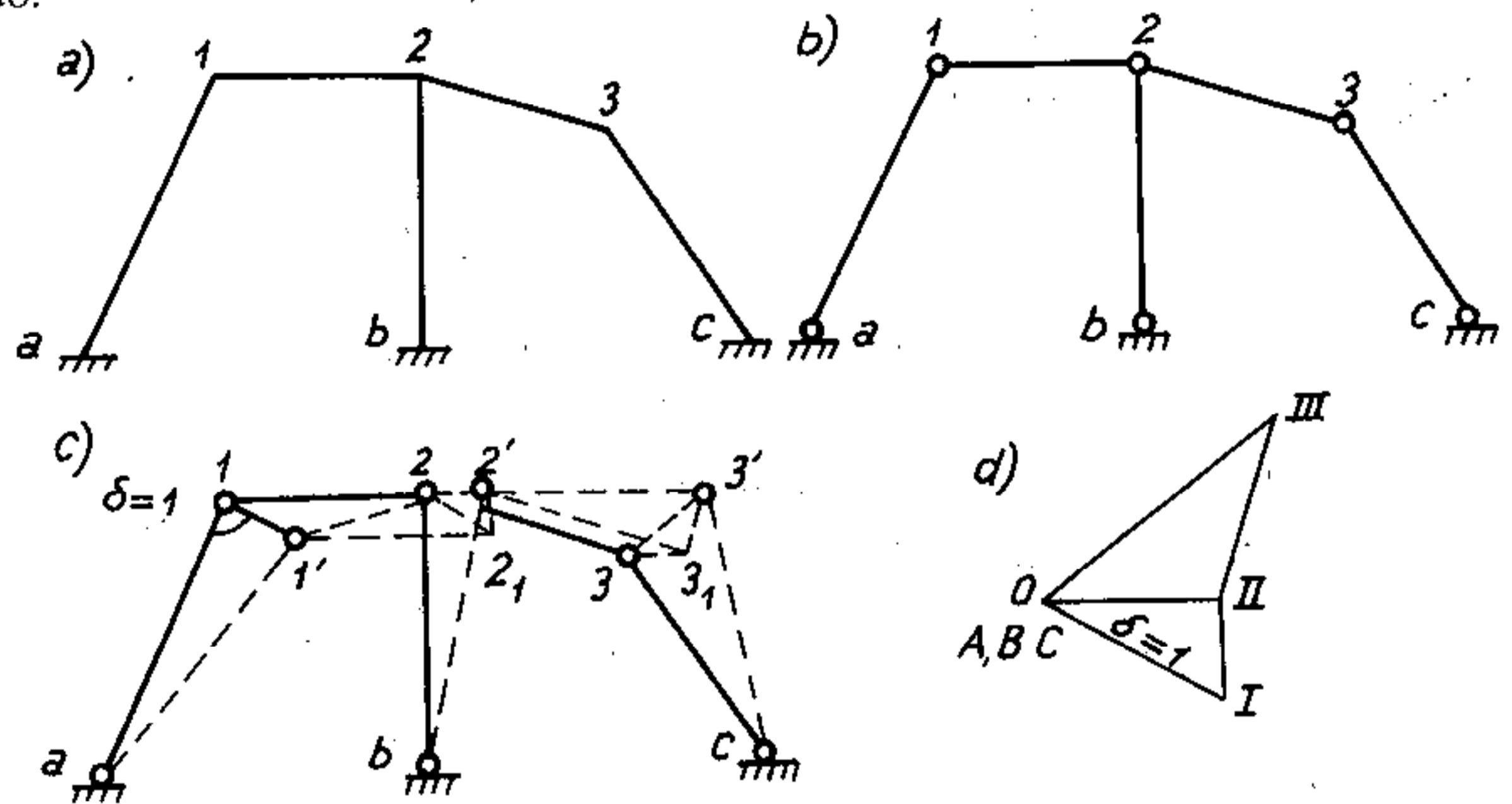
6.3. Cách xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh trong hệ có các thanh đứng không song song

Khi tính hệ siêu động có ẩn số là chuyển vị thẳng, ta cần cho nút chuyển vị thẳng bằng đơn vị để xác định nội lực trong hệ cơ bản và xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc. Nói chung, khi một nút nào đó chuyển vị thẳng thì các nút khác cũng có chuyển vị thẳng kéo theo. Muốn vận dụng các số liệu cho trong bảng 6.2 để xác định nội lực ta cần biết giá trị của chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu mỗi thanh theo phương vuông góc với trục thanh.

Trong những hệ có các thanh đứng song song, việc xác định những thành phần chuyển vị nói trên tương đối dễ dàng. Thật vậy, nếu bỏ qua biến dạng dọc trục của các thanh thì khi một nút nào đó chuyển vị thẳng, các thanh ngang sẽ chuyển vị tịnh tiến nên thành phần chuyển vị nói trên sẽ có giá trị bằng không, còn các thanh đứng trong phạm vi mỗi tầng sẽ có chuyển vị thẳng tương đối như nhau theo phương vuông góc với trục thanh.

Trong những hệ có các thanh đứng không song song, nói chung thành phần chuyển vị thẳng nói trên tồn tại đối với cả thanh ngang và thanh đứng, giá trị của chúng sẽ khác nhau đối với mỗi thanh đứng. Do đó ta cần phải nghiên cứu cách xác định giá trị của thành phần chuyển vị này.

Để tìm hiểu cách xác định, ta xét hệ cho trên hình 6.17a. Giả sử gây chuyển vị cưỡng bức tại một nút nào đó của hệ, chẳng hạn nút 1 với giá trị δ bằng đơn vị theo phương vuông góc với trục thanh $a-1$. Yêu cầu tìm thành phần chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu mỗi thanh, theo phương vuông góc với trục mỗi thanh đó.



Hình 6.17

Vì ở đây chỉ xét chuyển vị thẳng mà không xét đến chuyển vị xoay của các nút cho nên ta có thể thay thế hệ đã cho bằng hệ thanh khớp trong đó các nút và ngàm được thay bằng khớp như trên hình 6.17b. Nếu chú ý đến giả thiết 3 thì khi nghiên cứu chuyển vị thẳng, ta có thể xem các thanh là tuyệt đối cứng. Để xác định các thành phần chuyển vị cần tìm, trước tiên ta xác định chuyển vị của các nút. Trong trường hợp này, các điểm a, b, c (hình 6.17c) nối với trái đất nên chúng vẫn đứng yên trong quá trình hệ chuyển vị. Khi cho nút 1 chuyển vị đến vị trí mới là 1', thanh $a-1$ sẽ có vị trí $a-1'$. Bây giờ cần tìm vị trí mới 2' và 3' của các nút 2 và 3.

Điểm 2 có liên quan đến các điểm 1 và b bằng các thanh $2-1$ và $2-b$. Các điểm 1

và b có vị trí mới đã được xác định nên ta có thể xác định vị trí mới của 2 bằng hình học như sau: nếu giả thiết điểm 2 không bị ràng buộc bởi thanh $2-b$ thì thanh $1-2$ sẽ chuyển dời tịnh tiến tới $1'-2_1$ do kết quả chuyển vị của thanh $a-1$, tiếp đó, vì điểm $1'$ được giữ cố định tại vị trí mới nên điểm 2_1 chỉ có thể chuyển dời theo phương vuông góc với thanh $1-2$ (chú ý là các chuyển vị được xem là nhỏ). Mặt khác, nếu lại giả thiết điểm 2 không bị ràng buộc bởi thanh $1-2$ thì điểm 2 chỉ có thể chuyển dời so với điểm b theo phương vuông góc với thanh $2-b$. Nhưng điểm 2 bị ràng buộc bởi cả hai thanh đó nên vị trí mới $2'$ của điểm 2 chính là giao điểm của hai đường vuông góc với hai thanh $b-2$ và $1-2$ lần lượt kẻ từ 2 và 2_1 . Sau khi tìm được vị trí mới $2'$ của 2, ta dễ dàng tìm được vị trí mới $1'-2'$ và $b'-2'$ của các thanh $1-2$ và $b-2$, tiếp đó suy ra các thành phần chuyển vị cần tìm của thanh $1-2$ và $b-2$ lần lượt là các đoạn $2_1-2'$ và $2-2'$ trên hình 6.17c.

Biết vị trí mới của 2 và của c ta có thể tìm được vị trí mới $3'$ của 3 theo lập luận tương tự như đã thực hiện đối với điểm 2. Vị trí mới $3'$ của điểm 3 là giao điểm của hai đường vuông góc với hai thanh $3-c$ và $3-2$ lần lượt kẻ từ 3 và 3_1 . Thành phần chuyển vị cần tìm của các thanh $3-c$ và $2-3$ lần lượt là các đoạn $3-3'$ và $3_1-3'$ trên hình 6.17c.

Từ những nhận xét trên, ta có thể thực hiện đơn giản hơn bằng cách sử dụng *sơ đồ chuyển vị* như sau (hình 6.17d):

Chọn điểm bất kỳ O làm điểm tượng trưng cho tất cả các điểm không chuyển vị, các điểm tượng trưng cho chuyển vị của các điểm a, b, c là A, B, C trùng với điểm O . Với một tỷ lệ xích nào đó, từ A kẻ đoạn $AI = l$ theo phương vuông góc với thanh $a-1$. Như vậy, đoạn AI biểu thị chuyển vị tương đối giữa hai đầu thanh $a-1$ theo phương vuông góc với trục thanh $a-1$.

Để tìm điểm II tượng trưng cho chuyển vị của điểm 2 trên sơ đồ chuyển vị, ta thực hiện như sau: điểm 2 thuộc thanh $1-2$ nên điểm tượng trưng II của nó trên sơ đồ chuyển vị phải nằm trên đường $I-II$ vuông góc với thanh $1-2$; mặt khác, điểm 2 còn thuộc thanh $b-2$ nên điểm tượng trưng II còn phải nằm trên đường $B-II$ vuông góc với thanh $b-2$. Trên sơ đồ chuyển vị, các đoạn $B-II$ và $I-II$ lần lượt biểu thị chuyển vị tương đối giữa các đầu thanh $b-2$ và $1-2$ theo phương vuông góc với trục thanh. Tam giác $B-II-I$ và tam giác $2-2'-2_1$ đồng dạng cho nên, đoạn $B-II$ tỷ lệ với đoạn $2-2'$ còn đoạn $I-II$ tỷ lệ với đoạn $2_1-2'$ theo tỷ lệ tương ứng với tỷ lệ xích đã chọn để vẽ sơ đồ chuyển vị.

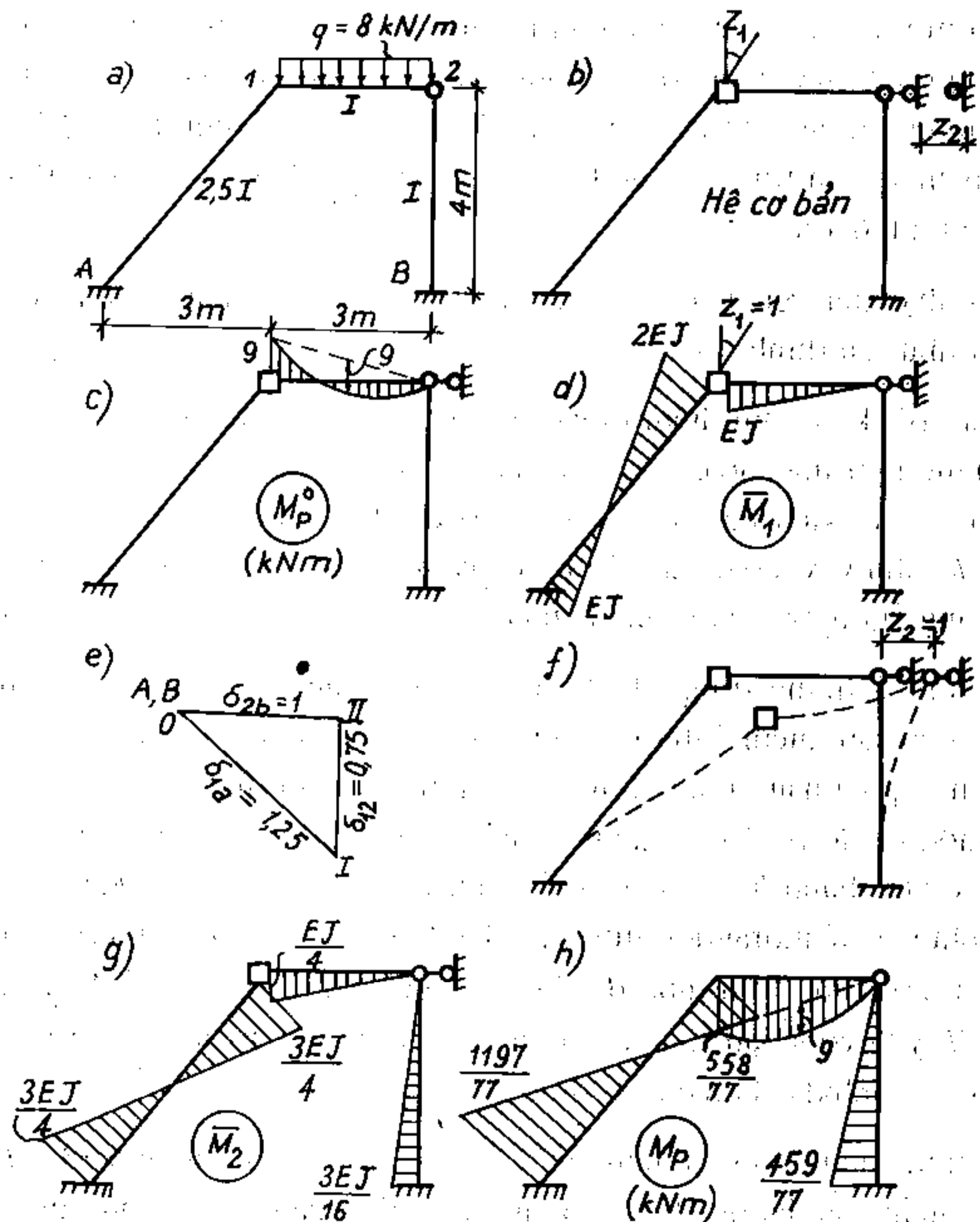
Tiếp tục thực hiện tương tự như vậy ta sẽ tìm được điểm tượng trưng III của điểm 3 là giao điểm của đường $II-III$ vuông góc với thanh $2-3$ và đường $C-III$ vuông góc với thanh $c-3$. Các tam giác $C-II-III$ và $3-3_1-3'$ đồng dạng nên các đoạn

$C-III$ và $II-III$ tỷ lệ với các đoạn $3-3'$ và $3_1-3'$ đồng thời biểu thị chuyển vị tương đối giữa các đầu thanh $c-3$ và $2-3$ theo phương vuông góc với trục thanh.

Như vậy, muốn tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh ta cần vẽ sơ đồ chuyển vị, đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ IK nào đó trên sơ đồ chuyển vị sẽ biểu thị chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh ik theo phương vuông góc với trục thanh ik tương ứng. Để xác định độ dài IK ta đo trực tiếp trên sơ đồ chuyển vị theo tỷ lệ xích đã chọn hoặc giải các tam giác theo các góc, cạnh đã biết trên sơ đồ chuyển vị.

Ví dụ 6.3. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu động cho trên hình 6.18a.


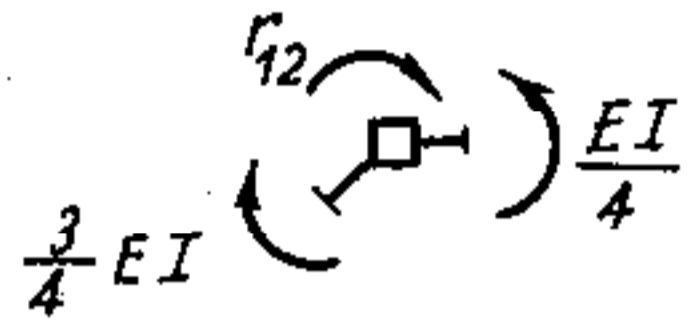
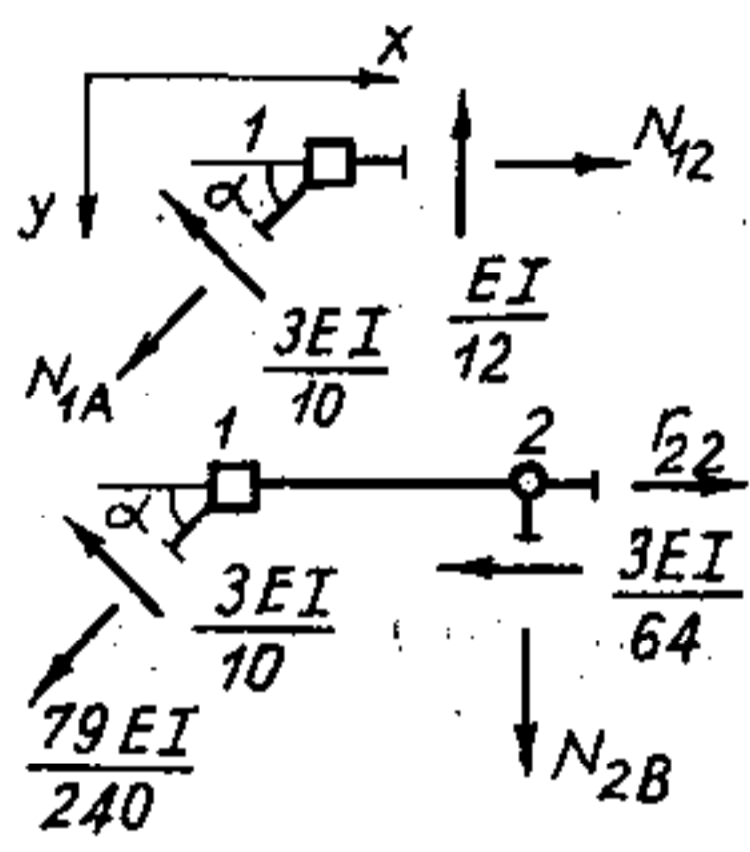
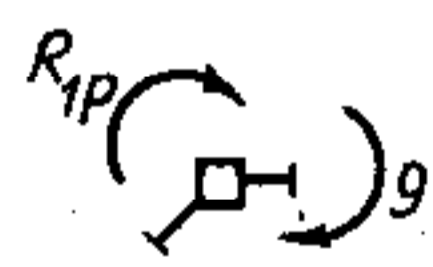
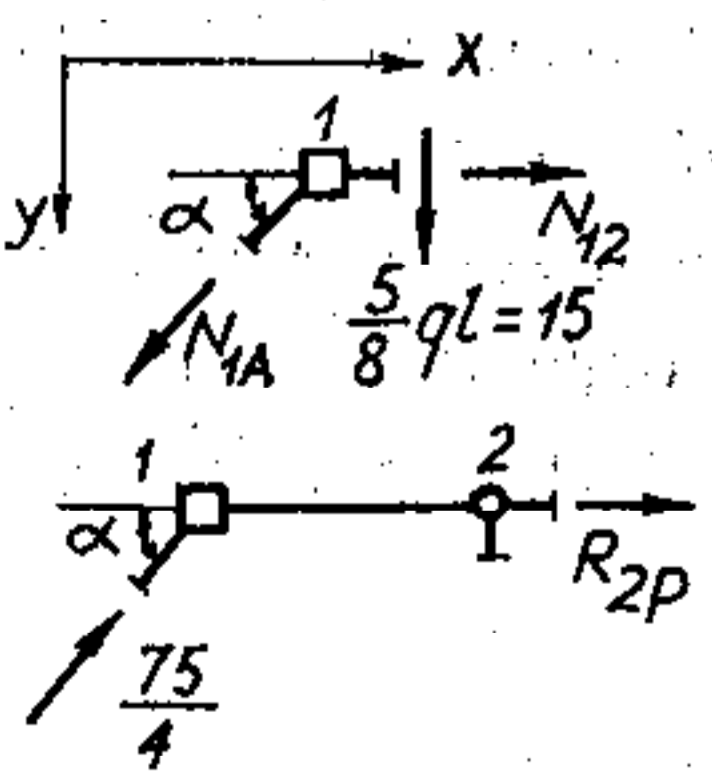
Hệ có hai ẩn số: một chuyển vị xoay tại nút I và một chuyển vị thẳng theo phương ngang tại khớp 2 . Hệ cơ bản như trên hình 6.18b.



Hình 6.18

Biểu đồ M_p^o (hình 6.18c) do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản và biểu đồ \bar{M}_1 (hình 6.18d) do chuyển vị xoay $Z_1 = 1$ gây ra trong hệ cơ bản tìm được dễ dàng theo các số liệu cho trong bảng 6.1 và 6.2.

Bảng 6.3

| Đại lượng | Biểu đồ | Bộ phận tách | Phương trình cân bằng | Kết quả |
|-------------------|-------------|--|--|-------------------|
| r_{11} | \bar{M}_1 |  | $\sum M = r_{11} - EI - 2EI = 0$ | $3EI$ |
| $r_{12} = r_{21}$ | \bar{M}_2 |  | $\sum M = r_{12} - \frac{1}{4}EI + \frac{3}{4}EI = 0$ | $\frac{EI}{2}$ |
| r_{22} | \bar{M}_2 |  | $\sum Y = N_{1A} \sin \alpha - \frac{3EI}{10} \cos \alpha - \frac{EI}{12} = 0$ <p>Suy ra $N_{1A} = \frac{79EI}{240}$</p> $\sum X = r_{22} - \frac{3EI}{64} - \frac{79EI}{240} \cos \alpha - \frac{3EI}{10} \sin \alpha = 0$ | $\frac{31EI}{64}$ |
| R_{1P} | M_p^o |  | $\sum M = R_{1P} + 9 = 0$ | -9 |
| R_{2P} | M_p^o |  | $\sum Y = N_{1A} \sin \alpha + 15 = 0$ <p>Suy ra $N_{1A} = -\frac{15}{\sin \alpha} = -\frac{75}{4}$</p> $\sum X = R_{2P} + \frac{75}{4} \cos \alpha = 0$ | $-\frac{45}{4}$ |

Để vẽ biểu đồ \bar{M}_2 do chuyển vị thẳng $Z_2 = 1$ gây ra trong hệ cơ bản ta cần vẽ sơ đồ chuyển vị. Chọn điểm 0 bất kỳ, tượng trưng cho tất cả các điểm bất động

(hình 6.18e), các điểm A, B sẽ trùng với O . Từ O dựng đoạn $O-II = \delta_{2b} = 1$ theo phương vuông góc với thanh $2-B$ ta được điểm tượng trưng II của điểm 2. Điểm tượng trưng I chính là giao điểm của đường $O-I$ vuông góc với thanh $a-I$ và đường $II-I$ kẻ từ II vuông góc với thanh $I-2$. Từ sơ đồ chuyển vị ta xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh và được kết quả như sau:

$$\delta_{2b} = B-II = 1; \quad \delta_{12} = I-II = 0,75; \quad \delta_{1a} = A-I = 1,25.$$

Sơ đồ biến dạng tương ứng của hệ như trên hình 6.18f. Vận dụng bảng 6.2 đồng thời căn cứ vào các số liệu vừa tìm được và đường biến dạng của các thanh ta vẽ được biểu đồ \bar{M}_2 như trên hình 6.18g.

Quá trình xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc được trình bày trong bảng 6.3.

Hệ phương trình chính tắc:

$$3EIZ_1 - \frac{1}{2}EIZ_2 - 9 = 0; \quad -\frac{1}{2}EIZ_1 + \frac{31}{64}EIZ_2 - \frac{45}{4} = 0.$$

Sau khi giải hệ phương trình trên, ta được: $Z_1 = \frac{639}{77EI}$ rad; $Z_2 = \frac{2448}{77EI}$ m.

Biểu đồ mômen uốn tổng cộng được xác định theo công thức

$$(M_P) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_P^0).$$

Kết quả tìm được như trên hình 6.18h.

6.4. Cách tính hệ siêu động chịu sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức

Về cơ bản cách tính hệ siêu động chịu tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các liên kết tựa cũng tương tự như trong bài toán hệ chịu tải trọng bất động đã xét.

Khi giải bài toán này ta cũng thực hiện trên hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị như đã trình bày trong mục 6.2. Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ đã cho ta cần gây ra các chuyển vị cưỡng bức Z tại các liên kết đặt thêm vào hệ với các giá trị sao cho phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ do tất cả các nguyên nhân gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không. Cũng lý luận tương tự như ở 6.2, trong trường hợp này hệ phương trình chính tắc có dạng

$$\boxed{r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kk}Z_k + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kH} = 0,} \quad (6.5)$$

với $k = 1, 2, \dots, n.$

Các hệ số r_{ki} vẫn có ý nghĩa là phản lực trong liên kết thứ k đặt thêm vào hệ do chuyển vị cưỡng bức $Z_i=1$ gây ra trong hệ cơ bản, xác định như trong mục 6.2.

Các số hạng tự do R_{kH} biểu thị phản lực trong liên kết thứ k đặt thêm vào hệ do nguyên nhân H gây ra trong hệ cơ bản. Nguyên nhân H có thể là sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các liên kết tựa. Đây là những đại lượng mới đề cập, do đó dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách xác định chúng.

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để tìm các Z_i , cũng tương tự như ở 6.2, ta xác định nội lực trong hệ siêu động đã cho theo công thức:

$$(S_H) = (\bar{S}_1)Z_1 + (\bar{S}_2)Z_2 + \dots + (\bar{S}_k)Z_k + \dots + (\bar{S}_n)Z_n + (S_H^0), \quad (6.6)$$

trong đó:

- (\bar{S}_k) – biểu đồ nội lực do riêng chuyển vị cưỡng bức $Z_k=1$ gây trong hệ cơ bản (cách tìm biểu đồ này đã được trình bày trong mục 6.2);
- (S_H) – biểu đồ nội lực do nguyên nhân H gây ra trong hệ siêu động;
- (S_H^0) – biểu đồ nội lực do nguyên nhân H gây ra trong hệ cơ bản.

Để tìm chuyển vị trong hệ siêu động ta cũng thực hiện theo một trong ba biện pháp như đã trình bày trong mục 6.2.

Ta thấy có hai vấn đề mới cần giải quyết là xác định các phản lực R_{kH} và vẽ biểu đồ (S_H^0) , chủ yếu là biểu đồ mômen uốn (M_H^0) . Nếu biểu đồ (M_H^0) đã tìm được thì ta sẽ vận dụng các điều kiện cân bằng để xác định các R_{kH} như đã biết trong mục 6.2. Như vậy, vấn đề duy nhất cần tiếp tục tìm hiểu là vẽ biểu đồ (M_H^0) .

A. Cách tìm biểu đồ M_H^0 do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản

Để giải bài toán được đơn giản ta nên phân tích chuyển vị cưỡng bức thành hai thành phần: chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng. Theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có thể biểu thị

$$(M_H^0) = (M_\varphi^0) + (M_\Delta^0), \quad (6.7)$$

trong đó:

- (M_φ^0) – biểu đồ mômen uốn do riêng các thành phần chuyển vị xoay cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản. Vận dụng các số liệu cho trong bảng 6.2 ta dễ dàng vẽ được biểu đồ này;
- (M_Δ^0) – biểu đồ mômen uốn do riêng các thành phần chuyển vị thẳng cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản. Để vẽ biểu đồ này ta cần vẽ sơ đồ chuyển vị nhằm xác định các chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh theo phương vuông góc với trục thanh (xem 6.3). Tiếp đó vận dụng các số liệu trong bảng 6.2 để vẽ biểu đồ.

Trên hình 6.19 trình bày cách tìm các biểu đồ (M_φ^0) và (M_Δ^0) trong hệ cơ bản chịu chuyển vị cưỡng bức như trên hình 6.19a.

Để xác định R_{kH} ta cũng phân tích thành hai thành phần tương ứng với hai nguyên nhân nói trên

$$R_{kH} = R_{k\varphi} + R_{k\Delta},$$

trong đó:

$R_{k\varphi}$ – phản lực tại liên kết thứ k đặt thêm vào hệ do các thành phần chuyển vị xoay cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản;

$R_{k\Delta}$ – phản lực tại liên kết thứ k đặt vào hệ do các thành phần chuyển vị thẳng cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản.

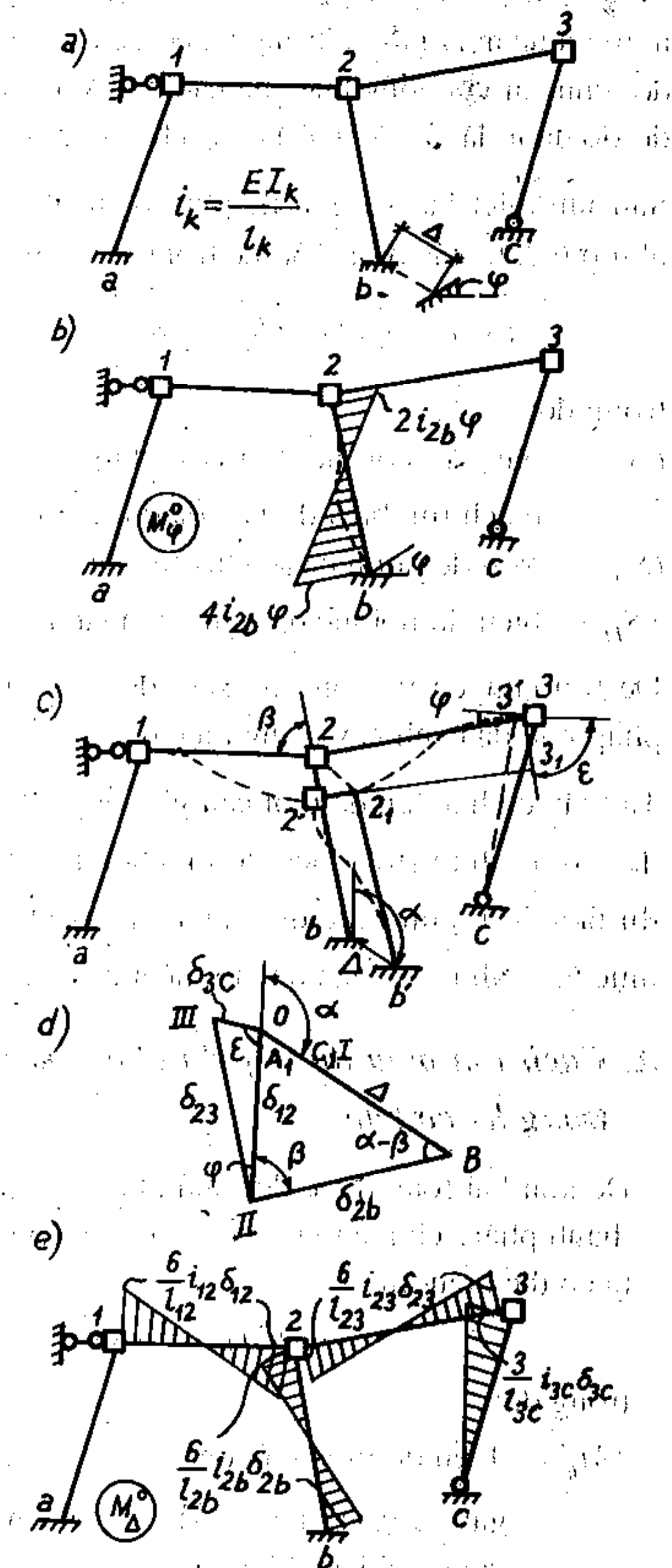
Những thành phần này được xác định theo các số liệu tương ứng trên các biểu đồ (M_φ^0) và (M_Δ^0).

Ví dụ 6.4. Vẽ biểu đồ mômen uốn cho hệ trên hình 6.20a.

Hệ có hai ẩn số. Các biểu đồ mômen uốn do các chuyển vị cưỡng bức Z_1 và Z_2 bằng đơn vị gây ra trên hệ cơ bản như trên hình 6.20b, c. Các biểu đồ mômen uốn do các thành phần chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng tại ngàm, tìm được như trên hình 6.20d, e. Các hệ số và số hạng tự do tìm được như sau:

$$r_{11} = 3EI; \quad r_{21} = r_{12} = -\frac{3}{4}EI; \quad r_{22} = \frac{15}{32}EI;$$

$$R_{1H} = EI\varphi - \frac{3}{4}EI\Delta = -\frac{1}{2}EI\Delta; \quad R_{2H} = -\frac{3}{4}EI\varphi + \frac{3}{8}EI\Delta = \frac{3}{16}EI\Delta.$$



Hình 6.19

Hệ phương trình chính tắc:

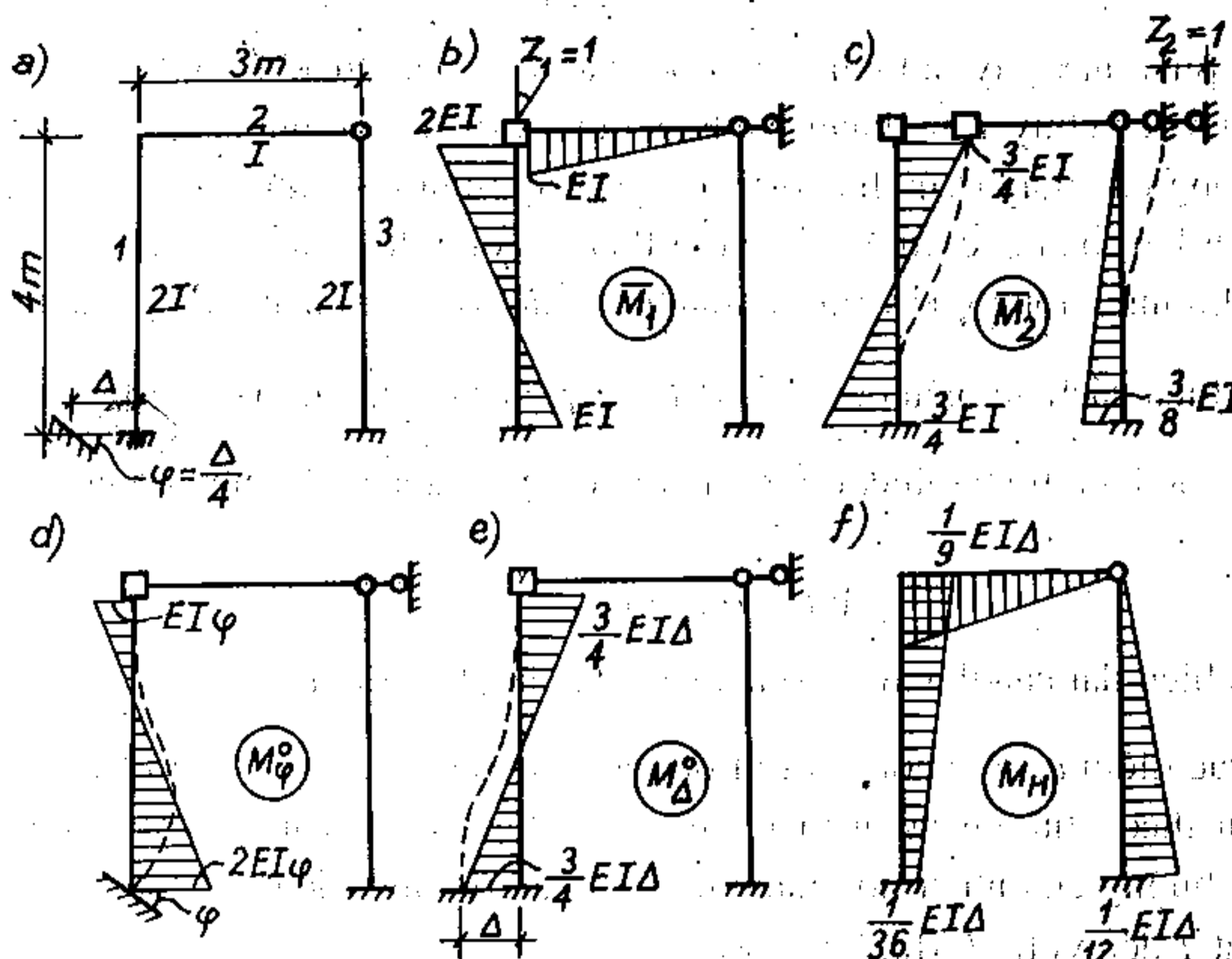
$$3Z_1 - \frac{3}{4}Z_2 - \frac{1}{2}\Delta = 0; \quad -\frac{3}{4}Z_1 + \frac{15}{32}Z_2 + \frac{3}{16}\Delta = 0.$$

Sau khi giải hệ phương trình, ta được: $Z_1 = (\Delta/9)$ rad; $Z_2 = -(2\Delta/9)$ m.

Biểu đồ mômen uốn tổng cộng được xác định theo công thức:

$$(M_H) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_\varphi^0) + (M_\Delta^0),$$

Kết quả tìm được như trên hình 6.20f.



Hình 6.20

B. Cách tìm biểu đồ M_H^0 do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản

Tương tự như trên, ta phân tích sự thay đổi nhiệt độ thành hai thành phần:

- ❖ Thành phần biểu thị độ chênh lệch nhiệt độ giữa thớ dưới và thớ trên trong phạm vi mỗi cấu kiện, được đặc trưng bởi $\Delta t = t_2 - t_1$.
- ❖ Thành phần biểu thị sự thay đổi đều của nhiệt độ trong phạm vi mỗi cấu kiện, được đặc trưng bằng t_c (sự thay đổi nhiệt độ ở trục cấu kiện).

Theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$(M_H^0) = (M_{\Delta t}^0) + (M_{t_c}^0), \quad (6.8)$$

trong đó:

$(M_{\Delta t}^0)$ – biểu đồ mômen uốn do các thành phần Δt gây ra trong hệ cơ bản. Sự

chênh lệch nhiệt độ Δt chỉ làm cho các thanh bị uốn cong mà không gây ra sự thay đổi chiều dài của các thanh. Do đó, các nút sẽ không có chuyển vị thẳng. Thành phần này chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trong phạm vi mỗi cấu kiện thanh. Vận dụng các số liệu trong bảng 6.1 ta dễ dàng vẽ được biểu đồ này. Khi vận dụng cần chú ý là các thứ căng của biểu đồ mômen uốn luôn luôn ở phía nhiệt độ thay đổi thấp hơn. Đối với hệ cơ bản trên hình 6.21a, biểu đồ này có dạng như trên hình 6.21b;

(M''_{t_c}) – biểu đồ mômen uốn do các thành phần t_c gây ra trong hệ cơ bản.

Thành phần này gây ra biến dạng dọc trục trong các thanh, do đó, nói chung các nút sẽ có chuyển vị thẳng. Sự thay đổi vị trí của các nút sẽ gây ra mômen uốn trong các thanh của hệ cơ bản, Như vậy, muốn vẽ được biểu đồ này, ta cần giải bài toán xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh theo phương vuông góc với trục thanh, tức là tìm sơ đồ chuyển vị của hệ.

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ biểu đồ (M''_{t_c}) thông qua hệ cơ bản trên hình 6.21a.

Gọi $t_{c,ik}$ là độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh ik . Thanh ik có biến dạng dọc trục vì nhiệt là

$$\Delta l_{ik} = \alpha t_{c,ik} l_{ik}$$

với l_{ik} là chiều dài của thanh ik ; α là hệ số giãn nở dài vì nhiệt.

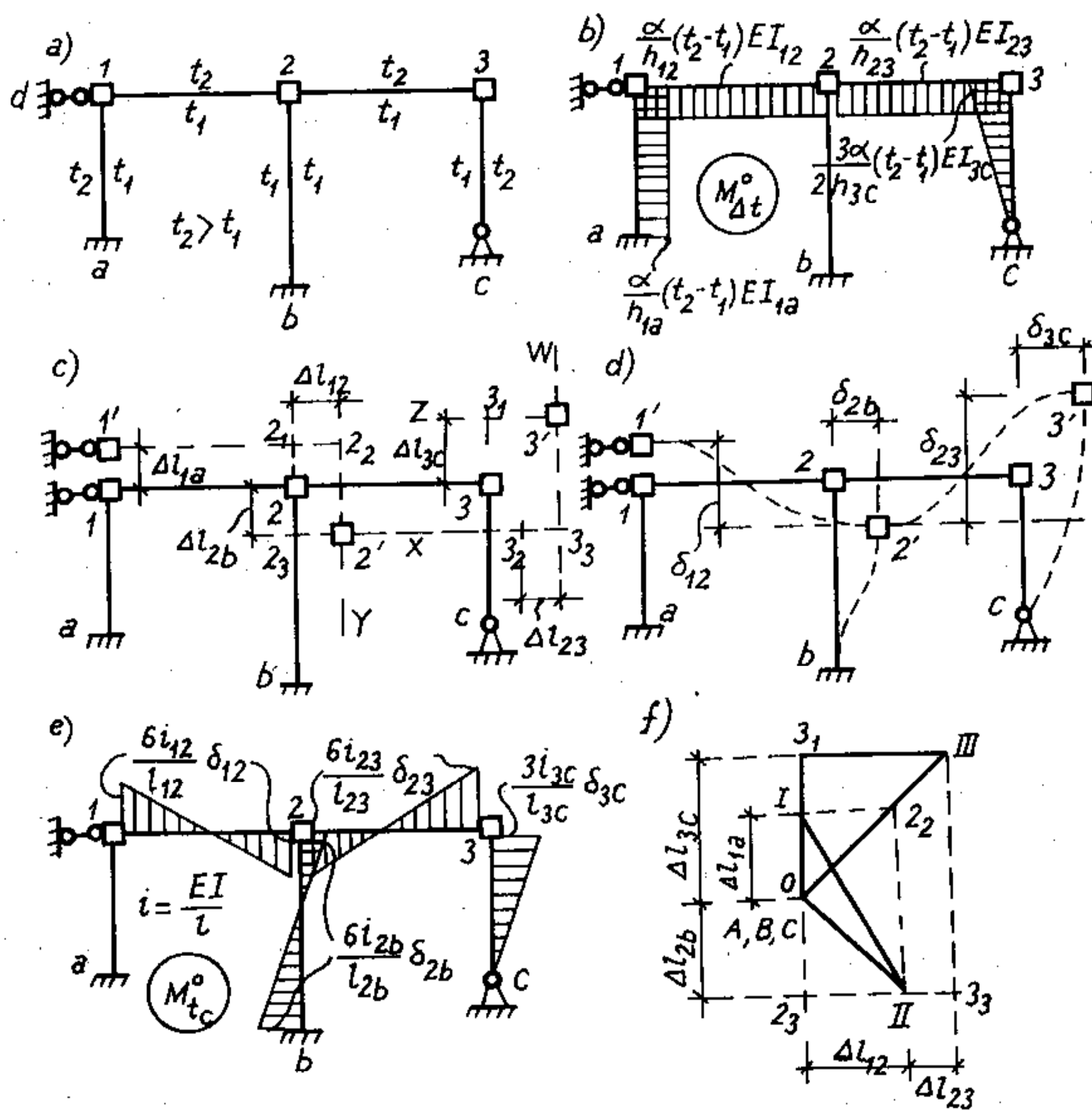
Ta thấy các điểm a, b, c nối với trái đất nên không di chuyển. Nút 1 chỉ có thể di chuyển theo phương đứng vì bị liên kết thanh ngăn cản chuyển vị ngang. Dưới ảnh hưởng của nhiệt độ, thanh $a-1$ sẽ giãn dài một đoạn $\Delta l_{1a} = \alpha t_{c,1a} l_{1a}$ và đẩy nút 1 đến vị trí 1' (hình 6.21c).

Tìm vị trí mới của nút 2: Giả sử dưới tác dụng của nhiệt độ, thanh $1-2$ sẽ giãn dài một đoạn $\Delta l_{12} = \alpha t_{c,12} l_{12}$ còn thanh $b-2$ co ngắn một đoạn $\Delta l_{2b} = \alpha t_{c,2b} l_{2b}$. Nếu xem nút 2 thuộc thanh $1-2$ thì nút 2 sẽ có vị trí nằm trên trục Y đi qua 2_2 và vuông góc với thanh $1-2$ để bảo đảm điều kiện trục thanh $1-2$ giãn dài một đoạn Δl_{12} . Nếu xem nút 2 thuộc thanh $b-2$ thì nút 2 sẽ phải có vị trí mới nằm trên trục X vuông góc với thanh $b-2$ để đảm bảo điều kiện trục thanh $b-2$ co ngắn một đoạn Δl_{2b} . Như vậy, vị trí mới 2' của nút 2 đồng thời phải nằm trên trục X và trục Y tức là ở giao điểm của hai trục đó.

Tìm vị trí mới của nút 3: Dưới tác dụng của nhiệt độ, giả sử thanh $3-c$ giãn dài một đoạn $\Delta l_{3c} = \alpha t_{c,3c} l_{3c}$ và thanh $2-3$ giãn dài một đoạn $\Delta l_{23} = \alpha t_{c,23} l_{23}$. Nếu xem nút 3 thuộc thanh $3-c$ thì sau khi thanh $3-c$ giãn dài tới vị trí 3_1 , nút 3 sẽ rời khỏi vị trí 3_1 chuyển vị theo phương Z vuông góc với thanh $3-c$. Nếu xem nút 3 thuộc thanh $2-3$ thì nút 3 sẽ chuyển dịch theo nút 2 tới 3_2 đồng thời

chuyển dịch tới 3_3 do kết quả biến dạng dọc trục của thanh 2-3, tiếp đó có thể chuyển dịch theo phương W vuông góc với thanh 2-3. Như vậy, vị trí mới $3'$ của nút 3 chính là giao điểm của hai trục Z và W .

Nếu chú ý là các nút không cho phép các đầu thanh có chuyển vị xoay, ta có thể vẽ được đường biến dạng của các thanh tương ứng như trên hình 6.21d. Từ các hình 6.21c, d ta có thể xác định các chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh theo phương vuông góc với trục thanh. Ví dụ, đối với thanh 1-2 ta có $\Delta l_{12} = \Delta l_{1a} + \Delta l_{2b}$, đối với thanh 3-c, ta có $\Delta l_{3c} = \Delta l_{23} + \Delta l_{12}$. Tiếp đó, vận dụng các số liệu trong bảng 6.2 ta sẽ vẽ được biểu đồ (M_{tc}^o) như trên hình 6.21e.



Hình 6.21

Cũng có thể xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh theo phương vuông góc với trục thanh bằng cách dựng sơ đồ chuyển vị tương tự như đã trình bày trong mục 6.3. Tuy nhiên, trong trường hợp bài toán nhiệt độ ta cần phải chú ý bổ sung biến dạng dọc trục vì nhiệt của bản thân mỗi thanh. Sơ đồ

chuyển vị về cho bài toán hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ được gọi là *giản đồ Williot*. Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ giản đồ Williot thông qua ví dụ vừa khảo sát ở trên.

Chọn điểm bất kỳ O tượng trưng cho các điểm bất động. Trên giản đồ các điểm A, B, C tượng trưng cho chuyển vị của các điểm bất động a, b, c sẽ trùng với điểm O .

Để tìm điểm I tượng trưng cho chuyển vị của nút 1, ta nhận thấy nút 1 chỉ có thể chuyển vị theo phương song song với thanh $a-1$ một đoạn bằng Δl_{1a} cho nên trên giản đồ ta kẻ đoạn AI song song với thanh $a-1$ và bằng Δl_{1a} .

Để tìm điểm II tượng trưng cho chuyển vị của nút 2, ta có nhận xét sau: nút 2 có liên quan với nút 1 qua thanh $1-2$ cho nên vị trí của nó phụ thuộc vị trí của nút 1. Sau khi biết điểm I , từ I ta kẻ đoạn $I-2_2$ song song với thanh $1-2$ có giá trị bằng độ dãn Δl_{12} của thanh $1-2$. Ngoài ra điểm 2 còn thuộc thanh $b-2$ nên vị trí của điểm 2 phải phụ thuộc vị trí điểm B , do đó từ B ta kẻ đoạn $B-2_3$ song song với thanh $b-2$ có giá trị bằng độ co ngắn Δl_{2b} của thanh $b-2$. Như vậy, vị trí II biểu thị chuyển vị của nút 2 là giao điểm của hai đường: đường 2_2-II kẻ từ 2_2 vuông góc với thanh $1-2$ và đường 2_3-II kẻ từ 2_3 vuông góc với thanh $b-2$.

Cũng làm tương tự như thế ta sẽ xác định được điểm tượng trưng III của điểm 3 trên giản đồ.

Các vector $A-I; I-II; II-III$ v.v... trên giản đồ cho ta biết phương và trị số của chuyển vị tương đối giữa các điểm nối vector $A-I, I-II, II-III$ v.v... Muốn tìm thành phần chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh ta cần chiếu các vector tương ứng xuống phương cần tìm như đã thể hiện trên hình 6.21f.

Để xác định R_{kH} ta cũng phân tích thành hai thành phần tương ứng với hai nguyên nhân nói trên:

$$R_{kH} = R_{k\Delta l} + R_{kt_c}$$

Những thành phần này được xác định theo các số liệu tương ứng trên các biểu đồ $(M_{\Delta l}^o)$ và $(M_{t_c}^o)$.

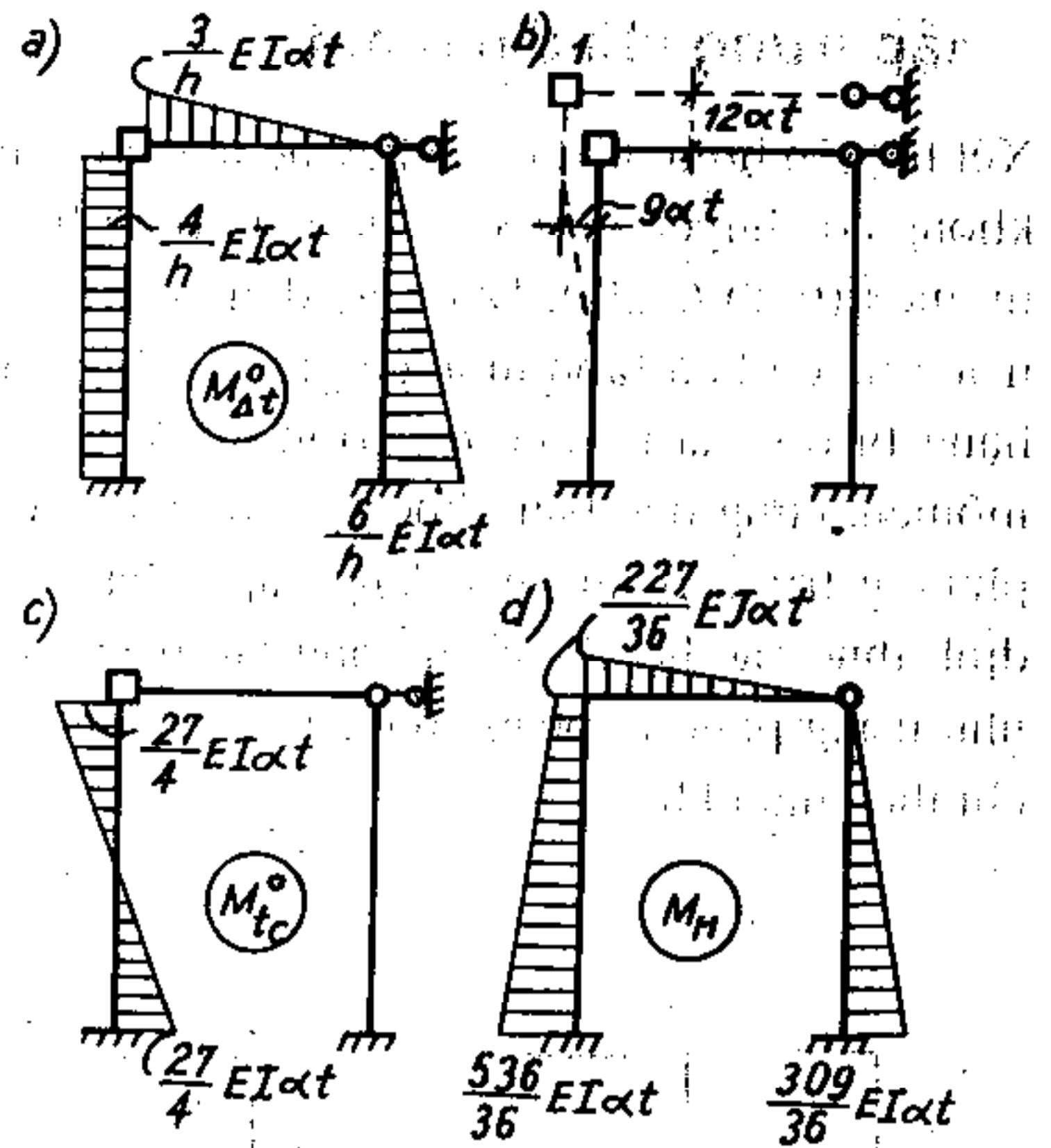
Ví dụ 6.5. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ đã xét ở ví dụ 6.4 (hình 6.20a).

Nhiệt độ ở bên trong khung và bên ngoài khung thay đổi theo thứ tự là $4t$ và $2t$. Cho biết $h = \text{const} = 0,4$ m.

Hệ có hai ẩn số. Các biểu đồ mômen uốn do các chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản, các hệ số của hệ phương trình chính tắc đã được xác định trong ví dụ 6.4.

Ở đây ta chỉ cần tìm bổ sung:

- Biểu đồ mômen uốn do sự chênh lệch nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản, vận dụng các số liệu trong bảng 6.1 sẽ được kết quả như trên hình 6.22a;
- Biểu đồ mômen uốn do sự thay đổi đều của nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản. Muốn vậy ta tìm chuyển vị tương đối giữa hai đầu các thanh theo phương vuông góc với trục thanh như trên hình 6.22b, tiếp đó vận dụng các số liệu trong bảng 6.2 sẽ được kết quả như trên hình 6.22c.



Hình 6.22

Các số hạng tự do:

$$R_{1H} = -\frac{3}{h} EI\alpha t + \frac{4}{h} EI\alpha t + \frac{27}{4} EI\alpha t = \frac{37}{4} EI\alpha t;$$

$$R_{2H} = -\frac{3}{2h} EI\alpha t - \frac{27}{8} EI\alpha t = -\frac{57}{8} EI\alpha t.$$

Hệ phương trình chính tắc: $3Z_1 - \frac{3}{4}Z_2 + \frac{37}{4}\alpha t = 0;$

$$-\frac{3}{4}Z_1 + \frac{15}{32}Z_2 - \frac{57}{8}\alpha t = 0;$$

Nghiệm: $Z_1 = \frac{43}{36}\alpha t \text{ rad}; \quad Z_2 = \frac{154}{9}\alpha t \text{ m.}$

Biểu đồ mômen uốn tổng cộng được xác định theo công thức:

$$(M_H) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_{\Delta t}^0) + (M_t^0).$$

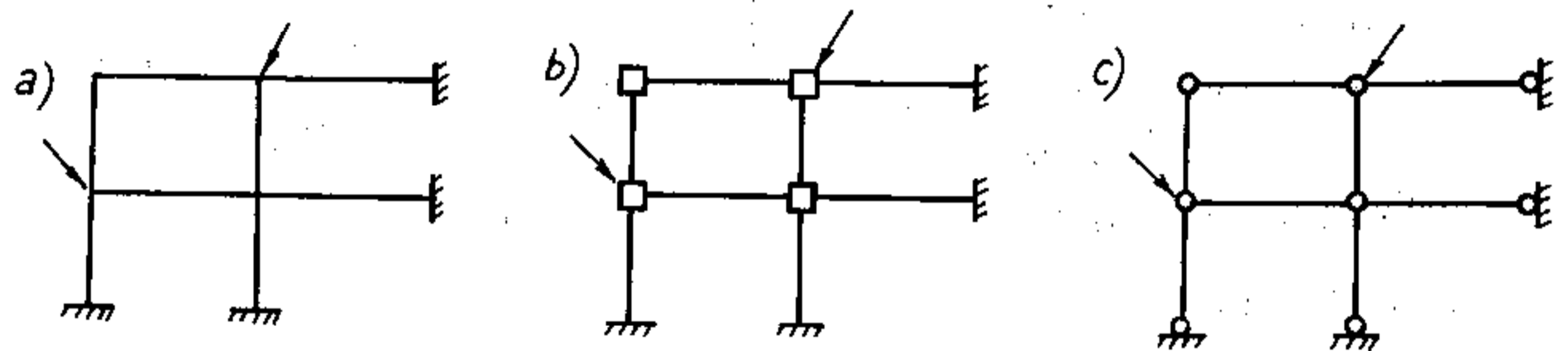
Kết quả tìm được như trên hình 6.22d.

Chú thích: Bài toán hệ có các thanh chế tạo chiều dài không chính xác hoặc điều chỉnh chiều dài được quy đổi về bài toán hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ tương đương.

6.5. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu lực tập trung chỉ đặt ở nút

Xét hệ trên hình 6.23a. Ta thấy hệ này thỏa mãn hai điều kiện nêu trên. Vì các nút không có chuyển vị thẳng cho nên trong hệ cơ bản chỉ cần đặt thêm các liên kết mômen (hình 6.23b). Dưới tác dụng của lực tập trung chỉ đặt ở nút, mômen uốn trong hệ cơ bản luôn luôn có giá trị bằng không tại mọi tiết diện. Do đó, các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc, biểu thị phản lực trong các liên kết mômen, cũng đều bằng không. Như vậy, hệ phương trình chính tắc trở thành hệ phương trình thuần nhất đẳng cấp. Mặt khác, người ta đã chứng minh được là định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc trong phương pháp lực cũng như trong phương pháp chuyển vị luôn khác không. Do đó hệ phương trình này chỉ thỏa mãn khi

$$Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 0.$$



Hình 6.23

Thay các $Z_k = 0$ vào công thức xác định biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu động

$$(M_P) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + \dots + (\bar{M}_n)Z_n + (M_P^0),$$

đồng thời chú ý là biểu đồ (M_P^0) không tồn tại, ta thấy mômen uốn trong hệ siêu động không tồn tại. Do đó lực cắt, đạo hàm của mômen uốn, cũng không tồn tại. Như vậy, nội lực trong hệ chỉ còn lực dọc, nghĩa là hệ sẽ làm việc như một hệ dàn khớp, trong đó các nút và ngàm đều được thay bằng khớp như trên hình 6.23c.

Kết luận: trong những hệ siêu động có các nút không chuyển vị thẳng và chịu lực tập trung chỉ đặt ở nút, ta có thể thay hệ đó bằng hệ tương đương với các nút và ngàm được thay bằng khớp, tiếp đó tính như một dàn khớp thông thường.

Điều này cho phép ta giải thích được vì sao các mắt của dàn trong thực tế là mắt cứng lại có thể xem gần đúng là các khớp lý tưởng, nếu bỏ qua chuyển vị thẳng của các nút và lực chỉ đặt ở nút.

Tất nhiên kết luận trên chỉ là gần đúng bởi vì trong quá trình suy luận ta đã chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục.

Như vậy, vấn đề mới cần tiếp tục tìm hiểu là xác định các số hạng tự do r_{kP} . Có thể tìm các r_{kP} hoặc bằng cách tính phản lực tại liên kết thứ k đặt thêm vào do tải trọng di động gây ra trên hệ cơ bản theo quy cách đã trình bày trong mục 6.2 hoặc bằng cách vận dụng định lý tương hỗ giữa phản lực đơn vị và chuyển vị đơn vị. Thường nên dùng cách thứ nhất vì có thể sử dụng được các công thức hoặc các bảng đã thiết lập sẵn.

Thực vậy, hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị chỉ bao gồm các phần tử mẫu ghép lại với nhau tại các nút cố định, cho nên lực $P=1$ di động trên hệ cơ bản chỉ gây ảnh hưởng trong phần tử chịu lực trực tiếp mà không ảnh hưởng đến các phần tử khác. Do đó, nếu biết nội lực trong các phần tử do tải trọng $P=1$ có vị trí bất kỳ gây ra thì ta dễ dàng xác định các phản lực cần tìm theo quy cách đã trình bày trong mục 6.2.

Trong các bảng 6.4, 6.5 và 6.6 cung cấp các số liệu cần thiết cho việc xác định các phản lực r_{kP} . Ngoài các công thức tổng quát áp dụng cho số khoảng chia hay số điểm đặt lực bất kỳ, trong các các bảng còn cung cấp các số liệu cụ thể cho trường hợp số khoảng chia trong mỗi phần tử là 2, 5 và 10.

Với mỗi điểm đặt lực $P=1$, ta sẽ xác định được các giá trị tương ứng của Z_k theo 6.10, tức là tìm được các tung độ tương ứng của các đường ảnh hưởng cơ bản.

B. Đường ảnh hưởng phản lực, nội lực và chuyển vị

Sau khi tìm được các đ.a.h. cơ bản, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đ.a.h. của đại lượng S (phản lực, nội lực hay chuyển vị) tại một tiết diện k bất kỳ theo biểu thức sau:

$$\text{Đ.a.h. } S_k = \bar{S}_{k1}(\text{đ.a.h. } Z_1) + \bar{S}_{k2}(\text{đ.a.h. } Z_2) + \dots + \bar{S}_{kn}(\text{đ.a.h. } Z_n) + \text{đ.a.h. } S_k^0, \quad (6.12)$$

trong đó:

\bar{S}_{ki} – giá trị của đại lượng cần vẽ đ.a.h. tại tiết diện k do riêng chuyển vị $Z_i=1$ gây ra trong hệ cơ bản;

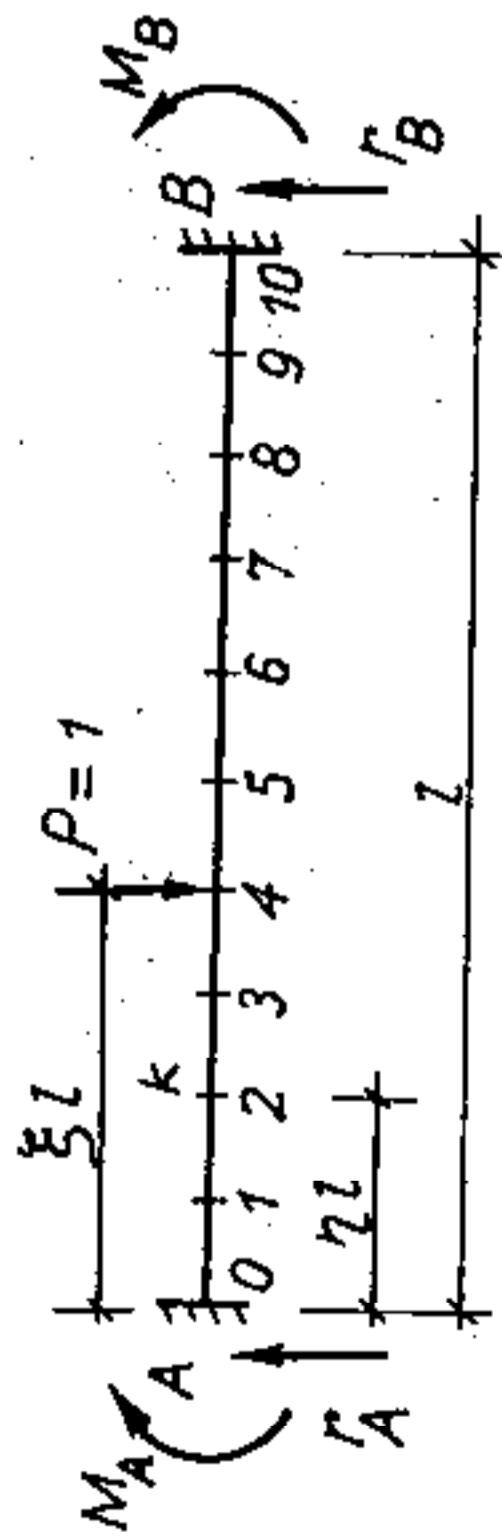
đ.a.h. S_k^0 – đường ảnh hưởng của đại lượng S tại tiết diện k đang xét do tải trọng $P=1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Ví dụ 6.6. Cho hệ siêu động như trên hình 6.24a. Chia đường xe chạy thành 10 đoạn mỗi đoạn có chiều dài 1 m và đánh số các điểm đặt lực như trên hình 6.24a. Yêu cầu: vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại các tiết diện ở các điểm chia 2 và 5.

Để giải bài toán này ta tiến hành theo thứ tự như sau:

1. *Tìm số ẩn số và lập hệ cơ bản:* số ẩn $n = 3$, hệ cơ bản như trên hình 6.24b.

Bảng 6.4



$$M_A = -\xi(1-\xi)^2 l; \quad M_B = -\xi^2(1-\xi)l;$$

$$r_A = (1-\xi)^2(1+2\xi); \quad r_B = \xi^2(3-2\xi)l;$$

$$M_k = (1-\xi)^2[\eta(1+2\xi)-\xi] \quad \text{ khi } \eta \leq \xi;$$

$$M_k = \xi^2[(1-\eta)(3-2\xi)-(1-\xi)] \quad \text{ khi } \eta \geq \xi.$$

| ξ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|-------|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| 0,0 | 0 | -0,0810./ | -0,1280./ | -0,1470./ | -0,1440./ | -0,1250./ | -0,0960./ | -0,0630./ | -0,0320./ | -0,0090./ | 0 |
| 0,1 | 0 | 0,0892./ | -0,0384./ | -0,0686./ | -0,0792./ | -0,0750./ | -0,0608./ | -0,0414./ | -0,0216./ | -0,0062./ | 0 |
| 0,2 | 0 | 0,0134./ | 0,0512./ | 0,0118./ | -0,0144./ | -0,0250./ | -0,0256./ | -0,0198./ | -0,0112./ | -0,0034./ | 0 |
| 0,3 | 0 | 0,0106./ | 0,0408./ | 0,0882./ | 0,0504./ | 0,0250./ | 0,0096./ | 0,0234./ | -0,0008./ | -0,0006./ | 0 |
| 0,4 | 0 | 0,0078./ | 0,0302./ | 0,0666./ | 0,1152./ | 0,0750./ | 0,0448./ | 0,0018./ | 0,0096./ | 0,0022./ | 0 |
| 0,5 | 0 | 0,0050./ | 0,0200./ | 0,0450./ | 0,0800./ | 0,1250./ | 0,0800./ | 0,0450./ | 0,0200./ | 0,0050./ | 0 |
| 0,6 | 0 | 0,0022./ | 0,0096./ | 0,0234./ | 0,0448./ | 0,0750./ | 0,1152./ | 0,0666./ | 0,0302./ | 0,0078./ | 0 |
| 0,7 | 0 | -0,0006./ | -0,0008./ | 0,0018./ | 0,0096./ | 0,0250./ | 0,0504./ | 0,0882./ | 0,0408./ | 0,0106./ | 0 |
| 0,8 | 0 | -0,0034./ | -0,0112./ | -0,0198./ | -0,0256./ | -0,0250./ | -0,0144./ | 0,0118./ | 0,0512./ | 0,0134./ | 0 |
| 0,9 | 0 | -0,0062./ | -0,0216./ | -0,0414./ | -0,0608./ | -0,0750./ | -0,0792./ | -0,0686./ | -0,0384./ | 0,0892./ | 0 |
| 1,0 | 0 | -0,0090./ | -0,0320./ | -0,0630./ | -0,0960./ | -0,1250./ | -0,1440./ | -0,1470./ | -0,1280./ | -0,0810./ | 0 |

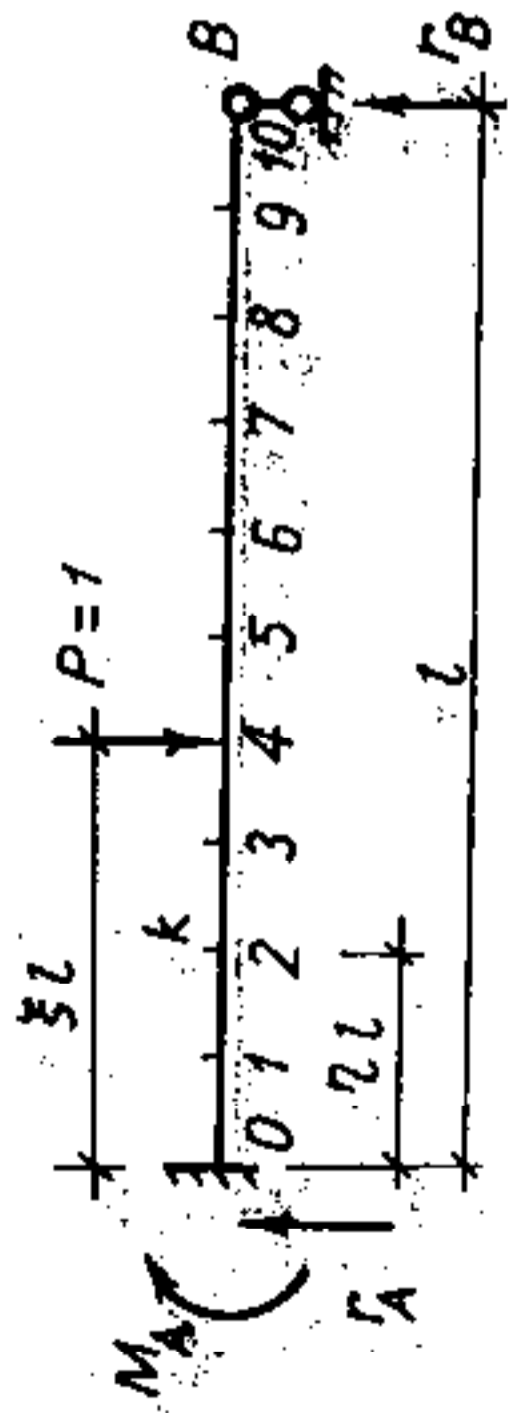
Momen uốn tại tiết diện có $\eta =$

Bang 6.5

$$M_A = -\frac{1}{2} \xi(1-\xi)(2-\xi)l; \quad M_B = 0; \quad r_A = \frac{1}{2} (2-3\xi^2+\xi^3); \quad r_B = \frac{1}{2} \xi^2(3-\xi)l;$$

$$M_k = \frac{1}{2} \xi^2 (3-\xi)(1-\eta)l - (\xi-\eta)l \quad \text{khi } \eta \leq \xi;$$

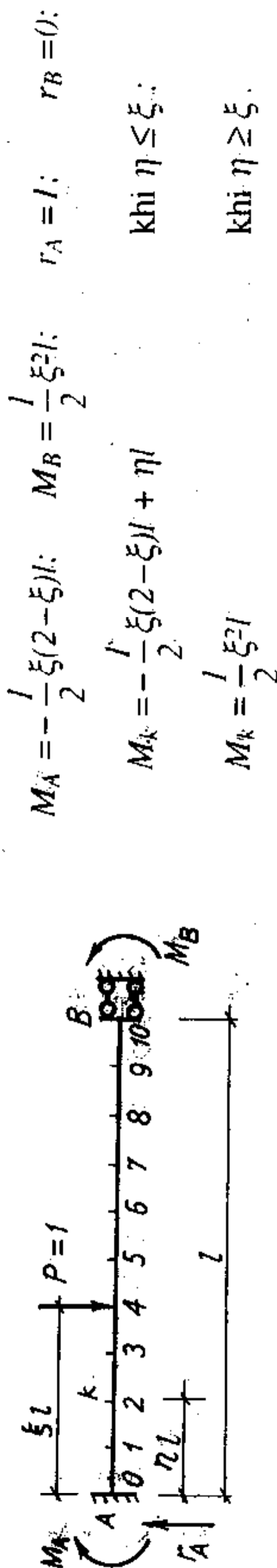
$$M_k = \frac{1}{2} \xi^2(3-\eta)(1-\eta)l \quad \text{khi } \eta \geq \xi.$$



| ξ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|-------|-----|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|-----|
| 0,0 | 0 | -0,08550/l | -0,1440/l | -0,17850/l | -0,1920/l | -0,18750/l | -0,1680/l | -0,13650/l | -0,0960/l | -0,04950/l | 0 |
| 0,1 | 0 | 0,01305/l | -0,0496/l | -0,09065/l | -0,1128/l | -0,11875/l | -0,1112/l | -0,09285/l | -0,0664/l | -0,03455/l | 0 |
| 0,2 | 0 | 0,01160/l | 0,0448/l | -0,00280/l | -0,0336/l | -0,05000/l | -0,0544/l | -0,04920/l | -0,0368/l | -0,01960/l | 0 |
| 0,3 | 0 | 0,01015/l | 0,0392/l | 0,08505/l | 0,0456/l | 0,01875/l | 0,0024/l | -0,00550/l | -0,0072/l | -0,00465/l | 0 |
| 0,4 | 0 | 0,00780/l | 0,0336/l | 0,07290/l | 0,1248/l | 0,08750/l | 0,0592/l | 0,03810/l | 0,0224/l | 0,01030/l | 0 |
| 0,5 | 0 | 0,00725/l | 0,0280/l | 0,06075/l | 0,1040/l | 0,15625/l | 0,1160/l | 0,08175/l | 0,0520/l | 0,02525/l | 0 |
| 0,6 | 0 | 0,00580/l | 0,0224/l | 0,04860/l | 0,0832/l | 0,12500/l | 0,1728/l | 0,12540/l | 0,0816/l | 0,04020/l | 0 |
| 0,7 | 0 | 0,00435/l | 0,0168/l | 0,03645/l | 0,0624/l | 0,09735/l | 0,1296/l | 0,16905/l | 0,1112/l | 0,05515/l | 0 |
| 0,8 | 0 | 0,00290/l | 0,0112/l | 0,02130/l | 0,0416/l | 0,06250/l | 0,0864/l | 0,11270/l | 0,1408/l | 0,07010/l | 0 |
| 0,9 | 0 | 0,00145/l | 0,0056/l | 0,01215/l | 0,0208/l | 0,03125/l | 0,0432/l | 0,05635/l | 0,0704/l | 0,08505/l | 0 |
| 1,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

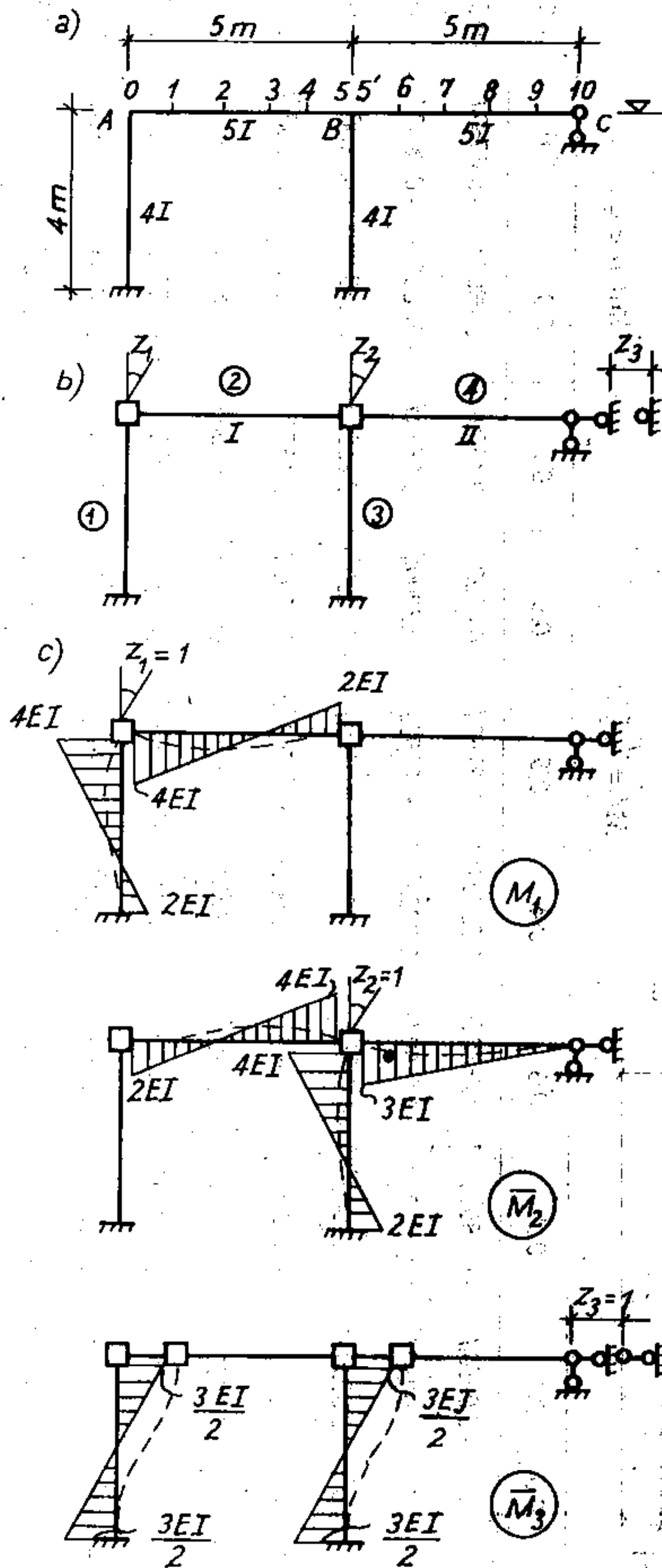
Momen uốn tại diện cò $\eta =$

Bảng 6.6



| ξ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|-------|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| 0,0 | 0 | -0,0950/l | -0,1800/l | -0,2550/l | -0,3200/l | -0,3750/l | -0,4200/l | -0,4550/l | -0,4800/l | -0,4950/l | -0,50/l |
| 0,1 | 0 | 0,0050/l | -0,0800/l | -0,1550/l | -0,2200/l | -0,2750/l | -0,3200/l | -0,3550/l | -0,3800/l | -0,3950/l | -0,40/l |
| 0,2 | 0 | 0,0050/l | 0,0200/l | -0,0550/l | -0,1200/l | -0,1750/l | -0,2200/l | -0,2550/l | -0,2800/l | -0,2950/l | -0,30/l |
| 0,3 | 0 | 0,0050/l | 0,0200/l | 0,0450/l | -0,0200/l | -0,0750/l | -0,1200/l | -0,1550/l | -0,1800/l | -0,1950/l | -0,20/l |
| 0,4 | 0 | 0,0050/l | 0,0200/l | 0,0450/l | 0,0800/l | 0,0250/l | -0,0200/l | -0,0550/l | -0,0800/l | -0,0950/l | -0,10/l |
| 0,5 | 0 | 0,0050/l | 0,0200/l | 0,0450/l | 0,0800/l | 0,1250/l | 0,0800/l | 0,0450/l | 0,0200/l | 0,0050/l | 0,00/l |
| 0,6 | 0 | 0,0050/l | 0,0200/l | 0,0450/l | 0,0800/l | 0,1250/l | 0,1800/l | 0,1450/l | 0,1200/l | 0,1050/l | 0,10/l |
| 0,7 | 0 | 0,0050/l | 0,0200/l | 0,0450/l | 0,0800/l | 0,1250/l | 0,1800/l | 0,2450/l | 0,2200/l | 0,2050/l | 0,20/l |
| 0,8 | 0 | 0,0050/l | 0,0200/l | 0,0450/l | 0,0800/l | 0,1250/l | 0,1800/l | 0,2450/l | 0,3200/l | 0,3050/l | 0,30/l |
| 0,9 | 0 | 0,0050/l | 0,0200/l | 0,0450/l | 0,0800/l | 0,1250/l | 0,1800/l | 0,2450/l | 0,3200/l | 0,4050/l | 0,40/l |
| 1,0 | 0 | 0,0050/l | 0,0200/l | 0,0450/l | 0,0800/l | 0,1250/l | 0,1800/l | 0,2450/l | 0,3200/l | 0,4050/l | 0,50/l |

Momen uốn tại tiết diện có $\eta =$



Hình 6.24

2. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản do các $Z_i=1$ (hình 6.24c, d, e).

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc. Kết quả:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 8EI; & r_{22} &= 11EI; & r_{33} &= 1,5EI; \\ r_{12} &= r_{21} = 2EI; & r_{13} &= r_{31} = -1,5EI; & r_{23} &= r_{32} = -1,5EI. \end{aligned}$$

4. Lập hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{aligned} 8EIZ_1 + 2EIZ_2 - 1,5EIZ_3 + r_{1P} &= 0; \\ 2EIZ_1 + 11EIZ_2 - 1,5EIZ_3 + r_{2P} &= 0; \\ -1,5EIZ_1 - 1,5EIZ_2 + 1,5EIZ_3 + r_{3P} &= 0. \end{aligned}$$

5. Xác định các hệ số ảnh hưởng. Kết quả:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= -19/123EI; & \beta_{22} &= -13/123EI; & \beta_{33} &= -112/123EI; \\ \beta_{12} &= \beta_{21} = 1/123EI; & \beta_{13} &= \beta_{31} = -18/123EI; & \beta_{23} &= \beta_{32} = -12/123EI. \end{aligned}$$

6. Các biểu thức tìm ẩn số cơ bản:

$$\begin{aligned} Z_1 &= (-19r_{1P} + r_{2P} - 18r_{3P}) / 123EI; \\ Z_2 &= (r_{1P} - 13r_{2P} - 12r_{3P}) / 123EI; \\ Z_3 &= (-18r_{1P} - 12r_{2P} - 112r_{3P}) / 123EI. \end{aligned}$$

7. Xác định các số hạng tự do r_{kP} :

◆ Khi $P=I$ di động trên nhịp AB , sau khi vận dụng các điều kiện cân bằng và theo bảng 6.4 ta tìm được:

$$r_{1P} = -M_A = \xi(1-\xi)^2l; \quad r_{2P} = -M_B = -\xi^2(1-\xi)l; \quad r_{3P} = 0.$$

Lần lượt cho ξ các giá trị bằng 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 ta sẽ tìm được các giá trị tương ứng của các số hạng tự do. Kết quả ghi trên bảng 6.7.

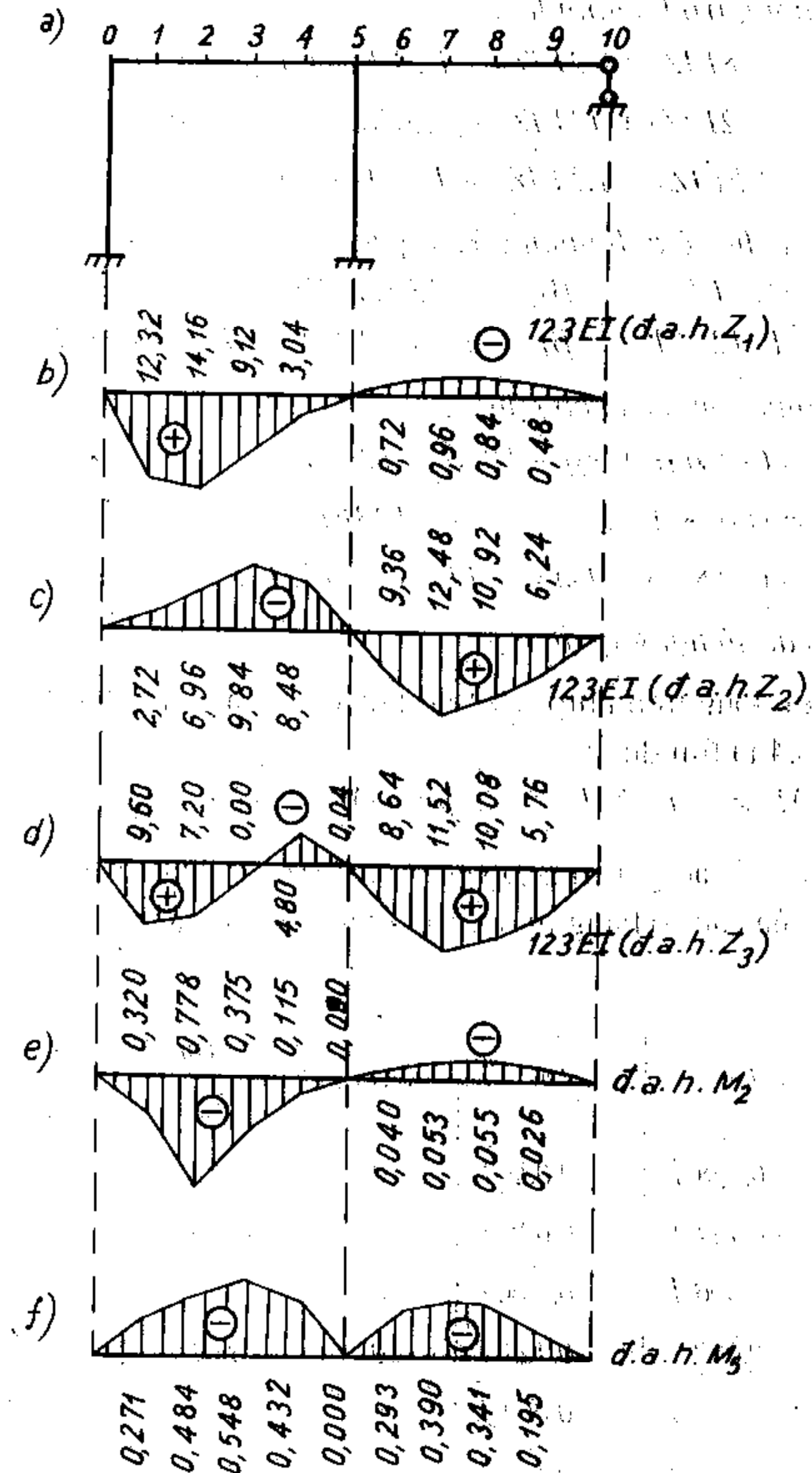
Bảng 6.7

| Điểm đặt lực | r_{1P} | r_{2P} | r_{3P} | Tung độ (đ.á.h. Z_i) x 123EI | | |
|--------------|----------|----------|----------|---------------------------------|-------|-------|
| | | | | Z_1 | Z_2 | Z_3 |
| 1 | -0,128.l | 0,032.l | 0 | 12,32 | -2,72 | 9,60 |
| 2 | -0,144.l | 0,096.l | 0 | 14,16 | -6,96 | 7,20 |
| 3 | -0,096.l | 0,144.l | 0 | 9,12 | -9,84 | 0,00 |
| 4 | -0,032.l | 0,128.l | 0 | 3,04 | -8,48 | -4,80 |
| 5 | 0 | 0,000.l | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 6 | 0 | -0,144.l | 0 | -0,72 | 9,36 | 8,64 |
| 7 | 0 | -0,192.l | 0 | -0,96 | 12,48 | 11,52 |
| 8 | 0 | -0,168.l | 0 | -0,84 | 10,92 | 10,08 |
| 9 | 0 | -0,096.l | 0 | -0,48 | 6,24 | 5,76 |

Cũng có thể xác định các r_{1P} và r_{2P} theo mômen uốn M_k để sử dụng các số liệu bảng số đã có sẵn trong bảng 6.4. Lúc này, ta có:

$$r_{1P} = M_k \text{ với } \eta = 0 \text{ (sử dụng hàng đầu của bảng số liệu 6.4);}$$

$$r_{2P} = -M_k \text{ với } \eta = 1 \text{ (sử dụng hàng cuối của bảng số liệu 6.4).}$$



Hình 6.25

◆ Khi $P=1$ di động trên nhịp BC , sau khi vận dụng các điều kiện cân bằng và theo bảng 6.5 ta tìm được:

$$r_{1P} = 0; \quad r_{2P} = -M_A = \frac{l}{2} \xi(1-\xi)(2-\xi)l; \quad r_{3P} = 0.$$

Cũng có thể xác định r_{2P} theo mômen uốn M_k với $\eta = 0$ để sử dụng các số liệu trên hàng đầu của bảng 6.5.

8. *Xác định tung độ các đường ảnh hưởng cơ bản.* Sau khi thực hiện các phép tính theo các biểu thức đã thiết lập ở bước thứ 6, ta tìm được các kết quả ghi trong bảng 6.7. Các đường ảnh hưởng cơ bản tìm được như trên các hình 6.25b, c, d.

9. *Tìm đường ảnh hưởng nội lực.* Áp dụng công thức (6.12) cho trường hợp này, ta có biểu thức xác định đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện 2 và 5.

$$\text{đ.a.h. } M_2 = \bar{M}_{21}(\text{đ.a.h. } Z_1) + \bar{M}_{22}(\text{đ.a.h. } Z_2) + \bar{M}_{23}(\text{đ.a.h. } Z_3) + \text{đ.a.h. } M_2^0;$$

$$\text{đ.a.h. } M_5 = \bar{M}_{51}(\text{đ.a.h. } Z_1) + \bar{M}_{52}(\text{đ.a.h. } Z_2) + \bar{M}_{53}(\text{đ.a.h. } Z_3) + \text{đ.a.h. } M_5^0.$$

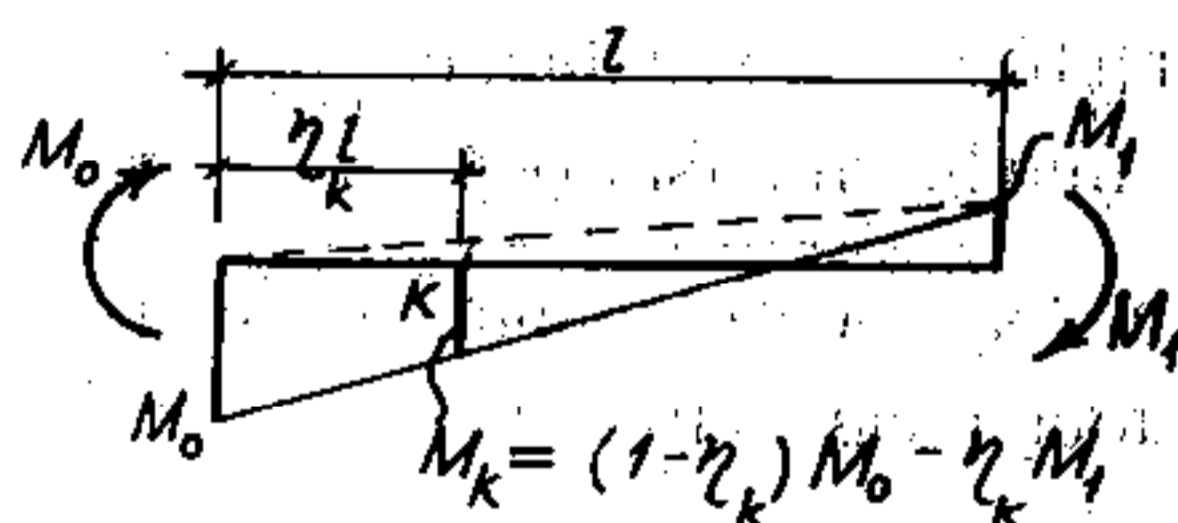
Các đại lượng \bar{M}_{ki} biểu thị mômen uốn tại tiết diện k do $Z_i=1$ gây ra trong hệ cơ bản. Để xác định, ta vận dụng các biểu đồ mômen uốn đã tìm được trên hình 6.24c, d, e. Nếu chú ý là mômen uốn tại tiết diện k bất kỳ trong thanh có thể biểu thị theo mômen uốn ở hai đầu thanh như trên hình 6.26, thì trong trường hợp này ta có:

$$\bar{M}_{21} = 1,6EI; \quad \bar{M}_{51} = -2EI;$$

$$\bar{M}_{22} = -0,4EI; \quad \bar{M}_{52} = -4EI;$$

$$\bar{M}_{23} = 0; \quad \bar{M}_{53} = 0.$$

Đ.a.h. M_2^0 và đ.a.h. M_5^0 lần lượt là đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện 2 và 5 trong hệ cơ bản.



Hình 6.26

Bảng 6.8

| Điểm đặt lực | đ.a.h. M_2^0 | đ.a.h. M_5^0 | đ.a.h. M_2 | đ.a.h. M_5 |
|--------------|----------------|----------------|--------------|--------------|
| 1 | 0,0302. l | -0,0320. l | 0,320 | -0,271 |
| 2 | 0,1152. l | -0,0960. l | 0,778 | -0,484 |
| 3 | 0,0448. l | -0,1440. l | 0,375 | -0,548 |
| 4 | 0,0096. l | -0,1280. l | 0,115 | 0,432 |
| 5 | 0 | 0 | 0,000 | 0,000 |
| 6 | 0 | 0 | -0,040 | -0,293 |
| 7 | 0 | 0 | -0,053 | -0,390 |
| 8 | 0 | 0 | -0,055 | -0,341 |
| 9 | 0 | 0 | -0,026 | -0,195 |

Trong hệ cơ bản, tải trọng $P=1$ chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trên phạm vi mỗi phần tử nên có thể dễ dàng tìm các tung độ của chúng theo các số liệu cho trong bảng 6.4 và 6.5. Kết quả tính được ghi trên bảng 6.8.

Sau khi tổ hợp các số liệu vừa tìm được theo các công thức nêu ở trên ta sẽ tìm được giá trị các tung độ đường ảnh hưởng nội lực cần tìm. Kết quả ghi trên bảng 6.8. Các đường ảnh hưởng tương ứng vẽ trên hình 6.25e,f.

CÂU HỎI ÔN TẬP

- 6.1. Trình bày và phân tích những giả thiết cơ bản của phương pháp chuyển vị.
- 6.2. Trình bày cách xác định bậc siêu động trong phương pháp chuyển vị (cho ví dụ). Bậc siêu động phụ thuộc vào những yếu tố nào?
- 6.3. Trình bày cách lập hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị.
- 6.4. Trình bày nội dung phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu tải trọng.
- 6.5. Trình bày cách xác định các hệ số, số hạng tự do trong phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu tải trọng.
- 6.6. Trình bày cách xác định chuyển vị khi tính hệ chịu tác dụng của tải trọng theo phương pháp chuyển vị.
- 6.7. Trình bày cách xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh trong hệ có các thanh đứng không song song.
- 6.8. Thông qua một ví dụ, trình bày nội dung phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu chuyển vị cưỡng bức gối tựa.
- 6.9. Thông qua một ví dụ, trình bày nội dung phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ.
- 6.10. Phát biểu và giải thích kết luận về hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng tập trung chỉ đặt ở nút.

7

Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp

Trong các chương trên, ta đã nghiên cứu phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, đó là các phương pháp cơ bản và được xem là chính xác, tổng quát. Trong thực hành, khi tính một hệ thanh cụ thể, cần đặt vấn đề:

- * Nên chọn dùng phương pháp nào?
- * Có thể phối hợp hai phương pháp đó để giảm nhẹ khối lượng tính toán được hay không?

Đó là nội dung sẽ đề cập đến trong chương này.

7.1. So sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị - Cách chọn phương pháp tính

Để thấy được ưu khuyết điểm của từng phương pháp, ta hãy lập bảng so sánh (bảng 7.1) hai phương pháp tương ứng với các nội dung cần thực hiện trong quá trình tính toán một kết cấu siêu tĩnh đồng thời là siêu động.

Qua bảng so sánh 7.1 ta thấy: phương pháp chuyển vị nói chung đơn giản hơn so với phương pháp lực. Tuy nhiên cũng không thể kết luận được là phương pháp chuyển vị ưu việt hơn phương pháp lực. Cần phải căn cứ vào bài toán cụ thể và công cụ tính toán của người thiết kế để chọn lựa phương pháp tính. Nếu chỉ có công cụ tính toán thông thường thì người thiết kế nên căn cứ vào số lượng ẩn số để quyết định việc chọn lựa. Tất nhiên, đối với một bài toán cụ thể, nên chọn dùng phương pháp nào có ẩn số ít hơn. Trong trường hợp số ẩn số theo cả hai phương pháp tương đương nhau, nên chọn dùng phương pháp chuyển vị vì các khâu tính toán trong phương pháp này thường đơn giản hơn.

Đối với những hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ, ta có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để phân tích nguyên nhân tác dụng thành đối xứng và phản xứng (xem mục 5.7). Như vậy, có thể đưa bài toán về hai trường hợp:

- ♦ *Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng.* Nói chung, để giải bài toán này ta nên vận dụng phương pháp chuyển vị vì phương pháp này thường cho số ẩn ít hơn.

◆ Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phân xứng. Nói chung nên dùng phương pháp lực để giải bài toán này vì thường có số ẩn ít hơn.

Bảng 7.1

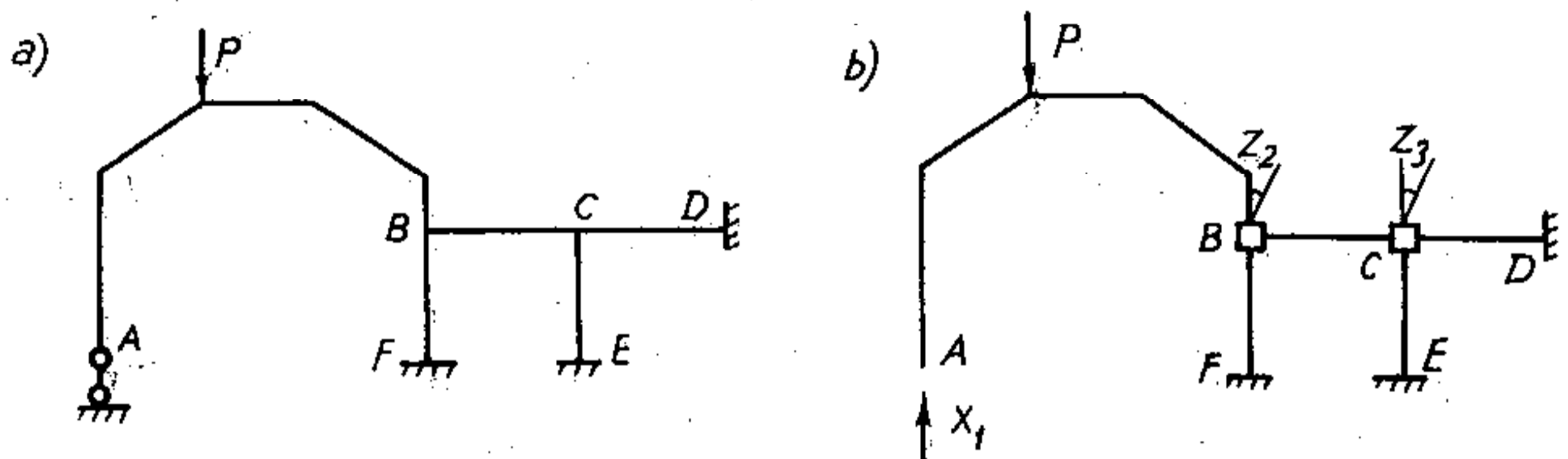
| Nội dung so sánh | Phương pháp lực | Phương pháp chuyển vị |
|--|--|---|
| Độ chính xác | Nếu chấp nhận các giả thiết như nhau thì kết quả hoàn toàn giống nhau. | |
| Phạm vi áp dụng | Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ. | Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ, thường chỉ nên áp dụng cho hệ khung, dầm. |
| Số ẩn số | Bảng bậc siêu tĩnh (không phụ thuộc các giả thiết). | Bảng bậc siêu động (phụ thuộc các giả thiết, cấu kiện mẫu, sơ đồ tĩnh chấp nhận). |
| Hệ cơ bản | <ul style="list-style-type: none"> Loại bỏ bớt liên kết, bất biến hình. Có thể chọn theo nhiều cách khác nhau. Cách chọn có ảnh hưởng đến khối lượng tính toán. | <ul style="list-style-type: none"> Thêm liên kết ngăn cản chuyển vị của các nút. Duy nhất, chỉ bao gồm các phần tử mẫu. |
| Biểu đồ \bar{M}_k và M_P^0 | Người thiết kế tự vẽ (tốn thời gian, dễ có sai lầm). | Vẽ theo bảng mẫu (ít sai lầm). |
| Biểu đồ do sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị gối tựa trong hệ cơ bản | Không tồn tại nếu hệ cơ bản là tĩnh định. | Tồn tại (phức tạp, dễ có sai lầm). |
| Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc | Cần thực hiện phép nhân biểu đồ để xác định (phức tạp, dễ sai lầm). | Tìm theo các điều kiện cân bằng (đơn giản, ít sai lầm). |
| Hệ phương trình chính tắc | Nói chung đầy đủ (các hệ số phụ khác không) nên tốn thời gian hơn khi giải hệ phương trình. | Nói chung không đầy đủ (có nhiều hệ số phụ bằng không), đỡ tốn thời gian hơn khi giải hệ phương trình. |
| Biểu đồ M cuối cùng | Tương đương (cùng tìm được bằng cách tổ hợp các biểu đồ đã có). | |
| Kiểm tra kết quả | Theo điều kiện chuyển vị nên phức tạp, khó phát hiện. | Theo điều kiện cân bằng nên đơn giản. |

Trong thực tế ta có thể gặp những hệ (hình 7.1), trong đó có bộ phận thích hợp với cách giải theo phương pháp chuyển vị (phần BCDEF), có bộ phận thích hợp với cách giải theo phương pháp lực (phần AB). Nếu dùng độc lập một trong hai phương pháp để giải bài toán thì sẽ phức tạp (số lượng ẩn lớn). Như vậy, đối với những hệ này ta có thể đồng thời phát huy ưu điểm của cả hai phương pháp đó hay không? Những phương pháp trình bày dưới đây sẽ đáp ứng được vấn đề này.

7.2. Phương pháp hỗn hợp

Để trình bày nội dung phương pháp, ta xét hệ trên hình 7.1a với giả thiết hệ chỉ chịu tác dụng của tải trọng. Đối với những nguyên nhân khác, nguyên tắc tính toán cũng tương tự. Ta nhận thấy, nếu dùng phương pháp lực để tính thì hệ trên hình 7.1a có bảy ẩn số, còn nếu dùng phương pháp chuyển vị sẽ có mười ẩn số. Để giải bài toán này, nếu vận dụng phương pháp hỗn hợp do A.A. Gvôzdiev kiến nghị thì số lượng ẩn số sẽ giảm xuống khá nhiều.

Trong phương pháp hỗn hợp ta chọn hệ cơ bản như sau: loại bỏ các liên kết và chọn lực làm ẩn số trên các bộ phận thích hợp với phương pháp lực, đặt thêm các liên kết ngăn cản chuyển vị của các nút và chọn chuyển vị của các nút đó làm ẩn số trên những bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị.



Hình 7.1

Ví dụ, đối với hệ cho trên hình 7.1a, trong bộ phận AB thích hợp với phương pháp lực ta loại bỏ gối tựa di động A và thay thế bằng phản lực X_1 chưa biết; trong bộ phận $BCDEF$ thích hợp với phương pháp chuyển vị ta đặt thêm hai liên kết mômen tại nút B và nút C đồng thời nhận các chuyển vị xoay Z_2 và Z_3 tại các nút này làm ẩn số. Hệ cơ bản của phương pháp hỗn hợp đối với hệ đang xét là hệ vẽ trên hình 7.1b. Như vậy, số ẩn số theo phương pháp hỗn hợp là ba. Tương tự như trong phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, để tính hệ đã cho theo phương pháp hỗn hợp ta cũng thực hiện tính toán trên hệ cơ bản đồng thời phải thiết lập các điều kiện bổ sung nhằm đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống như hệ đã cho.

Các điều kiện bổ sung bao gồm:

- ❖ Chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ do các lực X , các chuyển vị cường bậc Z và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không. Đối với hệ trên hình 7.1, ta có điều kiện: chuyển vị tại A theo phương thẳng đứng dọc X_1 , Z_2 , Z_3 và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không, tức là $\Delta_1 = 0$.
- ❖ Phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ do các lực X , các chuyển vị cường bậc Z và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không. Đối với hệ đang xét, ta có điều kiện: phản lực mômen trong các liên kết ở nút B và C do X_1 , Z_2 ,

Z_3 và do tải trọng gây ra phải bằng không, tức là $R_2 = 0; R_3 = 0$.

Trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng, sau khi khai triển các điều kiện bổ sung ta sẽ được hệ phương trình chính tắc của phương pháp hỗn hợp để xác định các ẩn số X và Z . Đối với hệ đang xét, hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}Z_2 + \delta_{13}Z_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ r_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} &= 0; \\ r_{31}X_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} &= 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Trong hệ phương trình chính tắc của phương pháp hỗn hợp có bốn loại hệ số và hai loại số hạng tự do. Ta hãy tìm hiểu ý nghĩa và cách xác định chúng.

δ_{ik} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_i do lực $X_k=1$ gây ra trong hệ cơ bản. Chuyển vị này được xác định theo công thức quen biết:

$$\delta_{ik} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_k),$$

với $(\overline{M}_i), (\overline{M}_k)$ là biểu đồ mômen uốn lần lượt do $X_i=1$ và do $X_k=1$ gây ra trong hệ cơ bản.

δ_{ij} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_i do chuyển vị cưỡng bức $Z_j=1$ gây ra trong hệ cơ bản (ký hiệu dấu chấm ở phía trên để nói lên chuyển vị này do chuyển vị cưỡng bức gây ra, phân biệt với chuyển vị do lực gây ra). Có thể xác định các chuyển vị này theo định lý tương hỗ giữa chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị $\delta_{ij} = -r_{ji}$ hoặc theo công thức chuyển vị (4.25), hoặc xác định trực tiếp bằng hình học.

r_{js} – phản lực trong liên kết thứ j do chuyển vị cưỡng bức $Z_s=1$ gây ra trong hệ cơ bản. Phản lực này được xác định theo các điều kiện cân bằng như đã trình bày trong phương pháp chuyển vị.

r_{ji} – phản lực trong liên kết thứ j do lực $X_i=1$ gây ra trong hệ cơ bản (ký hiệu dấu chấm ở phía trên để nói lên phản lực này do lực gây ra, phân biệt với phản lực do chuyển vị gây ra). Phản lực này được xác định theo các điều kiện cân bằng như đã quen biết trong phương pháp chuyển vị.

Δ_{iP} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_i do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, được xác định theo công thức quen biết trong phương pháp lực:

$$\Delta_{iP} = (\overline{M}_i)(M_P^0),$$

với (M_P^0) là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

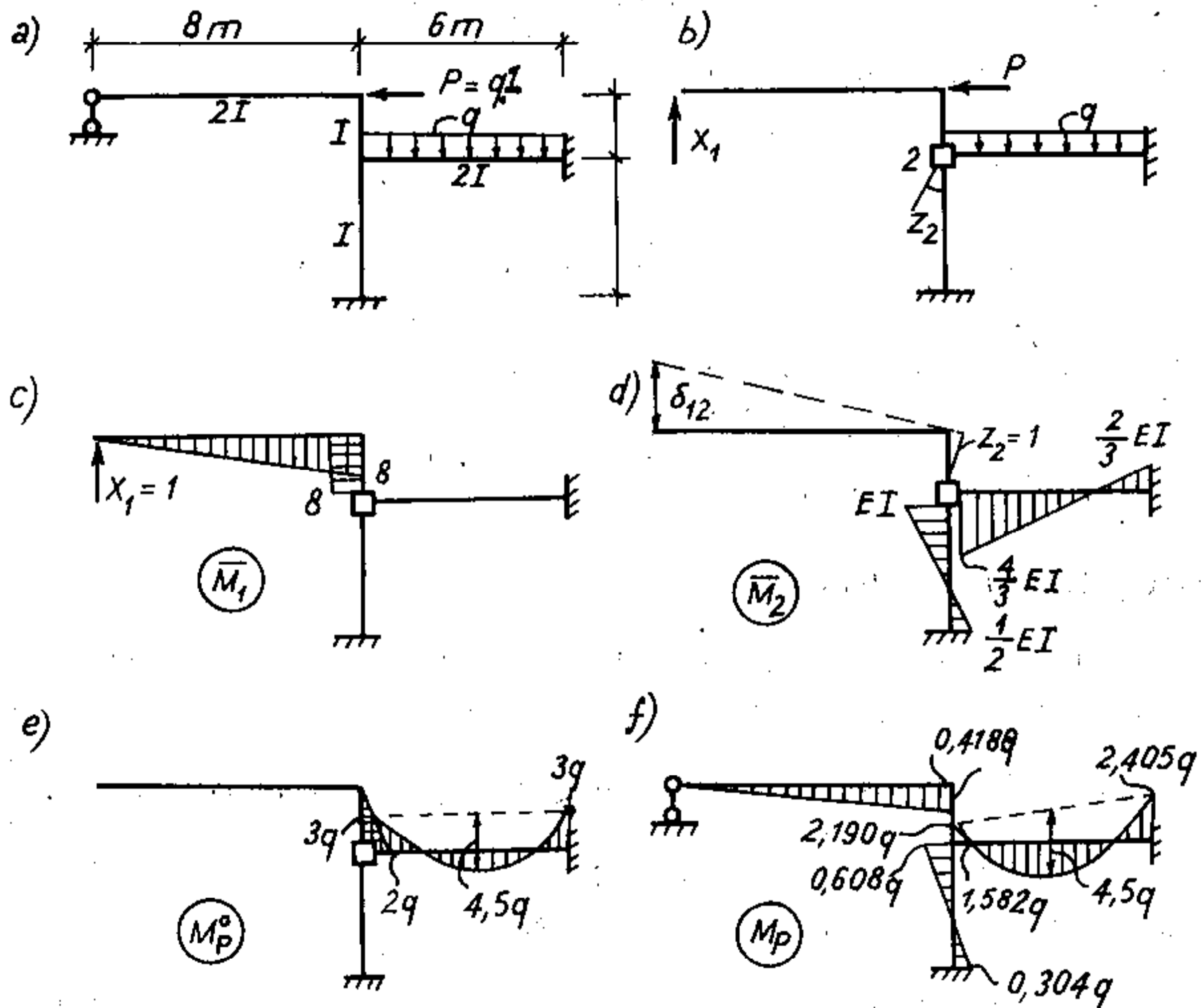
R_{jP} – phản lực tại liên kết thứ j do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, được xác định theo các điều kiện cân bằng như đã quen biết trong phương pháp chuyển vị.

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để xác định các ẩn số X và Z ta vẽ biểu đồ nội lực trong hệ bằng cách tổ hợp các biểu đồ tương tự như đã thực hiện trong phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Ví dụ đối với hệ đang xét, biểu đồ mômen uốn cuối cùng tìm được theo công thức sau:

$$(M_P) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_P^0) \quad (7.2)$$

Để kiểm tra kết quả ta có các điều kiện sau: chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ và phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ, phải bằng không.

Ví dụ 7.1. Vận dụng phương pháp hỗn hợp để vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ trên hình 7.2a.



Hình 7.2

Ta giải bài toán theo thứ tự như sau:

1. **Lập hệ cơ bản:** Nếu dùng phương pháp chuyển vị để giải bài toán thì sẽ có ba ẩn số, còn nếu dùng phương pháp lực thì sẽ có bốn ẩn số. Ta nhận thấy phần bên trái của hệ thích hợp với phương pháp lực còn phần bên phải của hệ thích hợp với phương pháp chuyển vị. Do đó ta sẽ chọn hệ cơ bản theo phương pháp

hỗn hợp như trên hình 7.2a, với hai ẩn số là X_1 và Z_2 .

2. Vẽ các biểu đồ mômen uốn đơn vị do $X_1=1$ (hình 7.2c), do $Z_2=1$ (hình 7.2d) và biểu đồ mômen uốn do tải trọng (hình 7.2e) gây ra trong hệ cơ bản.

3. Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{E \cdot 2I} \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot 8 = \frac{640}{3EI}$$

$$\delta_{12} = -r_{21} = 8, \text{ (tách nút 2 của biểu đồ } \bar{M}_1 \text{);}$$

$$r_{22} = \frac{4}{3}EI + EI = \frac{7EI}{3} \text{ (tách nút 2 của biểu đồ } \bar{M}_2 \text{);}$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^0) = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{2q \cdot 2}{2} \cdot 8 = -\frac{16q}{EI}$$

$$R_{2P} = 2q - 3q = -q \text{ (tách nút 2 của biểu đồ } M_P^0 \text{)}$$

4. Thiết lập hệ phương trình chính tắc

$$\frac{640}{3EI} X_1 + 8Z_2 - \frac{16q}{EI} = 0; \quad -8X_1 + \frac{7EI}{3} Z_2 - q = 0.$$

5. Giải hệ phương trình chính tắc. Kết quả: $X_1 = \frac{33}{632}q$ kN; $Z_2 = \frac{48}{79EI}q$ rad.

6. Vẽ biểu đồ mômen uốn tổng cộng theo công thức:

$$(M_P) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_P^0).$$

Kết quả tìm được như trên hình 7.2f.

7.3. Phương pháp liên hợp

Để giải những loại bài toán nêu ở trên, ta còn có thể vận dụng phương pháp liên hợp, trong đó phối hợp song song phương pháp lực và phương pháp chuyển vị.

Trong phương pháp liên hợp, ta có thể thực hiện theo một trong hai hướng sau:

◆ Chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực.

Lúc này hệ cơ bản là siêu tĩnh. Để vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản siêu tĩnh ta sẽ vận dụng phương pháp chuyển vị bởi vì bộ phận siêu tĩnh của hệ cơ bản chính là bộ phận thích hợp phương pháp chuyển vị.

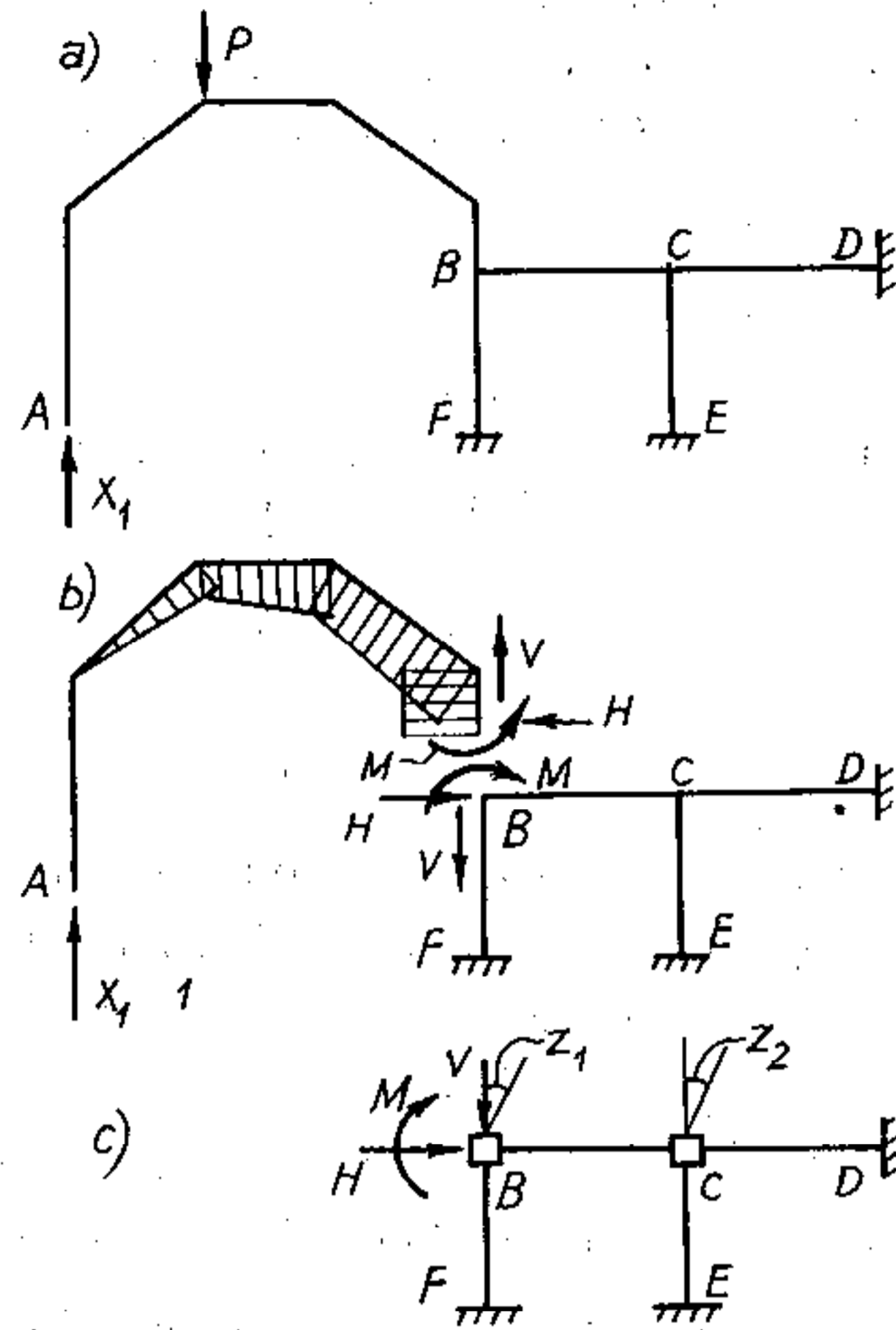
Để làm sáng tỏ, ta xét hệ cho trên hình 7.3a. Chọn hệ cơ bản siêu tĩnh như trên hình 7.3a. Phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \tag{7.3}$$

Hệ số δ_{11} và số hạng tự do Δ_{1P} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_1 lần lượt do lực $X_1=1$ và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản siêu tĩnh.

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta vẫn sử dụng công thức chuyển vị quen biết song cần phải vẽ được biểu đồ nội lực do $X_1=1$ và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản siêu tĩnh.

Chẳng hạn muốn tìm biểu đồ mômen uốn do riêng lực X_1 gây ra trong hệ cơ bản siêu tĩnh thì ta sẽ thực hiện như thế nào?



Hình 7.3

Lúc này, trong bộ phận tĩnh định của hệ ta vẽ biểu đồ mômen uốn như thường lệ còn trong bộ phận siêu tĩnh của hệ thì sẽ dùng phương pháp chuyển vị để giải với các ngoại lực M, V, H được xác định theo lực $X_1=1$ (hình 7.3b). Hệ cơ bản của bài toán phụ này có dạng như trên hình 7.3c. Hệ phương trình chính tắc tương ứng:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0; \quad r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0. \quad (7.4)$$

Sau khi giải bài toán phụ với các ẩn Z , ta sẽ tìm được các biểu đồ cần thiết trong hệ cơ bản của phương pháp lực. Để tránh phải giải nhiều lần hệ phương trình (7.4) với các nguyên nhân khác nhau, ta dùng phương pháp hệ số ảnh hưởng.

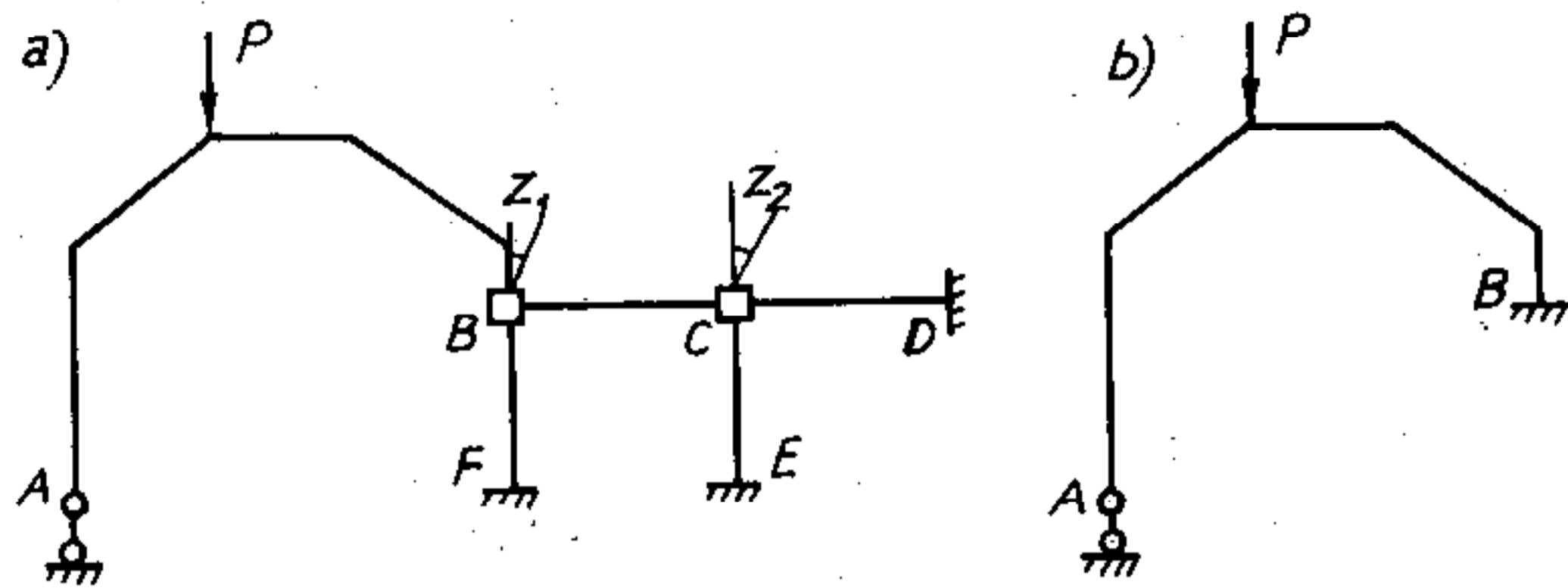
Biểu đồ nội lực cuối cùng sẽ tìm được theo công thức quen biết trong phương pháp lực sau khi giải hệ phương trình (7.3). Trong trường hợp hệ đang xét, ta có

$$(M_P) = (\bar{M}_1)X_1 + (M_P^0). \quad (7.5)$$

♦ Chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản tất cả các chuyển vị nút mà chỉ đặt liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị.

Lúc này hệ cơ bản là siêu động, còn có một số phần tử không phải là phần tử

mẫu. Để vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản siêu động, ta sẽ vận dụng phương pháp lực bởi vì bộ phận siêu động (bộ phận có các phần tử không phải là phần tử mẫu) chính là bộ phận thích hợp với phương pháp lực.



Hình 7.4

Ví dụ, với hệ trên hình 7.1a, ta lập hệ cơ bản như trên hình 7.4a, trong đó phần tử AB không phải là phần tử mẫu. Hệ có hai ẩn số là Z_1 và Z_2 . Trước khi giải bài toán này ta cần thực hiện bài toán phụ: tìm nội lực trong phần tử không phải là phần tử mẫu (phần tử AB trên hình 7.4b) chịu tác dụng của tải trọng và chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết (chuyển vị xoay tại ngàm B). Bài toán phụ này sẽ được thực hiện theo phương pháp lực với các ẩn số X (ẩn số X_1).

Sau khi giải bài toán phụ ta có thể dễ dàng giải bài toán chính theo phương pháp chuyển vị quen biết với hệ cơ bản là siêu động.

Như vậy, trong cả hai cách thực hiện, phương pháp liên hợp đều đưa bài toán về hai bài toán độc lập, một bài toán được giải theo phương pháp lực còn một bài toán được giải theo phương pháp chuyển vị. So với phương pháp hỗn hợp, số ẩn số tổng cộng của hai phương pháp như nhau nhưng trong phương pháp liên hợp các phương trình chính tắc được phân thành hai nhóm độc lập với nhau. Đó là ưu điểm chính của phương pháp liên hợp.

CÂU HỎI ÔN TẬP

- 7.1. So sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị
- 7.2. Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ, nên thực hiện như thế nào?
- 7.3. Phương pháp hỗn hợp:
 - nên áp dụng cho những trường hợp nào?
 - trình bày nội dung phương pháp qua một ví dụ.
- 7.4. Phương pháp liên hợp:
 - nên áp dụng cho những trường hợp nào?
 - trình bày nội dung phương pháp qua một ví dụ.
- 7.5. So sánh phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp.

8

Hệ không gian

Trong các chương trước ta đã nghiên cứu hệ phẳng là những hệ trong đó trục của các thanh đều nằm trong cùng một mặt phẳng, chỉ cân bằng khi tải trọng tác dụng nằm trong mặt phẳng của hệ.

Phần lớn các hệ trong thực tế đều có sơ đồ không nằm trong cùng một mặt phẳng, gọi là *hệ không gian*. Trong khá nhiều trường hợp ta có thể phân tích bài toán không gian để đưa về cách tính theo sơ đồ phẳng. Song, cũng có những trường hợp không thể phân tích thành sơ đồ phẳng hoặc tính toán theo sơ đồ phẳng sẽ dẫn đến sai số lớn thì nhất thiết phải thực hiện tính toán theo sơ đồ không gian.

Cũng tương tự như trong hệ phẳng, hệ không gian dùng trong xây dựng phải là hệ bất biến hình. Về nguyên tắc cách cấu tạo hình học các hệ không gian cũng tương tự như các hệ phẳng nhưng có phần phức tạp hơn khi vận dụng. Thay cho khái niệm *miếng cứng* dùng trong hệ phẳng, trong trường hợp hệ không gian ta dùng khái niệm *vật thể*.

Vật thể là một hệ không gian bất biến hình một cách rõ rệt.

Ngoài ra cần chú ý là trong không gian một vật thể có sáu bậc tự do (ba chuyển vị tịnh tiến và ba chuyển vị xoay) so với một vật thể khác được xem là bất động.

8.1. Các loại liên kết không gian

Để nối các vật thể thành một hệ không gian bất biến hình, ta dùng các liên kết không gian. Tương tự như liên kết phẳng, liên kết không gian được chia thành liên kết đơn giản và liên kết phức tạp.

A. Liên kết đơn giản

Liên kết đơn giản là liên kết dùng để nối hai vật thể. Dưới đây là một số dạng liên kết đơn giản thường gặp.

1. Liên kết thanh không gian

Liên kết thanh không gian (hình 8,1a) được cấu tạo từ một thanh (hoặc một vật thể) có khớp cầu lý tưởng ở hai đầu. Để phân biệt với khớp phẳng (khớp bản

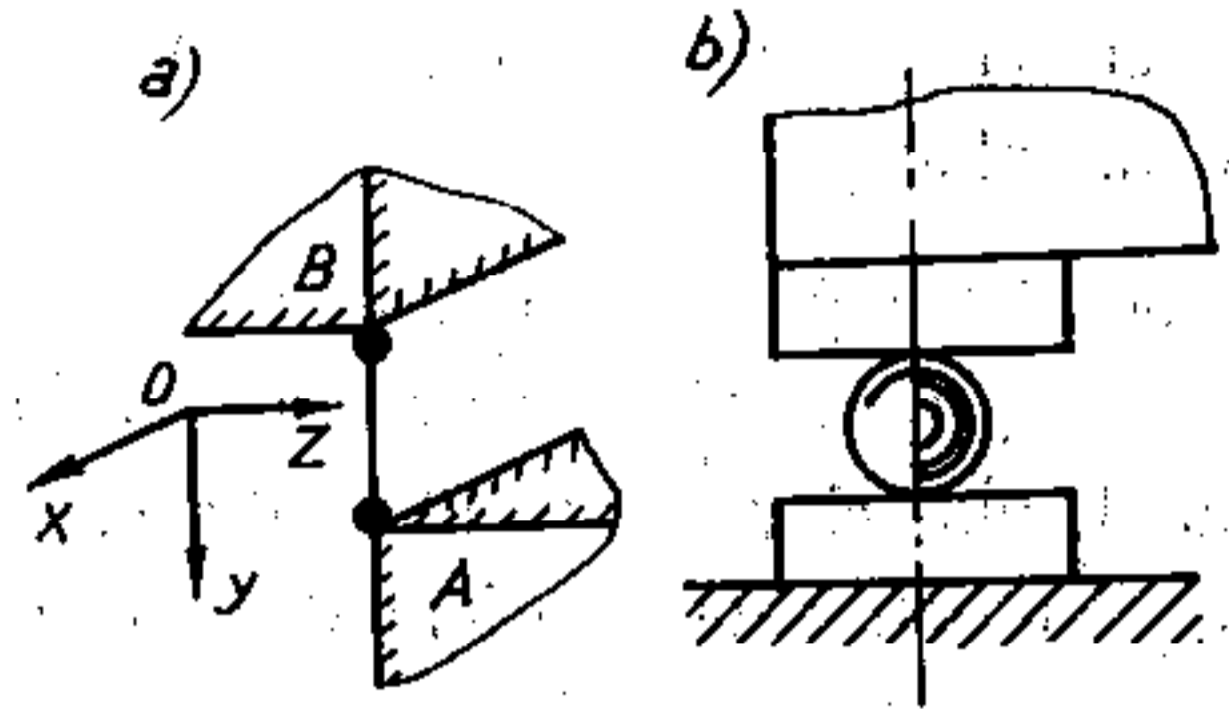
lê hình trụ) đã được ký hiệu bằng khuyên tròn màu trắng, ta sẽ ký hiệu khớp cầu bằng khuyên tròn màu đen.

Liên kết thanh khử được chuyển vị thẳng theo phương trục thanh của vật thể B so với vật thể A xem như cố định, tức là khử được một bậc tự do. Liên kết thanh vẫn cho phép vật thể B chuyển vị thẳng trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh (hai bậc tự do) và quay được quanh ba trục bất kỳ (ba bậc tự do).

Trong liên kết thanh phát sinh một phản lực dọc theo trục thanh.

Liên kết thanh là một khái niệm mở rộng của gối khớp cầu di động (hình 8.1b) thường dùng để nối một vật thể với trái đất.

Liên kết thanh không gian là liên kết cơ bản bởi vì, như ta sẽ thấy, tất cả các liên kết khác đều có thể quy về thành một tập hợp các liên kết thanh.

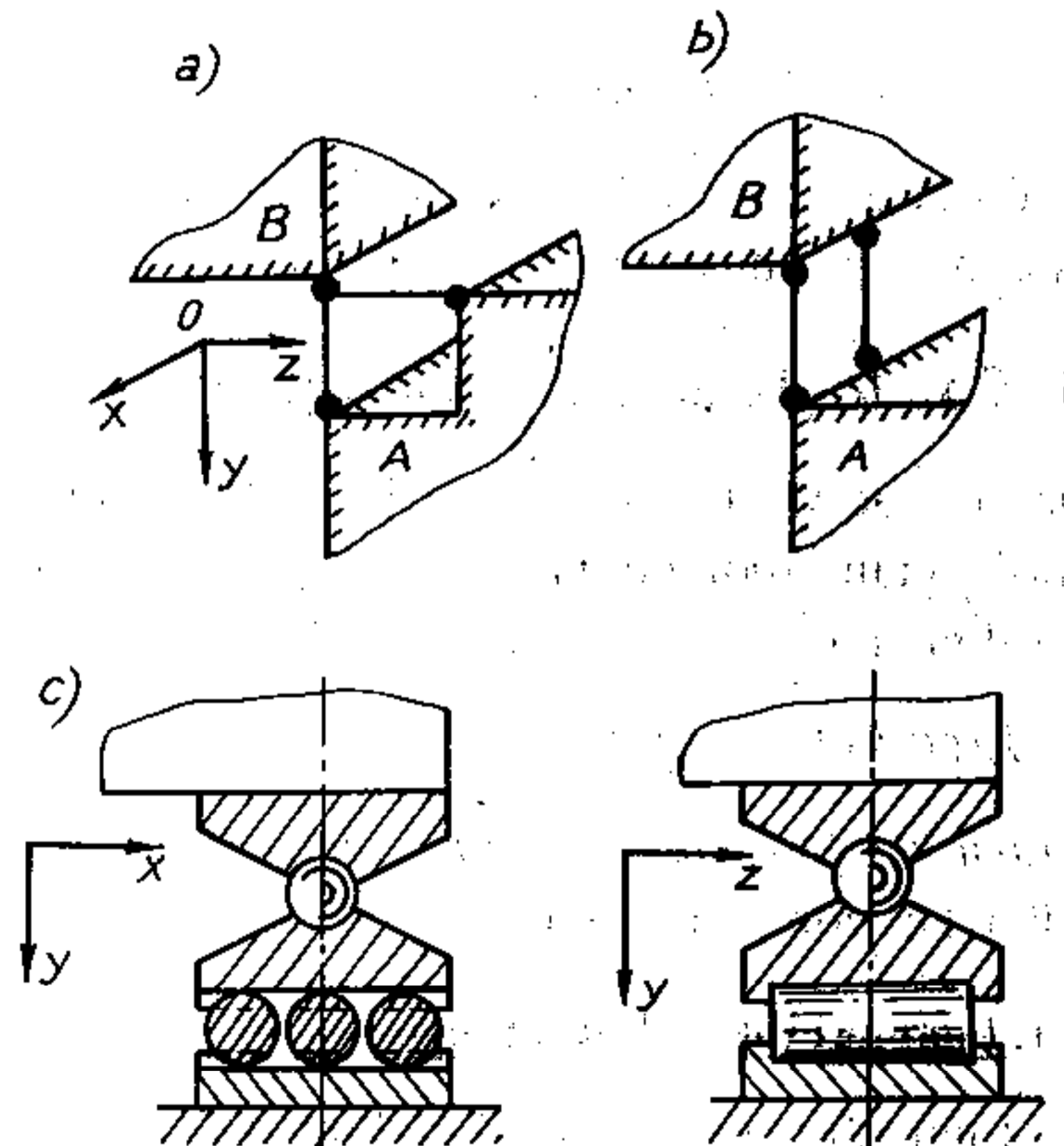


Hình 8.1

2. Liên kết cấu tạo bởi hai liên kết thanh đồng phẳng

♦ Trường hợp hai liên kết thanh đồng quy (hình 8.2a):

Liên kết khử được hai bậc tự do, cho phép vật thể chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với mặt phẳng hai liên kết thanh và xoay được quanh ba trục bất kỳ. Trong liên kết phát sinh phản lực nằm trong mặt phẳng của hai liên kết thanh và đi qua khớp chung. Vì phản lực có phương chưa biết nên thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương nào đó, chẳng hạn theo phương z và y trên hình 8.2a.



Hình 8.2

Hai liên kết thanh đồng quy tương đương với gối khớp cầu đặt trên con lăn hình trụ (hình 8.2c).

◆ *Trường hợp hai liên kết thanh song song* (hình 8.2b):

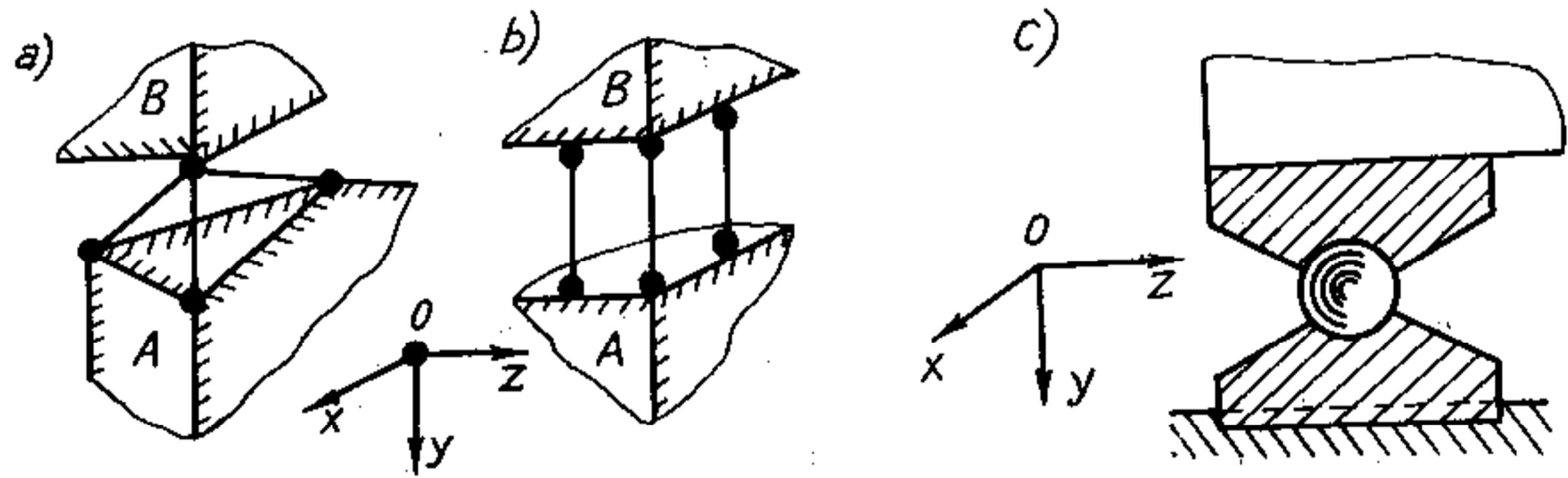
Liên kết khử được chuyển vị thẳng của vật thể dọc theo trục của hai liên kết thanh và khử được chuyển vị xoay trong mặt phẳng của chúng tức là khử được hai bậc tự do. Liên kết cho phép vật thể chuyển vị thẳng theo hai phương vuông góc với trục của hai liên kết thanh và chuyển vị xoay xung quanh hai trục song song với mặt phẳng của hai liên kết thanh, tức là trục x và y trên hình 8.2b. Trong liên kết phát sinh một phản lực có phương song song với trục của hai liên kết thanh nhưng có điểm đặt chưa biết nên có thể đưa về hai thành phần: một lực song song với hai liên kết thanh có điểm đặt xác định và một mômen nằm trong mặt phẳng của hai liên kết thanh.

3. Liên kết cầu tạo bởi ba liên kết thanh không đồng phẳng

◆ *Trường hợp ba liên kết thanh không đồng phẳng, đồng quy* (hình 8.3a):

Liên kết khử được ba chuyển vị thẳng của vật thể tức là khử được ba bậc tự do, nhưng cho phép vật thể xoay được quanh ba trục bất kỳ đi qua khớp chung. Trong liên kết phát sinh phản lực đi qua khớp chung nhưng có phương bất kỳ nên được phân tích thành ba thành phần theo ba phương bất kỳ.

Liên kết gồm ba liên kết thanh đồng quy không cùng trong mặt phẳng tương đương với gối khớp cầu cố định (hình 8.3c).



Hình 8.3

◆ *Trường hợp ba liên kết thanh không đồng phẳng, song song* (hình 8.3b):

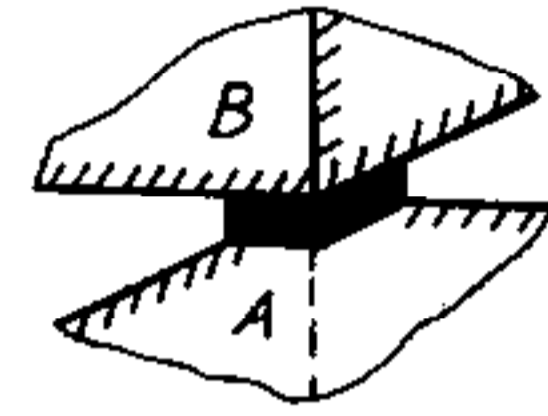
Liên kết khử được chuyển vị thẳng của vật thể dọc theo trục của các liên kết thanh và hai chuyển vị xoay trong hai mặt phẳng tạo thành bởi ba liên kết thanh song song (hai mặt phẳng Ozy và Oxy trên hình 8.3b) tức là khử được ba bậc tự do. Vật thể còn lại ba bậc tự do là hai chuyển vị thẳng trong mặt phẳng vuông góc với trục của liên kết thanh và một chuyển vị xoay xung quanh trục

song song với các liên kết thanh (trục y trên hình 8.3b). Trong liên kết phát sinh một phản lực có phương song song với trục của các liên kết thanh nhưng có điểm đặt chưa biết. Có thể đưa phản lực này về một điểm xác định nào đó, ta sẽ được ba thành phần phản lực: một thành phần lực song song với trục các liên kết thanh đặt tại điểm xác định và hai thành phần mômen trong hai mặt phẳng tạo thành bởi ba liên kết thanh song song.

4. Liên kết hàn hay gọi là mối hàn

Liên kết hàn (hình 8.4) khử được toàn bộ sáu bậc tự do của vật thể trong không gian. Trong liên kết phát sinh một phản lực có phương và điểm đặt chưa biết.

Có thể đưa phản lực này về một điểm xác định nào đó ta sẽ được sáu thành phần: ba thành phần lực đặt tại điểm xác định hướng theo ba trục của hệ tọa độ bất kỳ trong không gian và ba thành phần mômen xung quanh ba trục của hệ tọa độ đó.



Hình 8.4

Như vậy, một liên kết hàn không gian tương đương với sáu liên kết thanh nếu chúng được bố trí để sao cho có thể khử được sáu bậc tự do. Khi vật thể cố định A là trái đất thì liên kết hàn được gọi là *ngàm không gian*.

Ngoài các liên kết nêu trên, người ta còn có thể cấu tạo nhiều dạng liên kết khác bằng cách tổ hợp các liên kết thanh.

Sau này, khi khảo sát mối quan hệ về số lượng giữa các vật thể và các liên kết, để cho tiện lợi ta sẽ quy đổi các liên kết về liên kết thanh.

B. Liên kết phức tạp

Trong thực tế có thể gặp trường hợp liên kết hàn hoặc liên kết khớp cầu (hai thanh đồng phẳng, đồng quy hoặc ba thanh không đồng phẳng, đồng quy) đồng thời cùng nối nhiều vật thể (từ ba vật thể trở lên) với nhau thì liên kết đó được gọi là liên kết *phức tạp*.

Tương tự như trong hệ phẳng, ta gọi *độ phức tạp của liên kết phức tạp* là số liên kết đơn giản cùng loại tương đương với liên kết phức tạp đó.

Độ phức tạp của liên kết phức tạp được xác định theo công thức:

$$p = V - 1, \quad (8.1)$$

trong đó:

p – độ phức tạp;

V – số vật thể quy tụ vào liên kết phức tạp.

8.2. Cách nối các vật thể thành một hệ không gian bất biến hình

Tương tự như trong bài toán phẳng, khi khảo sát sự cấu tạo hình học ta cần lần lượt xét điều kiện cân và điều kiện đủ.

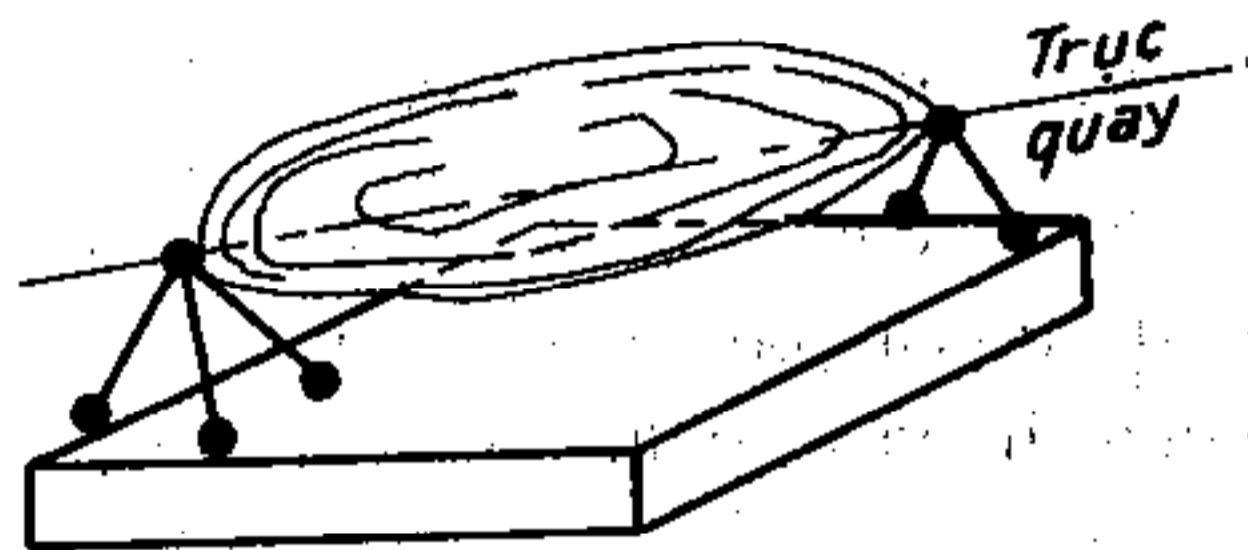
A. Điều kiện cân

1. Hệ bất kỳ

Giả sử hệ không gian được cấu tạo bởi V vật thể, trong số đó có V_1 vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu và được nối với nhau bằng các liên kết quy về T liên kết thanh.

Chú ý là một vật thể bất kỳ trong không gian có sáu bậc tự do. Một vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu (hình 8.5) có thể quay xung quanh trục đi qua hai khớp cầu, chuyển động quay đó không ảnh hưởng gì đến sự cấu tạo chung của toàn hệ nên không nhất thiết phải khử. Do đó, vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu có năm bậc tự do.

Nếu quy ước chọn một vật thể làm vật thể bất động thì muốn nối các vật thể còn lại vào vật thể bất động ta cần phải khử được $6(V-1) + 5V_1 = 6(V-1) - V_1$ bậc tự do. Đó là yêu cầu.



Hình 8.5

Về khả năng, hệ có số liên kết tương đương với T liên kết thanh nên có thể khử được T bậc tự do.

Cũng lập luận tương tự như ở chương 1, sau khi so sánh số bậc tự do có thể khử được (khả năng) với số bậc tự do cần khử (yêu cầu) ta có điều kiện cân:

$$n = T - 6(V-1) + V_1 \geq 0. \quad (8.2)$$

- ❖ Nếu $n = 0$: hệ đủ liên kết và có khả năng bất biến hình nên cần xét điều kiện đủ. Nếu điều kiện đủ thỏa mãn thì hệ là tĩnh định.
- ❖ Nếu $n > 0$: hệ thừa liên kết và có khả năng bất biến hình nên cần xét điều kiện đủ. Nếu điều kiện đủ thỏa mãn thì hệ là siêu tĩnh.

Để cho đơn giản, trong nhiều trường hợp, ta có thể xem vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu như là một liên kết thanh.

2. Hệ nối với đất

Giả sử hệ không gian đang xét có V vật thể, trong số đó có V_1 vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu, được nối với nhau bằng các liên kết quy về T liên kết thanh và nối với đất bằng các liên kết tựa tương đương C liên kết thanh.

Coi trái đất là vật thể bất động, muốn nối các vật thể đó với nhau và nối với trái đất ta cần phải khử được $6(V-V_1)+5V_1 = 6V-V_1$ bậc tự do.

Xét về khả năng, số bậc tự do có thể khử được là $T+C$.

So sánh số bậc tự do có thể khử được với số bậc tự do cần khử ta suy ra điều kiện cân:

$$n = T + C - 6V + V_1 \geq 0. \quad (8.3)$$

Ý nghĩa của công thức này cũng tương tự như của (8.2).

3. Hệ dàn không gian

Dàn không gian là hệ được cấu tạo bởi các thanh thẳng, hai đầu có khớp cầu.

Có thể dùng công thức (8.2) và (8.3) để khảo sát điều kiện cân của hệ dàn nhưng khi đó cần phải chú ý đến độ phức tạp của các liên kết khớp cầu. Để thuận tiện cho việc áp dụng ta sẽ thiết lập điều kiện cân riêng cho hệ dàn.

◆ *Dàn không nối với trái đất.* Giả sử trong hệ có T thanh, M mắt. Quan niệm một tam giác khớp của hệ là vật thể bất động, như vậy trong hệ còn lại $M-3$ mắt cần nối vào vật thể bất động và có $T-3$ thanh để nối. Trong không gian, mỗi điểm (mắt) có ba bậc tự do nên số bậc tự do cần khử là $3(M-3)$. Số bậc tự do có thể khử được là $T-3$. So sánh các số liệu này ta suy ra điều kiện cân:

$$n = T - 3(M-3) \geq 0,$$

hay

$$n = T + 6 - 3M \geq 0. \quad (8.4)$$

Ý nghĩa của công thức này tương tự như của (8.2).

◆ *Dàn nối với trái đất.* Giả sử trong hệ có T thanh, M mắt và được nối với đất bằng các liên kết tựa tương đương C liên kết thanh. Coi trái đất là vật thể bất động và cần nối M mắt vào vật thể đó. Số bậc tự do cần phải khử là $3M$ còn số bậc tự do có thể khử được là $T+C$. Sau khi so sánh các số liệu này ta suy ra điều kiện cân

$$n = T + C - 3M \geq 0. \quad (8.5)$$

Ý nghĩa của công thức này cũng tương tự như của (8.2).

B. Điều kiện đủ

Sau khi điều kiện cần được thỏa mãn, ta xét điều kiện đủ.

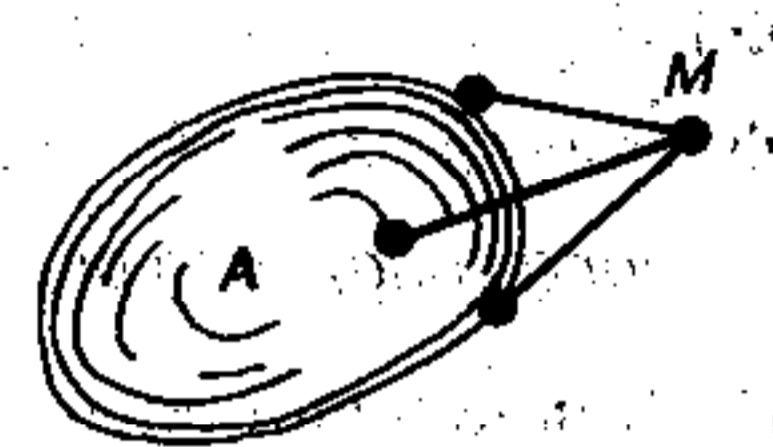
Điều kiện đủ để nối các vật thể thành một hệ bất biến hình là các liên kết phải được bố trí hợp lý.

Để xác nhận khả năng bố trí hợp lý của các liên kết, ta lần lượt khảo sát một số trường hợp sau:

1. Cách nối một mắt vào một vật thể

Xét vật thể A , giả sử cần nối mắt M vào vật thể A (hình 8.6) để tạo thành hệ bất biến hình.

Theo điều kiện cần, muốn nối mắt M vào vật thể A cần phải khử được ba bậc tự do tức là phải dùng ba liên kết thanh. Điều kiện đủ là *ba thanh không được đồng phẳng*. Thật vậy, nếu ba thanh đồng phẳng thì ba thanh đó không có khả năng ngăn cản được chuyển vị của mắt M theo phương vuông góc với mặt phẳng đó.



Hình 8.6

Ba thanh không đồng phẳng để nối một mắt vào một vật thể được gọi là bộ ba. Tương tự như bộ đôi trong bài toán phẳng, bộ ba trong bài toán không gian có tính chất sau:

Bộ ba không làm thay đổi tính chất động học của hệ.

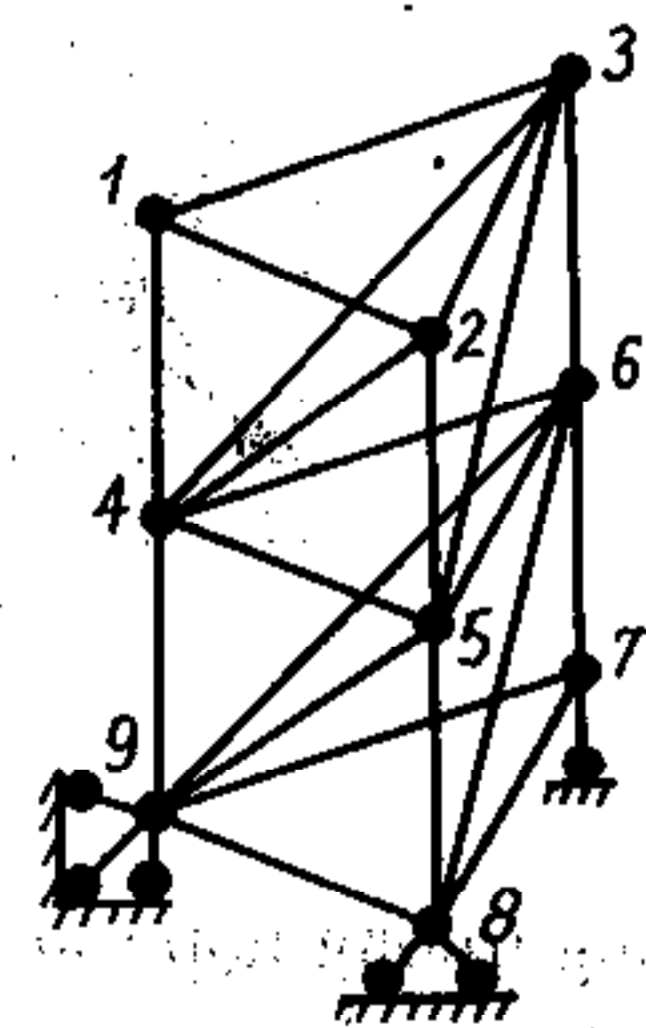
Như vậy, có thể vận dụng tính chất này để phát triển hoặc thu hẹp hệ khảo sát.

Ví dụ 8.1. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 8.7.

Hệ đã cho thuộc loại hệ dàn nối với đất, trong đó $T = 21$; $M = 9$; $C = 6$. Theo (8.4):

$$n = 21 + 6 - 3 \cdot 9 = 0, \text{ hệ đủ liên kết.}$$

Để xét điều kiện đủ ta sử dụng tính chất của bộ ba, thu hẹp dần hệ khảo sát. Loại khỏi hệ bộ ba gồm ba thanh không đồng phẳng quy tụ tại mắt 1. Hệ còn lại vẫn không thay đổi tính chất động học. Trong hệ này, tại mắt 2 chỉ còn lại ba thanh không đồng phẳng tức là bộ ba. Loại bỏ bộ ba quy tụ tại mắt 2 ta sẽ được hệ còn lại không thay đổi tính chất động học.



Hình 8.7

Tiếp đó, lần lượt loại bỏ các bộ ba theo thứ tự các mắt 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Cuối cùng, còn lại trái đất là hệ bất biến hình nên hệ đã cho ban đầu là bất biến hình.

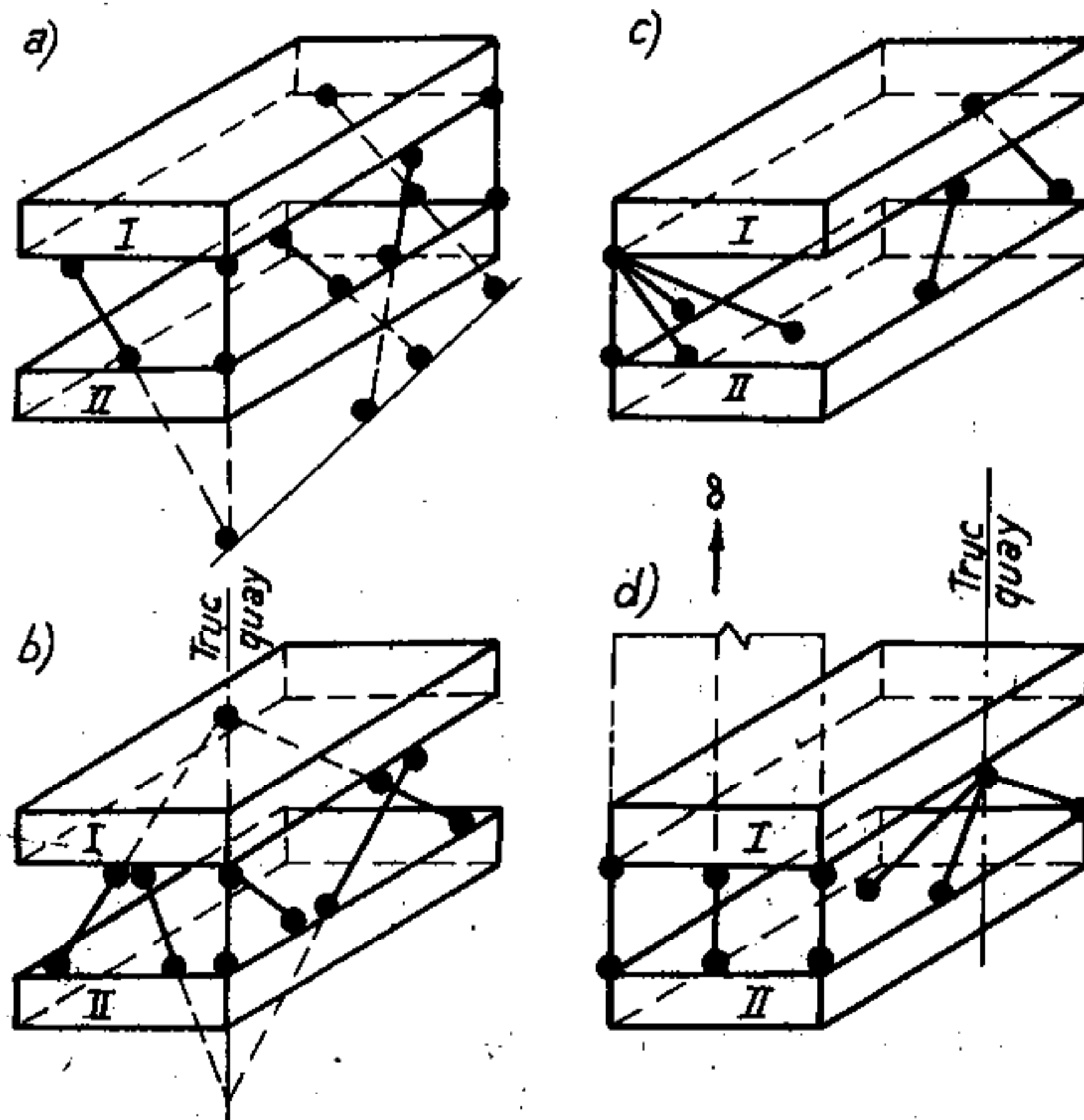
2. Cách nối hai vật thể

Theo điều kiện cần, muốn nối vật thể *I* vào vật thể *II* được xem là bất động, ta cần phải có sáu liên kết tương đương với sáu liên kết thanh.

Điều kiện đủ để nối hai vật thể thành một hệ bất biến hình bằng sáu liên kết thanh là các liên kết thanh đó phải được bố trí sao cho:

- ❖ Sáu liên kết thanh không được cùng cắt một đường thẳng.
- ❖ Trong số sáu liên kết thanh, không được có quá ba thanh đồng quy ở một điểm.
- ❖ Trong số sáu liên kết thanh, không được có quá hai thanh đồng quy (hoặc song song) đồng phẳng.

Trên hình 8.8 giới thiệu cách nối hai vật thể không thỏa mãn điều kiện đủ.



Hình 8.8

Trong trường hợp sáu liên kết thanh cùng cắt một đường (hình 8.8a và b) thì tùy theo cách sắp xếp các thanh vật thể *I* có thể quay vô cùng bé hoặc hữu hạn so với vật thể *II* xung quanh đường thẳng đó mà không có liên kết nào cản trở. Như vậy hệ sẽ biến hình tức thời hoặc biến hình.

Trong trường hợp có quá ba thanh đồng quy ở một điểm (hệ trên hình 8.8c có bốn thanh đồng quy) thì các liên kết đồng quy này chỉ có khả năng khử được tối đa ba bậc tự do. Số thanh còn lại sẽ ít hơn ba cho nên không thể khử được ba bậc tự do còn lại. Như vậy hệ sẽ biến hình.

Trong trường hợp có quá hai thanh đồng phẳng đồng quy hoặc song song, chẳng hạn có ba thanh song song như trên hình 8.8d thì ba thanh này chỉ khử được tối đa là hai bậc tự do. Số thanh còn lại ít hơn bốn bậc tự do còn lại của hệ. Như vậy hệ sẽ biến hình.

3. Trường hợp tổng quát

Trong trường hợp tổng quát, khi phân tích điều kiện đủ ta có thể vận dụng tính chất của bộ ba hoặc cách nối hai vật thể đã biết ở trên để phát triển từng vật thể đến mức tối đa cho phép. Nhờ vậy ta có thể đưa hệ có nhiều vật thể về hệ có số vật thể ít hơn.

- ❖ Nếu đưa về một vật thể thì kết luận hệ đã cho là bất biến hình.
- ❖ Nếu đưa về hai vật thể thì vận dụng điều kiện nối hai vật thể đã xét ở trên để phân tích.

Nói chung, phần lớn các hệ không gian gặp trong thực tế đều có thể dùng biện pháp nói trên để phân tích sự cấu tạo hình học. Trong trường hợp không vận dụng được biện pháp trên, ta áp dụng các phương pháp khác để phân tích, chẳng hạn phương pháp tải trọng bằng không đã nghiên cứu trong chương 2.

Cũng như trong bài toán phẳng, tiêu chí của phương pháp tải trọng bằng không trong bài toán không gian được phát biểu như sau:

Khi không có tải trọng tác dụng trên hệ:

- ❖ nếu phản lực và nội lực trong toàn bộ hệ đều duy nhất bằng không thì hệ là bất biến hình.
- ❖ nếu phản lực và nội lực trong toàn bộ hệ hoặc trong một bộ phận nào đó của hệ là vô định thì hệ không bất biến hình.

Phương pháp này đơn giản và có hiệu quả khi áp dụng để phân tích sự cấu tạo của các hệ dàn không gian. Trong mục 8.3 dưới đây, sau khi nghiên cứu cách xác định nội lực trong hệ không gian ta sẽ tìm hiểu cách vận dụng phương pháp này (xem ví dụ 8.4).

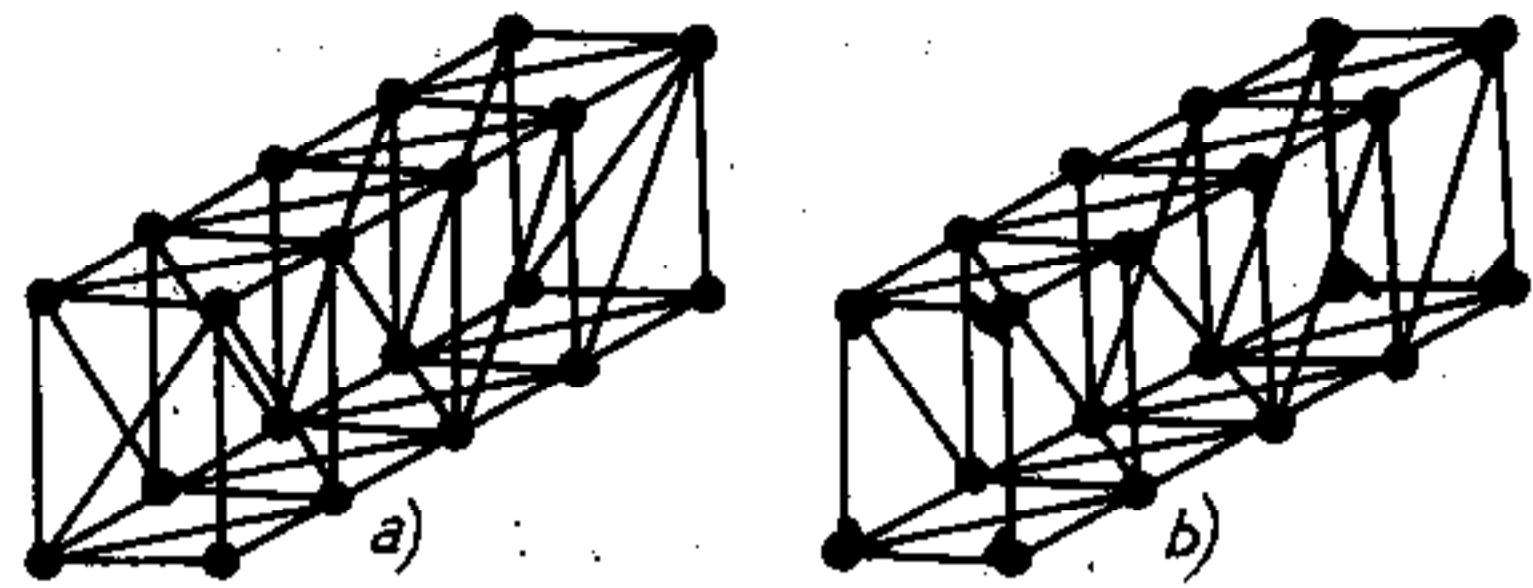
Trong thực tế người ta cũng áp dụng khá phổ biến những hệ dàn không gian gọi là *dàn lưới*.

Dàn lưới là dàn không gian được hình thành theo các đa diện lồi khép kín, các thanh đều nằm trong các mặt biên, mỗi mặt biên là một hệ phẳng bất biến hình.

Năm 1813, A.L. Cauchy (1789 – 1857) đã chứng minh:

Các loại dàn lưới thỏa mãn định nghĩa nói trên đều là những hệ bất biến hình.

Hình 8.9



Dựa vào kết luận của Cauchy ta dễ dàng phân tích được sự cấu tạo của các hệ dàn không gian. Ví dụ, hệ dàn cầu có đường xe chạy trên (hình 8.9a) được hình thành theo đa diện lồi có sáu mặt biên: hai mặt đứng theo phương dọc cầu là bộ phận chịu lực chính, hai mặt ngang là bộ phận giằng chịu lực gió còn hai mặt đứng ngang cầu là bộ phận chống xoắn. Các mặt biên đều bất biến hình nên hệ này là hệ dàn lưới và bất biến hình. Trong hệ dàn cầu có đường xe chạy dưới (hình 8.9b) người ta thay hai mặt biên ngang cầu bằng hai cổng cầu dưới dạng khung. Hệ này cũng là bất biến hình thừa liên kết tức là siêu tĩnh.

8.3. Cách xác định phản lực và nội lực trong hệ không gian tĩnh định

Về nguyên tắc, phương pháp xác định phản lực và nội lực trong hệ không gian cũng giống như trong hệ phẳng nhưng có phần phức tạp hơn. Trong mục này ta chỉ nghiên cứu cách tính hệ không gian chịu tải trọng bất động. Sau khi biết cách tính với tải trọng bất động ta có thể dễ dàng tính được hệ không gian chịu tải trọng di động theo nguyên tắc đã biết trong chương 3.

Nếu hệ không gian là bất biến hình và tĩnh định thì có thể vận dụng phương pháp mặt cắt và chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học cũng đủ để xác định phản lực và nội lực trong hệ. Tại mỗi mặt cắt ta có thể lập được sáu phương trình cân bằng. Các phương trình này thường được biểu thị theo nhiều nhóm khác nhau, trong số đó có hai nhóm thường được ưa dùng:

1) Ba phương trình hình chiếu lên ba trục X, Y, Z và ba phương trình mômen đối với ba trục x, y, z :

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0,$$

X, Y, Z là ba trục bất kỳ trong không gian miễn là không song song hoặc cùng đồng phẳng, các trục lấy mômen x, y, z không nhất thiết phải trùng với các trục chiếu X, Y, Z , có thể lấy bất kỳ miễn là chúng không song song hoặc cùng đồng phẳng.

2) Sáu phương trình cân bằng mômen đối với sáu trục

$$\sum M_1 = 0; \quad \sum M_2 = 0; \quad \sum M_3 = 0; \quad \sum M_4 = 0; \quad \sum M_5 = 0; \quad \sum M_6 = 0,$$

trong đó 1, 2, 3, 4, 5, 6 là sáu trục chọn tùy ý với điều kiện:

- ❖ Sáu trục không được cùng cắt một đường thẳng.
- ❖ Trong số sáu trục đó không có quá ba trục song song.
- ❖ Trong số sáu trục đó nếu đã có ba trục đồng quy tại một điểm thì ba trục còn lại không được song song.

Nếu các trục chọn không thỏa mãn các điều kiện nêu trên thì có thể xảy ra trường hợp phương trình cân bằng thỏa mãn nhưng vật thể vẫn không nằm trong trạng thái cân bằng.

Trong các bài toán cụ thể, ta cần vận dụng linh hoạt các phương trình cân bằng để xác định phản lực trong các liên kết nối với đất, tiếp đó xác định nội lực trong hệ. Dưới đây ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn về cách xác định nội lực trong hệ không gian.

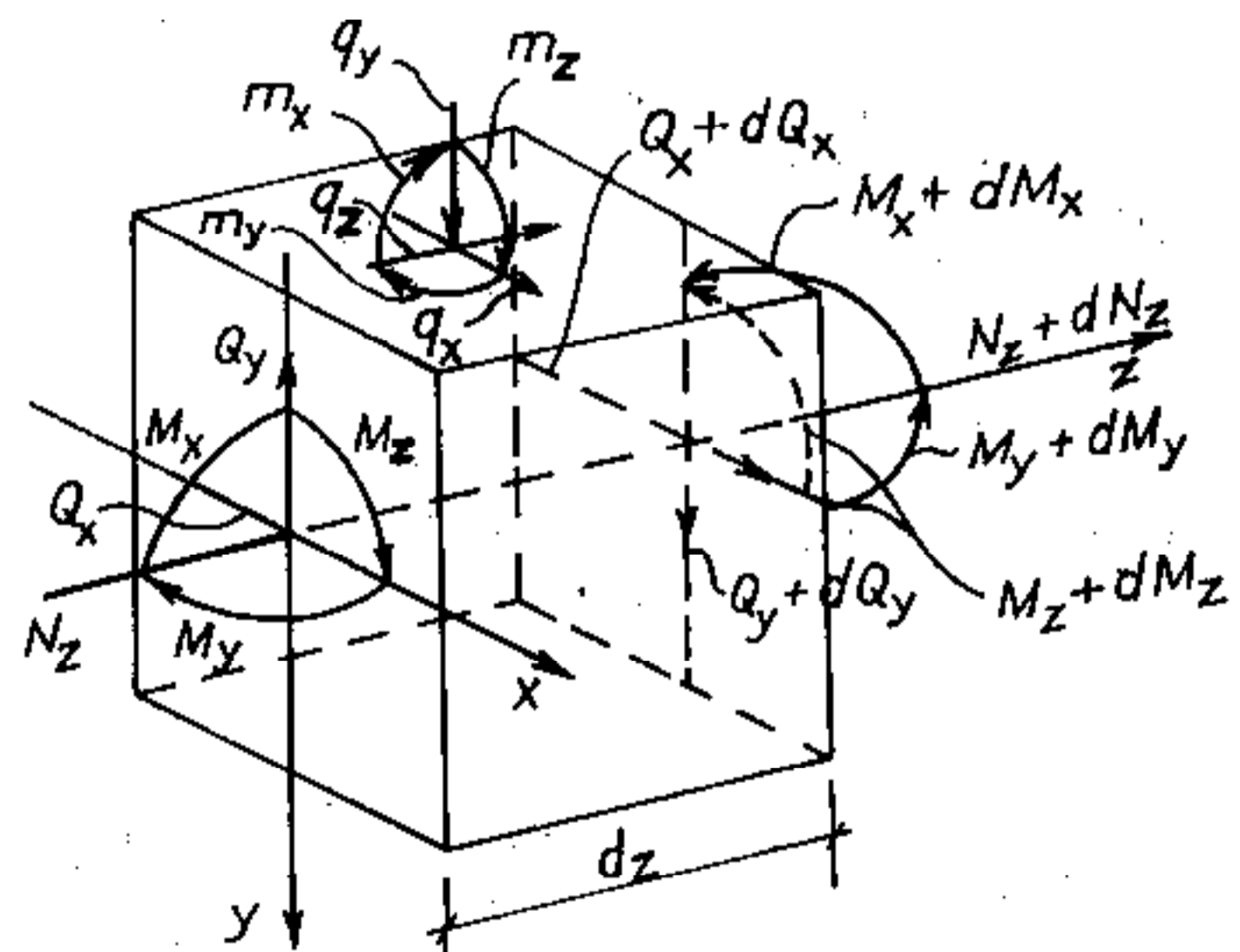
A. Hệ không gian bất kỳ

Trong trường hợp tổng quát, nội lực tại một tiết diện trong hệ không gian bao gồm sáu thành phần (hình 8.10):

- Mômen uốn xung quanh trục x : M_x .
- Mômen uốn xung quanh trục y : M_y .
- Mômen xoắn xung quanh trục z : M_z .
- Lực cắt theo phương trục x : Q_x .
- Lực cắt theo phương trục y : Q_y .
- Lực dọc theo phương trục z : N_z .

Các trục x, y là hệ trục quán tính chính trung tâm của tiết diện, còn trục z hướng theo phương tiếp tuyến với trục thanh

Khi xác định nội lực tại tiết diện bất kỳ k , ta cần thực hiện mặt cắt qua tiết diện k . Mặt cắt phải chia hệ thành hai phần riêng biệt: phần trái và phần phải.



Hình 8.10

Lấy tổng mômen của các lực tác dụng trên phần trái (hoặc phần phải) đối với trục x, y và z lần lượt ta sẽ được giá trị của M_x, M_y và M_z .

Lấy tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần trái (hoặc phần phải) lên các trục x, y, z lần lượt ta sẽ được giá trị của Q_x, Q_y và N_z .

Chiều dương của các thành phần nội lực quy ước chọn như trên hình 8.10.

Nếu gọi $q_y, q_x, q_z, m_x, m_y, m_z$ là cường độ của các ngoại lực tác dụng dưới dạng lực phân bố và mômen phân bố thì giữa các đại lượng này và các thành phần nội lực có sự liên hệ vi phân như sau:

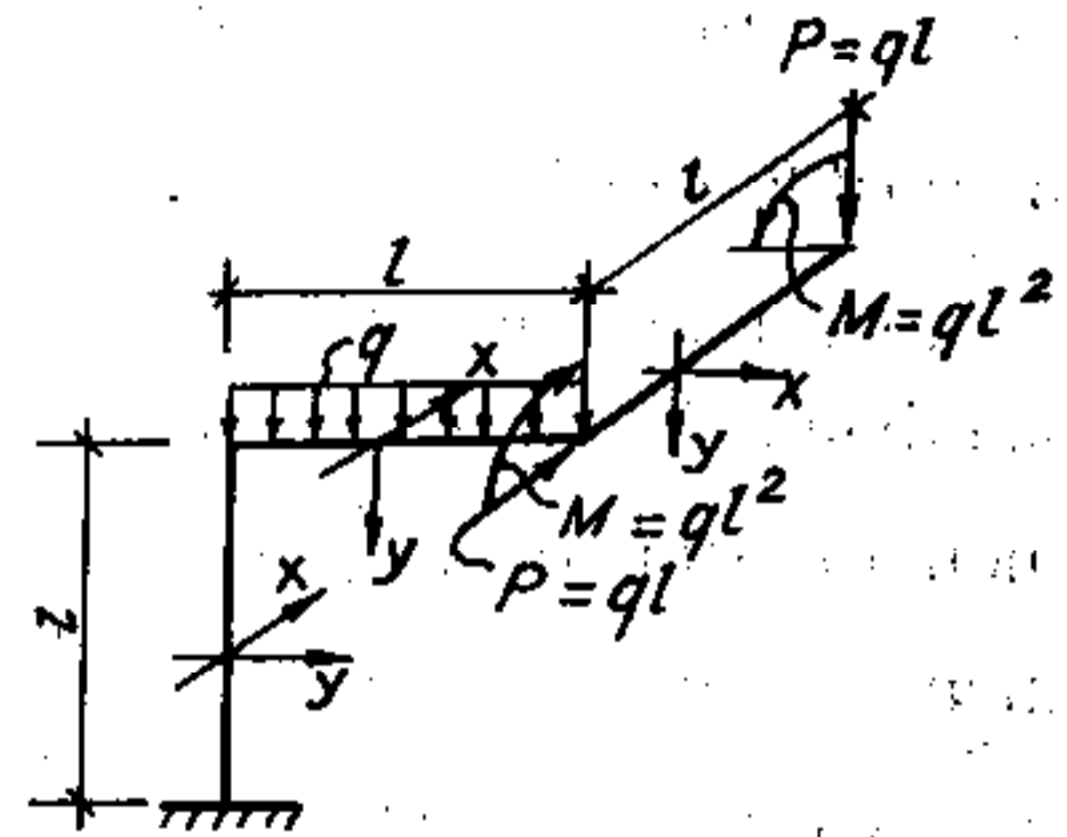
$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dz} + q_x &= 0; & \frac{dQ_y}{dz} + q_y &= 0; & \frac{dN_z}{dz} + q_z &= 0; \\ \frac{dM_x}{dz} - Q_y - m_x &= 0; & \frac{dM_y}{dz} - Q_x - m_y &= 0; & \frac{dM_z}{dz} - m_z &= 0; \end{aligned} \quad (8.6)$$

Khi vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ không gian ta cũng thực hiện theo những nguyên tắc đã biết trong Sức bền vật liệu. Tuy nhiên, căn cứ vào các liên hệ vi phân (8.6) ta có thể suy ra các nhận xét để vẽ nhanh các biểu đồ nội lực tương tự như đã trình bày trong chương 2.

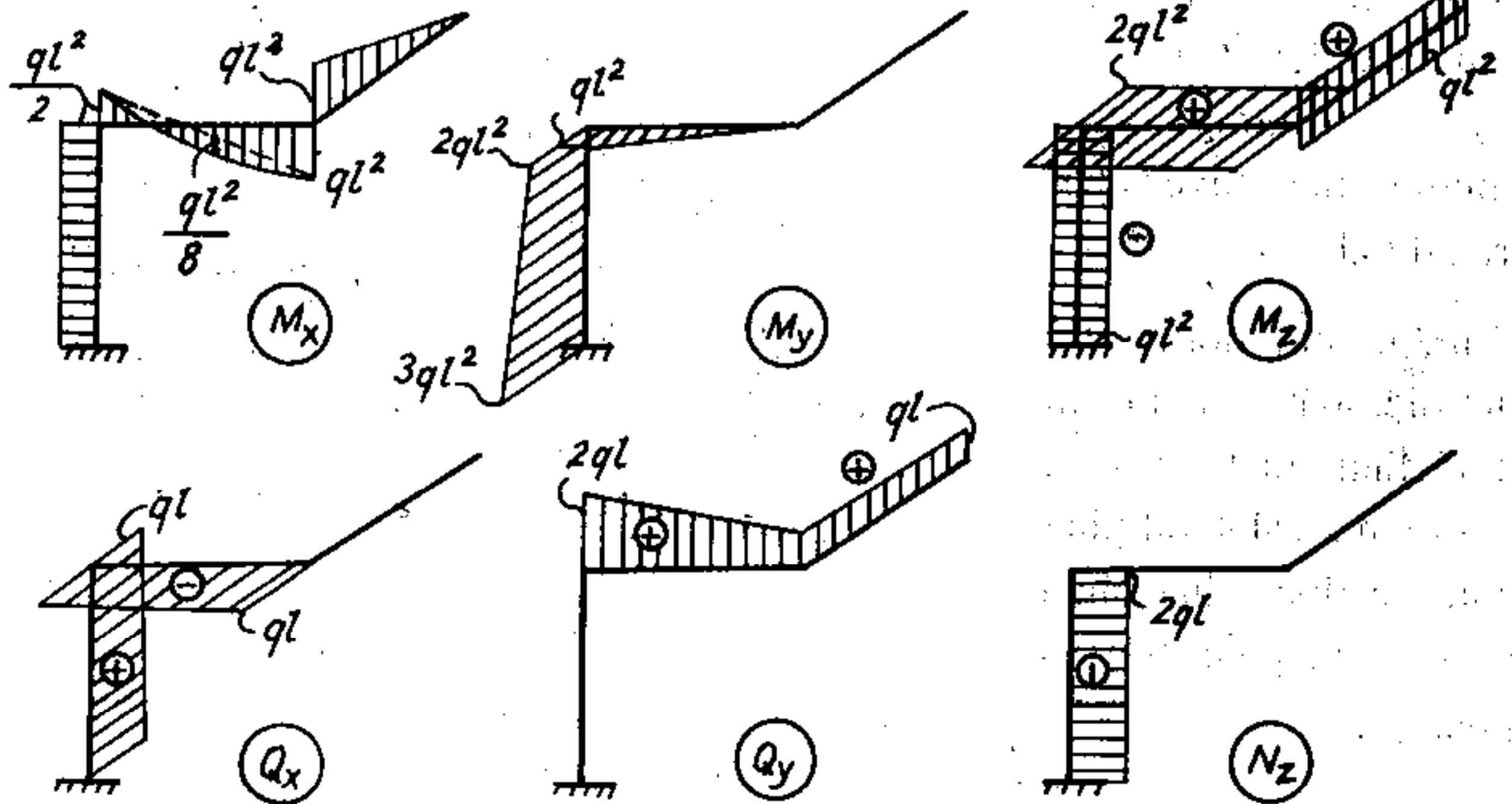
Ta sẽ ôn lại cách vẽ biểu đồ qua ví dụ 8.2 dưới đây.

Ví dụ 8.2. Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung không gian chịu tải trọng như trên hình 8.11.

Kết quả tìm được như trên hình 8.12.



Hình 8.11



Hình 8.12

B. Hệ dàn không gian

Để xác định nội lực trong hệ dàn không gian ta có thể vận dụng các phương pháp đã quen biết trong chương 2 như phương pháp mặt cắt đơn giản, phương pháp mặt cắt phối hợp hay phương pháp tách mắt.

Nếu thực hiện được mặt cắt không quá sáu thanh chưa biết nội lực thì có thể sử dụng phương pháp mặt cắt đơn giản. Với mỗi mặt cắt, nếu vận dụng khéo léo các phương trình cân bằng thì có thể xác định được nội lực trong các thanh bị cắt theo sáu phương trình trong đó có nhiều phương trình độc lập.

Nếu chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua hơn sáu thanh chưa biết nội lực mới chia hệ thành hai phần độc lập thì nói chung với một mặt cắt ta không thể xác định ngay được các nội lực đó. Trong trường hợp này cần áp dụng phương pháp mặt cắt phối hợp. Nguyên tắc thực hiện cũng tương tự như trong bài toán phẳng.

Trong thực hành, phương pháp tách mắt thường được ưa dùng khi tính hệ dàn không gian. Theo phương pháp này ta tách từng mắt của dàn để khảo sát cân bằng. Ứng với mỗi mắt của dàn ta lập được ba phương trình cân bằng độc lập. Vì hệ là tĩnh định nên số phương trình cân bằng độc lập tìm được sẽ vừa đủ để xác định số nội lực cần tìm trong hệ.

Để giảm nhẹ khối lượng giải hệ phương trình, khi sử dụng phương pháp tách mắt ta cần chú ý:

- ◆ Nên lần lượt tách các mắt theo thứ tự để sao cho tại mỗi mắt chỉ có ba thanh không đồng phẳng chưa biết nội lực. Lúc này tại mỗi mắt ta sẽ lập được ba phương trình cân bằng chỉ chứa ba nội lực chưa biết nên có thể xác định ngay được các nội lực đó.
- ◆ Khi khảo sát cân bằng của mỗi mắt, muốn tìm ngay được nội lực chưa biết trong thanh thứ nhất ta nên dùng phương trình cân bằng hình chiếu lên trục vuông góc với hai thanh còn lại chưa biết nội lực hoặc dùng phương trình cân bằng mômen đối với trục không đi qua mắt nhưng cắt qua hai thanh còn lại chưa biết nội lực. Với cách làm như vậy sẽ không phải giải hệ phương trình.

Ngoài ra, từ phương pháp tách mắt ta suy ra hai nhận xét sau:

- * Nếu tại mắt có ba thanh không đồng phẳng quy tụ và không có tải trọng đặt ở mắt thì lực dọc trong tất cả ba thanh đó đều bằng không.
- * Nếu tại mắt có n thanh quy tụ, trong đó $n-1$ thanh nằm trong cùng một mặt phẳng thì lực dọc trong thanh còn lại bằng không khi ở mắt không có tải trọng tác dụng hoặc khi tải trọng tác dụng trong mặt phẳng của $n-1$ thanh kể trên.

Với hai nhận xét đó ta có thể dễ phát hiện những thanh có nội lực bằng không. Sau khi loại bỏ các thanh có nội lực bằng không, sơ đồ tính của hệ sẽ đơn giản hơn, tạo điều kiện thuận lợi cho việc xác định nội lực trong các thanh còn lại.

Ví dụ 8.3. Xác định nội lực trong các thanh của dàn không gian trên hình 8.13 khi dàn chịu lực $P=100$ kN nằm trong mặt phẳng 1-3-7-5, vuông góc với trục z .

Chọn hệ trục tọa độ như trên hình vẽ và gọi x, y, z là hình chiếu của các thanh đang xét lên các trục tương ứng. Chiều dài l và cosin chỉ phương của từng thanh trong dàn được xác định theo các công thức quen biết trong Hình học giải tích.

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \cos(\bar{x}, \bar{l}) = \frac{x}{l}; \quad \cos(\bar{y}, \bar{l}) = \frac{y}{l}; \quad \cos(\bar{z}, \bar{l}) = \frac{z}{l}.$$

Để xác định nội lực trong các thanh của dàn không gian ta vận dụng phương pháp tách mắt, bắt đầu tách từ mắt 9 có ba ẩn số. Để cho tiện lợi và đỡ nhầm lẫn ta lập bảng tính (bảng 8.1).

Tách mắt 9, giả thiết nội lực tác dụng trong các thanh quy tụ vào mắt đều là lực kéo và viết phương trình cân bằng hình chiếu các lực lên ba trục, ta có:

$$\sum X = S_{9-6} \cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-6}) + S_{9-8} \cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-8}) + S_{9-7} \cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-7}) + P \cos(\bar{x}, \bar{P}) = 0;$$

$$\sum Y = S_{9-6} \cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-6}) + S_{9-8} \cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-8}) + S_{9-7} \cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-7}) + P \cos(\bar{y}, \bar{P}) = 0;$$

$$\sum Z = S_{9-6} \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-6}) + S_{9-8} \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-8}) + S_{9-7} \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-7}) + P \cos(\bar{z}, \bar{P}) = 0.$$

- Thanh 9-6: Độ dài các hình chiếu lên các trục tọa độ lần lượt là:

$$x = -2; \quad y = 2; \quad z = -5 \quad \text{nên}$$

$$l_{9-6} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-5)^2} = 5,75 \text{ m.}$$

Các cosin chỉ phương của thanh 9-6:

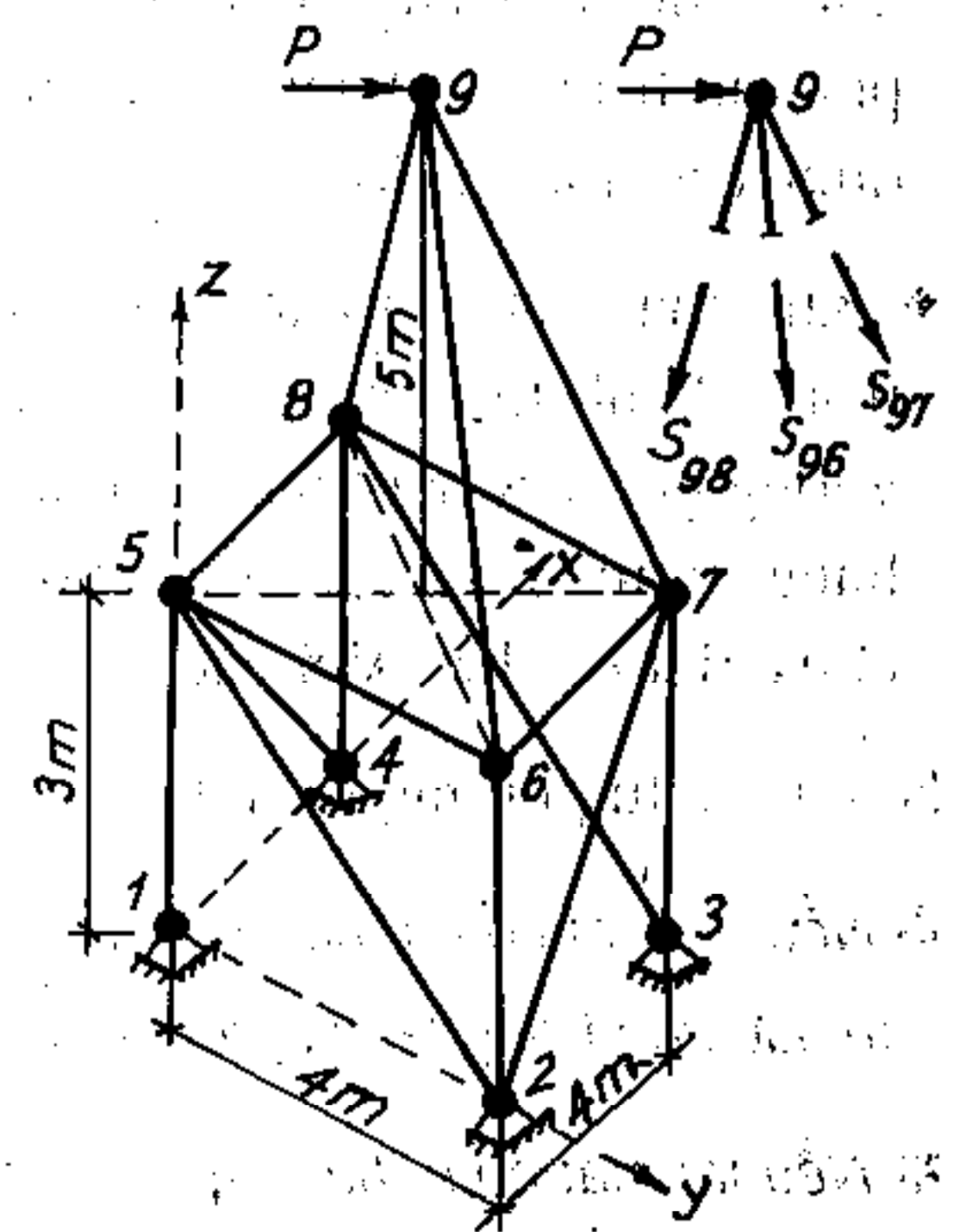
$$\cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-6}) = \frac{x}{l_{9-6}} = \frac{-2}{5,75} = -0,348;$$

$$\cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-6}) = \frac{y}{l_{9-6}} = \frac{2}{5,75} = 0,348;$$

$$\cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-6}) = \frac{z}{l_{9-6}} = \frac{-5}{5,75} = -0,87.$$

- Thanh 9-8: Từ hình 8.13 ta thấy các hình chiếu lên ba trục tọa độ của thanh lần lượt là $x = 2; y = -2; z = -5$.

Do đó:



Hình 8.13

$$l_{9-8} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = 5,75 \text{ m}; \quad \cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-8}) = \frac{x}{l_{9-8}} = \frac{2}{5,75} = 0,348;$$

$$\cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-8}) = \frac{y}{l_{9-8}} = \frac{-2}{5,75} = -0,348; \quad \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-8}) = \frac{z}{l_{9-8}} = \frac{-5}{5,75} = -0,87.$$

- Thanh 9-7: Cũng thực hiện tương tự, ta được:

$$\cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-7}) = 0,348; \quad \cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-7}) = 0,348; \quad \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-7}) = -0,87.$$

- Lực P: Các cosin chỉ phương:

$$\cos(\bar{x}, \bar{P}) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\bar{y}, \bar{P}) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\bar{z}, \bar{P}) = 0.$$

Bảng 8.1

| Thanh | Hình chiếu lên | | | x^2 | y^2 | z^2 | l (m) | Cosin chỉ phương của thanh | | | Nội lực (kN) |
|-------|----------------|-----|-----|-------|-------|-------|------------|----------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------|
| | x | y | z | | | | | $\cos(\bar{x}, \bar{l})$ | $\cos(\bar{y}, \bar{l})$ | $\cos(\bar{z}, \bar{l})$ | |
| 9-6 | -2 | 2 | -5 | 4 | 4 | 25 | 5,75 | -0,348 | 0,348 | -0,870 | 101,5 |
| 9-8 | 2 | -2 | -5 | 4 | 4 | 25 | 5,75 | 0,348 | -0,348 | -0,870 | 101,5 |
| 9-7 | 2 | 2 | -5 | 4 | 4 | 25 | 5,75 | 0,348 | 0,348 | -0,870 | -203,0 |
| 6-5 | 0 | -4 | 0 | 0 | 16 | 0 | 4,00 | 0,000 | -1,000 | 0,000 | -35,4 |
| 6-7 | 4 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0 | 4,00 | 1,000 | 0,000 | 0,000 | -35,4 |
| 6-2 | 0 | 0 | -3 | 0 | 0 | 9 | 3,00 | 0,000 | 0,000 | -1,000 | 88,4 |
| 7-8 | 0 | -4 | 0 | 0 | 16 | 0 | 4,00 | 0,000 | -1,000 | 0,000 | 70,7 |
| 7-2 | -4 | 0 | -3 | 16 | 0 | 9 | 5,00 | -0,800 | 0,000 | -0,600 | -132,5 |
| 7-3 | 0 | 0 | -3 | 0 | 0 | 9 | 3,00 | 0,000 | 0,000 | -1,000 | -256,3 |
| 8-5 | -4 | 0 | 0 | 16 | 0 | 0 | 4,00 | -1,000 | 0,000 | 0,000 | -35,3 |
| 8-4 | 0 | 0 | -3 | 0 | 0 | 9 | 3,00 | 0,000 | 0,000 | -1,000 | 167,8 |
| 8-3 | 0 | 4 | -3 | 0 | 16 | 9 | 5,00 | 0,000 | 0,800 | -0,600 | -132,6 |
| 5-4 | 4 | 0 | -3 | 16 | 0 | 9 | 5,00 | 0,800 | 0,000 | -0,600 | 44,1 |
| 5-1 | 0 | 0 | -3 | 0 | 0 | 9 | 3,00 | 0,000 | 0,000 | -1,000 | -52,8 |
| 5-2 | 0 | 4 | -3 | 0 | 16 | 9 | 5,00 | 0,000 | 0,800 | -0,600 | 44,1 |

Thay các trị số vừa tính được vào hệ ba phương trình cân bằng của mắt 9 ta có:

$$\sum X = S_{9-6}(-0,348) + S_{9-8}(0,348) + S_{9-7}(0,348) + 100 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\sum Y = S_{9-6}(0,348) + S_{9-8}(-0,348) + S_{9-7}(0,348) + 100 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\sum Z = S_{9-6}(-0,87) + S_{9-8}(-0,87) + S_{9-7}(-0,87) = 0.$$

Từ đó suy ra:

$$S_{9-6} = 101,5 \text{ kN}; \quad S_{9-8} = 101,5 \text{ kN}; \quad S_{9-7} = -203 \text{ kN}.$$

Các dấu tìm được chứng tỏ nội lực trong thanh 9-6 và 9-8 phù hợp với chiều giả thiết (lực kéo) còn nội lực trong thanh 9-7 ngược với chiều giả thiết (lực nén).

Sau khi tách mắt 9 ta chuyển sang tách mắt 6, lúc đó chỉ còn ba ẩn.

Quá trình tính toán được tiếp tục thực hiện trên bảng 8.1. Cũng lần lượt thực hiện như thế với các mắt 7, 8, 5 ta sẽ có được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.

Ví dụ 8.4. Vận dụng phương pháp tải trọng bằng không để xét cấu tạo hình học của hệ trên hình 8.14.

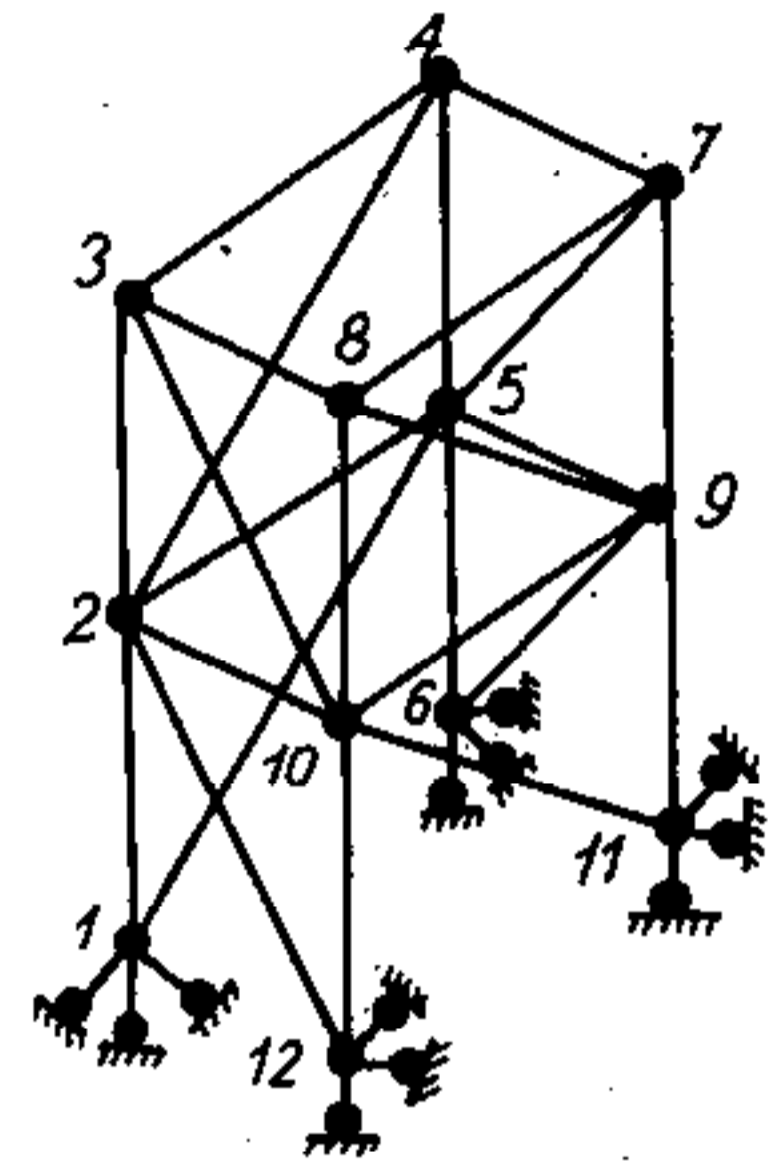
Đối với hệ đã cho, ta có: $M = 12$; $C = 12$; $T = 24$. Theo (8.5) ta thấy:

$$n = 24 + 12 - 3 \cdot 12 = 0.$$

Vậy hệ đủ liên kết.

Để khảo sát điều kiện đủ, trước tiên ta xét mắt 8 và thấy ngay nội lực trong thanh 3-8 bằng không (mắt 8 có bốn thanh trong đó có ba thanh đồng phẳng cho nên khi mắt không chịu lực thì thanh 3-8 không cùng trong mặt phẳng của ba thanh nói trên sẽ có nội lực bằng không). Tiếp đó, lần lượt xét các mắt 3, 4, 7 của hệ, ta thấy tại mỗi mắt này (sau khi đã loại bỏ các thanh có nội lực bằng không) chỉ có ba thanh đồng quy không đồng phẳng và không chịu tải trọng nên nội lực trong tất cả các thanh quy tụ vào các mắt 3, 4, 7 đều bằng không. Chuyển sang mắt 10, sau khi đã loại bỏ các thanh có nội lực bằng không, ta thấy mắt này còn lại bốn thanh trong đó có ba thanh đồng phẳng nên thanh không đồng phẳng 2-10 sẽ có nội lực bằng không. Tiếp đó, lần lượt xét các mắt 2, 5, 9 ta cũng dễ dàng nhận thấy nội lực trong các thanh quy tụ vào các mắt đó đều bằng không.

Như vậy, khi dàn không chịu tải trọng, nội lực trong tất cả các thanh của dàn đều duy nhất bằng không. Kết luận: hệ bất biến hình.



Hình 8.14

Qua ví dụ này ta thấy: sử dụng phương pháp tải trọng bằng không để khảo sát cấu tạo hình học cho hệ dàn không gian rất tiện lợi.

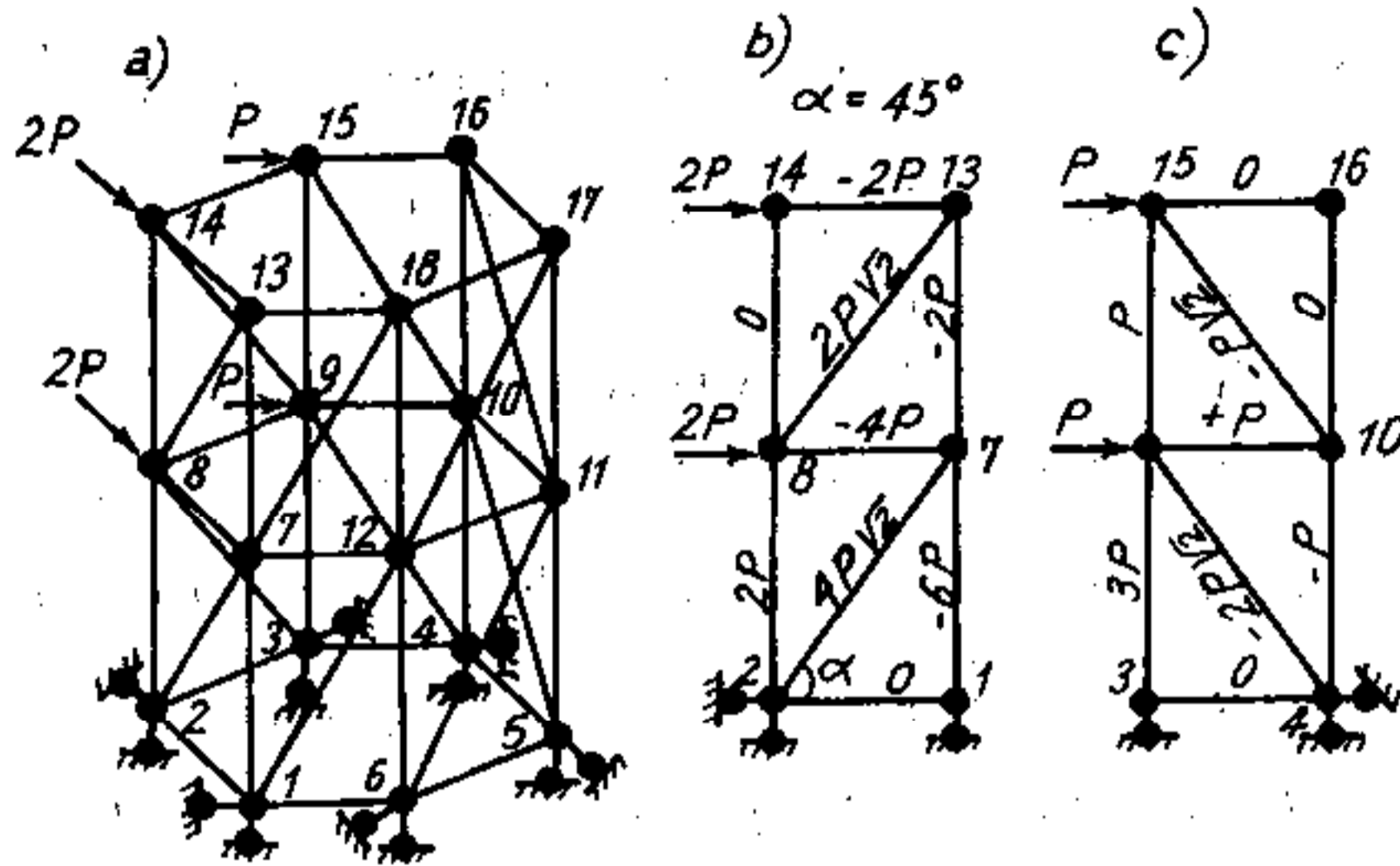
8.4. Cách phân tích dàn không gian thành những dàn phẳng

Trong trường hợp dàn không gian gồm các dàn phẳng bất biến hình ghép lại với nhau thì có thể tính toán đơn giản hơn bằng cách phân tích dàn thành những dàn phẳng để tính riêng biệt. Cách phân tích được thực hiện trên cơ sở nhận xét sau:

Trong dàn không gian, nếu tải trọng chỉ tác dụng trong mặt phẳng của một dàn phẳng bất biến hình nào đó và cân bằng với nhau hoặc cân bằng với các phản lực của hệ trong mặt phẳng đó thì nội lực chỉ phát sinh trong những thanh thuộc dàn phẳng chịu tải trọng còn các thanh khác của dàn không gian không nằm trong mặt phẳng đó sẽ có nội lực bằng không.

Để làm ví dụ, ta tìm hiểu cách phân tích dàn không gian trên hình 8.15a.

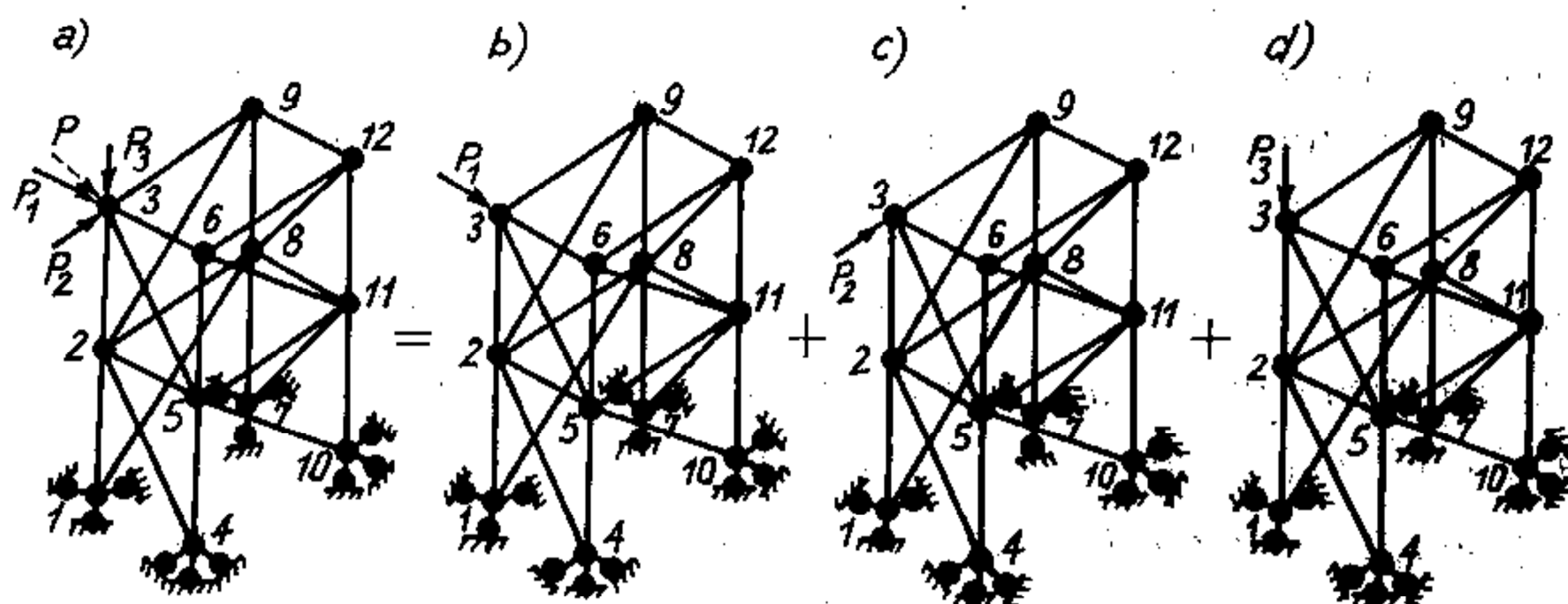
Hình 8.15



Dàn này có các mặt biên là những dàn phẳng bất biến hình, tải trọng tác dụng trong mặt phẳng của các dàn biên 1-2-14-13 và 3-15-16-4. Như vậy, để tính dàn không gian đã cho ta chỉ cần tính hai dàn phẳng độc lập. Các nội lực tìm được (ghi trên hình 8.15b và c) trong các thanh của hai dàn phẳng này cũng chính là nội lực trong các thanh tương ứng của dàn không gian. Nội lực trong các thanh khác nằm ngoài hai mặt phẳng nói trên đều bằng không.

Nếu tải trọng tác dụng trên dàn không gian có phương bất kỳ thì có thể phân tích tải trọng thành các thành phần nằm trong từng mặt phẳng để tính. Ví dụ với hệ dàn trên hình 8.16a, ta có thể phân tích lực P thành ba thành phần P_1 , P_2 và P_3 . Thành phần P_1 (hình 8.16b) chỉ gây ra nội lực trong dàn phẳng 1-3-6-4 còn thành phần P_2 (hình 8.16c) chỉ gây ra nội lực trong dàn phẳng 1-3-9-7. Thành phần P_3 (hình 8.16d) chỉ gây ra nội lực trong hai thanh 1-2 và 2-3. Cũng có thể xem thành phần P_3 như lực tác dụng trong dàn phẳng 1-3-6-4 hoặc trong dàn

phẳng 1-3-9-7. Cuối cùng, theo nguyên lý cộng tác dụng, nội lực trong thanh bất kỳ của dàn không gian do tải trọng P gây ra là tổng các nội lực trong thanh đó do từng thành phần P_1 , P_2 và P_3 tác dụng riêng rẽ gây ra.



Hình 8.16

8.5. Cách xác định chuyển vị trong hệ không gian

Cách xác định chuyển vị trong hệ không gian cũng được thực hiện theo những nguyên tắc đã trình bày trong chương 4. Tuy nhiên, trong hệ không gian có nhiều thành phần nội lực và biến dạng hơn trong hệ phẳng nên cần bổ sung các số hạng mang yếu tố không gian trong các công thức xác định chuyển vị.

1. Xác định chuyển vị theo thế năng biến dạng đàn hồi

Để xác định chuyển vị trong hệ không gian ta có thể áp dụng trực tiếp biểu thức thế năng hoặc áp dụng định lý Castigliano như đã trình bày trong mục 4.3 chương 4. Song trong hệ không gian gồm các thanh thẳng và thanh cong có độ cong nhỏ, thay thế cho công thức (4.12), ta có biểu thức thế năng biến dạng của hệ như sau:

$$U = \sum \int \frac{M_x^2 ds}{2EI_x} + \sum \int \frac{M_y^2 ds}{2EI_y} + \sum \int \frac{M_z^2 ds}{2GI_z} + \sum \int \frac{N_z^2 ds}{2EA} + \sum \int v_x \frac{Q_x^2 ds}{2GA} + \sum \int v_y \frac{Q_y^2 ds}{2GA}, \quad (8.7)$$

trong đó:

$M_x, M_y, M_z, N_z, Q_x, Q_y$ – các biểu thức giải tích của các thành phần nội lực đã được giải thích trên hình 8.10;

v_x và v_y – các hệ số điều chỉnh kể đến sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên tiết diện, theo phương x và phương y .

I_x, I_y – mômen quán tính của tiết diện đối với các trục chính trung tâm x và y ;

I_z – mômen quán tính của tiết diện khi xoắn được xác định như sau:

❖ tiết diện vuông có cạnh a : $I_z \approx 0,141a^4$;

❖ tiết diện chữ nhật có cạnh $h \times b$ với $h > b$: $I_z \approx hb^3 \left[\frac{16}{3} - 3,36 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \right]$;

❖ tiết diện chữ nhật hẹp có cạnh $h \times b$ với $h > 4b$: $I_z \approx \frac{b^3}{3} (h - 0,63b)$;

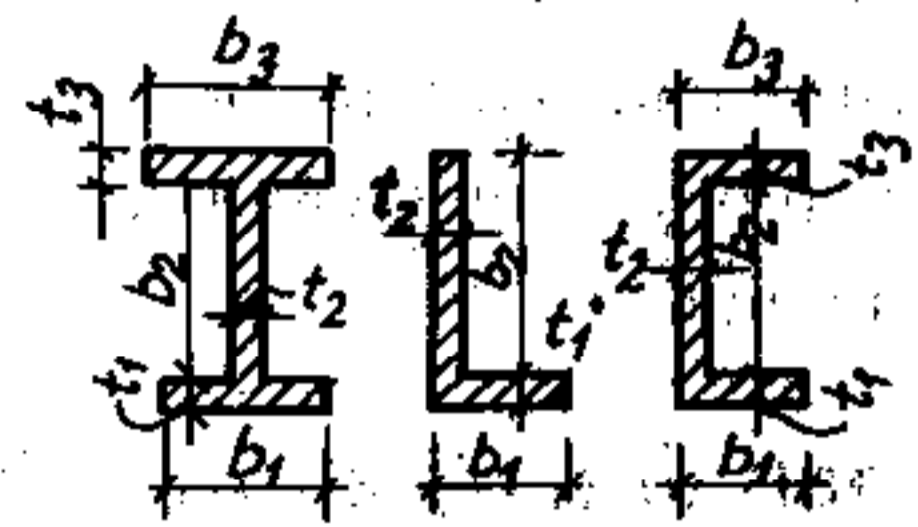
❖ tiết diện hình tròn có bán kính r : $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$;

❖ tiết diện thành mỏng hở (hình 8.17), được hình thành từ n phần tử chữ nhật hẹp có các cạnh $b_i \times t_i$ với $b_i > t_i$:

$$I_z \approx \frac{1}{3} \alpha \sum_{i=1}^n b_i t_i^3$$

Hệ số α phụ thuộc hình dạng tiết diện:

- hình I: $\alpha = 1,30$;
- hình L (thép góc): $\alpha = 1,00$;
- hình []: $1,00 < \alpha < 1,30$;
- hình +: $\alpha = 1,17$.



Hình 8.17

2. Xác định chuyển vị theo nguyên lý công khả dĩ

Trong trường hợp hệ thanh không gian bao gồm các thanh thẳng hoặc thanh cong có độ cong nhỏ, tương tự như đã trình bày trong mục 4-6 chương 4, ta có thể thiết lập được công thức xác định chuyển vị như sau:

$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & - \sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm} + \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} M_{xm}}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} M_{ym}}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} M_{zm}}{GI_z} ds + \\ & + \sum \int \frac{\bar{N}_{zk} N_{zm}}{EA} ds + \sum \int v_x \frac{\bar{Q}_{xk} Q_{xm}}{GA} ds + \sum \int v_y \frac{\bar{Q}_{yk} Q_{ym}}{GA} ds + \sum \int \bar{N}_{zk} \alpha t_{cm} ds + \\ & + \sum \int \bar{M}_{xk} \frac{\alpha}{h_y} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{M}_{yk} \frac{\alpha}{h_x} (t_{3m} - t_{1m}) ds \end{aligned} \quad (8.8)$$

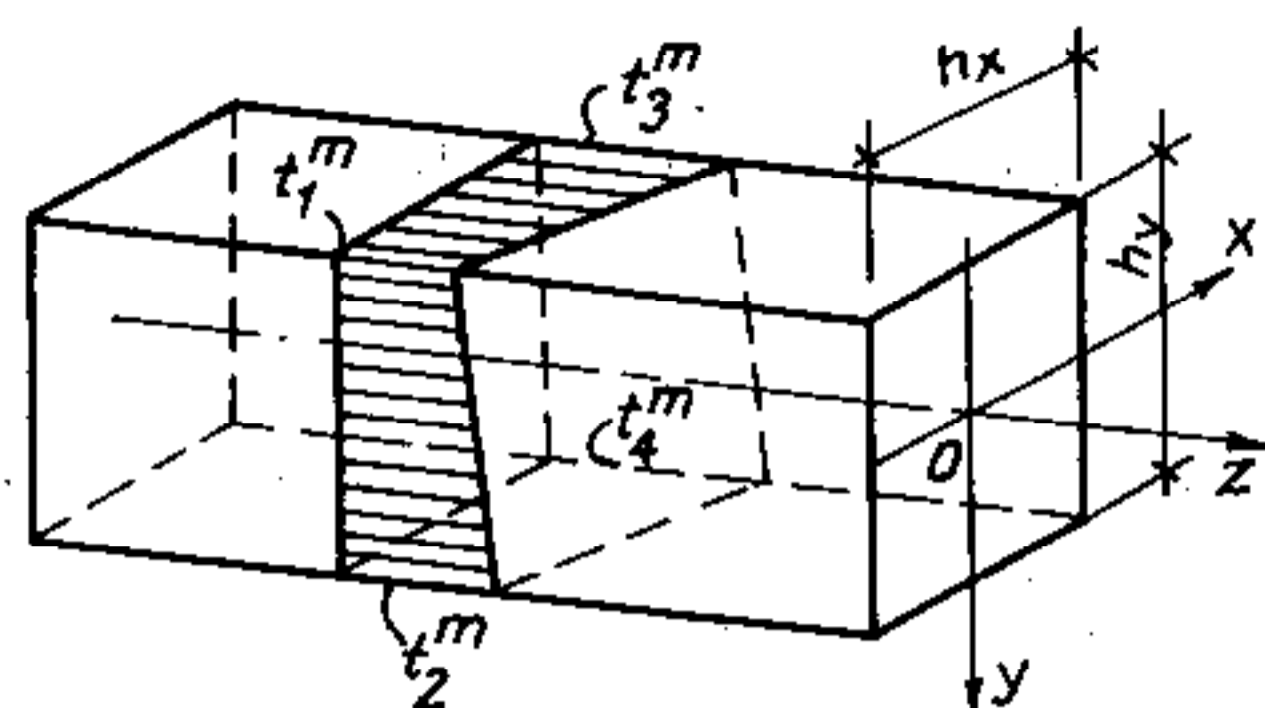
Cách vận dụng công thức chuyển vị cũng tương tự như đã trình bày trong mục 4.6 chương 4. Một số đại lượng trong (8.8) đã được giải thích ở trên, ở đây chỉ cần giải thích thêm các đại lượng sau:

$\bar{M}_{xk}, \bar{M}_{yk}, \bar{M}_{zk}, \bar{N}_{zk}, \bar{Q}_{xk}, \bar{Q}_{yk}$ – các biểu thức của nội lực ở trạng thái "k";

$M_{xm}, M_{ym}, M_{zm}, N_{zm}, Q_{xm}, Q_{ym}$ – các biểu thức của nội lực ở trạng thái "m";

h_x, h_y – chiều cao của tiết diện theo phương trục x và y .

$t_1^m, t_2^m, t_3^m, t_4^m$ – độ biến thiên nhiệt độ tại các thớ chỉ định trên hình 8.18. Vì ta giả thiết biểu đồ biến thiên nhiệt độ theo luật mặt phẳng nên giữa các đại lượng này có liên hệ như sau:



Hình 8.18

$$t_1^m + t_4^m = t_2^m + t_3^m;$$

t_c^m – độ biến thiên nhiệt độ ở trục, nếu tiết diện có hai trục đối xứng thì

$$t_c^m = (t_1^m + t_4^m) / 2 = (t_2^m + t_3^m) / 2.$$

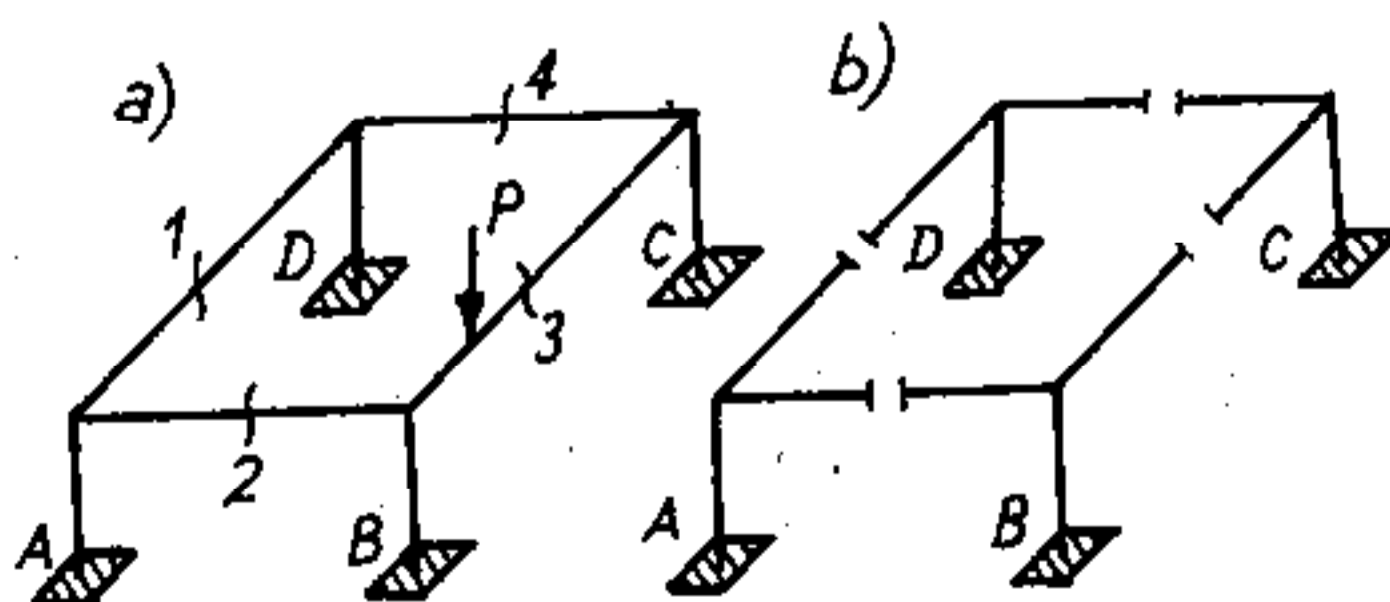
Ngoài ra cần chú ý là các định lý về năng lượng cũng như các định lý tương hỗ đã trình bày trong chương 4 đối với bài toán phẳng, vẫn nghiệm đúng với các hệ không gian.

8.6. Cách tính hệ không gian siêu tĩnh theo phương pháp lực

Để tính hệ không gian siêu tĩnh ta cũng thực hiện trên hệ cơ bản. Hệ cơ bản có thể là tĩnh định hoặc siêu tĩnh với bậc thấp hơn song phải bất biến hình và phù hợp với khả năng tính toán.

Số ẩn số của phương pháp lực được xác định theo (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), trong đó n là bậc siêu tĩnh. Khi tính các hệ đơn giản ta có thể phát hiện ngay được số ẩn số bằng cách loại trừ các liên kết thừa. Chẳng hạn, đối với hệ cho trên hình 8.19a, nếu cắt các thanh của hệ tại các tiết diện 1, 2, 3, 4 thì sẽ được một hệ tĩnh định bất biến hình (hình 8.19b). Tại mỗi mặt cắt ta loại bỏ một mối hàn tương đương với sáu liên kết thanh, do đó bậc siêu tĩnh của hệ là $6.4 = 24$.

Hình 8.19



Đối với hệ siêu tĩnh có bậc là n , khi chọn hệ cơ bản tĩnh định ta có hệ n phương trình chính tắc:

$$\delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \dots + \delta_{kk} X_k + \dots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kP} = 0, \quad (8.9)$$

với $k = 1, 2, \dots, n$.

Phương trình chính tắc, các hệ số và số hạng tự do vẫn có ý nghĩa vật lý như đã trình bày trong chương 5. Tuy nhiên, các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc cần được xác định theo công thức chuyển vị của hệ không gian (8.8). Ta có:

$$\begin{aligned} \delta_{km} = & \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} \bar{M}_{xm}}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} \bar{M}_{ym}}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} \bar{M}_{zm}}{GI_z} ds + \\ & + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m}{EA} ds + \sum \int v_x \frac{\bar{Q}_{xk} \bar{Q}_{xm}}{GA} ds + \sum \int v_y \frac{\bar{Q}_{yk} \bar{Q}_{ym}}{GA} ds; \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{kP} = & \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} M_{xP}^o}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} M_{yP}^o}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} M_{zP}^o}{GI_z} ds + \\ & + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_P^o}{EA} ds + \sum \int v_x \frac{\bar{Q}_{xk} Q_{xP}^o}{GA} ds + \sum \int v_y \frac{\bar{Q}_{yk} Q_{yP}^o}{GA} ds. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Đối với các hệ khung và dầm không gian, thường được phép bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn khi xác định chuyển vị, do đó các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc được xác định theo công thức đơn giản hơn như sau:

$$\delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} \bar{M}_{xm}}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} \bar{M}_{ym}}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} \bar{M}_{zm}}{GI_z} ds; \quad (8.12)$$

$$\Delta_{kP} = \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} M_{xP}^o}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} M_{yP}^o}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} M_{zP}^o}{GI_z} ds. \quad (8.13)$$

Cũng tương tự như trong hệ phẳng, ta có thể tính các tích phân trong các công thức trên bằng cách nhân biểu đồ theo Verëxaghin.

Đối với hệ dàn không gian, trong đó chỉ tồn tại lực dọc, công thức xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc có dạng đơn giản hơn như sau:

$$\delta_{km} = \sum_i \bar{N}_{ik} \bar{N}_{im} \frac{l_i}{(EA)_i}; \quad \Delta_{kP} = \sum_i \bar{N}_{ik} N_{iP}^o \frac{l_i}{(EA)_i}; \quad (8.14)$$

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để tìm các ẩn X_k ta tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh không gian theo công thức quen biết sau:

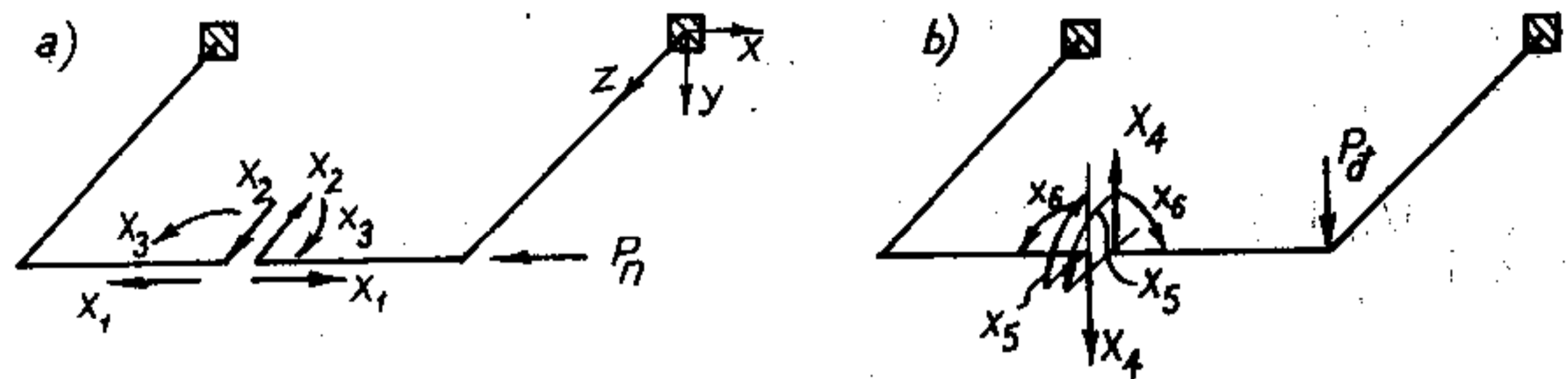
$$(S) = (\bar{S}_1) X_1 + (\bar{S}_2) X_2 + \dots + (\bar{S}_n) X_n + (S_P^o). \quad (8.15)$$

Ý nghĩa của các đại lượng trong (8.15) đã giải thích trong mục 5.2, chương 5.

Trường hợp đặc biệt: Đối với những hệ siêu tĩnh phẳng chịu tải trọng không gian (không nằm trong mặt phẳng của hệ) ta có thể dựa vào những nhận xét sau để làm

đơn giản tính toán: những ẩn số nằm trong mặt phẳng của hệ chỉ gây ra chuyển vị trong mặt phẳng hệ.

Ví dụ, với hệ cho trên hình 8.20 ta có sáu ẩn số, trong đó các ẩn số X_1, X_2, X_3 nằm trong mặt phẳng của hệ chỉ gây ra chuyển vị trong mặt phẳng hệ. Do đó, các hệ số $\delta_{41}, \delta_{42}, \delta_{43}, \delta_{51}, \delta_{52}, \delta_{53}, \delta_{61}, \delta_{62}, \delta_{63}$ biểu thị chuyển vị ngoài mặt phẳng hệ do các lực tác dụng trong mặt phẳng hệ sẽ bằng không.



Hình 8.20

Như vậy, mặc dù tải trọng tác dụng bất kỳ, bao giờ ta cũng có thể phân tích hệ phương trình chính tắc thành hai nhóm: một nhóm chỉ chứa các ẩn nằm trong mặt phẳng hệ (X_1, X_2, X_3) và một nhóm chỉ chứa các ẩn nằm ngoài mặt phẳng hệ (X_4, X_5, X_6). Khối lượng giải hệ phương trình chính tắc sẽ được giảm nhẹ rất nhiều.

Mặt khác, nếu phân tích tải trọng đã cho thành hai nhóm: nhóm tải trọng nằm trong mặt phẳng hệ và nhóm tải trọng tác dụng vuông góc với mặt phẳng hệ như trên hình 8.20a, b, thì ta thấy nhóm thứ nhất chỉ có ảnh hưởng đến các ẩn số nằm trong mặt phẳng hệ còn nhóm thứ hai chỉ có ảnh hưởng đến các ẩn số nằm ngoài mặt phẳng hệ. Nhận xét này cho phép đơn giản hóa cách tính các số hạng tự do trong hai nhóm của hệ phương trình chính tắc.

Ví dụ 8.5. Vẽ biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn cho hệ trên hình 8.21a.

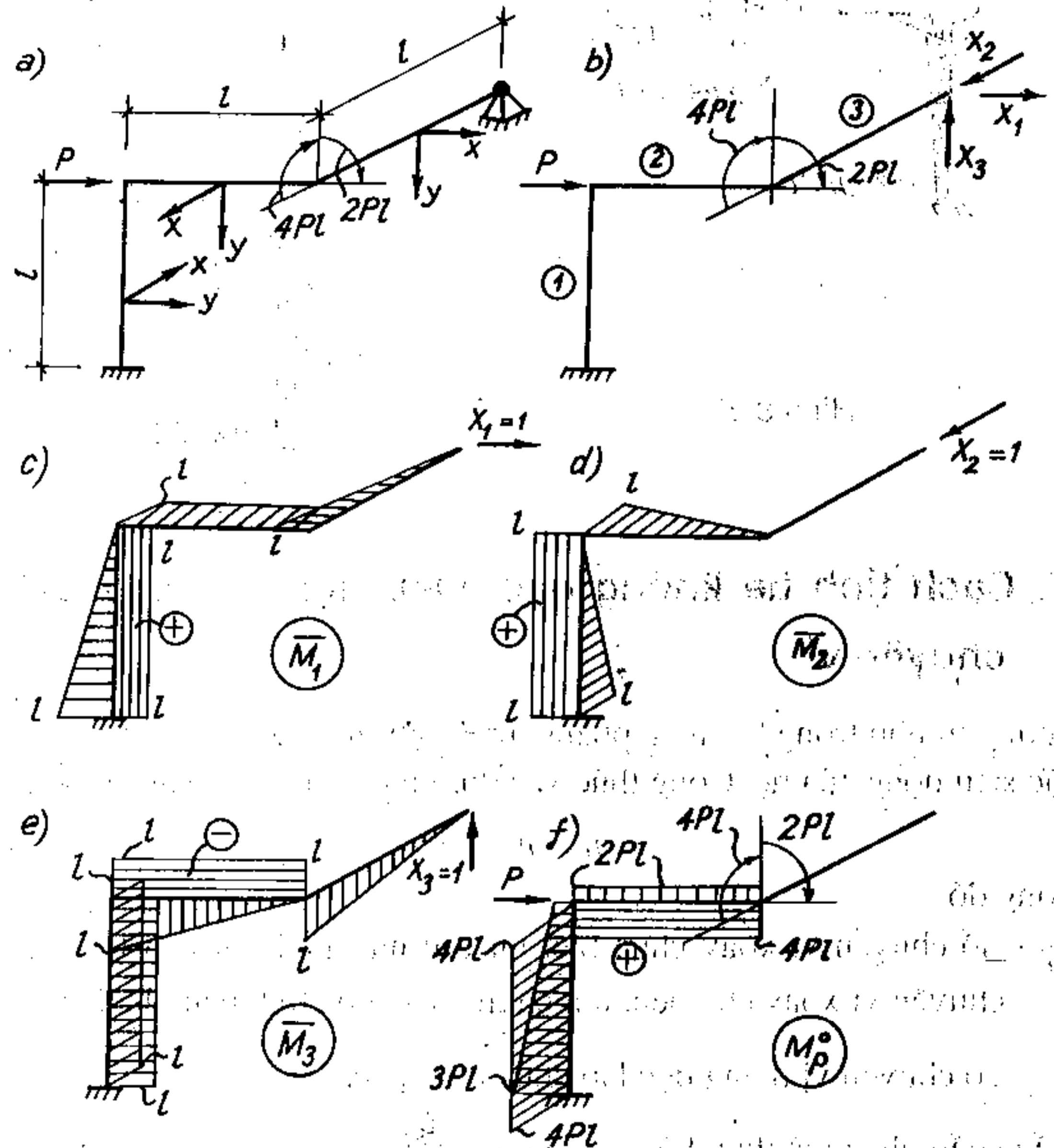
Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.

Cho biết: $I_y = 0,5I_x$; $I_z = 12(1+\mu)I_x$; $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng ba. Chọn hệ cơ bản như trên hình 8.21b. Chiều dương của trục quán tính chính trung tâm tương ứng với mỗi thanh chọn như trên hình 8.21a. Trên các hình 8.21c, d, e, f lần lượt vẽ các biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn (biểu đồ mômen xoắn biểu thị bằng các đường kẻ song song với trục thanh) tương ứng với các nguyên nhân $X_1=1, X_2=1, X_3=1$ và tải trọng.

Sau khi thực hiện các phép nhận biểu đồ, ta xác định được các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc như sau:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{19l^3}{6EI_x}; & \delta_{22} &= \frac{9l^3}{6EI_x}; & \delta_{33} &= \frac{26l^3}{6EI_x}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{7l^3}{6EI_x}; & \delta_{13} = \delta_{31} &= -\frac{3l^3}{6EI_x}; & \delta_{23} = \delta_{32} &= \frac{6l^3}{6EI_x}; \\ \Delta_{1P} &= \frac{8Pl^3}{6EI_x}; & \Delta_{2P} &= -\frac{24Pl^3}{6EI_x}; & \Delta_{3P} &= -\frac{73Pl^3}{6EI_x}. \end{aligned}$$



Hình 8.21

Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{aligned} 19X_1 + 7X_2 - 3X_3 + 8P &= 0; \\ 7X_1 + 9X_2 + 6X_3 - 24P &= 0; \\ -3X_1 + 6X_2 + 26X_3 - 73P &= 0. \end{aligned}$$

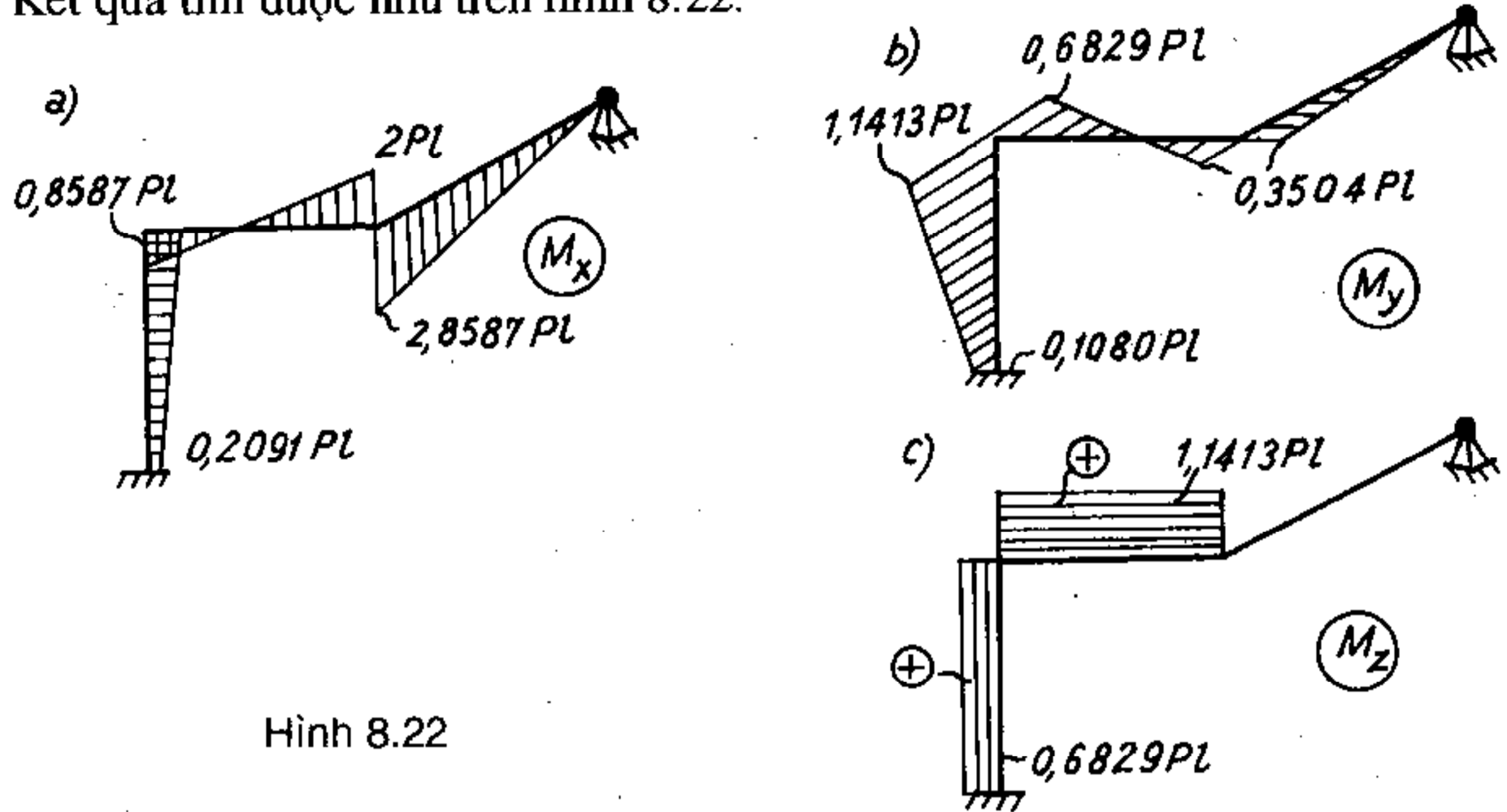
Nghiệm của hệ phương trình:

$$X_1 = -0,3504P; \quad X_2 = 1,0333P; \quad X_3 = 2,8587P.$$

Theo (8.16), các biểu đồ nội lực được xác định như sau:

$$(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)X_2 + (\bar{M}_3)X_3 + (M_P^0).$$

Kết quả tìm được như trên hình 8.22.



Hình 8.22

8.7. Cách tính hệ không gian siêu động theo phương pháp chuyển vị

Tương tự như trong bài toán phẳng, trước khi nghiên cứu cách tính ta cần xác định bậc siêu động của hệ. Công thức xác định bậc siêu động vẫn có dạng:

$$n = n_1 + n_2, \quad (8.16)$$

trong đó:

n_1 – số chuyển vị xoay chưa biết tại các nút, mỗi nút của hệ không gian có ba chuyển vị xoay cho nên, nói chung, n_1 được tính bằng ba lần số nút của hệ;

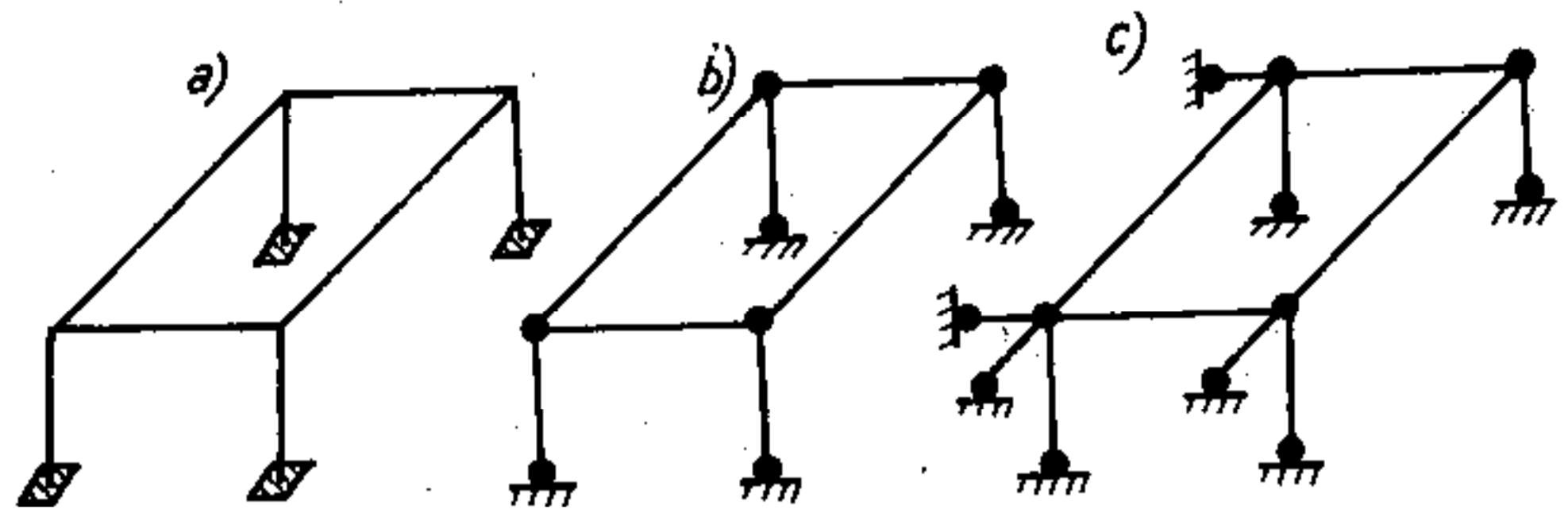
n_2 – số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết tại các nút.

Nếu chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục trong các thanh thì cũng tương tự như trong bài toán phẳng ta có thể xác định n_2 như sau: thay các ngàm và nút của hệ bằng các khớp, ta sẽ được sơ đồ mới nói chung là biến hình, tiếp đó đặt thêm các liên kết thanh vào hệ mới để ngăn cản tất cả các chuyển vị thẳng của các nút, số liên kết tối thiểu phải đặt thêm vào hệ mới chính là số chuyển vị thẳng n_2 cần tìm.

Chẳng hạn đối với hệ vẽ trên hình 8.23a, sau khi đặt khớp tại các nút và ngàm ta được hệ mới như trên hình 8.23b, tiếp đó ta cần đặt thêm vào hệ mới này bốn liên

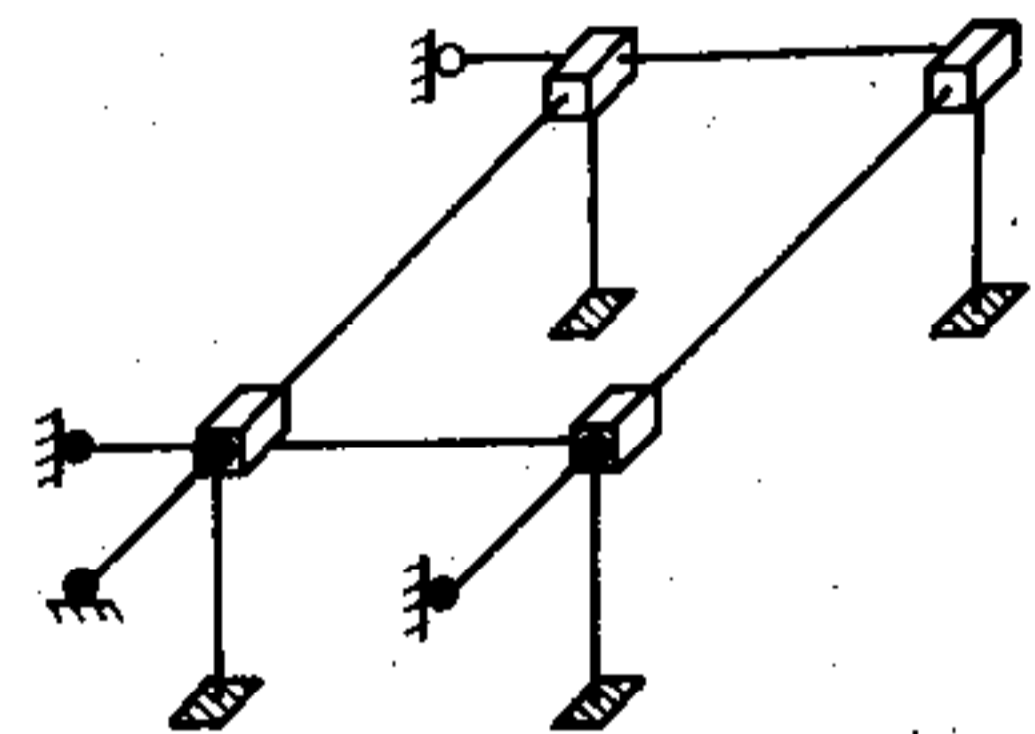
kết thanh để ngăn cản chuyển vị thẳng tại các nút như trên hình 8.23c. Như vậy số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút là 4.

Hình 8.23



Sau khi xác định bậc siêu động tức là số ẩn số của phương pháp, ta lập hệ cơ bản bằng cách đặt tại mỗi nút một liên kết mômen không gian và đặt thêm các liên kết lực (liên kết thanh) để ngăn cản tất cả các chuyển vị của các nút hệ. Mỗi liên kết mômen không gian ngăn cản được ba chuyển vị xoay quanh ba trục tọa độ, nhưng không ngăn cản được chuyển vị thẳng. Hệ vẽ trên hình 8.24 là hệ cơ bản của hệ 8.23a theo phương pháp chuyển vị.

Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ đã cho, ta cho các nút chuyển vị cưỡng bức với các giá trị để sao cho phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ phải bằng không. Điều kiện này được thể hiện qua hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:



Hình 8.24

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kk}Z_k + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kP} = 0, \quad (8.17)$$

với $k = 1, 2, \dots, n$.

Phương trình chính tắc, các hệ số và số hạng tự do vẫn có ý nghĩa vật lý như đã trình bày trong chương 6.

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta cần vẽ các biểu đồ \bar{S}_m, S_P^0 và vận dụng các điều kiện cân bằng nhưng cần thực hiện theo quan điểm không gian.

Khi vẽ các biểu đồ \bar{S}_m, S_P^0 ta sử dụng các số liệu đã có trong các bảng 6.1, 6.2 và các số liệu về phân tử mẫu thanh chịu các nguyên nhân gây xoắn trong bảng 8.2.

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để tìm các ẩn số Z_m , ta xác định nội lực trong hệ siêu động theo công thức quen biết sau:

$$(S_P) = (\bar{S}_1)Z_1 + (\bar{S}_2)Z_2 + \dots + (\bar{S}_m)Z_m + \dots + (\bar{S}_n)Z_n + (S_P^0). \quad (8.18)$$

Các đại lượng trong (8.18) vẫn có ý nghĩa như đã trình bày trong chương 6.

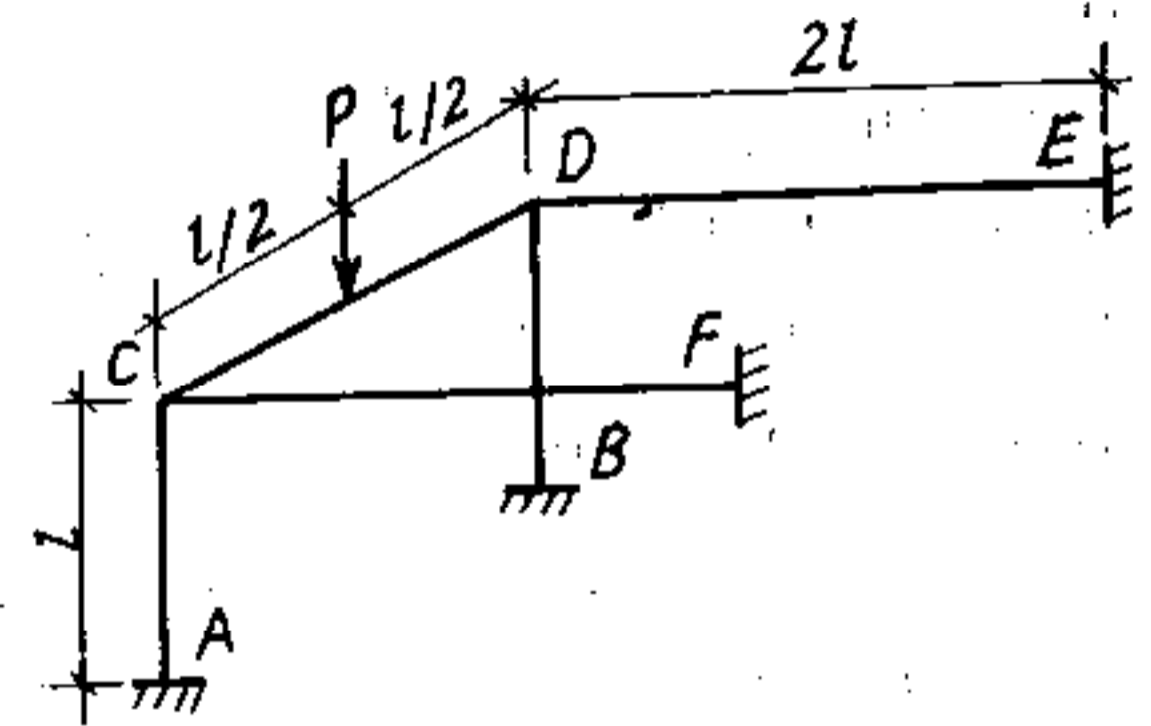
Bảng 8.2

| | | |
|-------------------------------------|--|--|
| | | |
| $M_{Az} = M_{Bz} = -\frac{GI_z}{l}$ | $M_{Az} = -\frac{b}{l} M^*$ $M_{Bz} = \frac{a}{l} M^*$ | $M_{Az} = -\frac{m c}{2l} (2b + c)$ $M_{Bz} = \frac{m c}{2l} (2a + c)$ |

Ví dụ 8.6. Vẽ biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn cho khung trên hình 8.25.

Cho biết khung có tiết diện không đổi, hình tròn có bán kính r ; $G = 0,4E$.

Ta nhận thấy tải trọng P chỉ tác dụng trong mặt phẳng $ABCD$ của hệ cho nên nếu chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thì phần khung $ABCD$ chỉ biến dạng trong mặt phẳng $ABCD$. Mặt khác, căn cứ vào tính chất đối xứng của bài toán đã cho ta thấy các nút C và D không thể có chuyển vị thẳng mà chỉ có chuyển vị xoay bằng nhau và ngược chiều trong mặt phẳng $ABCD$.



Hình 8.25

Như vậy, khi tính hệ theo phương pháp chuyển vị ta chỉ cần một ẩn số, đó là cặp chuyển vị xoay đối xứng tại hai nút C và D xảy ra trong mặt phẳng $ABCD$.

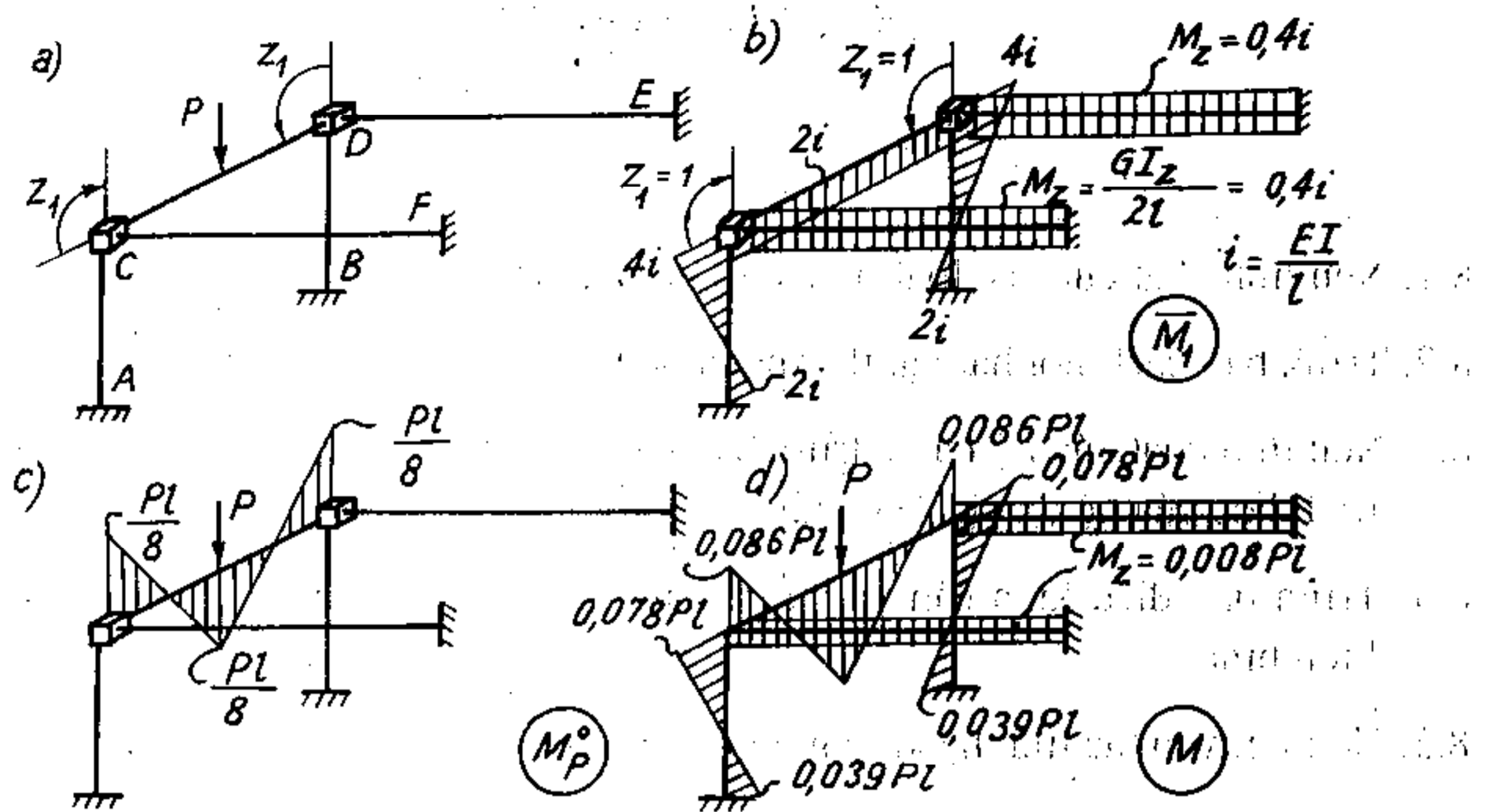
Hệ cơ bản tương ứng như trên hình 8.26a.

Để vẽ biểu đồ mômen uốn do chuyển vị $Z_1 = 1$ và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản ta sử dụng các số liệu cho trong các bảng 6.1, 6.2 và 8.2. Trong trường hợp này ta có:

$$EI_x = EI_y = E \frac{\pi r^4}{4} = EI; \quad GI_z = G \frac{\pi r^4}{2} = 0,8 EI.$$

Kết quả như trên các hình 8.26b và c. Chú ý là để thể hiện biểu đồ mômen xoắn,

ngoài hình thức biểu thị bằng các đường kẻ song song với trục thanh như đã thực hiện trong ví dụ 8.5 ta còn có thể dùng hình thức khác như đã thực hiện đối với các thanh CF, DE trên hình 8.26b.



Hình 8.26

Từ các biểu đồ vừa tìm được, ta xác định các hệ số và số hạng tự do của phương trình chính tắc. Kết quả:

$$r_{11} = 2(4i + 2i + 0,4i) = 12,8i;$$

trong đó $i = EI/l$, đối với tiết diện tròn ta có $GI_z/2l = 0,4i$.

$$R_{1P} = -2 \frac{Pl}{8} = -\frac{Pl}{4}.$$

Phương trình chính tắc: $12,8i Z_1 - \frac{Pl}{4} = 0.$

Suy ra: $Z_1 = 0,0195 \frac{Pl}{i} = 0,0195 \frac{Pl^2}{EI}.$

Biểu đồ mômen tổng cộng được xác định theo công thức sau:

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (M_P^o).$$

Kết quả tìm được như trên hình 8.26d.

CÂU HỎI ÔN TẬP

- 8.1. Nêu tính chất của các loại liên kết không gian.
- 8.2. Trình bày cách nối hai vật thể thành hệ không gian bất biến hình.
- 8.3. Nêu tính chất của bộ ba và trình bày cách áp dụng bộ ba để khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ dàn không gian.
- 8.4. Trình bày điều kiện cần và đủ để cấu tạo hệ không gian bất kỳ thành hệ bất biến hình.
- 8.5. Nêu nguyên tắc tính hệ không gian tĩnh định.
- 8.6. Nêu nguyên tắc tính dàn không gian tĩnh định.
- 8.7. Nêu sự khác nhau giữa cách tính chuyển vị trong hệ phẳng và hệ không gian. Giải thích ý nghĩa của các đại lượng trong công thức chuyển vị của hệ không gian.
- 8.8. Trình bày cách tính hệ không gian siêu tĩnh theo phương pháp lực. So với hệ phẳng, cách tính hệ siêu tĩnh không gian phức tạp hơn ở những điểm nào?
- 8.9. Trình bày cách tính hệ không gian siêu động theo phương pháp chuyển vị.

9

Phương pháp phân phối mômen

Phương pháp phân phối mômen thuộc loại phương pháp tính đúng dần, cho kết quả càng sát với kết quả tính chính xác (theo phương pháp lực hay phương pháp chuyển vị) nếu quá trình thực hiện tính toán càng kéo dài.

Hiện có nhiều phương pháp tính đúng dần áp dụng cho các kết cấu siêu tĩnh hoặc siêu động dưới nhiều hình thức khác nhau. Nói chung nội dung của các phương pháp này được trình bày dưới dạng phân phối mômen hoặc phân phối biến dạng theo hình thức này hoặc hình thức khác.

Trong chương này chúng ta chỉ nghiên cứu hai phương pháp phân phối mômen: *phương pháp H. Cross* và *phương pháp G. Kani* là những phương pháp được áp dụng nhiều trong thực tế đồng thời cũng là những phương pháp cơ bản dùng để làm cơ sở cho việc nghiên cứu các phương pháp tính đúng dần khác.

9.1. Phương pháp H. Cross

Phương pháp H.Cross được xây dựng trên cơ sở những giả thiết giống như những giả thiết của phương pháp chuyển vị.

Về thực chất, phương pháp này là một hình thức khác của phương pháp chuyển vị, trong đó việc giải hệ phương trình chính tắc được thực hiện theo phương pháp đúng dần có mang ý nghĩa vật lý.

Phương pháp H.Cross có những ưu điểm sau:

- * *Tính toán đơn giản.* Hầu hết các phép tính trong phương pháp Cross chỉ là những phép tính cộng và nhân do đó chỉ cần dùng máy tính phổ thông cũng đủ để thực hiện.
- * *Phương pháp Cross chỉ yêu cầu phải giải một số lượng phương trình rất ít so với số lượng phương trình theo các phương pháp "chính xác", có trường hợp không cần phải giải hệ phương trình.* Do đó phương pháp này thích hợp cho những hệ siêu tĩnh bậc cao chẳng hạn như hệ khung nhiều tầng, nhiều nhịp.

Tuy nhiên, phương pháp này cũng còn có những điểm hạn chế tương tự như phương pháp chuyển vị, thường chỉ áp dụng có hiệu quả cho những hệ khung

hoặc dầm. Hiện nay cũng đã có một số phương pháp "cải tiến phương pháp Cross" nhằm mở rộng diện áp dụng và nâng cao hiệu quả. Trong giáo trình chỉ giới thiệu phương pháp Cross "thuần túy".

A. Khái niệm và quy ước về dấu

1. Khái niệm về hệ có nút chuyển vị thẳng và không chuyển vị thẳng

Dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài như tải trọng chẳng hạn, nói chung các nút của hệ có thể có chuyển vị xoay (nút bị xoay nhưng không thay đổi vị trí) và chuyển vị thẳng (thay đổi vị trí).

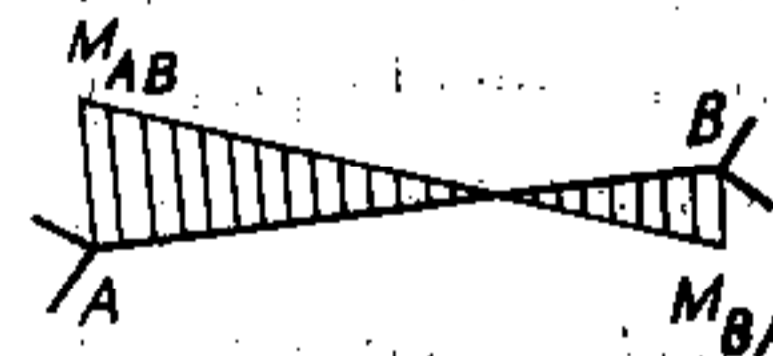
Trong quá trình biến dạng, nếu một hoặc một số nút của khung có chuyển vị thẳng thì khung được gọi là hệ có nút chuyển vị thẳng, còn nếu tất cả các nút không chuyển vị thẳng thì khung được gọi là hệ có nút không chuyển vị thẳng.

Để phân biệt hai loại hệ này ta có thể vận dụng biện pháp quen biết trong mục 6.1 chương 6 khi tìm số ẩn số của hệ theo phương pháp chuyển vị vì thực chất của hai vấn đề là một. Những hệ tồn tại số ẩn số chuyển vị thẳng n_2 là hệ có nút chuyển vị thẳng. Ngược lại, hệ có $n_2 = 0$ là hệ có nút không chuyển vị thẳng.

2. Ký hiệu và quy ước về dấu của mômen uốn và lực cắt

Đại lượng cần tìm trong phương pháp Cross là mômen uốn tại tiết diện ở các đầu thanh. Những mômen này được ký hiệu bằng chữ M có mang theo hai chỉ số. Chỉ số thứ nhất biểu thị vị trí của tiết diện chịu mômen uốn, chỉ số thứ hai kết hợp với chỉ số thứ nhất biểu thị thanh chịu mômen uốn đó. Đối với lực cắt ta cũng ký hiệu tương tự.

Ví dụ M_{AB} đọc là mômen uốn tại tiết diện A thuộc thanh AB (hình 9.1); Q_{AB} đọc là lực cắt tại tiết diện A thuộc thanh AB.

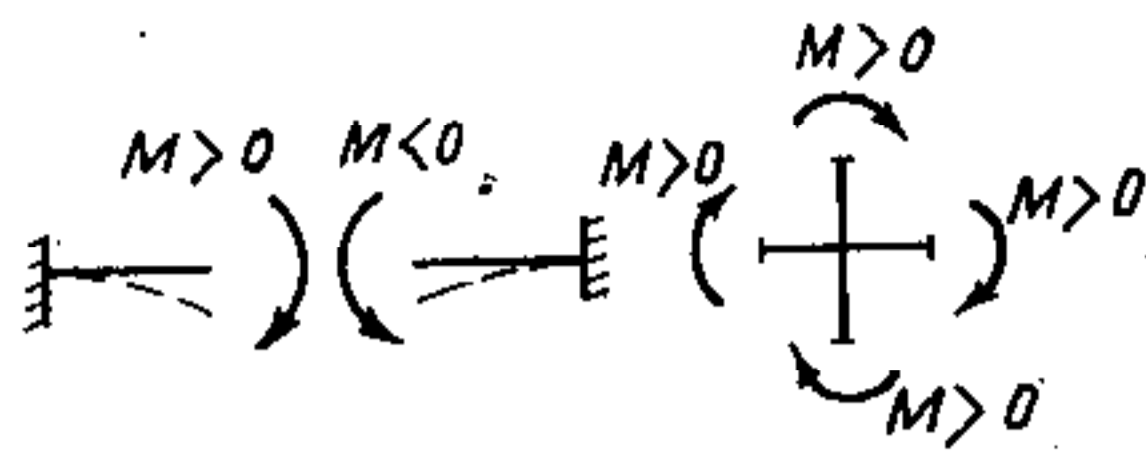


Hình 9.1

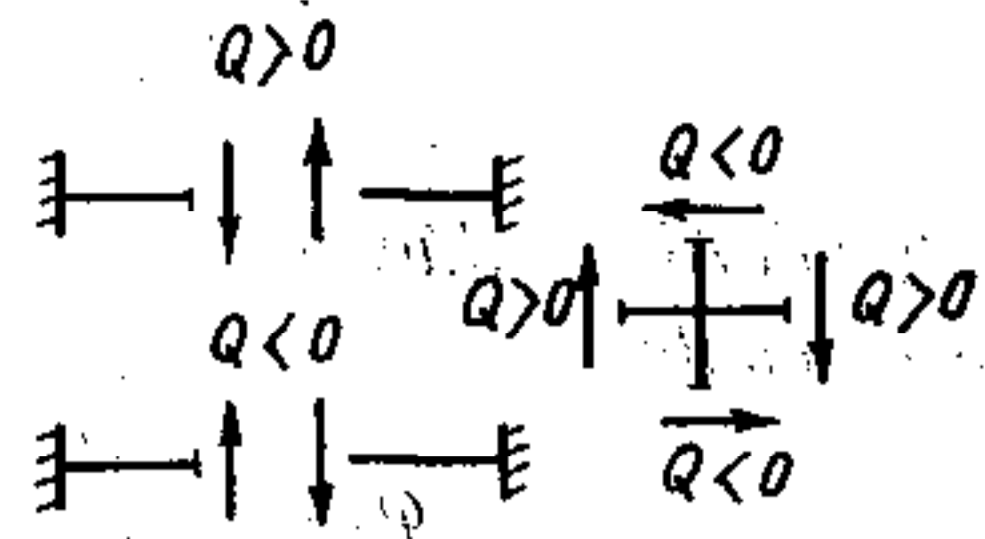
Quy ước về dấu của nội lực trong phương pháp Cross cũng khác với cách quy ước về dấu trong Sức bền vật liệu.

* Mômen uốn tại nút được xem là dương khi nó làm cho thớ giữa của thanh quay theo chiều kim đồng hồ và được xem là âm khi nó làm cho thớ giữa của thanh quay ngược chiều kim đồng hồ (hình 9.2).

* Lực cắt được xem là dương khi nó làm cho phần thanh chịu lực quay theo chiều kim đồng hồ và được xem là âm khi nó làm quay ngược chiều kim đồng hồ (giống SBVL), (hình 9.3).



Hình 9.2

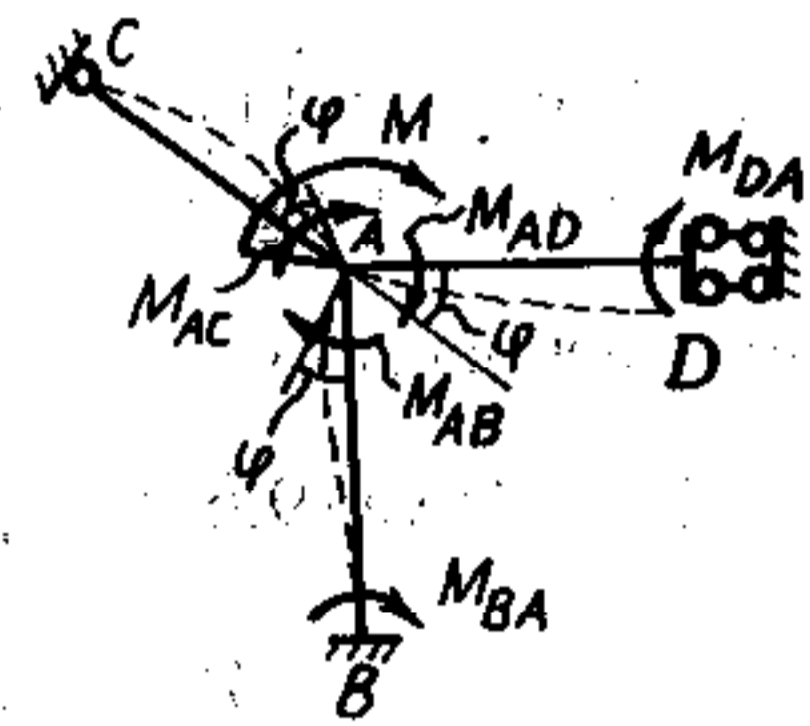


Hình 9.3

B. Sự phân phối mômen xung quanh một nút

Để chuẩn bị nghiên cứu phương pháp phân phối mômen, ta khảo sát bài toán cơ bản: sự phân phối mômen xung quanh một nút không có chuyển vị thẳng.

Xét hệ chỉ có một nút A không có chuyển vị thẳng như trên hình 9.4. Giả sử đặt tại nút A một mômen ngoại lực M , yêu cầu xác định các mômen uốn M_{AB}, M_{AC}, M_{AD} do mômen M phân phối vào các tiết diện ở đầu A trong mỗi thanh và xác định mômen uốn M_{BA}, M_{CA} và M_{DA} tại các đầu đối diện với nút A.



Hình 9.4

Tất nhiên, các mômen uốn M_{AB}, M_{AC}, M_{AD} phải cân bằng với mômen M ; ta có:

$$M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} + M = 0. \quad (9.1)$$

Dưới tác dụng của mômen M các đầu thanh tại nút A bị xoay. Căn cứ vào các số liệu tìm được trong bảng 6.2 chương 6, theo quy ước về dấu của Cross ta có:

♦ Với thanh AB có đầu đối diện B là ngàm:

$$\varphi_{AB} = -\frac{M_{AB}}{4 \frac{EI_{AB}}{l_{AB}}} = -\frac{M_{AB}}{4R_{AB}}, \quad (9.2)$$

trong đó R_{AB} – độ cứng đơn vị quy ước của thanh có đầu đối diện là ngàm,

$$R_{AB} = \frac{EI_{AB}}{l_{AB}}. \quad (9.3)$$

♦ Với thanh AC có đầu đối diện là khớp:

$$\varphi_{AC} = -\frac{M_{AC}}{3 \frac{EI_{AC}}{l_{AC}}} = -\frac{M_{AC}}{4 \frac{3EI_{AC}}{4l_{AC}}} = -\frac{M_{AC}}{4R_{AC}}, \quad (9.4)$$

trong đó R_{AC} – độ cứng đơn vị quy ước của thanh có đầu đối diện là khớp,

$$R_{AC} = \frac{3 EI_{AC}}{4 l_{AC}} \quad (9.5)$$

♦ Với thanh AD có đầu đối diện là ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song với trục thanh:

$$\varphi_{AD} = -\frac{M_{AD}}{EI_{AD}} = -\frac{M_{AD}}{4 \frac{1}{4} EI_{AD}} = -\frac{M_{AD}}{4 R_{AD}} = -\frac{M_{AC}}{4 R_{AC}} \quad (9.6)$$

trong đó R_{AD} – độ cứng đơn vị quy ước của thanh có đầu đối diện là ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song với trục thanh,

$$R_{AD} = \frac{1 EI_{AD}}{4 l_{AD}} \quad (9.7)$$

Sở dĩ mỗi loại thanh ta quy định một loại độ cứng đơn vị quy ước khác nhau là để có được sự liên hệ giữa góc xoay φ và mômen M thống nhất về hình thức.

Theo giả thiết nút A là nút cứng ta có: $\varphi_{AB} = \varphi_{AC} = \varphi_{AD} = \varphi$.

Thay (9.2), (9.4) và (9.6) vào điều kiện trên:

$$\varphi = -\frac{M_{AB}}{4 R_{AB}} = -\frac{M_{AC}}{4 R_{AC}} = -\frac{M_{AD}}{4 R_{AD}} \quad (9.8)$$

Theo tính chất của tỷ lệ thức đồng thời chú ý đến (9.1), ta có:

$$\varphi = -\frac{M_{AB} + M_{AC} + M_{AD}}{4(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD})} = -\frac{M}{4(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD})} \quad (9.9)$$

So sánh (9.9) với (9.8) ta suy ra:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= -\frac{R_{AB}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}} M; \\ M_{AC} &= -\frac{R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}} M; \\ M_{AD} &= -\frac{R_{AD}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}} M. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Như vậy, mômen M đặt tại nút A sẽ phân phối ảnh hưởng vào các đầu thanh quy tụ tại nút với những giá trị xác định theo (9.10). Ta gọi những mômen này là *mômen phân phối*.

Để xác định mômen tại các đầu thanh đối diện ta có thể vận dụng kết quả trong bảng 6.2. Áp dụng quy ước về dấu của Cross ta có:

$$M_{BA} = \frac{1}{2} M_{AB}; \quad M_{CA} = 0; \quad M_{DA} = -M_{AD}. \quad (9.11)$$

Ta gọi những mômen này là *mômen truyền*.

Trong trường hợp tổng quát, khi nút A gồm nhiều thanh quy tụ ta có thể suy rộng các công thức trên và được:

❖ *Mômen phân phối tại đầu A thuộc thanh AX có đầu đối diện X:*

$$M_{AX} = -\gamma_{AX} M. \quad (9.12)$$

❖ *Mômen truyền:*

$$M_{XA} = \beta_{XA} M_{AX}. \quad (9.13)$$

Trong đó:

β_{XA} – hệ số truyền của thanh AX;

γ_{AX} – hệ số phân phối của thanh AX:

$$\gamma_{AX} = \frac{R_{AX}}{\sum R}. \quad (9.14)$$

R_{AX} – độ cứng đơn vị quy ước của thanh AX;

$\sum R$ – tổng số độ cứng đơn vị quy ước của các thanh quy tụ tại nút.

Tùy theo điều kiện liên kết tại đầu thanh đối diện X, các độ cứng đơn vị quy ước R_{AX} và hệ số truyền β_{XA} sẽ có trị số khác nhau (xem bảng 9.1). Trong trường hợp đầu đối diện X là đầu tự do, ta dễ dàng nhận thấy các trị số này bằng không.

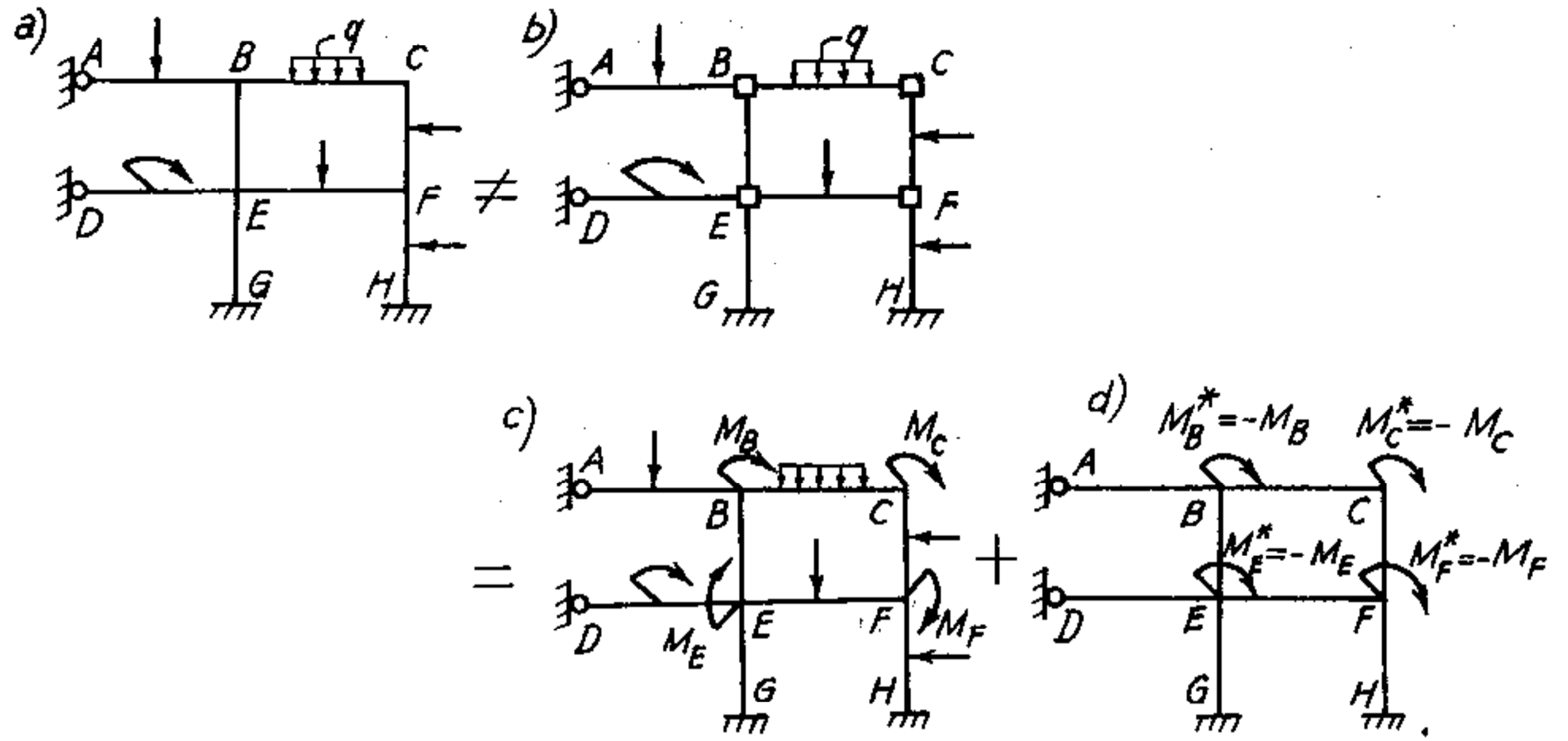
Bảng 9.1

| Liên kết tại đầu đối diện với nút | R_{AX} | β_{XA} |
|---|----------|--------------|
| Ngàm | EI/l | $1/2$ |
| Khớp | $3EI/4l$ | 0 |
| Ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song với trục thanh | $EI/4l$ | -1 |
| Tự do | 0 | 0 |

C. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng

Để trình bày được đơn giản ta sẽ lý luận với hệ cho trên hình 9.5a. Tuy nhiên, cách lập luận vẫn là tổng quát và áp dụng được cho hệ bất kỳ có nút không chuyển vị thẳng.

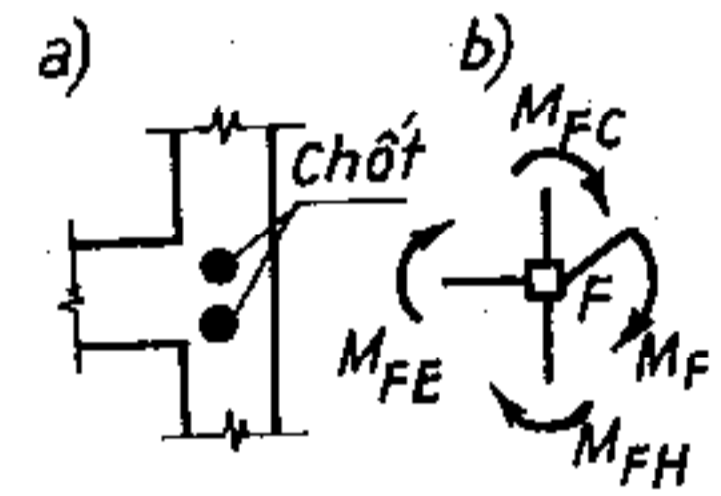
Trong phương pháp phân phối mômen ta chọn mômen uốn tại các đầu thanh làm các đại lượng cần tìm. Sau khi biết mômen uốn tại các đầu thanh, ta dễ dàng suy ra nội lực tại tiết diện bất kỳ ở bên trong thanh.



Hình 9.5

Giả sử ngăn cản chuyển vị xoay của các nút bằng cách đặt vào mỗi nút hai chốt (hình 9.6a). Hình 9.6b biểu diễn nút F trong trường hợp bị chốt.

Lúc này các đầu thanh quy tụ ở nút có thể coi như bị ngàm (không xoay được) và ta có thể dễ dàng tìm được mômen uốn tại các đầu thanh theo bảng 6.1, chương 6. Thật vậy, sau khi đã đặt chốt vào các nút thì trong hệ chỉ bao gồm những phần tử mẫu là những thanh có dạng liên kết và chịu tải trọng đã được nghiên cứu (giống như hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị).



Hình 9.6

Tất nhiên, những mômen vừa thu được không phải là mômen cần tìm đối với hệ ban đầu. Hình 9.5a và hình 9.5b biểu thị sơ đồ của hệ thực và hệ có nút bị chốt, nội lực trong hai hệ này khác nhau.

Lúc này trong các nút bị chốt sẽ phát sinh những phản lực mômen (tương tự như các R_{kp} trong phương pháp chuyển vị) gọi là *ngẫu lực chèn*. Ngẫu lực chèn phải cân bằng với các mômen uốn tại đầu của những thanh quy tụ vào nút đó do tải trọng tác dụng trên hệ có nút bị chốt gây ra. Chẳng hạn với nút F trên hệ 9.5b vẽ riêng trên hình 9.6b, ta có:

$$M_F + M_{FH} + M_{FC} + M_{FE} = 0.$$

Do đó:

$$M_F = -(M_{FC} + M_{FE} + M_{FH}).$$

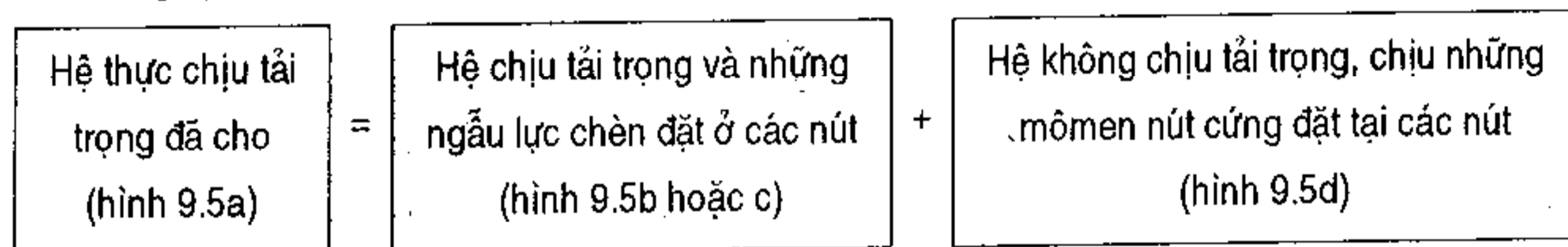
Như vậy, ngẫu lực chèn tại một nút nào đó bằng tổng đại số các mômen uốn tại đầu các thanh quy tụ tại nút đang xét do tải trọng gây ra trên hệ có nút bị chốt nhưng đối dấu.

Nếu thay các chốt của hệ ở hình 9.5b bằng những ngẫu lực chèn vừa tìm được ta sẽ được hệ có nút không bị chốt tương đương như trên hình 9.5c. Tất nhiên nội lực trong hệ trên hình 9.5c cũng khác với nội lực trong hệ trên hình 9.5a.

Bây giờ ta xét hệ phụ (hình 9.5d) chỉ chịu những ngẫu lực đặt tại nút có giá trị bằng ngẫu lực chèn nhưng ngược chiều. Ký hiệu những ngẫu lực này là $M^*_B = -M_B$; $M^*_C = -M_C$... và gọi chúng là những mômen nút cứng. Gọi như vậy là vì giá trị của những mômen này là tổng đại số các mômen uốn ở đầu những thanh quy tụ tại nút đang xét do tải trọng gây ra trong hệ có tất cả các nút bị chốt cứng. Ví dụ:

$$M^*_F = -M_F = M_{FC} + M_{FE} + M_{FH}.$$

Theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có:



Như vậy, muốn tìm nội lực trong hệ trên hình 9.5a ta phải tìm nội lực trong hai hệ trên hình 9.5c và 9.5d.

Đối với hệ trên hình 9.5c ta dễ dàng tìm ngay được nội lực bằng cách sử dụng các số liệu trong bảng 6.1, chương 6, bởi vì hệ này tương đương với hệ trên hình 9.5b là hệ gồm những phần tử mẫu đã được nghiên cứu (biểu đồ mômen uốn trong hệ chính là biểu đồ M^o_p trong phương pháp chuyển vị).

Vấn đề mới cần phải giải quyết là tính hệ 9.5d chỉ chịu các mômen nút cứng. Ta sẽ tính hệ này theo phương pháp đúng dần.

Trước tiên giả thiết tất cả các nút của hệ đều bị chốt. Nhưng vấn đề cần giải quyết là phải tính hệ với các nút được tự do. Vậy muốn đi từ trạng thái đầu (các nút bị chốt) đến trạng thái cuối cùng (các nút được tự do) chúng ta phải trải qua quá trình tính toán như thế nào?

Nếu tháo chốt tại tất cả các nút cùng một lúc thì sẽ không giải được bài toán vì không có sẵn kết quả mẫu. Bởi vậy ta cần phải lần lượt tháo chốt ở từng nút. Giả sử tháo chốt ở nút B còn các nút khác vẫn chốt cứng, lúc này bộ phận BACE của hệ sẽ có dạng giống như bài toán mẫu đã xét ở điểm 9.1B, vì bộ phận đó chỉ có một nút B tự do còn các đầu thanh đối diện đều là ngàm hoặc khớp. Áp dụng kết

quả mẫu ở điểm 9.1B ta xác định được các mômen phân phối và mômen truyền do mômen nút cứng M^*_B gây ra.

Sau khi tháo chốt ở nút B , nút này sẽ xoay đến vị trí cân bằng mới, ta lại chốt nút B ở vị trí cân bằng mới, tiếp đó chuyển sang nút khác và cũng thực hiện như ở nút B . Trong quá trình tháo chốt nhiều lần ở tất cả các nút, góc xoay sẽ giảm dần dần. Tất nhiên, cần thực hiện nhiều lần như vậy cho đến khi những góc xoay này trở thành không đáng kể, nghĩa là khi tháo tất cả các chốt thì tất cả các nút không xoay nữa và trạng thái này là trạng thái cuối cùng cân tìm.

Để nắm được tiến trình phân phối mômen ta xét trường hợp hệ trên hình 9.5d.

Đầu tiên, tháo chốt ở nút B (hình 9.7a), dưới tác dụng của mômen nút cứng M^*_B , nút B xoay tới vị trí cân bằng mới. Áp dụng các công thức (9.12), (9.13) ta được:

Mômen phân phối

$$M_{BA} = -\gamma_{BA} M^*_B;$$

$$M_{BC} = -\gamma_{BC} M^*_B;$$

$$M_{BE} = -\gamma_{BE} M^*_B;$$

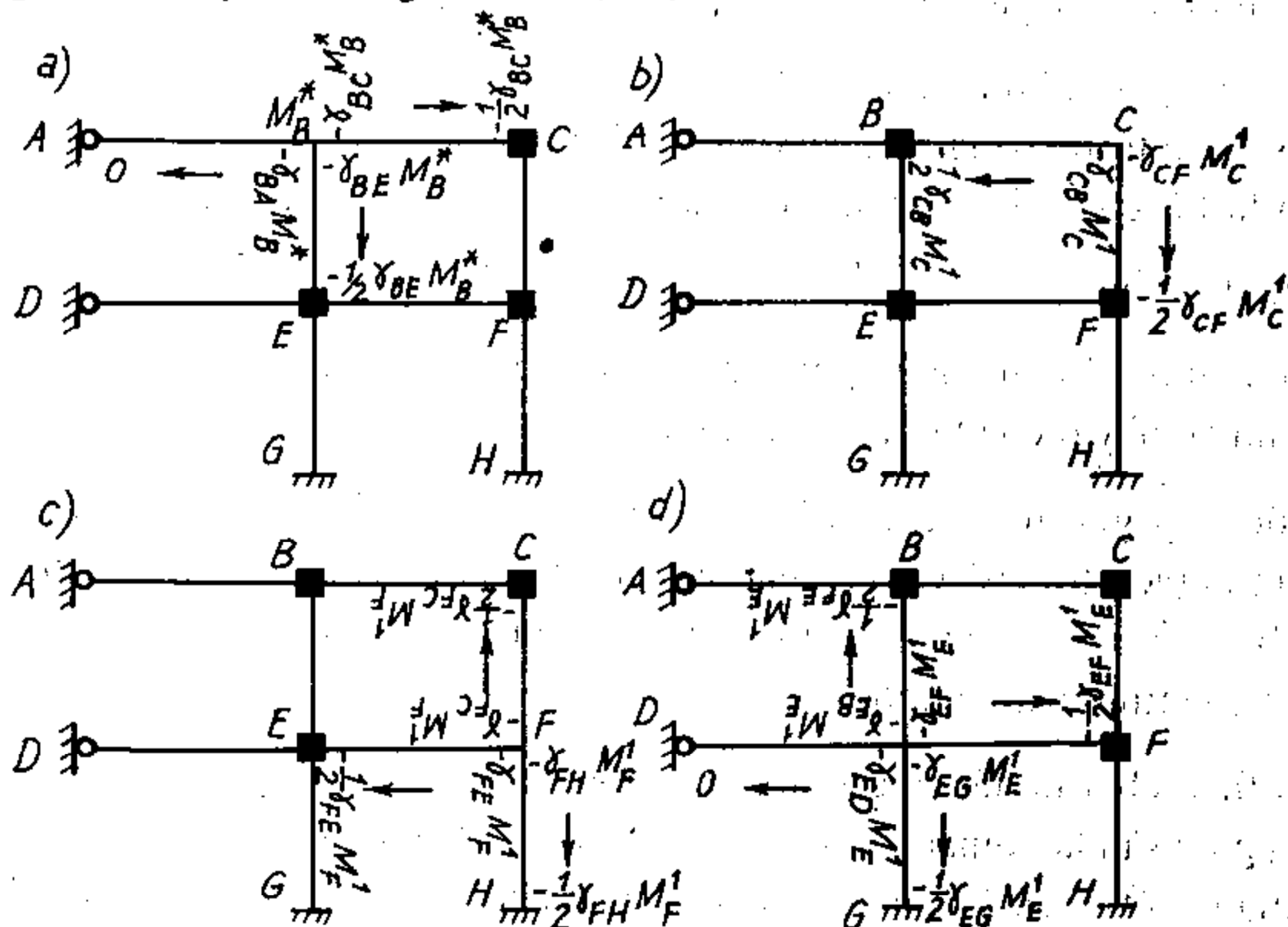
Mômen truyền

$$M_{AB} = \beta_{AB} M_{BA} = 0;$$

$$M_{CB} = \beta_{CB} M_{BC} = -\frac{1}{2} \gamma_{BC} M^*_B;$$

$$M_{EB} = \beta_{EB} M_{BE} = -\frac{1}{2} \gamma_{BE} M^*_B;$$

Tất nhiên những mômen vừa tìm được tại các đầu thanh chưa phải là kết quả cuối cùng, vì lúc này chỉ riêng nút B được tự do còn các nút khác vẫn bị chốt.



Hình 9.7

Ta chốt nút B ở vị trí cân bằng mới, chuyển sang tháo chốt ở nút lân cận, chẳng hạn nút C (hình 9.7b). Bây giờ tại C có hai mômen tác dụng: mômen nút cứng M^*_C sẵn có từ trước và mômen truyền M_{CB} vừa tích lũy thêm trong quá trình mở chốt ở nút B . Gọi M_C^I là mômen tổng cộng tại nút C trong lần phân phối thứ nhất:

$$M_C^I = M^*_C + M_{CB}.$$

Dưới tác dụng của M_C^I nút C xoay tới vị trí cân bằng mới. Áp dụng các công thức (9.12), (9.13) ta có:

Mômen phân phối

Mômen truyền

$$M_{CB} = -\gamma_{CB} M_C^I;$$

$$M_{BC} = \beta_{CB} M_{CB} = -\frac{I}{2} \gamma_{BC} M_C^I;$$

$$M_{CF} = -\gamma_{CF} M_C^I;$$

$$M_{CF} = \beta_{CF} M_{CF} = -\frac{I}{2} \gamma_{CF} M_C^I;$$

Lại chốt nút C ở vị trí cân bằng mới và chuyển sang tháo chốt ở nút F . Lúc này, mômen tổng cộng M_F^I tại nút F trong lần phân phối thứ nhất bằng:

$$M_F^I = M^*_F + M_{FC}.$$

trong đó M^*_F là mômen nút cứng sẵn có còn M_{FC} là mômen mới tích lũy thêm tại nút F trong quá trình mở chốt tại nút C (mômen truyền từ nút C).

Dưới tác dụng của M_F^I nút F xoay tới vị trí cân bằng mới. Kết quả tính các mômen phân phối và mômen truyền ghi trên hình 9.7c.

Chốt nút F ở vị trí cân bằng mới và chuyển sang tháo chốt ở nút E . Lúc này, tại E , ngoài mômen nút cứng M^*_E sẵn có còn có mômen truyền từ nút B và nút F tới trong quá trình mở chốt ở nút B và nút F . Gọi M_E^I là mômen tổng cộng tại E trong lần phân phối thứ nhất. Dưới tác dụng của M_E^I nút E bị xoay tới vị trí cân bằng mới. Áp dụng (9.12) và (9.13) ta sẽ xác định được các mômen phân phối và mômen truyền (hình 9.7d).

Tiếp đó chốt nút E lại ở vị trí cân bằng mới.

Sau khi đã tháo và chốt tất cả các nút một lượt, ta thấy tại các đầu thanh, mômen được tích lũy dần dần. Chẳng hạn như ở đầu B thuộc thanh BE , tới giai đoạn này gồm có mômen phân phối khi tháo chốt ở nút B (hình 9.7a) và các mômen truyền từ nút C , nút E tới trong khi tháo chốt ở nút C và nút E (hình 9.7b và d).

Những mômen đó chưa phải là mômen cần tìm bởi vì ở trạng thái này tất cả các nút (trừ nút E vừa được tháo chốt) vẫn chưa được cân bằng nếu ta tháo tất cả các chốt ra. Thật vậy, chẳng hạn ở nút B , lúc này còn chịu hai mômen truyền từ nút C và nút E tới khi nút B còn bị chốt nên hai mômen này sẽ làm cho nút không cân bằng nếu ta tháo chốt.

Muốn cho các nút tiến tới cân bằng ta lại phải tiếp tục phân phối các mômen không cân bằng tích lũy trong quá trình trước. Lần phân phối thứ hai này gọi là *chu trình thứ hai*. Chu trình thứ hai cũng thực hiện như chu trình thứ nhất nhưng lúc này cân chú ý là mômen cần phân phối tại một nút nào đó, chẳng hạn nút B là $M_B^{(2)}$ chỉ gồm các mômen truyền từ các nút lân cận tới chứ không bao gồm các mômen phân phối hay mômen nút cứng M_B vì những mômen này đã được phân phối từ chu trình thứ nhất.

Sau khi thực hiện chu trình thứ hai, nói chung ở các nút vẫn còn tồn tại mômen làm cho nút không cân bằng nhưng những mômen ở cuối chu trình thứ hai sẽ nhỏ hơn những mômen ở cuối chu trình thứ nhất. Thật vậy, mỗi lần phân phối mômen tại một nút ta đã nhân với một hệ số γ nhỏ hơn 1 và mỗi lần truyền mômen ta lại nhân với hệ số β nhỏ hơn 1 do đó mômen làm cho nút không cân bằng sẽ giảm xuống khá nhanh.

Cứ tiến hành tương tự như vậy đối với chu trình thứ ba và thứ tư v.v... cho tới khi nào các mômen làm cho nút không cân bằng trở thành không đáng kể nữa thì kết thúc.

Tất nhiên, mômen uốn tại các đầu thanh của hệ trên hình 9.5d chính là tổng đại số mômen phân phối và mômen truyền tích lũy dần trong các chu trình.

Muốn tìm mômen uốn tại các đầu thanh của hệ cho ban đầu ta chỉ cần lấy tổng đại số mômen nút cứng M^* , mômen phân phối và mômen truyền tích lũy dần trong các chu trình.

Rõ ràng là càng thực hiện nhiều chu trình bao nhiêu thì độ chính xác càng tăng bấy nhiêu.

Ta sẽ tìm hiểu thứ tự thực hiện thông qua ví dụ cụ thể.

Ví dụ 9.1. Vẽ biểu đồ mômen uốn cho hệ trên hình 9.8a.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh theo bảng 9.1:

$$R_{AB} = R_{CD} = EI/4 = 0,25EI; \quad R_{BC} = R_{CE} = E \cdot 2I/4 = 0,50EI; \quad R_{BF} = 0.$$

2. Xác định hệ số phân phối cho từng đầu thanh quy tụ vào các nút theo (9.14) và kiểm tra các hệ số phân phối theo điều kiện: tổng các hệ số phân phối xung quanh một nút phải bằng đơn vị.

• Tại nút B : $\gamma_{BA} = 0,25EI / (0,25EI + 0,50EI) = 0,333;$

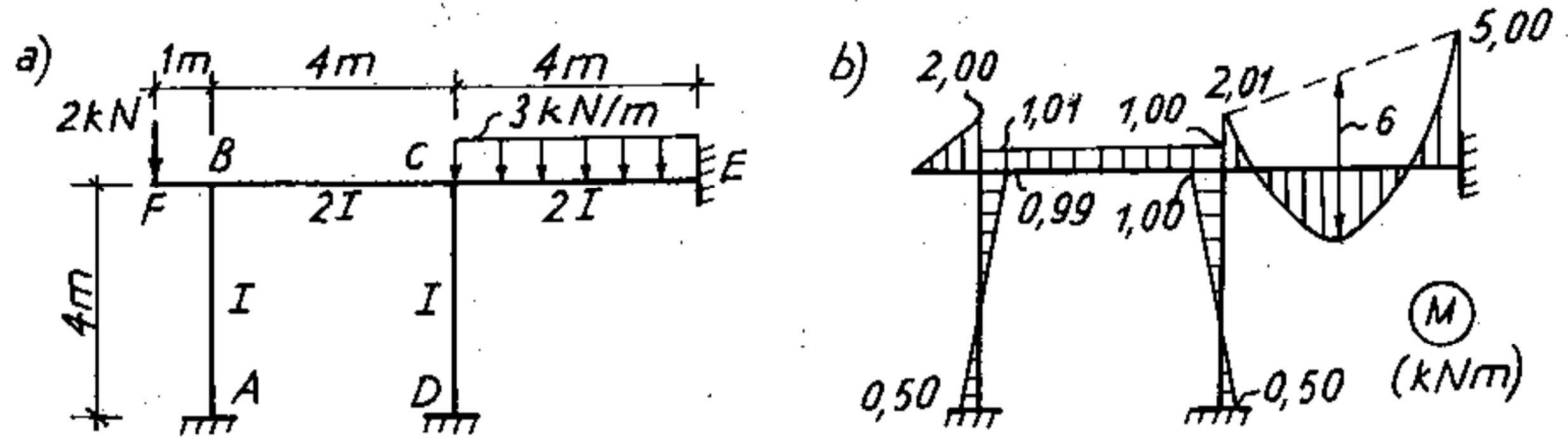
$$\gamma_{BC} = 0,50EI / (0,25EI + 0,50EI) = 0,667.$$

$$\text{Kiểm tra: } 0,333 + 0,667 = 1,000.$$

• Tại nút C : $\gamma_{CB} = \gamma_{CE} = 0,50EI / (0,50EI + 0,50EI + 0,25EI) = 0,400;$

$$\gamma_{CD} = 0,25EI / (0,50EI + 0,50EI + 0,25EI) = 0,200.$$

$$\text{Kiểm tra: } 0,400 + 0,400 + 0,200 = 1,000.$$



Hình 9.8

3. Xác định các mômen nút cứng M^* tại các đầu thanh do tải trọng gây ra (sử dụng bảng 6.1 với chú ý áp dụng quy ước về dấu của phương pháp Cross). Trong trường hợp này, ta có:

$$M^*_{CE} = -M^*_{EC} = ql^2/12 = 3.4^2/12 = 4 \text{ kNm}; \quad M^*_{BF} = -2 \text{ kNm}.$$

Trên các thanh khác không có tải trọng nên không có mômen nút cứng.

4. Phân phối và truyền mômen. Quá trình phân phối và truyền mômen được thực hiện trên bảng tính (bảng 9.2). Cách lập bảng như sau:

- ❖ Hàng thứ nhất ghi ký hiệu các nút và các đầu thanh có liên kết ngàm, ngàm trượt (đối với đầu thanh có khớp không cần ghi vì mômen uốn tại đó luôn luôn bằng không).
- ❖ Hàng thứ hai ghi ký hiệu những đầu thanh quy tụ tại các nút tương ứng. Nút nào có bao nhiêu thanh quy tụ thì có bấy nhiêu cột.
- ❖ Hàng thứ ba ghi các hệ số phân phối tương ứng với các đầu thanh quy tụ vào nút (theo kết quả tính ở bước thứ hai). Dưới hàng thứ ba, kẻ đường hai nét để sau này khi cộng các mômen uốn khởi đầu với các hệ số phân phối.
- ❖ Hàng thứ tư ghi giá trị mômen nút cứng M^* tại các đầu thanh (theo kết quả tính ở bước 3).
- ❖ Từ hàng thứ năm về phía dưới ghi kết quả phân phối và truyền mômen lần lượt tương ứng với các nút được tháo chốt. Trên cột thứ nhất của mỗi hàng này ghi ký hiệu nút được tháo chốt.

Đối với bài toán đang xét, quá trình thực hiện như sau:

◆ *Chu trình 1:*

- Bắt đầu tháo chốt tại nút C. Mômen không cân bằng $M^*_C = 4,000 \text{ kNm}$.

Vận dụng các công thức (9.12) và (9.13) ta có:

Mômen phân phối

Mômen truyền

$M_{CB} = -0,4.4 = -1,60 \text{ kNm};$

$M_{BC} = (1/2)(-1,60) = -0,80 \text{ kNm};$

$M_{CE} = -0,4.4 = -1,60 \text{ kNm};$

$M_{EC} = (1/2)(-1,60) = -0,80 \text{ kNm};$

$M_{CD} = -0,2.4 = -0,80 \text{ kNm};$

$M_{DC} = (1/2)(-0,80) = -0,40 \text{ kNm}.$

Kiểm tra theo điều kiện tổng các mômen phân phối bằng mômen nút cứng nhưng trái dấu: $-1,60 -1,60 -0,80 = -4,00 \text{ kNm}.$

Ghi các số liệu vào hàng thứ 5 trên bảng 9.2.

Bảng 9.2

| Nút, ngàm | A | B | | | C | | | D | E |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Đầu | AB | BF | BA | BC | CB | CE | CD | DC | EC |
| γ | | 0,000 | 0,333 | 0,667 | 0,400 | 0,400 | 0,200 | | |
| M^* | | -2,00 | | | | +4,00 | | | -4,00 |
| C | | | | -0,80 | -1,60 | -1,60 | -0,80 | -0,40 | -0,80 |
| B | +0,47 | 0,00 | +0,93 | +1,87 | +0,93 | | | | |
| C | | | | -0,19 | -0,37 | -0,37 | -0,19 | -0,09 | -0,19 |
| B | +0,03 | 0,00 | +0,06 | +0,13 | +0,06 | | | | |
| C | | | | -0,01 | -0,02 | -0,02 | -0,01 | -0,01 | -0,01 |
| B | | 0,00 | 0,00 | +0,01 | | | | | |
| | +0,50 | -2,00 | +0,99 | +1,01 | -1,00 | +2,01 | -1,00 | -0,50 | -5,00 |

- Chốt nút C và chuyển sang tháo chốt tại nút B.

Mômen không cân bằng: $M^*_B = -2,00 -0,80 = -2,80 \text{ kNm}.$

Áp dụng công thức (9.12) và (9.13), ta được:

Mômen phân phối

Mômen truyền

$M_{BA} = -0,333(-2,80) = +0,93 \text{ kNm};$

$M_{AB} = (1/2) 0,93 = +0,47 \text{ kNm};$

$M_{BC} = -0,667(-2,80) = +1,87 \text{ kNm};$

$M_{CB} = (1/2) 1,87 = +0,93 \text{ kNm}.$

Ghi kết quả vào hàng 6 trên bảng 9.2.

Như đã biết, khi tháo chốt ở các nút trong chu trình thứ i nào đó thì nguyên nhân làm cho nút không cân bằng là các mômen truyền từ các nút khác tới trong chu trình thứ $(i-1)$ chứ không phải mômen phân phối. Bởi vậy, trong lần phân phối thuộc chu trình thứ i thì những mômen đã phân phối ở chu trình thứ $(i-1)$ trở về trước sẽ không tham gia. Để tránh nhầm lẫn ta gạch dưới những giá trị mômen phân phối. Điều đó có nghĩa là trong chu trình phân phối thứ i ta không xét đến những mômen ở phía trên kể từ giá trị gạch dưới.

◆ *Chu trình 2:*

- Chốt nút B và tháo chốt ở nút C

Mômen không cân bằng tại C là $M_C^{(2)} = + 0,93$ kNm. Ta có:

Mômen phân phối

Mômen truyền

$$M_{CB} = -0,4.0,93 = -0,37 \text{ kNm};$$

$$M_{BC} = (1/2)(-0,37) = -0,19 \text{ kNm};$$

$$M_{CE} = -0,4.0,93 = -0,37 \text{ kNm};$$

$$M_{EC} = (1/2)(-0,37) = -0,19 \text{ kNm};$$

$$M_{CD} = -0,2.0,93 = -0,19 \text{ kNm};$$

$$M_{DC} = (1/2)(-0,19) = -0,09 \text{ kNm}.$$

- Chốt nút C và tháo chốt ở nút B .

Mômen không cân bằng $M_B^{(2)} = - 0,19$ kNm.

Mômen phân phối

Mômen truyền

$$M_{BA} = -0,333(-0,19) = +0,06 \text{ kNm};$$

$$M_{AB} = (1/2) 0,06 = + 0,03 \text{ kNm};$$

$$M_{BC} = -0,667(-0,19) = +0,13 \text{ kNm};$$

$$M_{CB} = (1/2) 0,13 = +0,06 \text{ kNm}.$$

◆ *Chu trình 3:*

- Chốt nút B và tháo chốt ở nút C

Mômen không cân bằng tại C là $M_C^{(3)} = + 0,06$ kNm.

Mômen phân phối

Mômen truyền

$$M_{CB} = -0,4.0,06 = -0,024 \text{ kNm};$$

$$M_{BC} = (1/2)(- 0,024) = -0,01 \text{ kNm};$$

$$M_{CE} = -0,4. 0,06 = -0,024 \text{ kNm};$$

$$M_{EC} = (1/2)(- 0,024) = - 0,01 \text{ kNm};$$

$$M_{CD} = -0,2. 0,06 = -0,012 \text{ kNm};$$

$$M_{DC} = (1/2)(- 0,012) = -0,01 \text{ kNm}.$$

- Chốt nút C và tháo chốt ở nút B .

Mômen không cân bằng $M_B^{(3)} = - 0,01$ kNm.

Mômen phân phối:

$$M_{BA} = -0,333(-0,01) = 0,00;$$

$$M_{BC} = -0,667(-0,01) = 0,01 \text{ kNm}.$$

Các mômen phân phối đã khá nhỏ, nếu tiếp tục truyền đi nữa thì mômen truyền lớn nhất chỉ bằng $0,004$ kNm nên có thể bỏ qua được và dừng lại ở đây. Cộng đại số tất cả các mômen trong mỗi cột trên bảng 9.2 (kể từ hàng thứ tư trở xuống) ta sẽ được mômen uốn tại các đầu thanh. Thật vậy, từ hình 9.5 ta thấy: mômen uốn trong hệ cho ban đầu (hình 9.5a) bằng mômen uốn trong hệ chịu tải trọng nhưng có các nút bị chốt (hình 9.5b hoặc 9.5c) ghi ở hàng thứ tư trên bảng 9.2, cộng với mômen uốn trong hệ chịu các mômen nút cứng đặt tại nút (hình 9.5d) là tổng các giá trị ghi từ hàng thứ năm trở xuống trên bảng 9.2.

5. *Vẽ biểu đồ nội lực.* Sau khi biết mômen uốn tại các đầu thanh ta vẽ được các biểu đồ nội lực theo quy cách đã quen biết trong các chương 5 và 6 song cần

lưu ý là quy ước về dấu của mômen uốn trong phương pháp này có khác trước. Kết quả vẽ biểu đồ mômen uốn cho trường hợp này như trên hình 9.8b.

6. Kiểm tra cân bằng nút. Nút B: $-2,00 + 0,99 + 1,01 = 0$ (cân bằng).
 Nút C: $-1,00 + 2,01 - 1,00 = 0,01 \approx 0$.

Thực ra tại nút C vẫn chưa cân bằng mà còn phải nhận thêm một mômen không cân bằng là $0,004$ kNm truyền từ nút B tới. Như vậy sai số tương đối lớn nhất so với mômen uốn bé nhất tại nút C là $\frac{0,004}{1,00} \times 100 = 0,4\%$.

Chú thích:

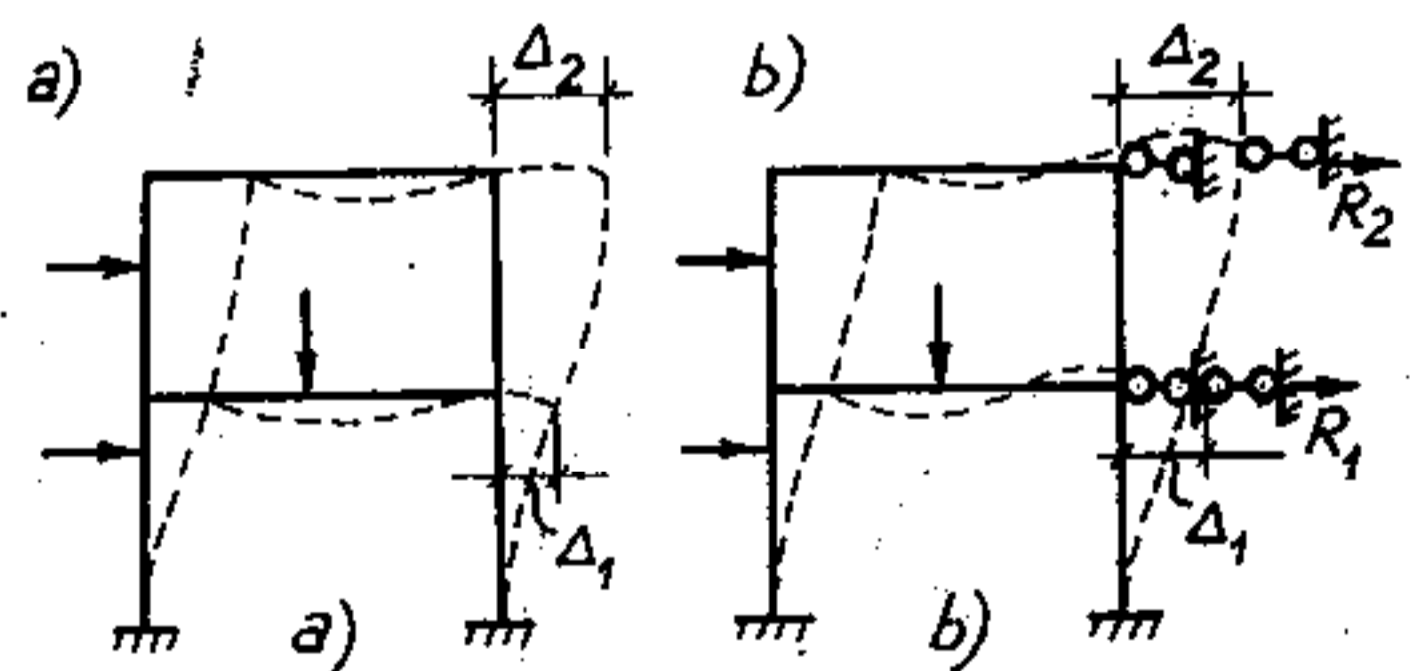
- * Có thể bắt đầu tháo chốt ở nút nào trước cũng được. Tuy nhiên, nên chọn nút nào có mômen không cân bằng M' lớn nhất làm nút khởi điểm thì quá trình phân phối sẽ tắt nhanh hơn. Thứ tự tháo chốt tại các nút trong mỗi chu trình có thể chọn bất kỳ.
- * Cách tính hệ chịu tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ hay chuyển vị cưỡng bức của các liên kết, cũng tương tự như cách tính với tải trọng trình bày ở trên. Các bước tính không có gì thay đổi. Riêng ở bước thứ ba, khi xác định các mômen nút cứng M' ta cần thực hiện giống như khi tìm biểu đồ (M^0_H) đã trình bày trong mục 6.4 chương 6.

D. Cách tính hệ có nút chuyển vị thẳng

Nội dung cách tính hệ có nút chuyển vị thẳng là thay thế việc tính hệ có n chuyển vị thẳng độc lập bằng cách tính $n+1$ hệ có nút không chuyển vị thẳng.

Để trình bày được đơn giản ta lập luận với hệ trên hình 9.9. Tuy nhiên, lý luận vẫn mang tính tổng quát và áp dụng được cho hệ bất kỳ.

Các nút của hệ 9.9a có hai chuyển vị thẳng độc lập. Dưới tác dụng của tải trọng, hệ biến dạng theo đường đứt nét. Các nút thuộc tầng dưới chuyển vị ngang Δ_1 , các nút thuộc tầng hai chuyển vị ngang Δ_2 .



Hình 9.9

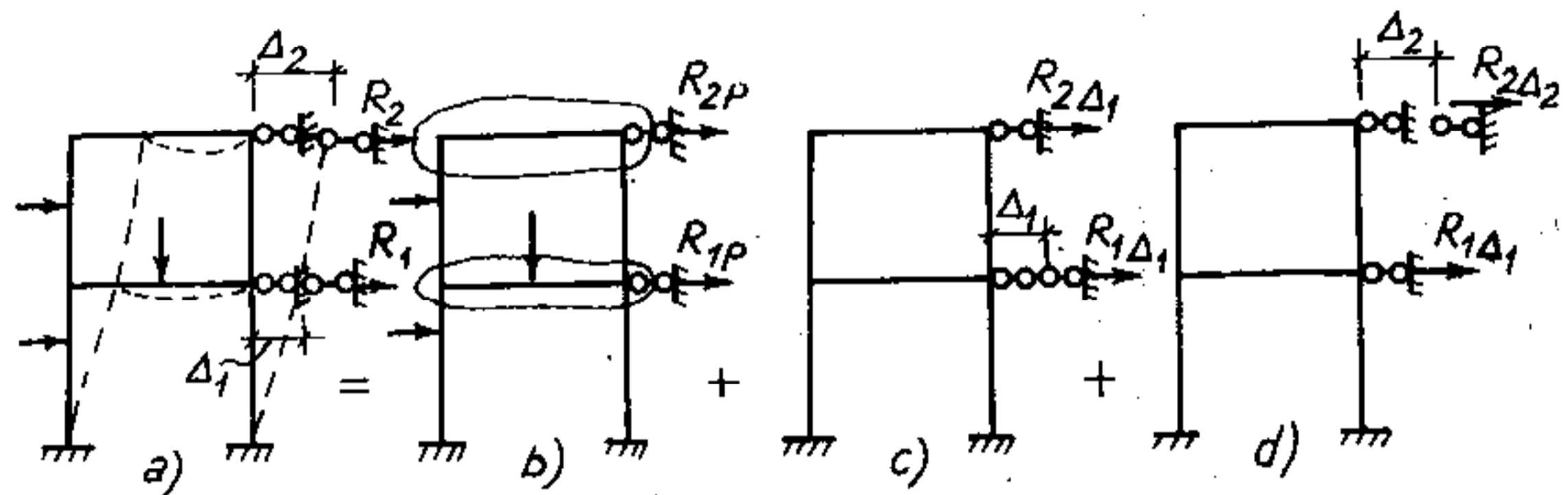
Để đưa hệ này về hệ có nút không chuyển vị thẳng ta cần đặt thêm hai liên kết loại một như trên hình 9.9b. Tất nhiên lúc này cách làm việc của hệ 9.9b và 9.9a sẽ khác nhau. Muốn cho hai hệ làm việc giống nhau ta cần phải gây ra các chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang tại các liên kết mới đặt thêm vào với giá trị vừa đúng bằng Δ_1 và Δ_2 . Nói khác đi, ta phải cho những liên kết này

chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang để sao cho phản lực trong những liên kết này bằng không, vì trên hệ 9.9a không tồn tại những liên kết đó tức là không tồn tại phản lực. Ta có điều kiện:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 0. \quad (9.15)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta thấy phản lực và nội lực trong hệ 9.9b (vẽ lại trên hình 9.10a) bằng tổng các phản lực và nội lực trong ba hệ:

- ◆ Hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng (hình 9.10b).
- ◆ Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng, nhưng liên kết đặt thêm vào tại tầng một chịu chuyển vị cưỡng bức bằng Δ_1 (hình 9.10c).
- ◆ Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng, nhưng liên kết đặt thêm vào tại tầng hai chịu chuyển vị cưỡng bức bằng Δ_2 (hình 9.10d).



Hình 9.10

Các điều kiện (9.15) có dạng:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{1(P, \Delta_1, \Delta_2)} = R_{1P} + R_{1\Delta_1} + R_{1\Delta_2} = 0; \\ R_2 &= R_{2(P, \Delta_1, \Delta_2)} = R_{2P} + R_{2\Delta_1} + R_{2\Delta_2} = 0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Biểu đồ mômen uốn trong hệ 9.9b hay 9.10a là tổng các biểu đồ sau:

$$(M) = (M_P) + (M_{\Delta_1}) + (M_{\Delta_2}). \quad (9.17)$$

Trong (9.16) và (9.17):

R_{kP} – phản lực tại liên kết đặt thêm vào thứ k do tải trọng gây ra trong hệ có nút không chuyển vị thẳng;

(M_P) – biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ có nút không chuyển vị thẳng;

$R_{k\Delta_m}$ – phản lực tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m có giá trị bằng Δ_m gây ra.

(M_{Δ_m}) – biểu đồ mômen uốn trong hệ có nút không chuyển vị thẳng do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m có giá trị bằng Δ_m gây ra.

Nhưng các chuyển vị Δ_m chưa biết nên để cho tiện lợi trong tính toán ta biểu thị:

$$\Delta_m = k_m \delta_m, \quad (9.18)$$

trong đó δ_m là chuyển vị tại liên kết m có giá trị chọn tùy ý (có thể chọn bằng đơn vị hay khác đơn vị) còn k_m là một hệ số chưa biết, giữ vai trò ẩn số.

Đồng thời, nếu gọi:

r_{km} – phản lực tại liên kết k do riêng chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m có giá trị bằng δ_m gây ra;

(\bar{M}_m) – biểu đồ mômen uốn trong hệ có nút không chuyển vị thẳng do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m có giá trị bằng δ_m gây ra,

thì theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$R_{k\Delta_m} = r_{km} k_m, \quad (9.19)$$

$$(M_{\Delta_m}) = (\bar{M}_m) k_m. \quad (9.20)$$

Thay (9.19) vào (9.16) và (9.20) vào (9.17) ta được:

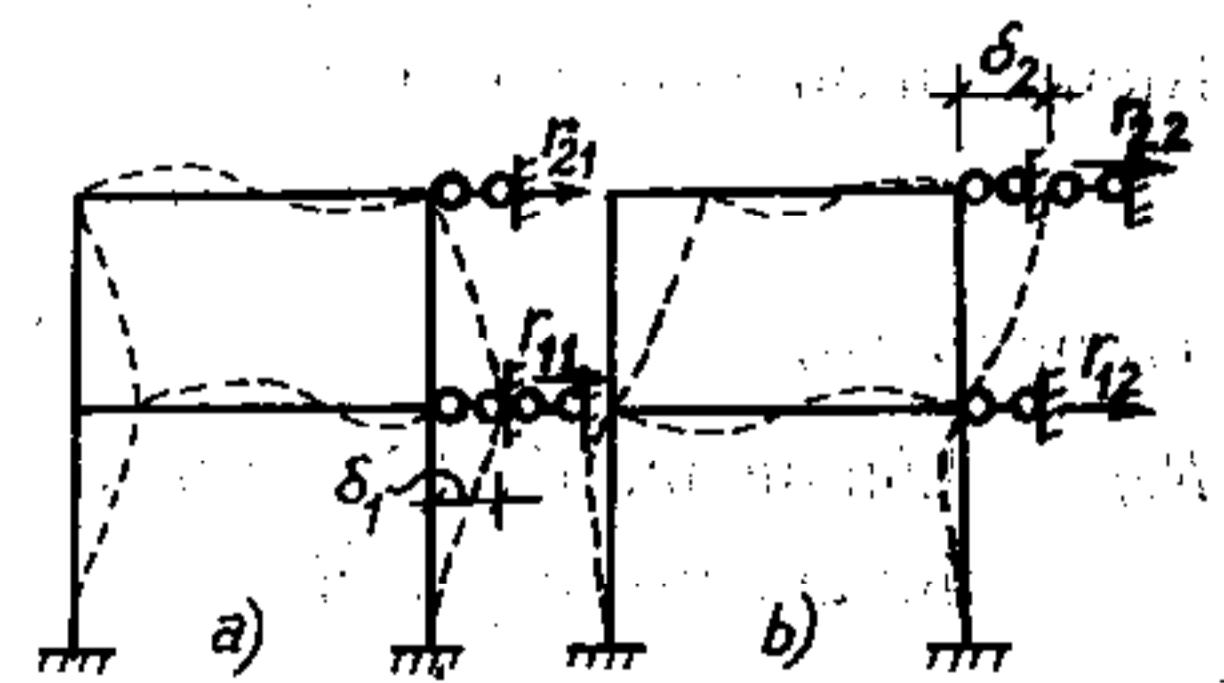
$$\begin{aligned} \blacklozenge \text{ Hệ phương trình: } & R_{1P} + r_{11} k_1 + r_{12} k_2 = 0; \\ & R_{2P} + r_{21} k_1 + r_{22} k_2 = 0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

$$\blacklozenge \text{ Biểu đồ mômen uốn: } (M) = (M_P) + k_1(\bar{M}_1) + k_2(\bar{M}_2). \quad (9.22)$$

Qua biểu thức (9.22) ta thấy biểu đồ mômen uốn (hay giá trị mômen uốn) trong hệ cho ban đầu bằng tổng các biểu đồ (hay các giá trị):

◇ Biểu đồ (hay giá trị) mômen uốn trong hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng đã cho. Cách tính hệ này ta đã nghiên cứu ở điểm 9.1.C.

◇ Biểu đồ (hay giá trị) mômen uốn (\bar{M}_1) nhân với hệ số k_1 . Cách tìm (\bar{M}_1) được thực hiện như ở điểm 9.1.C, trong hệ có nút không chuyển vị thẳng do liên kết tựa thuộc tầng một chuyển vị cưỡng bức với giá trị tùy ý δ_1 gây ra (hình 9.11a).



Hình 9.11

◇ Biểu đồ (hay giá trị) mômen uốn (\bar{M}_2) nhân với hệ số k_2 . Cách tìm (\bar{M}_2) được thực hiện như ở điểm 9.1.C, trong hệ có nút không chuyển vị thẳng do liên kết tựa thuộc tầng hai chuyển vị cưỡng bức với giá trị tùy ý δ_2 gây ra (hình 9.11b).

Như vậy, vấn đề còn phải giải quyết là tìm các hệ số k_1 và k_2 . Các hệ số này là

nghiệm của hệ phương trình (9.21). Sau khi tính các hệ 9.10b, 9.11a và 9.11b, thực hiện các mặt cắt ta sẽ tìm được r_{km} và R_{kP} là những hệ số và số hạng tự do của (9.21). Giải hệ phương trình (9.21) ta sẽ xác định được k_1, k_2 .

Trong trường hợp tổng quát, các nút của hệ có n chuyển vị thẳng độc lập thì các biểu thức (9.21) và (9.22) có dạng:

$$R_{iP} + r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \dots + r_{ii}k_i + \dots + r_{in}k_n = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.23)$$

$$(M) = (M_P) + k_1(\bar{M}_1) + k_2(\bar{M}_2) + \dots + k_i(\bar{M}_i) + \dots + k_n(\bar{M}_n). \quad (9.24)$$

Chú thích:

- * Trường hợp hệ cho ban đầu có các thanh đứng không song song hoặc chịu tác dụng của sự biến thiên nhiệt độ, chuyển vị của các gối tựa, nguyên tắc tính toán vẫn không có gì thay đổi, song cần chú ý là khi xác định mômen nút cứng tại các đầu thanh ta cần thực hiện những yêu cầu tương tự như khi vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị (xem các mục 6.3, 6.4 trong chương 6).
- * Nếu cho $\delta_k = \delta_m$ thì $r_{km} = r_{mk}$.
- * Ngoài cách tính vừa trình bày trên, bạn đọc có thể tìm hiểu thêm cách tính khác không đòi hỏi phải giải hệ phương trình đại số (xem [1], [10]).

Ta sẽ tìm hiểu thứ tự thực hiện thông qua ví dụ.

Ví dụ 9.2. Vẽ biểu đồ mômen uốn cho khung trên hình 9.12a, $EI = \text{const}$.

Khung đã cho có tính chất đối xứng. Sau khi phân tích tải trọng thành đối xứng và phản xứng ta thấy:

- ◆ Trường hợp tải trọng đối xứng: trong hệ không phát sinh mômen uốn mà chỉ có lực nén 2,5 kN trong thanh CC' vì ta bỏ qua biến dạng dọc trục. Biểu đồ mômen uốn trong trường hợp này bằng không.
- ◆ Trường hợp tải trọng phản xứng: ta chỉ cần tính với nửa hệ như trên hình 9.12b. Hệ có hai nút và hai chuyển vị thẳng độc lập.

Để tính hệ 9.12b ta thực hiện theo thứ tự như sau:

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh

$$R_{AB} = R_{BC} = EI/l = EI/5; \quad R_{BE} = R_{CD} = 3EI/4l = 3EI/10.$$

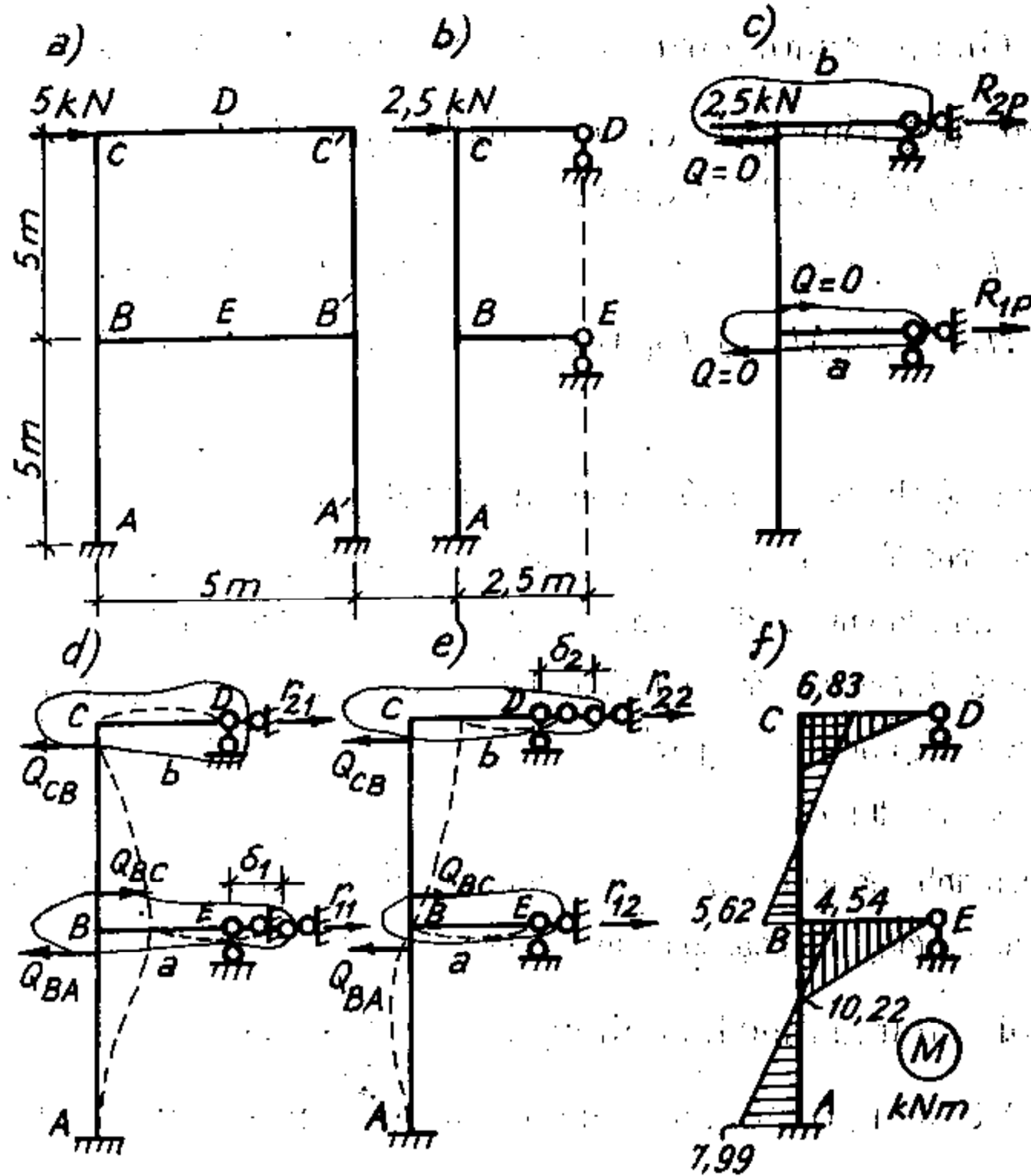
2. Xác định các hệ số phân phối

$$\text{Nút C: } \gamma_{CB} = \frac{EI/5}{(EI/5) + (3EI/10)} = 0,4; \quad \gamma_{CB} = \frac{3EI/10}{(EI/5) + (3EI/10)} = 0,6;$$

$$\text{Nút B: } \gamma_{BA} = \gamma_{BC} = \frac{EI/5}{(EI/5) + (EI/5) + (3EI/10)} = 0,268;$$

$$\gamma_{CB} = \frac{3EI/10}{(EI/5) + (EI/5) + (3EI/10)} = 0,428.$$

Hình 9.12



3. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng (hình 9.12c).

Vì tải trọng đặt ở nút nên các mômen nút cứng đều bằng không. Do đó mômen uốn trên tất cả các thanh cũng bằng không (trong trường hợp đặc biệt này ta không cần lập bảng phân phối). Thực hiện các mặt cắt a và b (hình 9.12c) ta dễ dàng xác định được $R_{1P} = 0$; $R_{2P} = -2,5 \text{ kN}$.

4. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu chuyển vị cưỡng bức

a) Liên kết đặt thêm tại tầng 1 chuyển vị với giá trị chọn tùy ý δ_1 (hình 9.12d),

- Xác định các mômen nút cứng: tưởng tượng chốt các nút và cho liên kết đặt tại tầng 1 chuyển vị với giá trị δ_1 , sử dụng bảng 6.2, ta có:

$$M^*_{AB} = M^*_{BA} = 6EI\delta_1/l^2; \quad M^*_{BC} = M^*_{CB} = -6EI\delta_1/l^2$$

Nếu chọn $\delta_1 = l^2/6EI$ thì $M^*_{AB} = M^*_{BA} = 1$; $M^*_{BC} = M^*_{CB} = -1$

- Lập bảng phân phối mômen (bảng 9.3).
- Xác định các phản lực r_{11} và r_{21} . Căn cứ vào các số liệu tìm được trong bảng 9.3, xác định lực cắt trong các thanh đứng:

$$Q_{BA} = (0,970 + 0,941) / 5 = 0,382;$$

$$Q_{BC} = Q_{CB} = (-0,853 - 0,618) / 5 = -0,294.$$

Thực hiện các mặt cắt a, b (hình 9.12d), từ phương trình cân bằng hình chiếu theo phương ngang, ta được:

$$r_{11} = Q_{BA} - Q_{BC} = 0,382 + 0,294 = 0,676; \quad r_{21} = Q_{CB} = -0,294.$$

Bảng 9.3

| Nút, ngàm | A | B | | | C | |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Đầu thanh | AB | BA | BE | BC | CB | CD |
| γ | | 0,286 | 0,428 | 0,286 | 0,400 | 0,600 |
| M^* | +1,000 | +1,000 | | -1,000 | -1,000 | |
| C | | | | +0,200 | +0,400 | +0,600 |
| B | -0,029 | -0,057 | -0,086 | -0,057 | -0,029 | |
| C | | | | +0,006 | +0,012 | +0,017 |
| B | -0,001 | -0,002 | -0,002 | -0,002 | -0,001 | |
| C | | | | | +0,000 | +0,001 |
| | +0,970 | +0,941 | -0,088 | -0,853 | -0,618 | +0,618 |

b) Liên kết đặt thêm tại tầng 2 chuyển vị với giá trị chọn tùy ý δ_2 (hình 9.12e)

- Xác định các mômen nút cứng: $M^*_{BC} = M^*_{CB} = 6EI\delta_2 / l^2$.

Nếu chọn $\delta_2 = l^2 / 6EI$ thì $M^*_{BC} = M^*_{CB} = 1$.

- Lập bảng phân phối mômen (bảng 9.4).

Bảng 9.4

| Nút, ngàm | A | B | | | C | |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Đầu thanh | AB | BA | BE | BC | CB | CD |
| γ | | 0,286 | 0,428 | 0,286 | 0,400 | 0,600 |
| M^* | | | | +1,000 | +1,000 | |
| C | | | | -0,200 | -0,400 | -0,600 |
| B | -0,114 | -0,229 | -0,342 | -0,229 | -0,114 | |
| C | | | | +0,023 | +0,046 | +0,068 |
| B | -0,003 | -0,007 | -0,010 | -0,007 | -0,003 | |
| C | | | | | +0,001 | +0,002 |
| | -0,117 | -0,236 | -0,352 | +0,586 | +0,530 | 0,530 |

- Xác định các phản lực r_{12} và r_{22} . Theo các số liệu trong bảng 9.4, xác định lực cắt trong các thanh đứng.

$$Q_{CB} = Q_{BC} = (0,530+0,587) / 5 = 0,224;$$

$$Q_{BA} = (-0,117-0,236) / 5 = -0,071.$$

Thực hiện các mặt cắt a, b (hình 9.12e), từ phương trình cân bằng hình chiếu theo phương ngang, ta được:

$$r_{12} = Q_{BA} - Q_{BC} = -0,071 - 0,224 = -0,295; \quad r_{22} = Q_{CB} = 0,224.$$

5. Thiết lập và giải hệ phương trình xác định các hệ số k

$$0 + 0,676 k_1 - 0,294 k_2 = 0; \quad -2,5 - 0,294 k_1 + 0,224 k_2 = 0.$$

$$\text{Nghiệm: } k_1 = 11,4; \quad k_2 = 26,2.$$

6. Xác định mômen uốn tại các đầu thanh trong hệ cho ban đầu

Quá trình tính toán được thực hiện trên bảng 9.5. Các giá trị \bar{M}_1 và \bar{M}_2 lấy theo bảng 9.3 và 9.4.

Bảng 9.5

| Đầu thanh | AB | BA | BE | BC | CB | CD |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| M_P | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| $k_1 \bar{M}_1 = 11,4 \bar{M}_1$ | + 11,05 | + 10,72 | - 1,00 | - 9,73 | - 7,05 | + 7,05 |
| $k_2 \bar{M}_2 = 26,2 \bar{M}_2$ | - 3,06 | - 6,18 | - 9,22 | + 15,35 | + 13,88 | - 13,88 |
| $M = M_P + k_1 \bar{M}_1 + k_2 \bar{M}_2$ | + 7,99 | + 4,54 | - 10,22 | + 5,62 | + 6,83 | - 6,83 |

Biểu đồ mômen uốn vẽ cho nửa khung bên trái như trên hình 9.12f. Từ đó ta dễ dàng suy ra biểu đồ mômen uốn cho nửa khung bên phải theo nguyên tắc phản xứng.

9.2. Phương pháp G. Kani

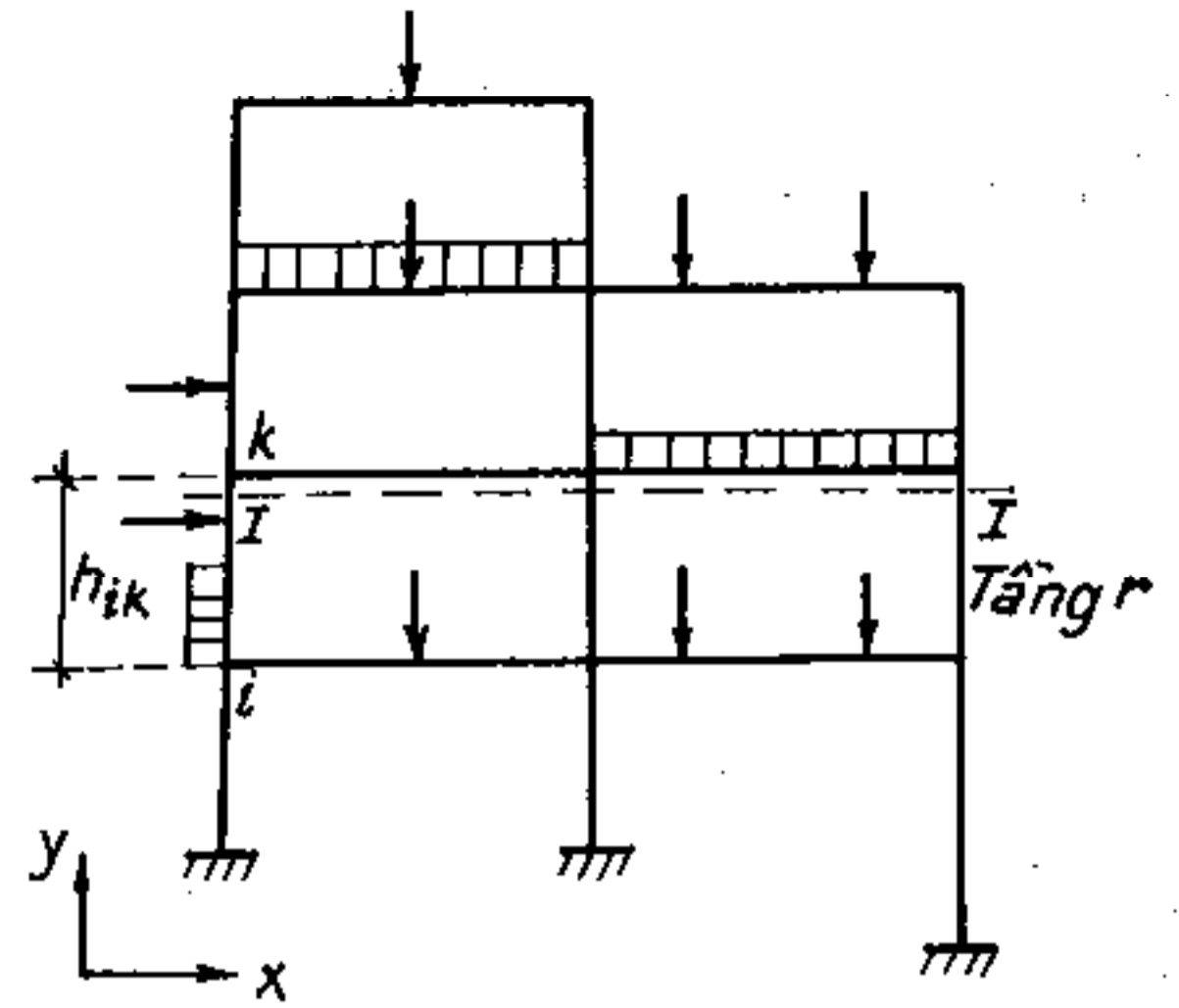
Phương pháp G. Kani được áp dụng rộng rãi trong tính toán kết cấu vì ngoài những ưu điểm tương tự như ưu điểm của phương pháp H. Cross còn có ưu điểm nổi bật nữa là có thể tự động khử được những sai lầm xảy ra trong các chu trình tính toán.

Thật vậy, bản chất của phương pháp G. Kani là phương pháp chuyển vị trong đó giải hệ phương trình chính tắc theo cách lặp Zeidel là cách giải có khả năng tự động khử những sai lầm (nếu mắc phải) trong quá trình thực hiện phép lặp.

Với những hệ có chuyển vị thẳng, phương pháp G. Kani không yêu cầu phải giải hệ phương trình như trong phương pháp H. Cross, song cũng chỉ hạn chế trong phạm vi khung có các thanh đứng song song, không lệch tầng (các thanh ngang không bị gián đoạn trong mỗi tầng).

A. Công thức mômen uốn tại các đầu thanh

Để thiết lập các công thức tính, ta xét một thanh ik bất kỳ có độ cứng EI không đổi tách ra từ hệ có các nút chuyển vị thẳng và các thanh đứng song song, chịu tải trọng bất kỳ (hình 9.13). Dưới tác dụng của tải trọng, các nút i, k của hệ có chuyển vị xoay φ_i, φ_k và chuyển vị thẳng tương đối Δ_{ik} theo phương vuông góc với trục ban đầu của thanh (hình 9.14a) đồng thời tại các đầu thanh phát sinh các mômen uốn M_{ik} và M_{ki} .

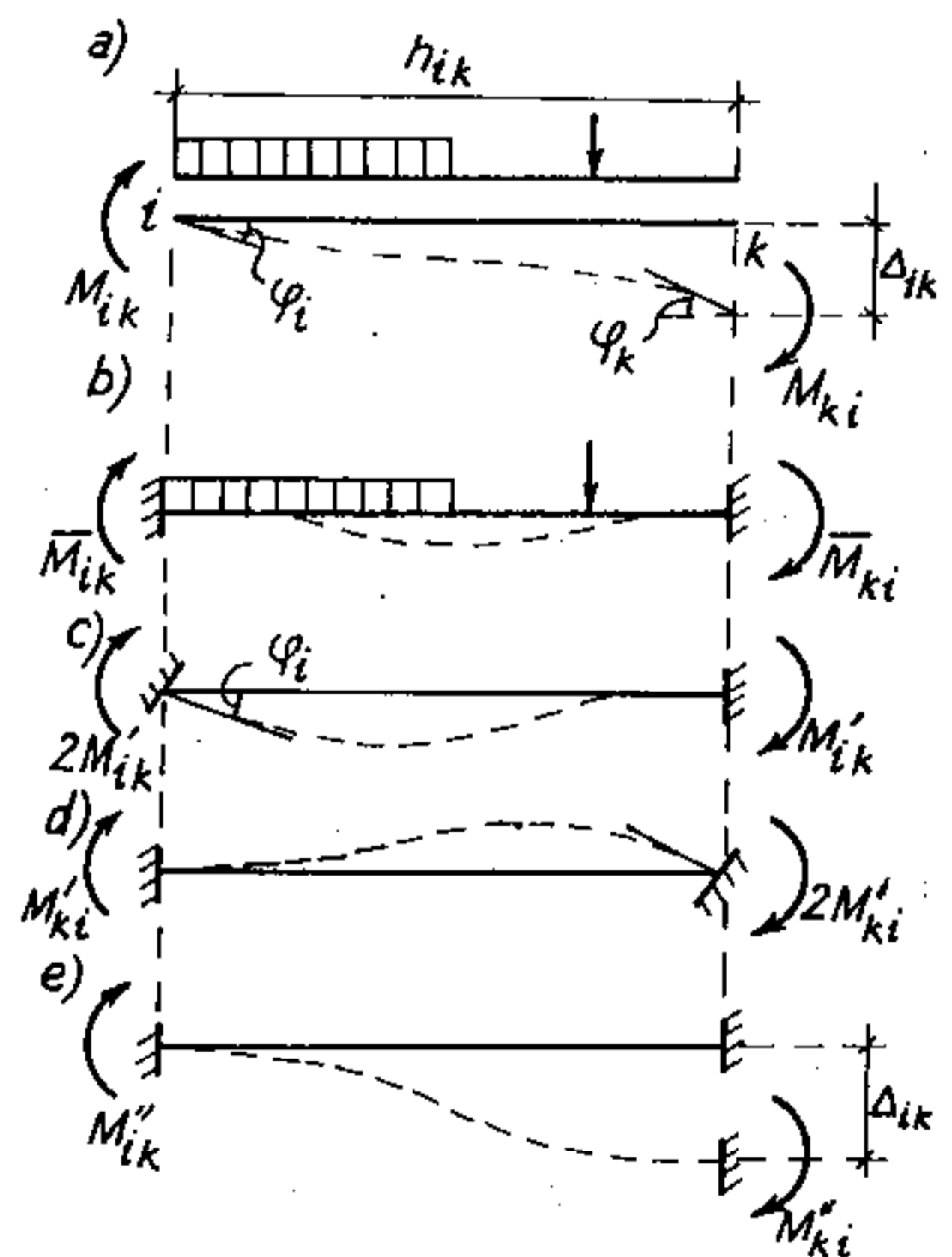


Hình 9.13

Cách ký hiệu mômen uốn ở đầu thanh cũng tương tự như cách ký hiệu trong phương pháp H. Cross nhưng quy ước về dấu thì ngược lại. Theo G. Kani, mômen uốn tại các đầu thanh được xem là dương khi quay thuận chiều kim đồng hồ. Chiều của M_{ik} và M_{ki} vẽ trên hình 9.14a là chiều dương.

Phân tích biến dạng của thanh ik ta thấy biến dạng này là tổ hợp của bốn biến dạng riêng biệt:

- 1) Các đầu i, k của thanh bị ngàm, dưới tác dụng của tải trọng đặt trên thanh, thanh bị biến dạng. Tại đầu i và k của thanh phát sinh các mômen \bar{M}_{ik} và \bar{M}_{ki} (hình 9.14b).
- 2) Đầu k của thanh bị ngàm còn đầu i xoay cưỡng bức với góc φ_i . Như đã biết (xem bảng 6.2), khi thanh biến dạng, tại đầu k (không bị xoay) phát sinh mômen uốn biểu thị bằng M'_{ik} còn tại đầu i (bị xoay) phát sinh mômen uốn có giá trị lớn gấp đôi M'_{ik} biểu thị bằng $2M'_{ik}$ (hình 9.14c). Đối chiếu với số liệu cho trong bảng 6.2 ta thấy M'_{ik} phụ thuộc φ_i và bằng $2R_{ik}\varphi_i$ với R_{ik} được xác định theo bảng 9.1.



Hình 9.14

3) Đầu i của thanh bị ngàm còn đầu k xoay cưỡng bức với góc φ_k . Tương tự như trên, lúc này tại đầu i và k phát sinh các mômen M'_{ki} và $2M'_{ki}$ (hình 9.14d).

4) Hai đầu i, k chuyển vị thẳng tương đối là Δ_{ik} theo phương vuông góc với trục ban đầu của thanh. Tại đầu i và k phát sinh các mômen M''_{ik} và M''_{ki} (hình 9.14e). Từ bảng 6.2 ta thấy $M''_{ik} = M''_{ki} = 6R_{ik}\Delta_{ik}/h_{ik}$.

Cũng lập luận tương tự cho trường hợp đầu k của thanh có dạng liên kết khác.

Theo nguyên lý cộng tác dụng, mômen tại đầu i và k của thanh ik được xác định như sau

❖ Khi thanh ik có hai đầu là nút (ngàm):

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik}; \\ M_{ki} &= \bar{M}_{ki} + M'_{ik} + 2M'_{ki} + M''_{ki}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

❖ Khi thanh ik có đầu i là nút (ngàm) còn đầu k là khớp:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M''_{ik}; \\ M_{ki} &= 0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Đối chiếu với số liệu trong bảng 6.2 và 9.1, trong trường hợp này ta thấy:

$$M'_{ik} = 2R_{ik}\varphi_i; \quad M''_{ik} = 4R_{ik}\Delta_{ik}/h_{ik}$$

❖ Khi thanh ik có đầu i là nút (ngàm) còn đầu k là ngàm trượt cho phép đầu k chuyển vị thẳng tự do theo phương vuông góc với trục thanh:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik}; \\ M_{ki} &= \bar{M}_{ki} - 2M'_{ik}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Đối chiếu với số liệu trong bảng 6.2 và 9.1 ta thấy: $M'_{ik} = 2R_{ik}\varphi_i$.

Các đại lượng \bar{M}_{ik} và \bar{M}_{ki} trong (9.25), (9.26) và (9.27) biểu thị mômen uốn do tải trọng gây ra tại các đầu thanh tương ứng với điều kiện liên kết đã chỉ định và được xác định theo bảng 6.1. Như vậy, muốn xác định M_{ik} ta cần phải xác định các mômen M'_{ik} , M'_{ki} do các góc xoay φ_i và φ_k gây ra (gọi là các mômen do xoay) và mômen M''_{ik} do chuyển vị thẳng tương đối Δ_{ik} gây ra (gọi là mômen do chuyển vị thẳng).

B. Công thức tính mômen do xoay M'_{ik}

Từ điều kiện cân bằng mômen tại nút i : tổng đại số mômen tác dụng tại đầu các thanh ik quy tụ tại i phải bằng không, ta có:

$$\sum_{(i)} M_{ik} = \sum_{(i)} \bar{M}_{ik} + 2 \sum_{(i)} M'_{ik} + \sum_{(i)} M'_{ki} + \sum_{(i)} M''_{ik} = 0.$$

Các dấu tổng áp dụng cho tất cả các thanh quy tụ tại nút i .

Ký hiệu
$$\bar{M}_i = \sum_{(i)} \bar{M}_{ik}.$$

Ta có:
$$\sum_{(i)} M'_{ik} = -\frac{1}{2} [\bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik})].$$

Vế trái biểu thị tổng các mômen do xoay tại nút i . Tổng mômen này sẽ phân phối vào đầu các thanh quy tụ tại nút i theo công thức phân phối mômen đã thiết lập trong 9.1.B.

$$M'_{ik} = -\frac{1}{2} \gamma_{ik} [\bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik})],$$

với γ_{ik} là hệ số phân phối vào thanh ik , xác định theo (9.14).

Công thức tính mômen do xoay M'_{ik} được viết dưới dạng:

$$M'_{ik} = \mu_{ik} [\bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik})], \quad (9.28)$$

trong đó:

$$\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \gamma_{ik} = -\frac{R_{ik}}{2 \sum_{(i)} R_{ik}} \quad (9.29)$$

là hệ số phân phối mômen do xoay vào đầu i của thanh ik quy tụ tại nút i (còn gọi là hệ số xoay).

Lấy tổng các hệ số xoay quanh nút i , ta có điều kiện kiểm tra kết quả tính μ_{ik} :

$$\sum_{(i)} \mu_{ik} = -\frac{\sum_{(i)} R_{ik}}{2 \sum_{(i)} R_{ik}} = -\frac{1}{2}. \quad (9.30)$$

C. Công thức tính mômen do chuyển vị thẳng M''_{ik}

Công thức tính mômen do chuyển vị thẳng chỉ liên quan trực tiếp đến các thanh đứng. Trong thực tế, các thanh đứng thường là thanh có hai đầu là nút (ngàm) hoặc thanh có một đầu là nút còn một đầu là khớp. Giả sử các thanh đứng thuộc tầng r bao gồm n_1 thanh có hai đầu là nút (ngàm) và n_2 thanh có đầu i là nút còn đầu k là khớp. Xét điều kiện cân bằng của phân hệ bên trên mặt cắt ngang đi qua tầng r có thanh đứng ik đang xét (hình 9.13), ta có:

$$\sum P_{ng} - \sum_{n_1} Q_{ik} - \sum_{n_2} Q_{ik} = 0, \quad (9.31)$$

trong đó:

$\sum P_{ng}$ – tổng đại số các hình chiếu theo phương x của tất cả các tải trọng tác dụng trên phần hệ được cắt ra để xét (phần trên tầng thứ r) với quy ước *chiều dương hướng từ trái sang phải*:

$\sum_{n_1} Q_{ik}$ và $\sum_{n_2} Q_{ik}$ – lần lượt là tổng đại số của các lực cắt trong các thanh đứng ik

có hai đầu là nút (ngàm) và trong các thanh đứng ik có đầu i là nút còn đầu k là khớp, thuộc tầng r bị cắt. Quy ước *chiều dương của lực cắt là chiều làm cho phần bị cắt có xu hướng quay thuận chiều kim đồng hồ*.

Với quy ước về dấu của mômen theo phương pháp G. Kani, lực cắt trong thanh đứng ik được xác định như sau:

❖ Thanh có hai đầu là nút (ngàm) :
$$Q_{ik} = Q_{ik}^d - \frac{M_{ik} + M_{ki}}{h_{ik}}; \quad (9.32)$$

❖ Thanh có đầu i là nút còn đầu k là khớp:
$$Q_{ik} = Q_{ik}^d - \frac{M_{ik}}{h_{ik}}, \quad (9.33)$$

trong đó:

Q_{ik}^d – lực cắt do tải trọng tác dụng trong thanh ik khi coi thanh ik là dầm đặt tựa do trên hai khớp tựa;

h_{ik} – chiều cao của thanh đứng ik thuộc tầng r .

Các mômen M_{ik} và M_{ki} được xác định theo (9.25) hoặc (9.26). Thay (9.25) và (9.26) vào (9.32) và (9.33), tiếp đó thay kết quả tìm được vào điều kiện cân bằng (9.31), ta được:

$$\begin{aligned} & \sum P_{ng} - \left[\sum_{n_1} Q_{ik}^d + \sum_{n_2} Q_{ik}^d \right] + \left[\sum_{n_1} \frac{1}{h_{ik}} (\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{1}{h_{ik}} \bar{M}_{ik} \right] + \\ & + \left[\sum_{n_1} \frac{3}{h_{ik}} (M'_{ik} + M'_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{2}{h_{ik}} M'_{ik} \right] + \left[\sum_{n_1} \frac{2}{h_{ik}} M''_{ik} + \sum_{n_2} \frac{1}{h_{ik}} M''_{ik} \right] = 0. \quad (9.34) \end{aligned}$$

Ba số hạng đầu của (9.34) biểu thị hiệu của thành phần tải trọng theo phương ngang ở phần trên tầng r với lực cắt do tải trọng gây ra trong tầng r nếu coi các nút của hệ không chuyển vị. Ký hiệu đại lượng này là Q_r .

$$Q_r = \sum P_{ng} - \left[\sum_{n_1} Q_{ik}^d + \sum_{n_2} Q_{ik}^d \right] + \left[\sum_{n_1} \frac{1}{h_{ik}} (\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{1}{h_{ik}} \bar{M}_{ik} \right].$$

Nếu chú ý là khi thanh có đầu k là khớp thì $M_{ki} = 0$, ta có thể viết công thức Q_r dưới dạng tổng quát hơn như sau:

$$Q_r = \sum P_{ng} - \sum_{(r)} Q_{ik}^d + \sum_{(r)} \frac{1}{h_{ik}} (\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}). \quad (9.35)$$

Dấu tổng theo r áp dụng cho tất cả các thanh đứng thuộc tầng r .
Ta dễ dàng xác định được Q_r theo các số liệu đã cho trong bảng 6.1.

Để có được công thức tổng quát áp dụng cho trường hợp các thanh đứng thuộc tầng r có chiều cao khác nhau và điều kiện liên kết khác nhau, ta sử dụng các hệ số sau:

❖ Thanh có hai đầu là nút (ngàm):

$$\alpha_{ik} = h_r / h_{ik}; \quad m_{ik} = 1; \quad (9.36)$$

❖ Thanh có một đầu là nút còn một đầu là khớp:

$$\alpha_{ik} = 2h_r / 3h_{ik}; \quad m_{ik} = 3/4, \quad (9.37)$$

trong đó:

h_r – chiều cao chung của tầng r , thường chọn là chiều cao của những thanh đứng bằng nhau chiếm đa số trong tầng;

α_{ik} – hệ số quy đổi phụ thuộc chiều cao và điều kiện liên kết của thanh đứng ik ;

m_{ik} – hệ số phụ thuộc điều kiện liên kết của thanh đứng ik .

Số hạng thứ tư của (9.34) được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n_1} \frac{3}{h_{ik}} (M'_{ik} + M'_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{2}{h_{ik}} M'_{ik} \right] &= \sum_{n_1} \frac{3}{h_r} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{3}{h_r} \alpha_{ik} M'_{ik} = \\ &= \frac{3}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}). \end{aligned}$$

Số hạng cuối của (9.34) được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n_1} \frac{2}{h_{ik}} M''_{ik} + \sum_{n_2} \frac{1}{h_{ik}} M''_{ik} \right] &= \sum_{n_1} \frac{2}{h_r} \alpha_{ik} M''_{ik} + \sum_{n_2} \frac{3}{2h_r} \alpha_{ik} \frac{4}{4} M''_{ik} = \\ &= \frac{2}{h_r} \left[\sum_{n_1} \alpha_{ik} \cdot 1 \cdot M''_{ik} + \sum_{n_2} \alpha_{ik} \frac{3}{4} M''_{ik} \right] = \\ &= \frac{2}{h_r} \left[\sum_{n_1} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} + \sum_{n_2} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} \right] = \frac{2}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik}. \end{aligned}$$

Điều kiện (9.34) có dạng

$$Q_r + \frac{3}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) + \frac{2}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} = 0. \quad (9.38)$$

Nhân cả hai vế với $h_r/3$ và gọi: $M_r = \frac{Q_r h_r}{3}$ (9.39)

là mômen tầng thứ r . Từ (9.38) ta suy ra:

$$\sum_{(r)} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} = -\frac{3}{2} \left[M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right]. \quad (9.40)$$

Vế trái của (9.40) biểu thị tổng các mômen do chuyển vị thẳng tại đầu i của các

thanh ik thuộc tầng r . Đại lượng này sẽ được phân phối vào từng thanh đứng của tầng r .

Để lập công thức tính mômen M''_{ik} cho từng thanh ta cần sử dụng các số liệu trong bảng 6.2, xác định mômen do chuyển vị thẳng tương đối Δ_{ik} theo phương vuông góc với trục thanh ik , tương ứng với hai trường hợp sau:

❖ Thanh có hai đầu là nút (ngàm):

$$M''_{ik} = M''_{ki} = -\frac{6EI_{ik}}{h_{ik}^2} \Delta_{ik} = -6R_{ik}\alpha_{ik} \frac{\Delta_{ik}}{h_r}$$

❖ Thanh có một đầu là nút còn một đầu là khớp:

$$M''_{ik} = -\frac{3EI_{ik}}{h_{ik}^2} \Delta_{ik} = -\frac{3EI_{ik}}{4h_{ik}} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3h_{ik}} \Delta_{ik} = -6R_{ik}\alpha_{ik} \frac{\Delta_{ik}}{h_r}$$

Như vậy, công thức xác định M''_{ik} đều có một dạng chung cho cả hai loại thanh. Vì các thanh đứng của hệ song song nên các chuyển vị thẳng tương đối Δ_{ik} như nhau trong mỗi tầng, chiều cao h_r thuộc tầng r là đại lượng không đổi nên tỷ số

$$\frac{M''_{ik}}{R_{ik}\alpha_{ik}} = -6 \frac{\Delta_{ik}}{h_r} \quad (9.41)$$

không đổi với mọi thanh thuộc tầng thứ r .

Lập tổng các mômen do chuyển vị thẳng tại đầu i của các thanh ik thuộc tầng thứ r và chú ý đến (9.40), ta có:

$$\sum_{(r)} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} = -6 \frac{\Delta_{ik}}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik}^2 m_{ik} R_{ik} = -\frac{3}{2} [M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki})]$$

$$\text{Suy ra: } \frac{-\frac{3}{2} [M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki})]}{\sum_{(r)} \alpha_{ik}^2 m_{ik} R_{ik}} = -6 \frac{\Delta_{ik}}{h_r} \quad (9.42)$$

Đối chiếu (9.41) và (9.42) ta sẽ được công thức xác định M''_{ik} trong thanh ik bất kỳ thuộc tầng thứ r :

$$M''_{ik} = -\frac{3}{2} \frac{\alpha_{ik} R_{ik}}{\sum_{(r)} \alpha_{ik}^2 m_{ik} R_{ik}} [M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki})]$$

$$\text{Hay } \boxed{M''_{ik} = v_{ik} [M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki})]} \quad (9.43)$$

với

$$\boxed{v_{ik} = -\frac{3}{2} \frac{\alpha_{ik} R_{ik}}{\sum_{(r)} \alpha_{ik}^2 m_{ik} R_{ik}}} \quad (9.44)$$

v_{ik} là hệ số phân phối do chuyển vị thẳng của thanh ik (còn gọi là hệ số chuyển vị thẳng).

Từ (9.44) ta dễ dàng suy ra điều kiện kiểm tra các hệ số v_{ik} :

$$\sum_{(r)} m_{ik} \alpha_{ik} v_{ik} = \pm \frac{3}{2} \quad (9.45)$$

Như vậy, để tính trị số mômen uốn M_{ik} ở đầu các thanh ta cần phải tính được các mômen do chuyển vị xoay M'_{ik} theo công thức (9.28) và mômen do chuyển vị thẳng M''_{ik} theo công thức (9.43). Trong các biểu thức tính M'_{ik} và M''_{ik} lại có các giá trị mômen chưa xác định và có quan hệ tương hỗ với nhau, nên có thể vận dụng phương pháp đúng dần như sau:

Khi tính M'_{ik} theo công thức (9.28) thì các giá trị M'_{ik} và M''_{ik} chưa biết, nhưng nếu gán cho chúng các giá trị gần đúng bất kỳ thì có thể tìm được giá trị đúng hơn của M'_{ik} rồi lại dùng kết quả đó để xét nút kế tiếp và được giá trị dần dần đúng hơn của mômen do xoay tại các nút.

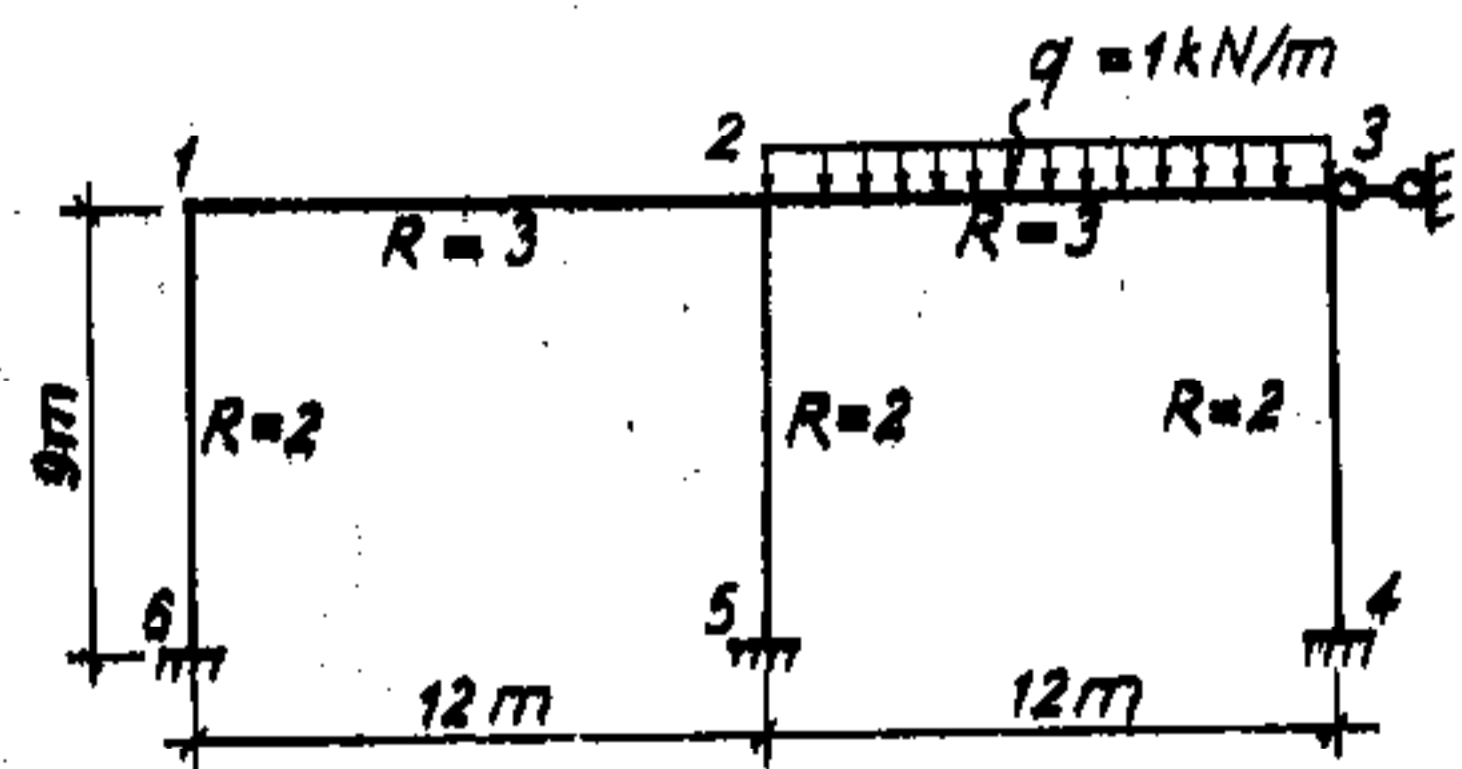
Khi tính M''_{ik} ta cũng dựa vào các trị số gần đúng của M'_{ik} và M'_{ki} và cũng đạt được trị số M''_{ik} đúng hơn.

Bằng cách tính liên tiếp từ nút này sang nút khác, từ tầng này sang tầng khác theo một thứ tự bất kỳ ta sẽ đạt được kết quả đúng dần. Cơ sở của cách giải này được xây dựng theo cách giải lặp của Zeidel.

Dưới đây là một số ví dụ để làm sáng tỏ nội dung và thứ tự thực hiện của phương pháp G. Kani.

Ví dụ 9.3. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung có nút không chuyển vị thẳng, cho biết các độ cứng đơn vị quy ước như trên hình 9.15.

Ta sẽ giải bài toán trên sơ đồ hệ (hình 9.16) và tiến hành theo thứ tự như sau:



Hình 9.15

1. Xác định mômen nút cứng do tải trọng gây ra trên hệ khi xem các nút là ngàm. Trong trường hợp này tải trọng chỉ tác dụng trên thanh 2-3 nên theo các số liệu trong bảng 6.1 và theo quy ước về dấu của G. Kani ta có:

$$\bar{M}_{2-3} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{1 \cdot 12^2}{12} = -12 \text{ kNm}; \quad \bar{M}_{3-2} = +\frac{ql^2}{12} = +12 \text{ kNm};$$

Trên sơ đồ khung, ghi những giá trị này tại đầu các thanh tương ứng. Nếu ik là thanh ngang thì ghi \bar{M}_{ik} và \bar{M}_{ki} tại đầu i và đầu k ở phía trên thanh. Nếu ik là thanh đứng, ghi những giá trị này ngang sát nút hoặc ngầm rồi dùng đường kẻ ngang đứt nét để tách biệt với các mômen M'_{ik} sẽ ghi tiếp sau (hình 9.16).

Mômen nút cứng tại các nút:

- Tại nút 2: $\bar{M}_2 = \bar{M}_{21} + \bar{M}_{23} + \bar{M}_{25} = 0 - 12 + 0 = -12$ kNm.
- Tại nút 3: $\bar{M}_3 = +12$ kNm.

Trên sơ đồ khung ghi những đại lượng này vào vòng tròn trong, tại các nút tương ứng (hình 9.16).

2. Xác định hệ số xoay μ_{ik} theo công thức (9.29)

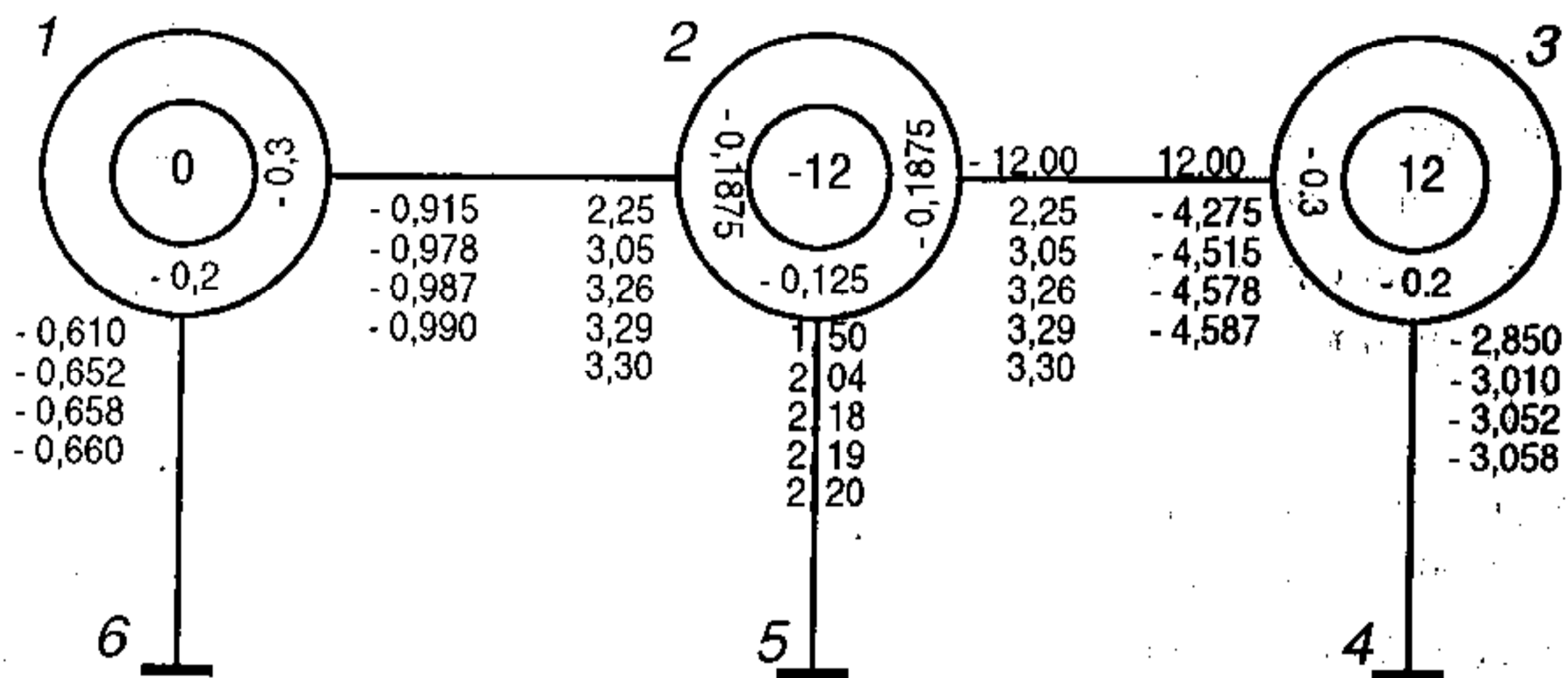
- Tại nút 1: $\mu_{12} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{16}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2+3} = -0,3;$
 $\mu_{16} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R_{16}}{R_{12} + R_{16}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2+3} = -0,2.$

Kiểm tra theo điều kiện (9.30): $\mu_{12} + \mu_{16} = -0,3 - 0,2 = -0,5$ (đúng).

Thực hiện tương tự với các nút khác, ta được:

- Tại nút 2: $\mu_{21} = \mu_{23} = -0,1875;$ $\mu_{25} = -0,125.$
- Tại nút 3: $\mu_{32} = -0,3;$ $\mu_{34} = -0,2.$

Trên sơ đồ khung ghi những đại lượng này vào vòng tròn ngoài, tại các đầu thanh tương ứng (hình 9.16).



Hình 9.16

3. Tính các mômen do xoay M'_{ik} theo công thức (9.28), áp dụng cho trường hợp hệ có nút không chuyển vị thẳng:

$$M'_{ik} = \mu_{ik} (\bar{M}_i + \sum_{(i)} M'_{ki}).$$

Tính đúng dần trị số M'_{ik} bằng cách sử dụng lặp đi lặp lại nhiều lần công thức trên khi xét từ nút này chuyển sang nút khác theo một thứ tự tùy ý. Để chóng đạt tới kết quả, có thể bắt đầu từ nút có mômen nút cứng lớn về trị tuyệt đối, chẳng hạn, xét nút 2 trước. Lúc đó ta tự cho trước mômen do xoay tại các đầu thanh đối diện với nút 2 nhưng giá trị gần đúng bất kỳ. Nếu dự đoán trước càng sát thực tế thì tốc độ tính toán càng nhanh, song thường chưa biết rõ nên có thể giả thiết bằng không, nghĩa là cho

$$\sum_{(2)} M'_{ki} = M'_{12} + M'_{32} + M'_{52} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

trong đó $M'_{52} = 0$ vì đầu 5 là ngàm cứng không xoay, còn M'_{12} và M'_{32} bằng không là giả thiết. Do đó, ta có:

$$M'_{21} = \mu_{21} \bar{M}_2 = (-0,1875)(-12) = +2,25 \text{ kNm};$$

$$M'_{23} = \mu_{23} \bar{M}_2 = (-0,1875)(-12) = +2,25 \text{ kNm};$$

$$M'_{25} = \mu_{25} \bar{M}_2 = (-0,125)(-12) = +1,50 \text{ kNm}.$$

Ghi các số liệu này trên sơ đồ khung tại các đầu thanh tương ứng quanh nút 2.

Sau đó, chuyển sang xét các nút khác theo một trình tự tùy ý, chẳng hạn theo thứ tự 3-2-1-2...

• Tại nút 3, lúc này M'_{23} đã có giá trị tìm được ở bước trên nên:

$$M'_{32} = \mu_{32} (\bar{M}_3 + M'_{23} + M'_{43}) = -0,3(12 + 2,25 + 0) = -0,3(14,25) = -4,275 \text{ kNm};$$

$$M'_{34} = \mu_{34} (\bar{M}_3 + M'_{23} + M'_{43}) = -0,2(12 + 2,25 + 0) = -0,3(14,25) = -2,85 \text{ kNm}.$$

Ghi các số liệu này tại các đầu thanh tương ứng quanh nút 3.

• Tại nút 2:

$$M'_{21} = (-0,1875)(-12 + 0 + 0 - 4,275) = +3,05 \text{ kNm};$$

$$M'_{23} = (-0,1875)(-12 + 0 + 0 - 4,275) = +3,05 \text{ kNm};$$

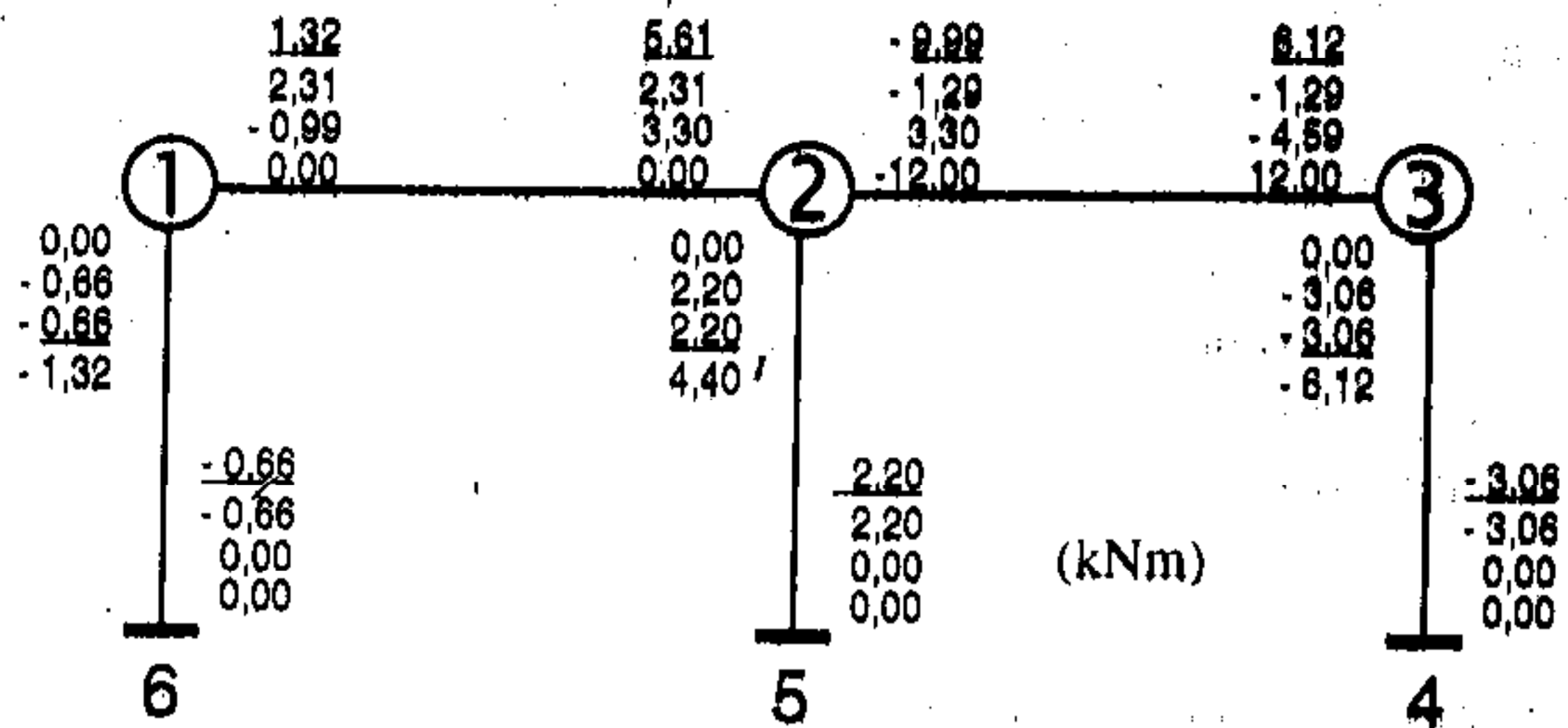
$$M'_{25} = (-0,125)(-12 + 0 + 0 - 4,275) = +2,04 \text{ kNm}.$$

• Tại nút 1:

$$M'_{12} = (-0,3)(0 + 0 + 3,05) = -0,915 \text{ kNm};$$

$$M'_{16} = (-0,2)(0 + 0 + 3,05) = -0,610 \text{ kNm}.$$

Cứ tiếp tục như vậy theo thứ tự xét các nút 3-2-1-3... ta sẽ được kết quả ghi trên sơ đồ khung (hình 9.16). Các giá trị M'_{ik} tại các đầu thanh sẽ tiệm cận đến giá trị chính xác. Quá trình tính toán kết thúc khi các giá trị M'_{ik} trong lần tính cuối cùng trùng hoặc xấp xỉ bằng các giá trị M'_{ik} tương ứng trong lần tính trước trong phạm vi sai số cho phép.



Hình 9.17

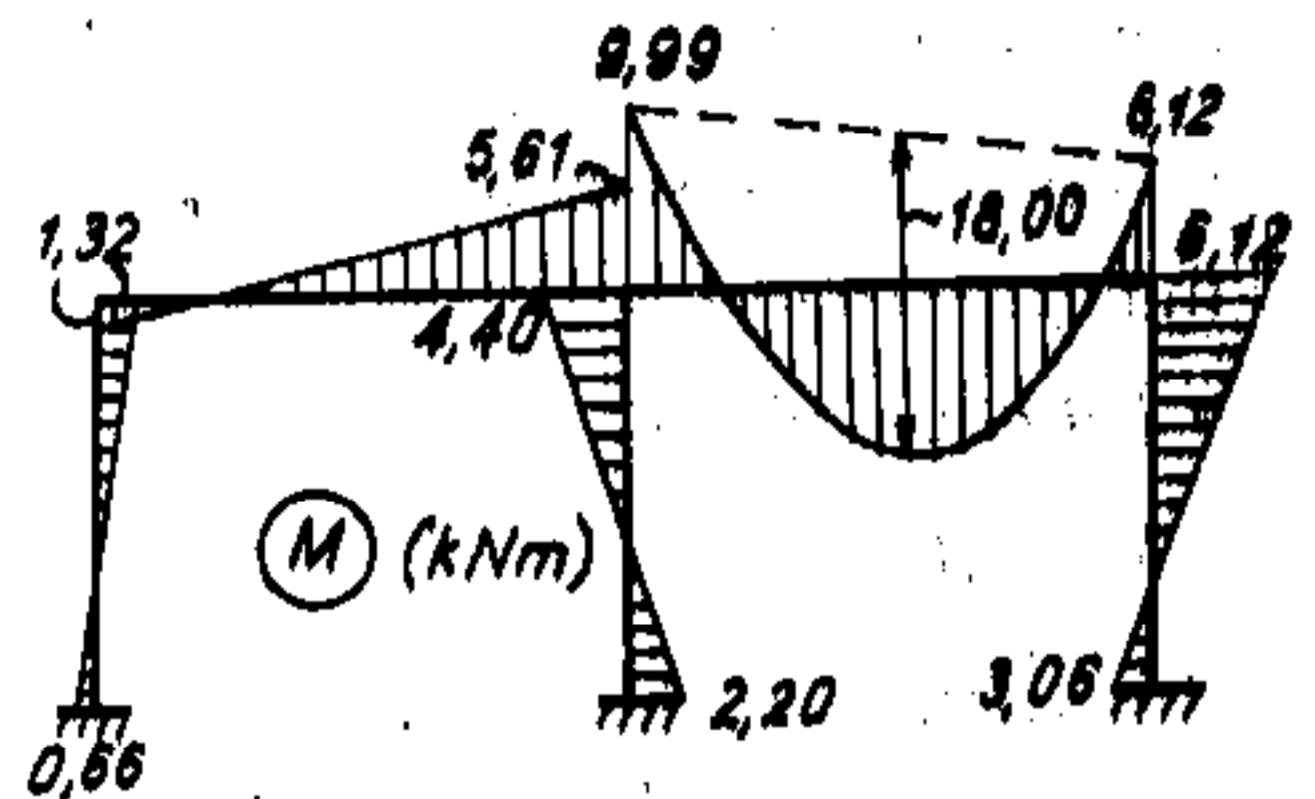
4. Tính mômen uốn tại các đầu thanh. Áp dụng công thức (9.25), ta có:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} = \bar{M}_{ik} + M'_{ik} + (M'_{ik} + M'_{ki}).$$

Quá trình thực hiện được trình bày trên sơ đồ khung (hình 9.17).

Tại mỗi đầu thanh trên sơ đồ khung ta thực hiện phép tổng của ba giá trị lần lượt là: \bar{M}_{ik} , M'_{ik} và $(M'_{ik} + M'_{ki})$.

5. Vẽ biểu đồ mômen uốn theo kết quả tính toán mômen uốn ở các đầu thanh. Kết quả như trên hình 9.18.



Hình 9.18

Ví dụ 9.4. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung có nút chuyển vị thẳng, cho biết các độ cứng đơn vị quy ước $R = EI/l$ như trên hình 9.19.

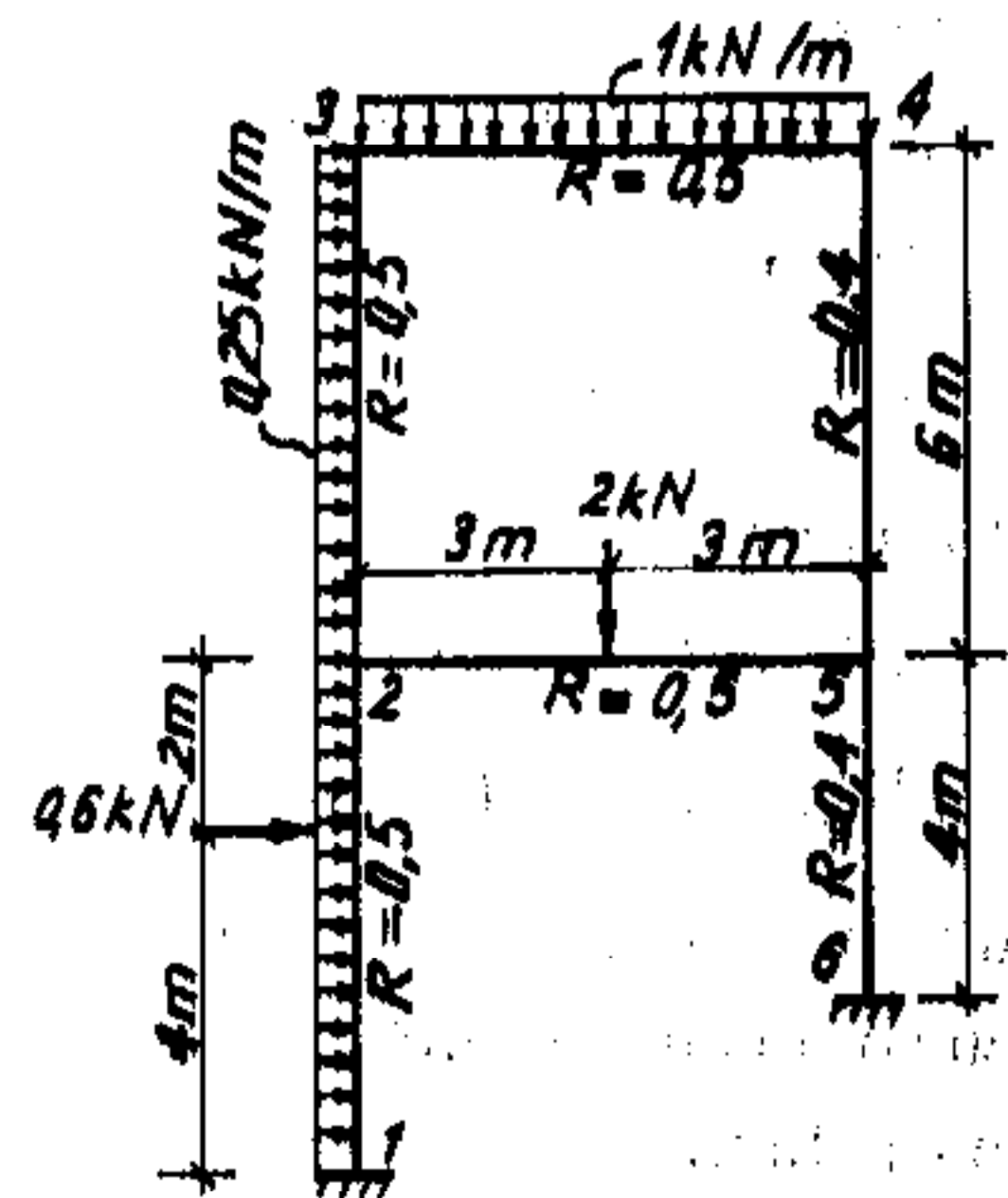
1. Xác định mômen nút cứng

$$\bar{M}_{45} = \bar{M}_{54} = \bar{M}_{56} = \bar{M}_{65} = 0;$$

$$\bar{M}_{34} = -\bar{M}_{43} = -\frac{1.6^2}{12} = -3,000 \text{ kNm};$$

$$\bar{M}_{25} = -\bar{M}_{52} = -\frac{2.6}{8} = -1,500 \text{ kNm};$$

$$\bar{M}_{23} = -\bar{M}_{32} = -\frac{0,25 \cdot 6^2}{12} = -0,750 \text{ kNm};$$



Hình 9.19

$$\bar{M}_{12} = -\frac{0,25 \cdot 6^2}{12} - \frac{0,6 \cdot 4,2^2}{6^2} = -1,017 \text{ kNm};$$

$$\bar{M}_{21} = \frac{0,25 \cdot 6^2}{12} + \frac{0,6 \cdot 2,4^2}{6^2} = 1,283 \text{ kNm};$$

- Tại nút 2: $\bar{M}_2 = 1,283 - 1,500 - 0,750 = -0,967 \text{ kNm};$
- Tại nút 3: $\bar{M}_3 = 0,750 - 3,000 = -2,250 \text{ kNm};$
- Tại nút 4: $\bar{M}_4 = 3,000 \text{ kNm};$
- Tại nút 5: $\bar{M}_5 = 1,500 \text{ kNm}.$

Trên sơ đồ khung (hình 9.20) ta ghi các giá trị \bar{M}_{ik} và \bar{M}_i vào những vị trí như đã chỉ dẫn ở ví dụ trên.

2. Xác định các hệ số xoay theo công thức (9.29):

$$\text{Ví dụ tại nút 2: } \mu_{21} = \mu_{25} = \mu_{23} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,5}{0,5 + 0,5 + 0,5} = -0,167.$$

Kết quả tính các hệ số μ được ghi trong vòng tròn ngoài trên sơ đồ khung (hình 9.20).

3. Xác định hệ số chuyển vị thẳng theo công thức (9.44):

- Tầng II: các thanh đứng có chiều dài bằng nhau và có hai đầu đều là nút nên $h_{11} = 6 \text{ m}; \alpha_{ik} = 1; m_{ik} = 1$. Do đó:

$$v_{23} = v_{32} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{R_{32}}{R_{32} + R_{45}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,5}{0,5 + 0,4} = -0,833;$$

$$v_{54} = v_{45} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{R_{45}}{R_{32} + R_{45}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,4}{0,5 + 0,4} = -0,667.$$

Kiểm tra theo điều kiện (9.45): $v_{23} + v_{45} = -0,833 - 0,667 = -1,5$ (đúng).

- Tầng I: các thanh đứng có điều kiện liên kết như nhau (hai đầu là nút hoặc ngàm) nhưng chiều dài khác nhau. Nếu chọn $h_1 = h_{12} = 6 \text{ m}$, ta có:

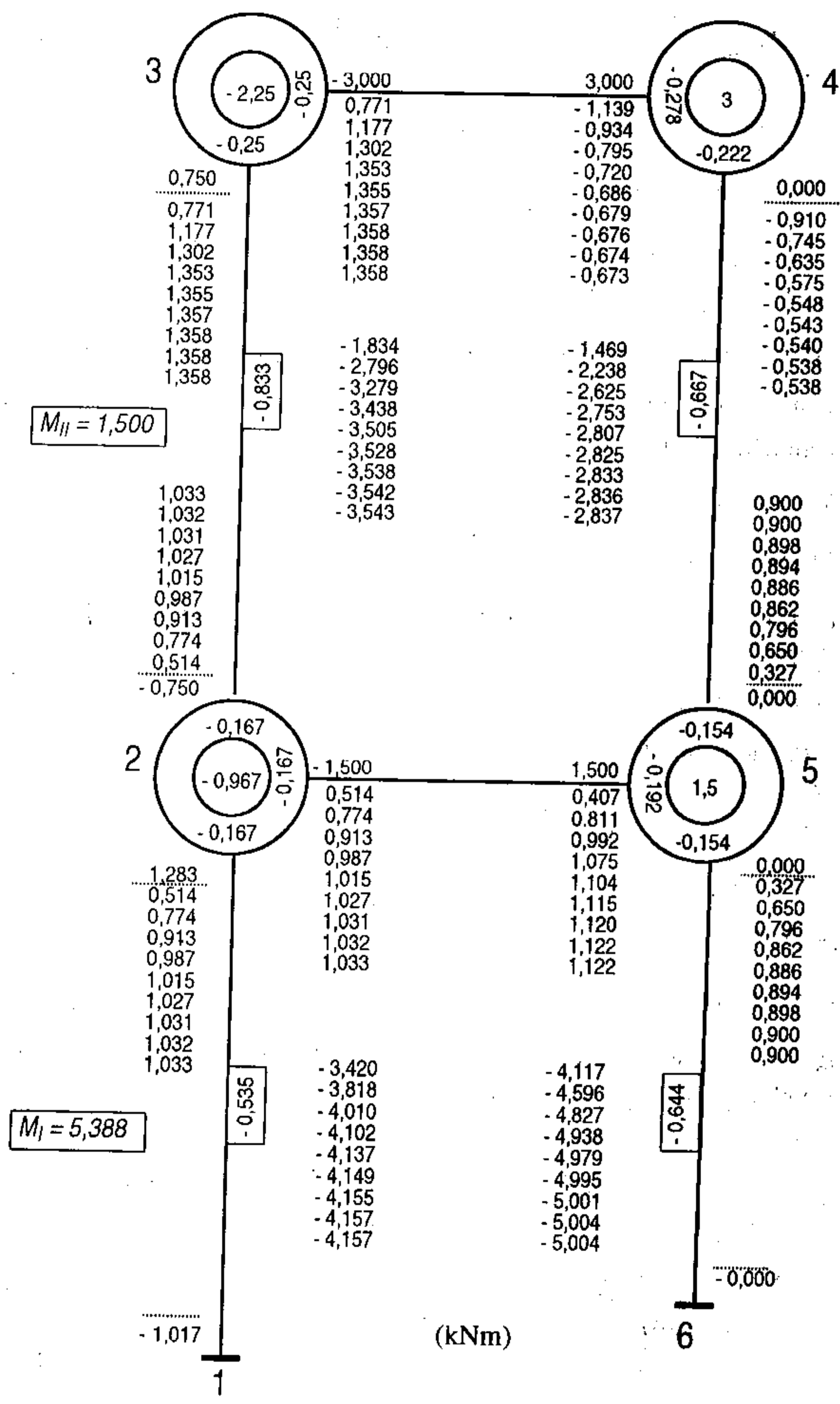
$$m_{12} = m_{56} = 1; \alpha_{12} = 1; \alpha_{56} = h_1 / h_{56} = 6 / 4 = 1,5.$$

$$v_{12} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha_{12} R_{12}}{m_{12} \alpha_{12}^2 R_{12} + m_{56} \alpha_{56}^2 R_{56}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1 \cdot 0,5}{1 \cdot 1^2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1,5^2 \cdot 0,4} = -0,535;$$

$$v_{56} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha_{56} R_{56}}{m_{12} \alpha_{12}^2 R_{12} + m_{56} \alpha_{56}^2 R_{56}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1,5 \cdot 0,4}{1 \cdot 1^2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1,5^2 \cdot 0,4} = -0,644;$$

Kiểm tra theo điều kiện (9.45):

$$m_{12} \alpha_{12} v_{12} + m_{56} \alpha_{56} v_{56} = 1 \cdot 1 \cdot (-0,535) + 1 \cdot 1,5 \cdot (-0,644) = -1,5; \text{ (đúng).}$$



Hình 9.20

Trên sơ đồ khung ta ghi các giá trị v_{ik} vừa tìm được vào các ô chữ nhật đặt ở khoảng giữa thanh đứng ik tương ứng (hình 9.20).

4. Xác định các mômen tầng theo (9.39) và (9.35)

- Tầng II: Dùng mặt cắt ngang sát dưới các nút 3, 4; theo (9.35) ta có:

$$Q_{II} = \sum P_{ng} - (Q_{32}^d + Q_{45}^d) + \left[\frac{l}{h_{32}} (\bar{M}_{23} + \bar{M}_{32}) + \frac{l}{h_{45}} (\bar{M}_{45} + \bar{M}_{54}) \right] =$$

$$= 0 - \left[-\frac{0,25 \cdot 6}{2} + 0 \right] + \left[\frac{l}{6} (-0,75 + 0,75) + \frac{l}{6} (0 + 0) \right] = 0,75 \text{ kN.}$$

Theo (9.39): $M_{II} = Q_{II} h_{II} / 3 = 0,75 \cdot 6 / 3 = 1,5 \text{ kNm.}$

- Tầng I: Dùng mặt cắt ngang sát dưới các nút 2, 5; theo (9.35), ta có:

$$Q_I = \sum P_{ng} - (Q_{21}^d + Q_{56}^d) + \left[\frac{l}{h_{21}} (\bar{M}_{21} + \bar{M}_{12}) + \frac{l}{h_{56}} (\bar{M}_{56} + \bar{M}_{65}) \right] =$$

$$= 0,25 \cdot 6 - \left[-\frac{0,25 \cdot 6}{2} - \frac{0,6 \cdot 4}{6} + 0 \right] + \left[\frac{l}{6} (1,283 - 1,017) + \frac{l}{4} (0 + 0) \right] = 2,694 \text{ kN.}$$

Theo (9.39): $M_I = Q_I h_I / 3 = 2,694 \cdot 6 / 3 = 5,388 \text{ kNm.}$

Trên sơ đồ khung ta ghi các giá trị mômen tầng vào ô chữ nhật bên cạnh tầng tương ứng (hình 9.20).

5. Tính mômen do xoay M'_{ik} và mômen do chuyển vị thẳng M''_{ik} theo các công thức (9.28) và (9.43):

$$M'_{ik} = \mu_{ik} [\bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik})]; \quad M''_{ik} = v_{ik} \left[M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right].$$

Thứ tự tính M'_{ik} và M''_{ik} trước hay sau, từ nút này sang nút khác, từ tầng này sang tầng khác là tùy ý. Cần áp dụng xen kẽ hai công thức trên và thực hiện nhiều chu trình cho tới khi kết quả tính hội tụ với mức độ chính xác cần thiết. Nên căn cứ vào mức độ ảnh hưởng của tải trọng đối với mômen do xoay và mômen do chuyển vị thẳng lớn hay nhỏ để tính M'_{ik} trước hay M''_{ik} trước.

Trước khi bước vào các chu trình tính toán ta có thể chuẩn bị bằng cách phân phối nút cố \bar{M}_i lớn và tầng có M_r lớn trước. Trong ví dụ này, có thể tính M'_{ik} tại nút 4 và M''_{ik} tại tầng I.

Trong lần tính đầu tiên, các trị số chưa biết có thể giả thiết bằng không. Ví dụ, tính M'_{ik} tại nút 4:

$$M'_{43} = \mu_{43} (\bar{M}_4 + M'_{34} + M'_{54} + M''_{45}) = -0,278(+3+0+0+0) = -0,834 \text{ kNm;}$$

$$M'_{45} = \mu_{45} (\bar{M}_4 + M'_{34} + M'_{54} + M''_{45}) = -0,222(+3+0+0+0) = -0,666 \text{ kNm.}$$

Tính M''_{ik} tại tầng I:

$$M''_{12} = \nu_{12}[M_1 + \alpha_{12}(M'_{12} + M'_{21}) + \alpha_{56}(M'_{56} + M'_{65})] = -0,535 \cdot 5,388 = -2,883 \text{ kNm};$$

$$M''_{56} = \nu_{56}[M_1 + \alpha_{12}(M'_{12} + M'_{21}) + \alpha_{56}(M'_{56} + M'_{65})] = -0,644 \cdot 5,388 = -3,470 \text{ kNm}.$$

Sau bước chuẩn bị, ta bắt đầu thực hiện chu trình thứ nhất theo thứ tự tùy ý, chẳng hạn theo thứ tự các nút 3, 2, 5, 4, tầng II, tầng I.

- Tại nút 3: $M'_{34} = M'_{42} = -0,25[-2,25 - 0,834] = 0,771 \text{ kNm}.$

- Tại nút 2: $M'_{23} = M'_{25} = M'_{21} = -0,167[-0,967 + 0,771 - 2,883] = 0,514 \text{ kNm}.$

- Tại nút 5: $M'_{52} = -0,192[1,5 + 0,514 - 0,666 - 3,470] =$
 $= -0,192[-2,122] = 0,407 \text{ kNm};$

$$M'_{54} = M'_{56} = -0,154[-2,122] = 0,327 \text{ kNm}.$$

- Tại nút 4: $M'_{43} = -0,278[3 + 0,771 + 0,327] = -0,278[4,098] = -1,139 \text{ kNm};$

$$M'_{45} = -0,222[4,098] = -0,910 \text{ kNm}.$$

- Tầng II: $M''_{32} = -0,833[1,50 + 0,771 + 0,514 + 0,327 - 0,910] =$
 $= -0,833[2,202] = -1,834 \text{ kNm};$

$$M''_{45} = -0,667[2,202] = -1,469 \text{ kNm}.$$

- Tầng I: $M''_{21} = -0,535[5,388 + 0,514 + 1,5 \cdot 0,327] =$
 $= -0,535[6,3925] = -3,420 \text{ kNm};$

$$M''_{56} = -0,644[6,3925] = -4,117 \text{ kNm}.$$

Chu trình thứ hai cũng thực hiện theo thứ tự đã nêu ở chu trình thứ nhất.

- Tại nút 3: $M'_{34} = M'_{32} = -0,25[-2,25 - 1,139 + 0,514 - 1,834] = 1,177 \text{ kNm}.$

- Tại nút 2: $M'_{23} = M'_{25} = M'_{21} = -0,167[-0,967 + 1,177 + 0,407 - 1,834 - 3,420] =$
 $= 0,774 \text{ kNm}.$

- Tại nút 5: $M'_{52} = -0,192[1,5 + 0,774 - 0,91 - 4,117 - 1,469] =$
 $= -0,192[-4,222] = 0,811 \text{ kNm};$

$$M'_{54} = M'_{56} = -0,154[-4,222] = 0,650 \text{ kNm}.$$

- Tại nút 4: $M'_{43} = -0,278[3 + 1,177 + 0,650 - 1,469] =$
 $= -0,278[3,358] = -0,934 \text{ kNm};$

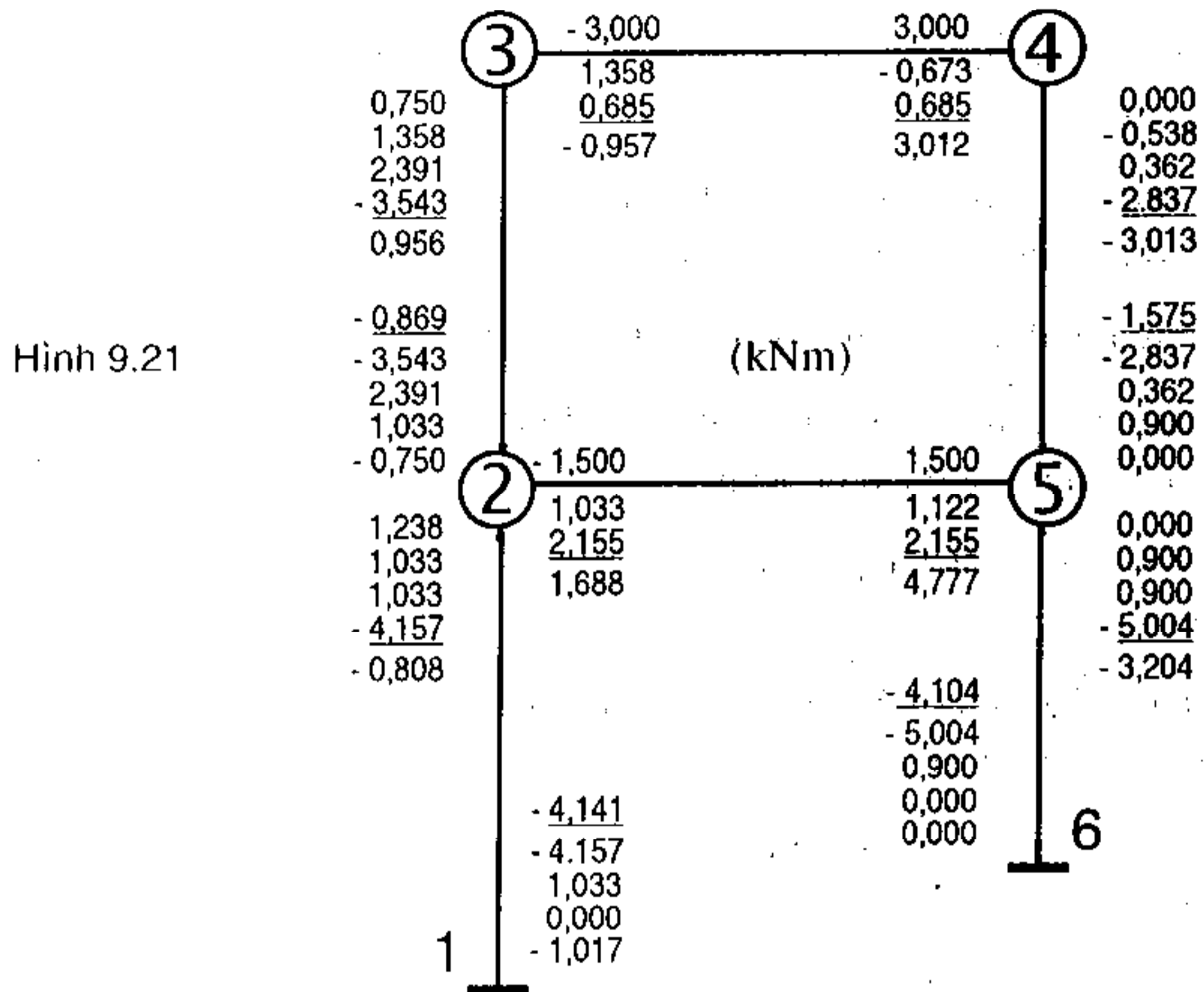
$$M'_{45} = -0,222[3,358] = -0,754 \text{ kNm}.$$

- Tầng II: $M''_{32} = -0,833[1,50 + 1,177 + 0,774 + 0,650 - 0,745] =$
 $= -0,833[3,356] = -2,796 \text{ kNm};$

$$M''_{45} = -0,667[3,356] = -2,238 \text{ kNm}.$$

- Tầng I: $M''_{21} = -0,535[5,388+0,774+1,5.0,650]=$
 $= -0,535[7,137] = -3,818 \text{ kNm};$
 $M''_{56} = -0,644[7,137] = -4,596 \text{ kNm}.$

Cũng thực hiện tương tự như trên đối với các chu trình tiếp sau. Kết quả tính (bắt đầu từ chu trình 1) ghi trên sơ đồ hệ (hình 9.20). Đến chu trình thứ 9, kết quả đã hội tụ nên có thể kết thúc quá trình phân phối.



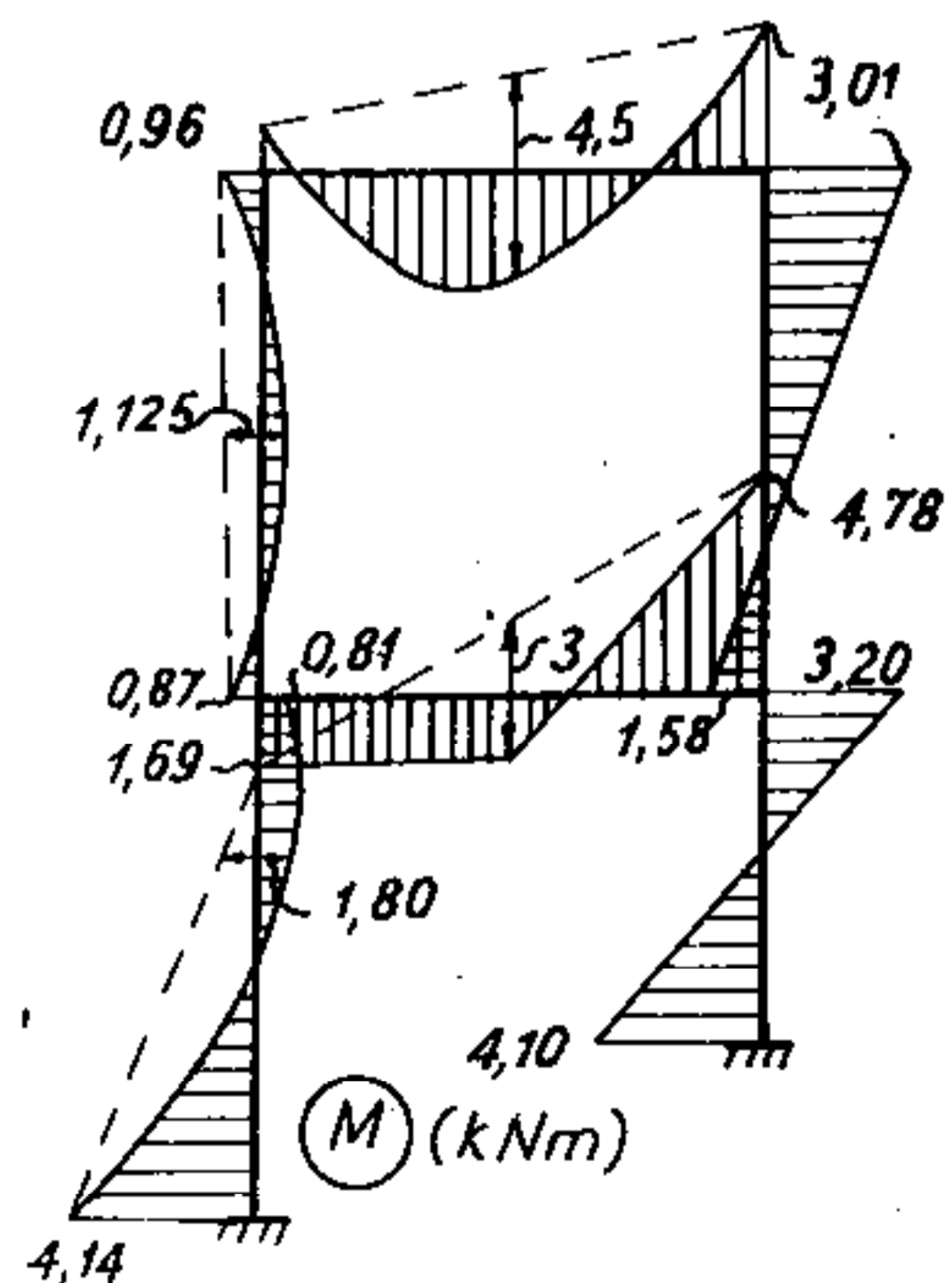
6. Tính mômen uốn ở đầu các thanh theo công thức (9.25)

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik} =$$

$$= \bar{M}_{ik} + M'_{ik} + (M'_{ik} + M'_{ki}) + M''_{ik}.$$

Quá trình tính toán được thực hiện trên sơ đồ hệ (hình 9.21).

7. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ theo kết quả tính mômen uốn ở đầu các thanh (hình 9.21). Kết quả như trên hình 9.22.



Hình 9.22

CÂU HỎI ÔN TẬP

- 9.1. Trình bày nội dung bài toán cơ bản: "Sự phân phối mômen xung quanh một nút".
- 9.2. Trình bày nội dung phương pháp H. Cross để tính hệ có nút không chuyển vị thẳng.
- 9.3. Thông qua ví dụ đơn giản, trình bày thứ tự thực hiện khi áp dụng phương pháp H. Cross để tính hệ có nút không chuyển vị thẳng.
- 9.4. Trình bày nội dung phương pháp H. Cross để tính hệ có nút chuyển vị thẳng.
- 9.5. Trình bày cách thiết lập công thức xác định mômen uốn tại tiết diện ở đầu các thanh theo phương pháp G. Kani.
- 9.6. Trình bày cách thiết lập công thức xác định mômen do xoay trong phương pháp G. Kani.
- 9.7. Trình bày cách thiết lập công thức xác định mômen do chuyển vị thẳng trong phương pháp G. Kani.
- 9.8. Nêu thứ tự thực hiện khi áp dụng phương pháp G. Kani để tính khung có nút chuyển vị thẳng.

10 Phương pháp động học

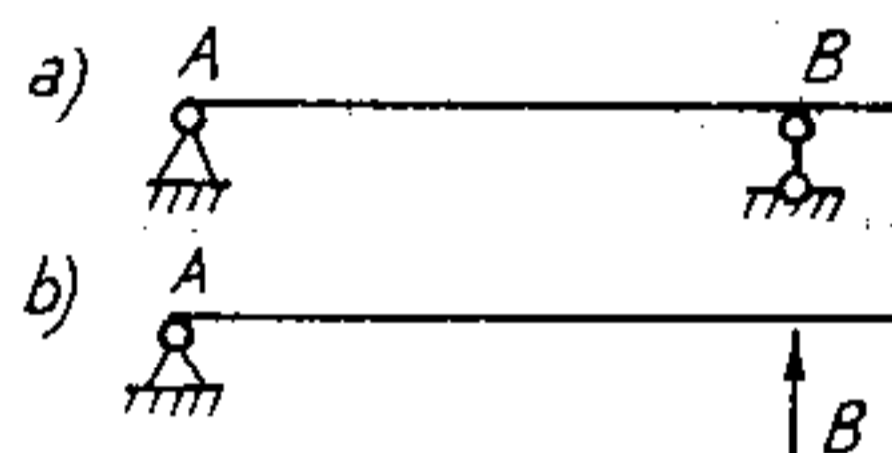
10.1. Khái niệm

Các phương pháp xác định phản lực và nội lực trình bày trong các chương trên là phương pháp tĩnh học vì được xây dựng trên cơ sở các điều kiện cân bằng tĩnh học. Trong chương này để cập thêm một phương pháp có hiệu quả dùng để xác định phản lực và nội lực gọi là *phương pháp động học*.

Phương pháp động học xây dựng trên cơ sở nguyên lý công khả dĩ.

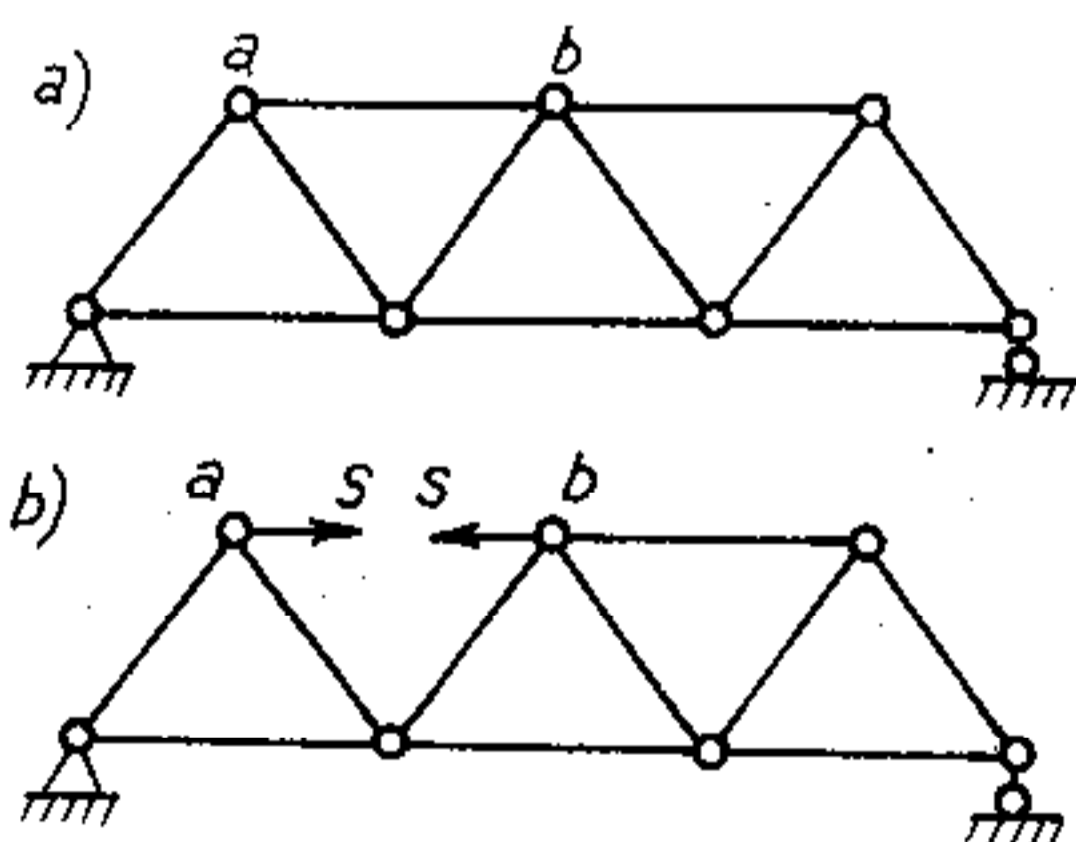
Nội dung phương pháp động học như sau:

1. Loại khỏi hệ liên kết cần xác định phản lực trong đó và thay thế tác dụng của liên kết bị loại bỏ bằng phản lực tương ứng cân tìm.

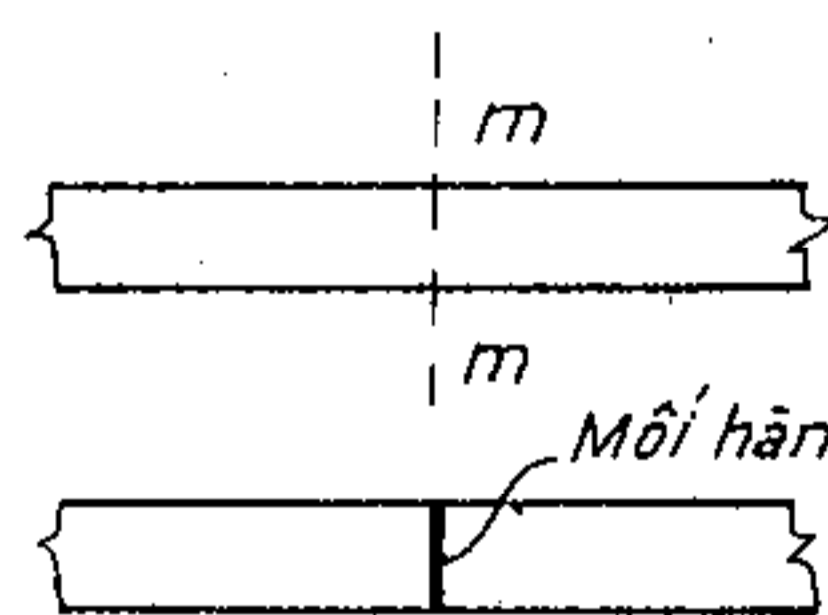


Hình 10.1

Để tìm phản lực tại gối B của hệ trên hình 10.1a, loại bỏ liên kết như trên hình 10.1b. Để tìm lực dọc trong thanh ab của dàn vẽ trên hình 10.2a ta có thể xem thanh ab như liên kết loại một và loại bỏ như trên hình 10.2b.



Hình 10.2



Hình 10.3

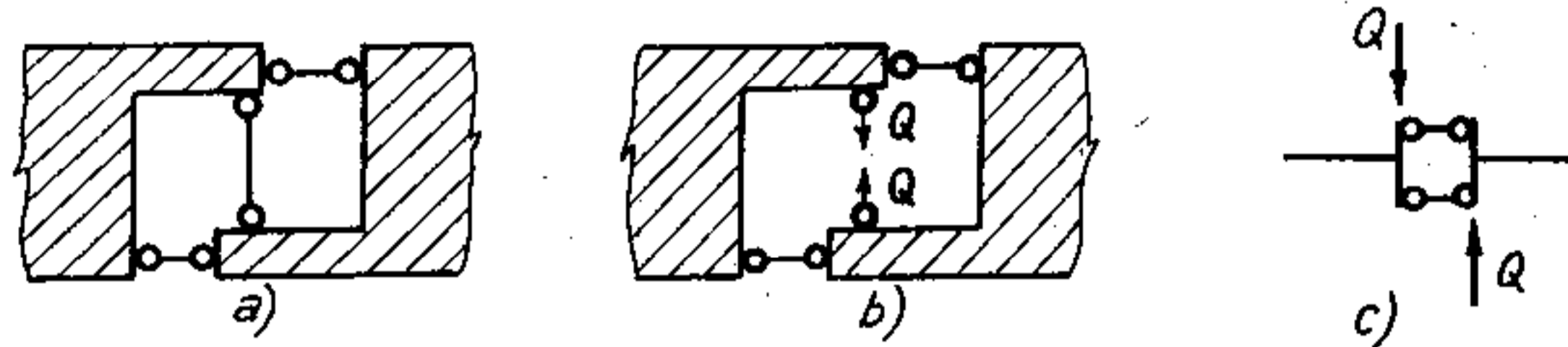
Để biết cách loại trừ liên kết khi cần xác định nội lực tại tiết diện $m-m$ trong một thanh của hệ bất kỳ, ta có thể xem thanh này như hai miếng cứng nối với nhau bằng liên kết hàn (hình 10.3a và b) và xem các thành phần nội lực như các thành phần phản lực trong liên kết hàn.

Về mặt động học cũng như tĩnh học, liên kết hàn tương đương với ba liên kết

thanh hoặc một khớp và một thanh (hình 10.4a, 10.5a, 10.6a) bố trí hợp lý.

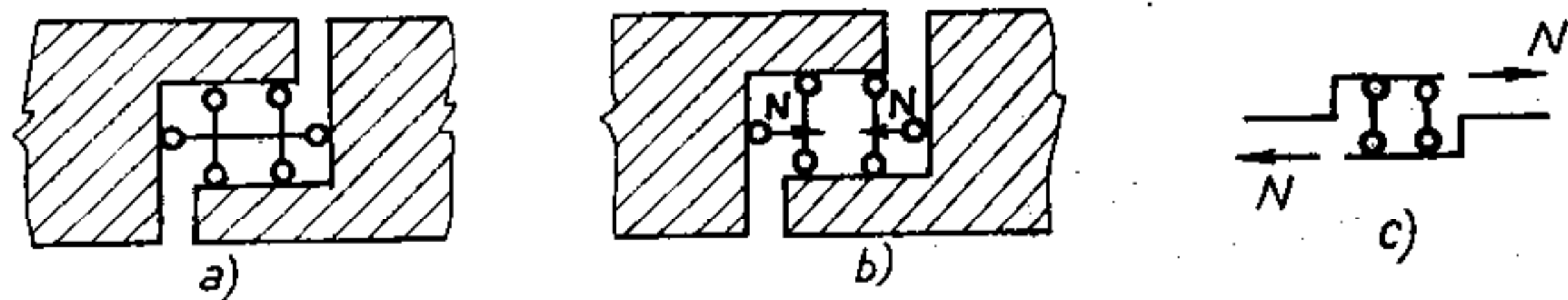
Do đó:

- ❖ Khi xác định *lực cắt* tại tiết diện $m-m$ trong một thanh nào đó, ta có thể xem như tại tiết diện $m-m$ có ba liên kết thanh bố trí như trên hình 10.4a và *loại trừ liên kết hướng theo phương vuông góc với trục thanh* (hình 10.4b). Trên sơ đồ tính ta ký hiệu liên kết còn lại tại tiết diện $m-m$ sau khi đã loại trừ liên kết tương ứng với lực cắt như trên hình 10.4c.



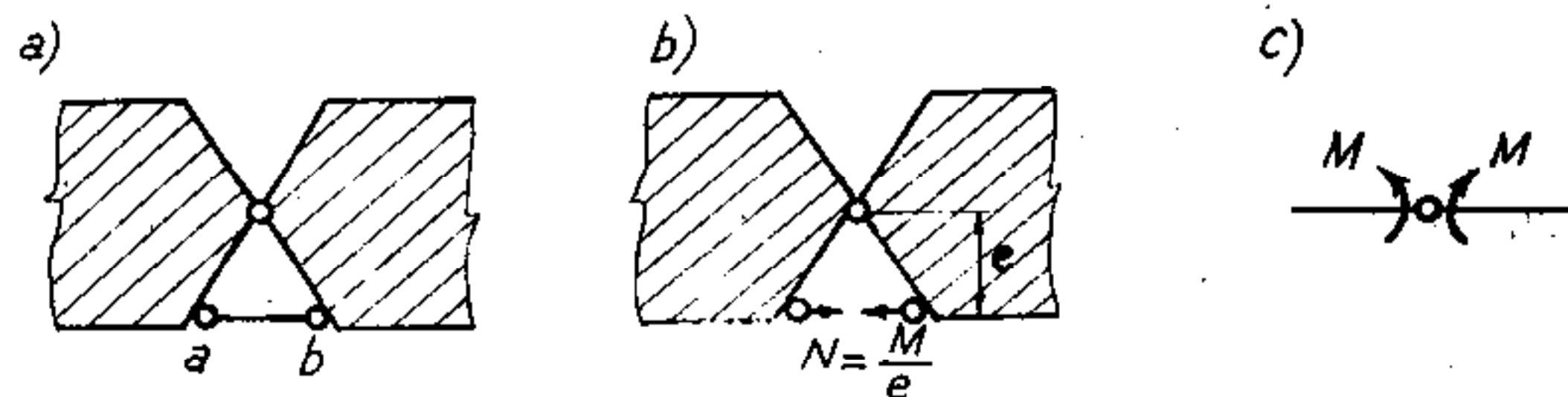
Hình 10.4

- ❖ Khi xác định *lực dọc* tại tiết diện $m-m$, ta xem như tại $m-m$ có ba liên kết thanh như trên hình 10.5a và *loại trừ liên kết theo phương dọc trục thanh* như trên hình 10.5b. Trên sơ đồ tính ta ký hiệu liên kết tại $m-m$ sau khi đã loại trừ liên kết tương ứng với lực dọc như trên hình 10.5c.



Hình 10.5

- ❖ Khi xác định *mômen uốn* tại tiết diện $m-m$, ta xem như tại $m-m$ có một liên kết khớp tại trọng tâm tiết diện và một liên kết thanh $a-b$ như trên hình 10.6a. Sau khi loại bỏ liên kết $a-b$ ta thay vào đó hai lực $N = M/e$ (hình 10.6b) với M là mômen uốn cần tìm, tiếp đó chuyển các lực N về khớp ta sẽ được mômen uốn có giá trị bằng M . Trên hình 10.6c vẽ ký hiệu liên kết còn lại tại $m-m$ sau khi đã loại trừ liên kết tương ứng với mômen uốn.



Hình 10.6

2. Gây cho hệ mới thu được một chuyển vị khả dĩ vô cùng bé. Chuyển vị khả dĩ là chuyển vị do nguyên nhân bất kỳ gây ra mà liên kết cho phép.

3. Thiết lập điều kiện cân bằng theo nguyên lý công khả dĩ:

"Nếu một hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng và công khả dĩ của các nội lực trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không".

Trong biểu thức công khả dĩ có chứa đại lượng cần tìm, do đó ta có thể suy ra được giá trị đại lượng này từ điều kiện cân bằng.

Có thể áp dụng nguyên lý công khả dĩ dưới những hình thức khác nhau nên cũng có các phương pháp động học tương ứng.

Trong các mục dưới đây ta sẽ lần lượt nghiên cứu các phương pháp động học để tính kết cấu chịu tải trọng bất động, tải trọng di động và để nghiên cứu sự cấu tạo hình học của những hệ có đủ số liên kết.

10.2. Cách tính hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động

Trong các hệ tĩnh định, sau khi loại bỏ một liên kết hệ trở thành biến hình một lần và được gọi là *cơ cấu*. Khi gây cho cơ cấu một chuyển vị khả dĩ, các phần tử của hệ biến hình không bị biến dạng, do đó công khả dĩ của các nội lực luôn luôn bằng không.

Như vậy, trong trường hợp này điều kiện cân bằng theo nguyên lý công khả dĩ chỉ yêu cầu: "tổng công khả dĩ của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng phải bằng không".

Ta sẽ nghiên cứu một vài phương pháp áp dụng nguyên lý công khả dĩ.

A. Phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý công khả dĩ

Nội dung của phương pháp như đã trình bày ở mục 10.1.

Thứ tự áp dụng:

1. Loại bỏ liên kết cần tìm phân lực S trong đó.
2. Gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ vô cùng bé.
3. Thiết lập điều kiện cân bằng theo nguyên lý công khả dĩ:

$$S \cdot \Delta_S + \sum P_i \cdot \Delta_i = 0, \quad (10.1)$$

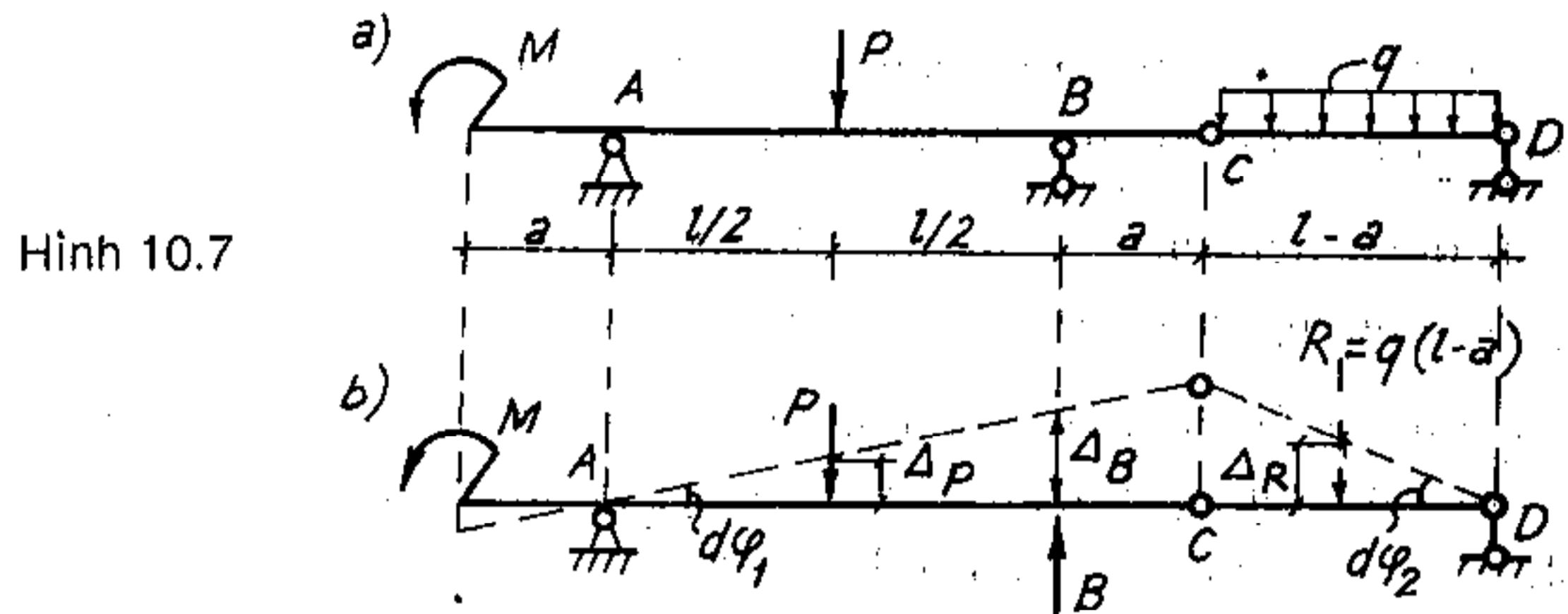
trong đó:

S – đại lượng cần xác định;

P_i – ngoại lực tác dụng trên hệ (P_i có thể là lực tập trung, phân bố hoặc mômen tập trung);

Δ_i, Δ_S – chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng với điểm đặt và phương của các lực P_i , lực S . Các Δ_i, Δ_S là chuyển vị thẳng hay góc xoay tùy theo P_i và S là lực tập trung hay mômen tập trung.

Ví dụ 10.1. Xác định phản lực B của dầm ghép tĩnh định trên hình 10.7a.



Hình 10.7

Loại bỏ gối tựa B và thay thế tác dụng bằng phản lực cần tìm B (hình 10.7b). Gây chuyển vị khả dĩ bất kỳ phù hợp với điều kiện liên kết như đường đứt nét trên hình 10.7b. Áp dụng nguyên lý công khả dĩ, ta có:

$$B \cdot \Delta_B + M \cdot d\varphi_1 - P \cdot \Delta_P - q(l-a) \Delta_R = 0.$$

Từ trên hình vẽ ta thấy: $(l-a) d\varphi_2 = (l+a) d\varphi_1$;

$$\Delta_B = l \cdot d\varphi_1; \quad \Delta_P = \frac{l}{2} \cdot d\varphi_1; \quad \Delta_R = \frac{l-a}{2} d\varphi_2 = \frac{l+a}{2} d\varphi_1;$$

Do đó, điều kiện cân bằng có dạng:

$$B \cdot l \cdot d\varphi_1 + M \cdot d\varphi_1 - P \cdot \frac{l}{2} \cdot d\varphi_1 - q(l-a) \cdot \frac{l+a}{2} d\varphi_1 = 0.$$

Suy ra:
$$B = \frac{P}{2} + \frac{q}{2l}(l^2 - a^2) - \frac{M}{l}.$$

B. Phương pháp cực

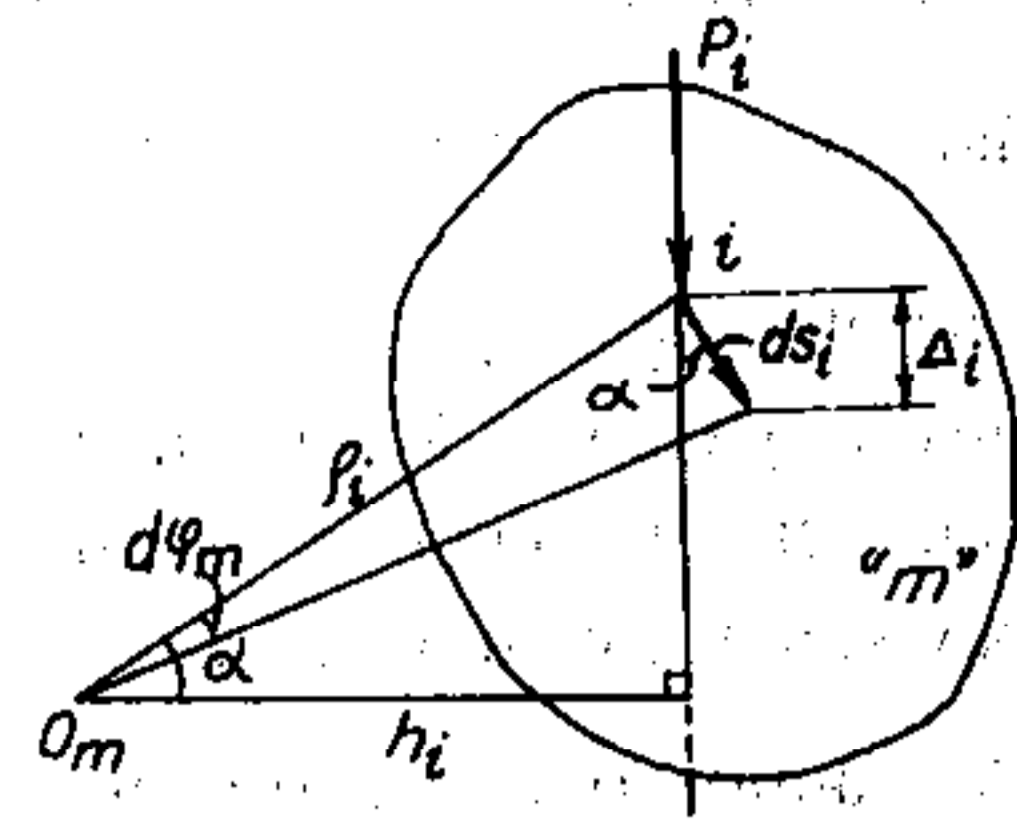
Phương pháp cực được xây dựng trên cơ sở nguyên lý công khả dĩ nhưng áp dụng dưới dạng khác.

Xét một miếng cứng m bất kỳ của hệ biến hình. Giả sử trên miếng cứng m có đặt các lực P_i và trong quá trình hệ chuyển vị khả dĩ, miếng cứng m quay xung quanh một tâm quay tức thời O_m gọi là cực (hình 10.8) với góc vô cùng bé là $d\varphi_m$. Ta hãy tính công khả dĩ của lực P_i trên chuyển dời khả dĩ tương ứng.

$$P_i \cdot \Delta_i = P_i \cdot ds_i \cdot \cos \alpha.$$

Nhưng $ds_i = \rho_i \cdot d\varphi_m = (h_i / \cos\alpha) d\varphi_m$,
 nên $P_i \cdot \Delta_i = P_i h_i d\varphi_m = M_{O_m} d\varphi_m$,
 với M_{O_m} là mômen của lực P_i lấy đối với
 cực O_m của miếng cứng m có đặt lực P_i .

Như vậy, công khả dĩ của lực P_i tác dụng
 trên miếng cứng m có thể biểu diễn dưới
 dạng tích của mômen của lực P_i đối với
 cực O_m và góc quay khả dĩ $d\varphi_m$ của
 miếng cứng m .



Hình 10.8

Do đó, ta có thể phát biểu điều kiện cân bằng như sau:

Nếu hệ biến hình có một bậc tự do ở trong trạng thái cân bằng thì tổng mômen của
 tất cả các ngoại lực tác dụng trên mỗi miếng cứng lấy đối với cực của miếng cứng
 tương ứng nhân với góc quay khả dĩ vô cùng bé của miếng cứng tương ứng phải
 bằng không.

$$\sum_m M_{O_m} d\varphi_m = 0, \quad (10.2)$$

trong đó: M_{O_m} – mômen của các lực tác dụng trên miếng cứng m lấy đối với
 cực O_m của miếng cứng m .

Dấu tổng lấy theo số lượng các miếng cứng trong hệ.

Tích số $M_{O_m} d\varphi_m$ dương khi M_{O_m} và $d\varphi_m$ xoay cùng chiều.

Trong trường hợp đặc biệt, khi cực
 O_m của miếng cứng m ở xa vô
 cùng theo phương X nào đó thì
 miếng cứng sẽ chuyển vị tịnh tiến
 theo phương vuông góc với
 phương X . Lúc này điều kiện cân
 bằng (10.2) có dạng vô định.

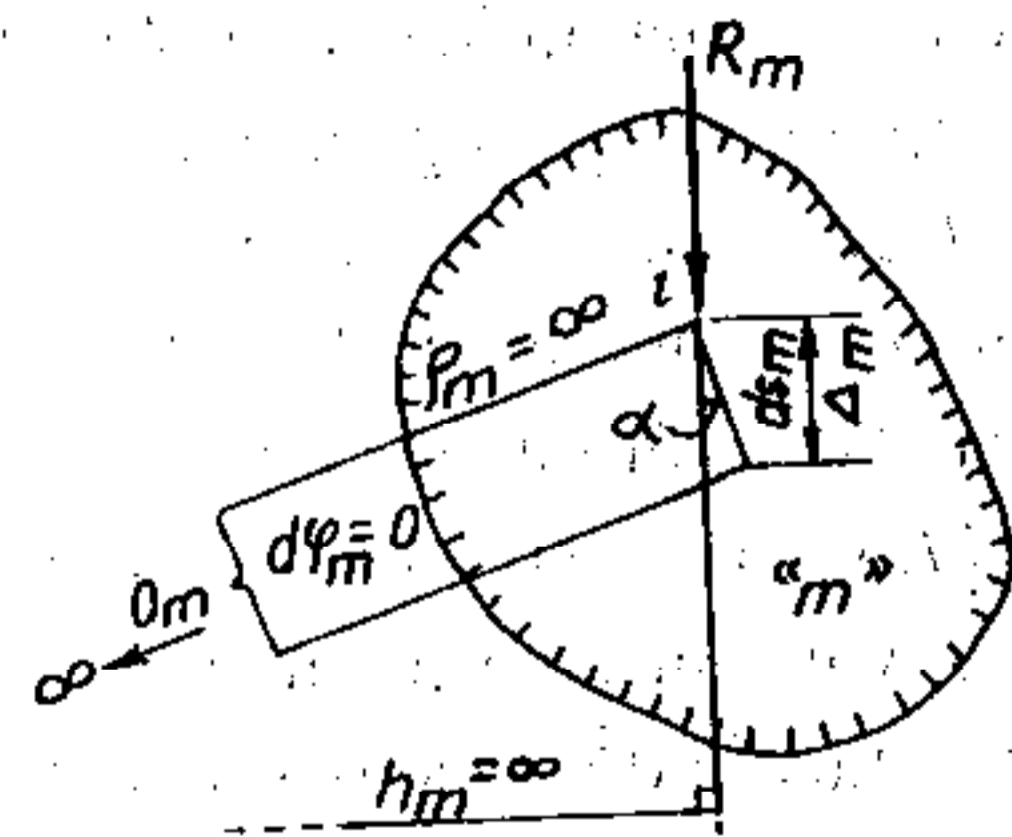
Thật vậy, từ hình 10.9 ta thấy:

$$M_{O_m} = R_m h_m = R_m \cdot \infty = \infty;$$

$$d\varphi_m = \frac{ds_m}{\rho_m} = \frac{\Delta_m}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{h_m} = \frac{\Delta_m}{h_m} = \frac{\Delta_m}{\infty} = 0.$$

trong đó:

R_m – hợp lực của các lực tác dụng trên miếng cứng m ;



Hình 10.9

Δ_m – chuyển vị thẳng của miếng cứng m theo phương của hợp lực R_m .

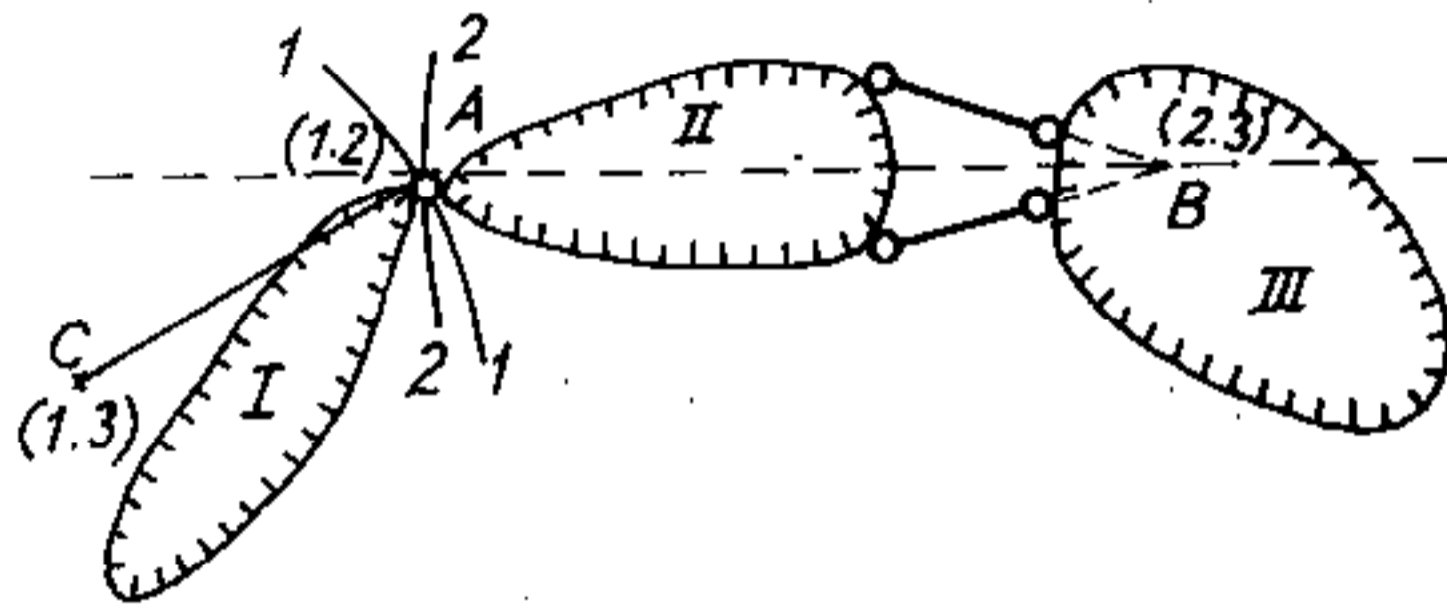
Nếu khử dạng vô định, ta sẽ được: $M_{O_m} d\varphi_m = R_m h_m \frac{\Delta_m}{h_m} = R_m \Delta_m$.

Nội dung phương pháp cực cũng giống như nội dung phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý công khả dĩ nhưng áp dụng điều kiện cân bằng dưới dạng (10.2). Qua điều kiện (10.2) ta thấy: để sử dụng phương pháp cực, cần phải biết cực và góc xoay khả dĩ của từng miếng cứng trong hệ.

Dưới đây là một số quy tắc tìm cực:

1. Nếu hai miếng cứng nối với nhau bằng khớp hoặc hai liên kết thanh thì cực tương hỗ của hai miếng cứng đó ở tại khớp hoặc khớp giả tạo (giao điểm của hai liên kết thanh).
2. Khi chuyển vị khả dĩ, ba cực tương hỗ của ba miếng cứng trong hệ biến hình nằm trên cùng một đường thẳng.

Hình 10.10



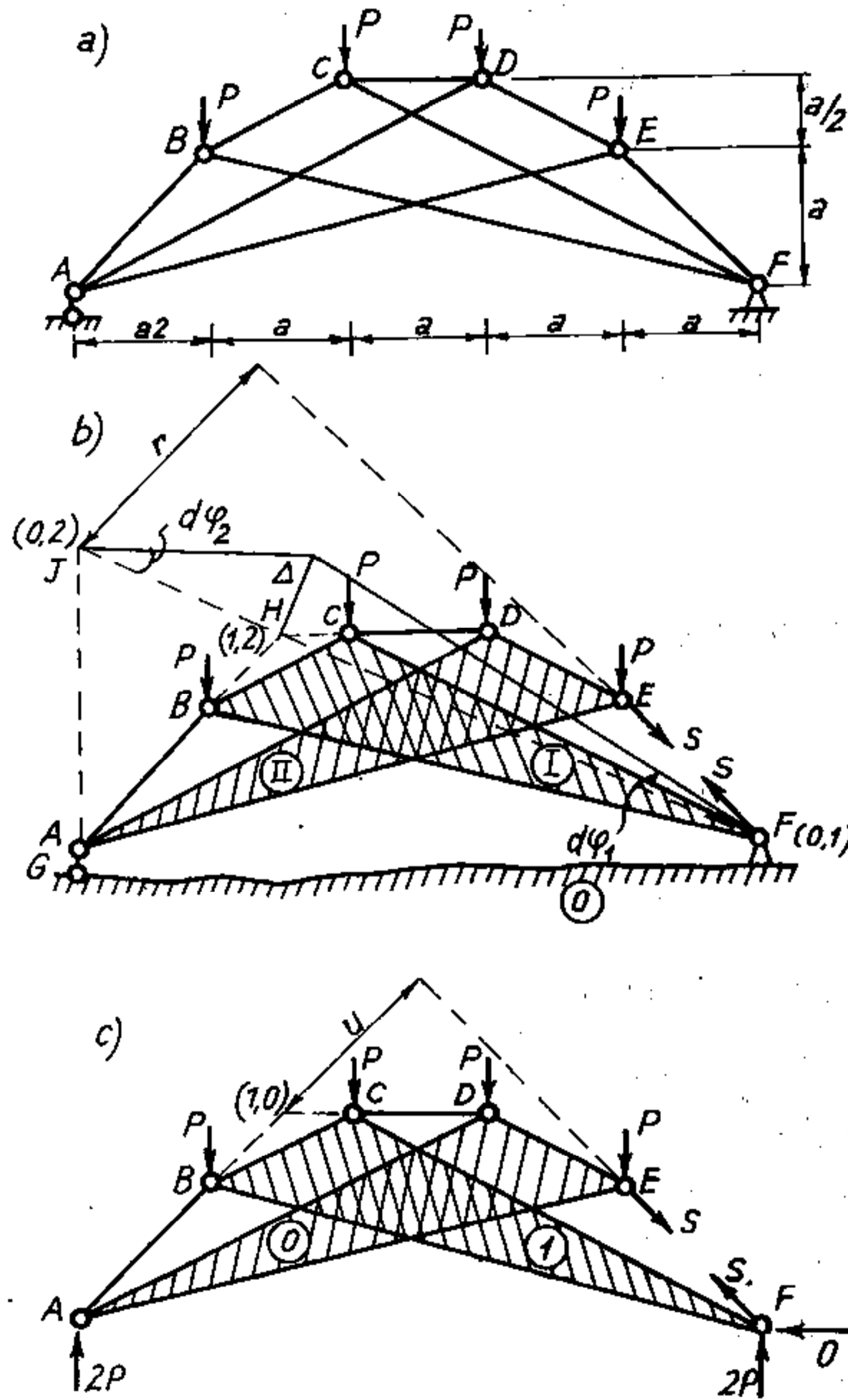
Để chứng minh quy tắc 2, ta xét ba miếng cứng I , II và III (hình 10.10) thuộc một hệ biến hình. Cực tương hỗ $(1,2)$ giữa miếng cứng I và II ở khớp A . Cực tương hỗ $(2,3)$ giữa miếng cứng II và III ở tại khớp giả tạo B . Ta sẽ chứng minh rằng cực tương hỗ $(1,3)$ giữa miếng cứng I và III phải nằm trên đường nối liền hai cực $(1,2)$ và $(2,3)$. Giả thiết cực $(1,3)$ không nằm trên đường $(1,2)-(2,3)$ mà ở tại điểm C ngoài đường $(1,2)-(2,3)$. Lúc này, khi xét chuyển động của miếng cứng I và II đối với miếng cứng III ta nhận thấy miếng cứng I và II quay quanh các cực $(1,3)$ và $(2,3)$. Điểm A thuộc miếng cứng I sẽ chuyển dời theo đường cung $1-1$ với tâm quay C ; nhưng điểm A còn thuộc miếng cứng II nên đồng thời cũng chuyển dời theo đường cung $2-2$ với tâm quay là B . Hai đường cung $1-1$ và $2-2$ cắt nhau nên chuyển động của điểm A không thể xảy ra được. Như vậy trái với điều kiện hệ biến hình có chuyển vị khả dĩ. Điều kiện này chỉ có thể thỏa mãn khi hai đường cung $1-1$ và $2-2$ tiếp xúc với nhau tức là khi điểm cực C nằm trên đường AB . Đó là điều cần chứng minh.

Dựa vào hai quy tắc trên ta có thể tìm được cực tương hỗ của các miếng cứng trong hệ biến hình đồng thời tìm được quan hệ tỷ lệ giữa các góc xoay $d\varphi_m$ của các miếng cứng.

Thứ tự giải bài toán theo phương pháp cực:

- ◆ Loại bỏ liên kết cần xác định phản lực hoặc nội lực S trong đó (xem mục 10.1). Thay thế tác dụng của liên kết bằng phản lực hoặc nội lực S tương ứng đặt theo chiều dương.
- ◆ Phân biệt và đánh số các miếng cứng. Chọn miếng cứng bất động.
- ◆ Xác định cực của các miếng cứng đối với miếng cứng bất động và cực tương hỗ giữa các miếng cứng.
- ◆ Gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ, xác định góc xoay của các miếng cứng có đặt lực theo một góc xoay chọn tùy ý.
- ◆ Thiết lập điều kiện cân bằng (10.2) và từ đó suy ra đại lượng cần tìm S .

Ví dụ 10.2. Xác định nội lực S trong thanh EF của dàn Xukhốp (hình 10.11a).



Hình 10.11

- Loại bỏ thanh EF , thay thế tác dụng bằng lực S như trên hình 10.11b.
- Chọn trái đất làm miếng cứng bất động, trong hệ còn có hai miếng cứng chuyển động là I và II (hình 10.11b).
- Xác định cực của miếng cứng I và II : Miếng cứng I nối với trái đất bằng gối cố định F nên cực $(0,1)$ ở tại F . Miếng cứng I và II nối với nhau bằng hai thanh AB và CD nên cực tương hỗ $(1,2)$ là giao điểm H của hai đường AB và CD . Vấn đề còn tồn tại là phải tìm cực $(0,2)$.

Ta lập luận như sau: Miếng cứng II nối với miếng cứng O bằng thanh AG nên cực $(0,2)$ buộc phải nằm trên đường thẳng AG . Miếng cứng II có liên hệ với miếng cứng I qua cực tương hỗ $(1,2)$. Miếng cứng I có liên hệ với miếng cứng O qua cực tương hỗ $(0,1)$. Theo quy tắc về ba cực tương hỗ của ba miếng cứng trong hệ biến hình thì cực $(0,2)$ buộc phải nằm trên đường nối liền $(0,1)$ và $(1,2)$ tức là đường FH . Như vậy $(0,2)$ là giao điểm J của hai đường GA và FH .

- Cho miếng cứng I quay quanh cực $(0,1)$ một góc $d\varphi_1$ thuận chiều kim đồng hồ, điểm $(1,2)$ thuộc miếng cứng I sẽ chuyển dời một đoạn Δ theo phương vuông góc với FH . Do kết quả chuyển động của miếng cứng I , miếng cứng II cũng chuyển dời quanh cực $(0,2)$ của nó một góc $d\varphi_2$. Vì điểm $(1,2)$ cũng thuộc miếng cứng II mà chuyển dời của điểm $(1,2)$ này bằng $\Delta = FH \cdot d\varphi_1$ nên có thể xác định được $d\varphi_2$ từ điều kiện: $\Delta = FH \cdot d\varphi_1 = JH \cdot d\varphi_2$, suy ra:

$$d\varphi_2 = -\frac{FH}{JH} d\varphi_1 = -\frac{7}{3} d\varphi_1,$$

dấu trừ biểu thị $d\varphi_2$ quay ngược chiều với $d\varphi_1$ (hình 10.11b).

- Áp dụng điều kiện cân bằng (10.2):

$$-(P \cdot 4a + P \cdot 3a) d\varphi_1 - (P \cdot 3a + P \cdot 4a + S \cdot r) d\varphi_2 = 0,$$

$$\text{hay} \quad -7aP d\varphi_1 - (7aP + Sr) \frac{7}{3} d\varphi_1 = 0.$$

$$\text{Suy ra} \quad S = -\frac{10Pa}{r}.$$

Dấu trừ chứng tỏ lực S có chiều ngược với chiều đã giả thiết tức là lực nén.

Chú thích: Đối với những hệ nối với đất bằng các gối tựa tương đương ba liên kết thanh và có thể dễ dàng xác định phản lực trong các gối tựa bằng các phương pháp đã quen biết thì tiện lợi hơn cả là nên loại bỏ trái đất và thay thế bằng các phản lực tựa. Lúc này số lượng miếng cứng cần phải xét sẽ giảm bớt, do đó tính toán sẽ đơn giản hơn.

Ví dụ đối với dàn Xukhôn vừa xét, sau khi bỏ trái đất và thay thế bằng các phản lực (hình 10.11c) ta được một hệ chỉ gồm hai miếng cứng ADE và BCE . Nếu coi miếng cứng ADE là bất động (ký hiệu là miếng cứng O) thì hệ chỉ còn một

miếng cứng chuyển động là BCF (ký hiệu là D). Cực (O, I) của miếng cứng I là giao điểm của hai thanh AB và CD . Cho miếng cứng I chuyển vị khả dĩ một góc $d\varphi_I$ quanh cực (O, I) theo chiều kim đồng hồ và viết điều kiện cân bằng, ta có:

$$\left(-\frac{Pa}{2} + P \cdot \frac{a}{2} - 2P \cdot \frac{7a}{2} - S \cdot u \right) d\varphi_I = 0. \quad \text{Suy ra:} \quad S = -\frac{7Pa}{u}$$

C. Phương pháp điểm tương trung

Cũng như phương pháp cực, phương pháp điểm tương trung được xây dựng trên cơ sở nguyên lý công khả dĩ nhưng điều kiện cân bằng được thể hiện dưới hình thức khác tiện lợi hơn.

Xét miếng cứng m bất kỳ của hệ biến hình trên đó có đặt các lực P_i . Giả sử trong khi hệ chuyển vị khả dĩ, miếng cứng m quay quanh tâm quay tức thời O_m , điểm đặt k_i của lực P_i chuyển dời theo phương vuông góc với bán kính quay ρ_i một đoạn ds_i với vận tốc là V_i (hình 10.12).

Véc tơ vận tốc vuông góc với bán kính quay nên:

$$ds_i = V_i dt;$$

trong đó:

V_i – vận tốc của điểm đặt lực P_i ;

t – thời gian.

Lúc này, điều kiện cân bằng theo nguyên lý công khả dĩ viết như sau:

$$\sum_m P_i \Delta_i = \sum_m P_i ds_i \cos(P_i, ds_i) = \sum_m P_i V_i dt \cdot \cos(P_i, V_i) = 0.$$

Vì điều kiện này thỏa mãn với mọi dt nên ta có thể ước lược dt và có điều kiện:

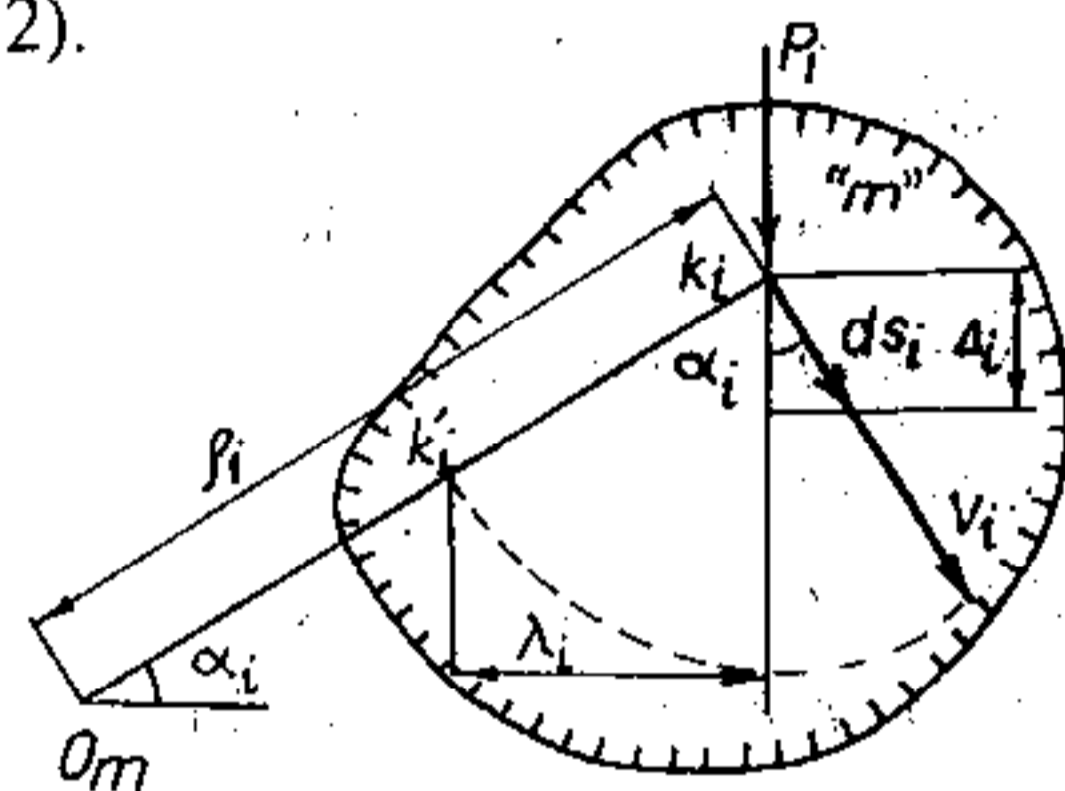
$$\sum_m P_i V_i \cos(P_i, V_i) = 0. \quad (10.3)$$

Biểu thức này biểu thị điều kiện cân bằng dưới dạng công suất khả dĩ.

Nếu quay véc tơ vận tốc V_i (vẽ theo một tỷ lệ nào đó) thuận chiều kim đồng hồ một góc 90° cho trùng với bán kính quay và gọi đầu mút k'_i của véc tơ V_i sau khi quay là *điểm tương trung của điểm đặt k_i của lực P_i* thì từ những phép biến đổi hình học ta có thể biểu diễn điều kiện cân bằng (10.3) như sau:

$$\sum_m P_i V_i \cos(P_i, V_i) = \sum_m P_i V_i \cos \alpha_i = \sum_m P_i \lambda_i = 0.$$

Ký hiệu $M_{k'_i} = P_i \lambda_i$ là mômen của lực P_i đối với điểm tương trung k'_i của điểm đặt lực P_i (quy ước $M_{k'_i}$ là dương khi P_i quay quanh k'_i thuận chiều kim đồng



Hình 10.12

hồ để phù hợp với ý nghĩa công suất), ta có điều kiện cân bằng:

$$\sum_m M_{k'_i} = 0. \quad (10.4)$$

Như vậy, nếu một hệ biến hình có một bậc tự do ở trong trạng thái cân bằng thì tổng mômen của tất cả các lực tác dụng trên hệ đối với các điểm tượng trưng của những điểm đặt lực tương ứng phải bằng không.

Nếu trên hệ có mômen tập trung M thì thay mômen này bằng một ngẫu lực tương đương gồm hai lực P ngược chiều đặt tại hai điểm cách nhau là Δ trong phạm vi miếng cứng đó. Lúc này mỗi lực P có giá trị là M/Δ .

Để áp dụng điều kiện (10.4) ta cần biết cách xác định các điểm tượng trưng. Dưới đây là một số quy tắc để xác định:

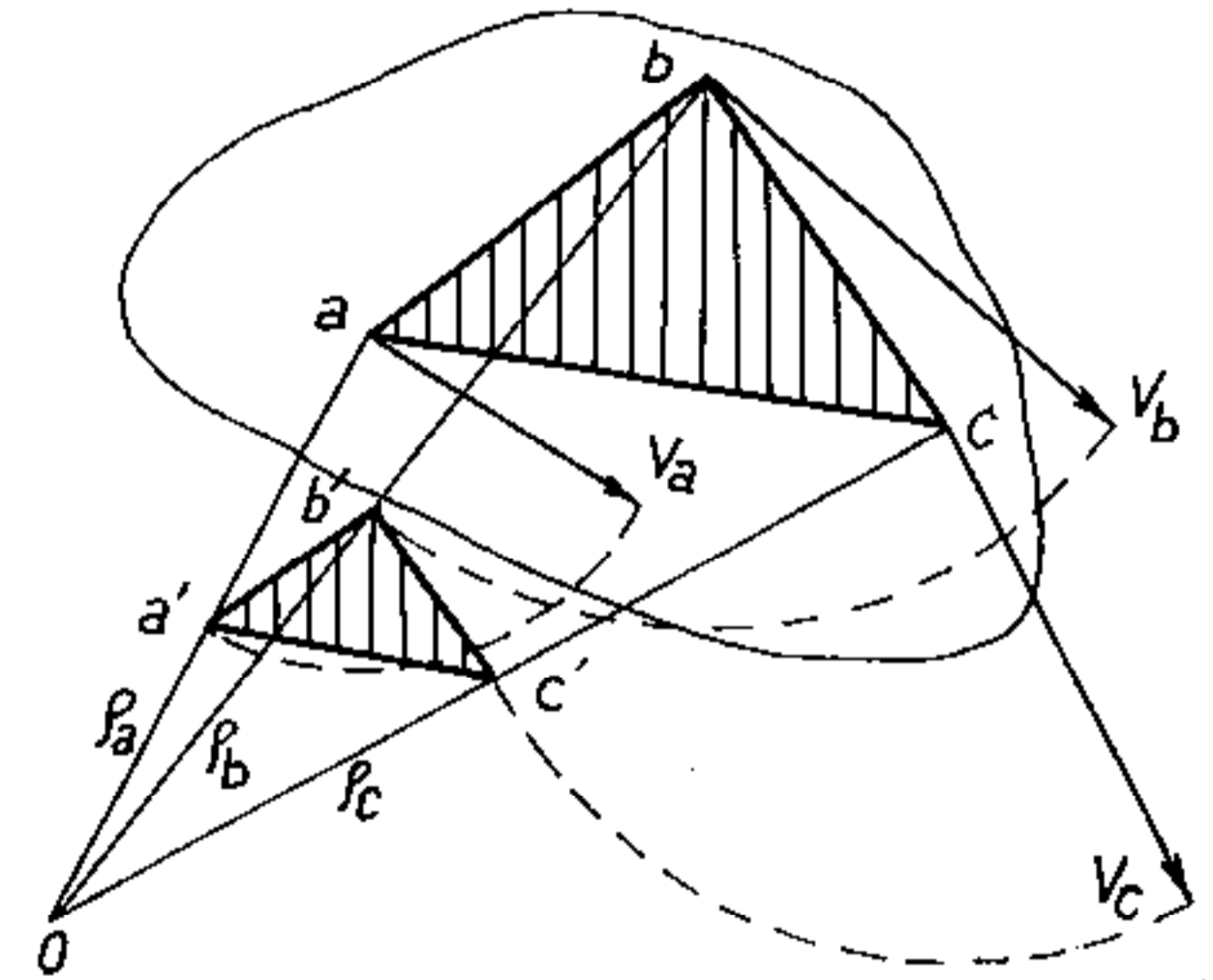
1. Điểm tượng trưng k'_i của điểm k_i nằm trên bán kính vectơ của điểm k_i (theo định nghĩa).
2. Điểm tượng trưng của điểm bất động trùng với chính điểm đó. Thật vậy, khi điểm k_i bất động thì $V_i = 0$ do đó theo định nghĩa k'_i phải trùng với k_i .
3. Hai điểm tượng trưng a', b' của hai điểm a, b cùng trong một miếng cứng (hoặc không cùng trên một miếng cứng nhưng khi hệ có chuyển vị khả dĩ ta biết chắc rằng khoảng cách giữa a và b không đổi) nằm trên đường thẳng song song với đường thẳng nối liền a và b (sẽ chứng minh cùng với quy tắc 4).
4. Mỗi hình trên một miếng cứng có hình tượng trưng là một hình đồng dạng với nó.

Để chứng minh quy tắc 3 và 4, ta xét ba điểm a, b, c trên một miếng cứng nào đó và vẽ các điểm tượng trưng của chúng (hình 10.13) khi miếng cứng này quay quanh tâm quay tức thời O với vận tốc góc ω . Ta có:

$$V_a = \rho_a \omega;$$

$$V_b = \rho_b \omega;$$

$$V_c = \rho_c \omega.$$



Hình 10.13

Quay các vectơ vận tốc một góc 90° theo chiều kim đồng hồ ta được điểm tượng trưng a', b', c' với: $aa' = V_a; \quad bb' = V_b; \quad cc' = V_c.$

Kết hợp với các biểu thức trên, suy ra:
$$\omega = \frac{aa'}{\rho_a} = \frac{bb'}{\rho_b} = \frac{cc'}{\rho_c}.$$

Các tỷ số này chứng tỏ: $a'b'//ab$; $b'c'//bc$; $c'a'//ca$.

Do đó tam giác $a'b'c'$ đồng dạng với tam giác abc . Đó là điều cần chứng minh.

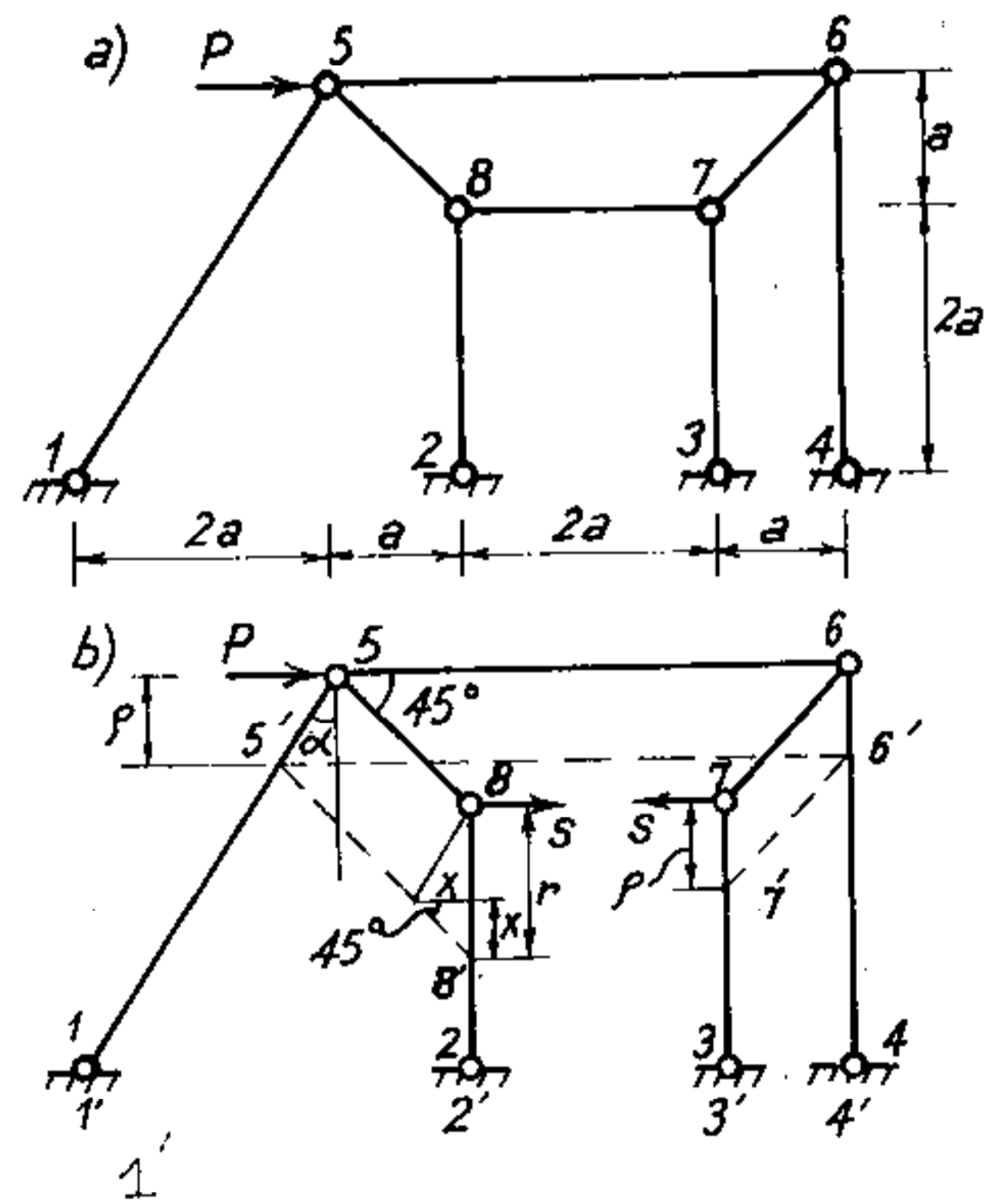
Thứ tự giải bài toán theo phương pháp điểm tượng trưng:

- ◆ Loại bỏ liên kết cần xác định phản lực hoặc nội lực S trong đó. Thay thế tác dụng của liên kết bằng đại lượng S tương ứng đặt theo chiều dương.
- ◆ Phân biệt các miếng cứng và chọn miếng cứng bất động. Đánh số các điểm trên các miếng cứng.
- ◆ Gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ và xác định các điểm tượng trưng của các điểm đặt lực. Muốn vậy ta tìm một điểm có khả năng chuyển động và tự cho trước điểm tượng trưng của nó trên bán kính quay (tức là cho điểm này chuyển dời khả dĩ với vận tốc đã chọn). Tiếp đó xác định điểm tượng trưng của các điểm khác theo điểm đã chọn bằng cách sử dụng bốn quy tắc đã nêu ở trên.
- ◆ Thiết lập điều kiện cân bằng theo (10.4). Từ điều kiện cân bằng này suy ra đại lượng S cần tìm.

Ví dụ 10.3. Tìm nội lực trong thanh 7-8 của hệ trên hình 10.14a.

Loại bỏ liên kết và đặt lực S như trên hình 10.14b.

Chọn trái đất làm miếng cứng bất động. Theo quy tắc 2, các điểm tượng trưng $1', 2', 3', 4'$ trùng với các điểm $1, 2, 3, 4$. Điểm 5 là điểm có chuyển động nên đầu tiên ta chọn điểm tượng trưng $5'$ của nó tại vị trí cách đường 5-6 một khoảng là ρ . Tiếp đó xác định các điểm tượng trưng của 6, 7 và 8 như sau:



Hình 10.14

- **Tìm điểm $8'$** : Điểm 8 thuộc miếng cứng 2-8, miếng cứng này quay quanh tâm 2 nên $8'$ phải nằm trên bán kính quay 2-8. Điểm 8 thuộc miếng cứng 5-8 nên theo quy tắc 3, điểm $8'$ phải nằm trên đường thẳng $5'-8'$ song song với 5-8. Vậy điểm $8'$ là giao điểm của đường 2-8 và đường $5'-8'$ kẻ từ $5'$ song song với 5-8.
- **Tìm điểm $6'$** : Cũng lý luận tương tự, điểm $6'$ là giao điểm của hai đường

thẳng: đường 5'-6' kẻ từ 5' song song với 5-6 (vì điểm 6 cùng chung một miếng cứng với 5) và đường 4-6 (vì 4-6 là bán kính quay của điểm 6).

- *Tìm điểm 7'*: Điểm 7' là giao điểm của hai đường: đường thẳng 6'-7' kẻ từ 6' song song với 6-7 và đường thẳng 3-7.

Như vậy là đã tìm được đầy đủ các điểm tượng trưng của những điểm cần thiết. Áp dụng điều kiện cân bằng (10.4) ta có:

$$P \cdot \rho + S \cdot x - S \cdot \rho = 0.$$

Từ hình 10.14b ta thấy: $r = \rho + x = \rho + \rho \operatorname{tg} \alpha = \rho + \rho \cdot (2a / 3a) = 5\rho / 3$.

Sau khi thay vào điều kiện cân bằng ta được:

$$S = -3P / 2.$$

* Đối chiếu các phương pháp động học

- ❖ Phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý công khả dĩ chỉ thuận tiện đối với những hệ cho phép dễ dàng xác định các chuyển vị khả dĩ, chẳng hạn như đối với những hệ dầm.
- ❖ Phương pháp cực cho phép dễ dàng xác định chuyển vị khả dĩ vì có thể dùng định lý ba cực tương hỗ để xác định các cực. Có thể dùng phương pháp này cho những hệ phức tạp nhưng cũng chỉ nên dùng cho những hệ gồm ít miếng cứng bởi vì khi hệ có nhiều miếng cứng thì việc xác định quan hệ tỷ lệ giữa các góc $d\varphi$ sẽ gặp nhiều khó khăn.
- ❖ Phương pháp điểm tượng trưng thích hợp với những hệ gồm nhiều miếng cứng, dễ dàng xác định được vị trí của tất cả các điểm tượng trưng cần thiết.

* Đối chiếu các phương pháp động học với các phương pháp tĩnh học

Khi tính các hệ đơn giản thì phương pháp tĩnh học tỏ ra có nhiều tiện lợi hơn nhưng khi tính các hệ phức tạp thì phương pháp động học lại tỏ ra có nhiều điểm ưu việt hơn. Một đặc điểm của phương pháp động học là trong điều kiện cân bằng luôn luôn chỉ chứa một ẩn số.

Trong thực hành, nên linh hoạt áp dụng phương pháp thích hợp cho từng hệ. Trong một hệ, với mỗi đại lượng cần tìm ta cũng có thể chọn một phương pháp thích hợp.

10.3. Điều kiện bất biến hình của hệ thanh có đủ số liên kết

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu thêm một phương pháp tiện lợi dùng để xác định sự cấu tạo hình học của hệ thanh phẳng phức tạp có đủ số liên kết.

Tiêu chí về sự bất biến hình theo phương pháp cực cũng dẫn đến quy tắc là ba cực tương hỗ của ba miếng cứng không được nằm trên cùng một đường thẳng.

nên cũng không có gì khác với những điều kiện đã xét ở chương 1.

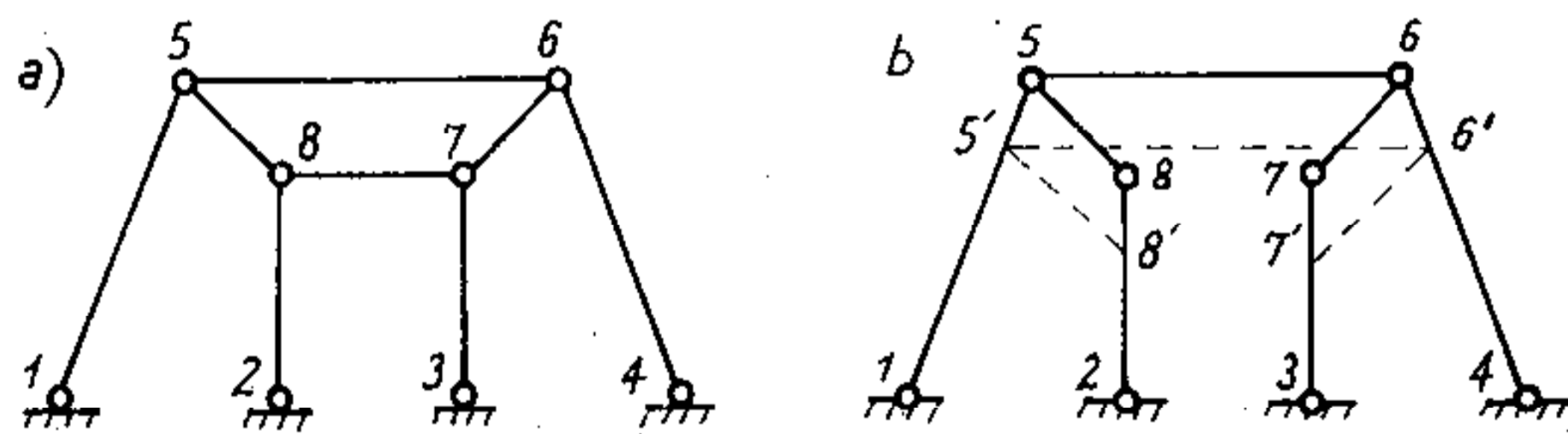
Ở đây chỉ đề cập đến *phương pháp điểm tượng trưng* là phương pháp có hiệu quả đối với những hệ phức tạp. Tiêu chí về sự bất biến hình và không bất biến hình theo phương pháp điểm tượng trưng như sau:

Sau khi đã loại bỏ khỏi hệ một liên kết thanh:

- ◆ Nếu các điểm tượng trưng của các đầu thanh bị loại bỏ nằm trên đường thẳng không song song với chính thanh đó thì hệ bất biến hình.
- ◆ Nếu các điểm tượng trưng của các đầu thanh bị loại bỏ nằm trên đường thẳng song song với chính thanh đó thì hệ không bất biến hình.

Thật vậy, nếu các điểm tượng trưng a' , b' của hai đầu thanh ab bị loại bỏ song song với ab thì theo quy tắc thứ ba dùng để xác định điểm tượng trưng (xem mục 10.2) ta có thể kết luận: trong quá trình hệ chuyển vị khả dĩ, hai điểm a và b vẫn giữ nguyên khoảng cách. Như vậy, nếu lại đặt thanh ab vào vị trí cũ thì thanh này cũng không ngăn cản được chuyển vị khả dĩ (vì thanh ab chỉ ngăn cản được chuyển vị theo phương ab mà khoảng cách này lại không đổi) và toàn hệ vẫn tồn tại chuyển vị vô cùng bé lúc là hệ không bất biến hình. Còn nếu $a'b'$ không song song với ab thì trong quá trình hệ chuyển vị khả dĩ, khoảng cách giữa hai điểm a và b có thay đổi. Sự có mặt của thanh ab trong hệ sẽ ngăn cản sự thay đổi khoảng cách giữa a và b . Do đó hệ không chuyển dời vô cùng bé và bất biến hình.

Ví dụ 10.4. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ có đủ số liên kết cho trên hình 10.15a.



Hình 10.15

Loại bỏ thanh 7–8 và xác định các điểm tượng trưng theo quy cách tương tự như đã nói ở ví dụ 10.3 (hình 10.15b) ta thấy hai điểm tượng trưng $7'$ và $8'$ nằm trên đường thẳng song song với thanh 7–8 (vì hệ đối xứng) nên hệ không bất biến hình.

Ví dụ 10.5. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ có đủ số liên kết cho trên hình 10.14a.

Loại bỏ liên kết, và xác định các điểm tượng trưng như trên hình 10.14b. Ta

thấy điểm 7' và 8' nằm trên đường thẳng không song song với thanh 7-8. Vậy hệ bất biến hình.

10.4. Cách tính hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động

Cách tính hệ chịu tải trọng di động (vẽ đường ảnh hưởng) theo phương pháp động học cũng dựa trên cơ sở lý luận đã trình bày khi tính hệ với tải trọng bất động nhưng ở đây tải trọng luôn luôn chỉ là một lực $P=1$ di động trên hệ.

Sau khi loại bỏ liên kết cần tìm đường ảnh hưởng của đại lượng S trong đó và thay tác dụng của liên kết bằng các lực S , ta gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ rồi thiết lập điều kiện cân bằng. Ta có:

$$\sum P_i \cdot \Delta_i = 0.$$

Trong trường hợp này trên hệ chỉ có một lực $P=1$ và các lực S nên ta có thể khai triển biểu thức trên như sau:

$$1 \cdot \Delta_P + S \cdot \Delta_S = 0,$$

trong đó:

Δ_S – chuyển vị khả dĩ theo phương của các lực S , vì S không thay đổi vị trí nên Δ_S không đổi;

Δ_P – chuyển vị khả dĩ vô cùng bé theo phương của lực $P=1$. Vì $P=1$ di động nên Δ_P cũng thay đổi theo vị trí của lực $P=1$.

Như vậy, khi $P=1$ di động trên đường xe chạy, nếu ta xác định giá trị Δ_P tương ứng với từng vị trí của P và dựng thành đồ thị thì sẽ được *biểu đồ chuyển vị* Δ_P .

Do đó:

$$d.a.h.S = -\frac{\Delta_P}{\Delta_S} \quad (10.5)$$

Biểu thức này chứng tỏ:

*Đường ảnh hưởng của đại lượng S đồng dạng với biểu đồ chuyển vị theo phương của lực di động $P=1$ trong hệ đã loại bỏ liên kết và các tung độ của *d.a.h.* S có giá trị tỷ lệ với tung độ của biểu đồ Δ_P theo hệ số tỷ lệ $-1/\Delta_S$.*

- Nếu $\Delta_S > 0$ (chuyển vị cùng chiều với S) thì *d.a.h.* S ngược dấu với biểu đồ Δ_P .
- Nếu $\Delta_S < 0$ (chuyển vị ngược chiều với S) thì *d.a.h.* S cùng dấu với biểu đồ Δ_P .

Dấu của Δ_P được xem là dương khi Δ_P cùng chiều với lực $P=1$.

Như vậy, muốn tìm *d.a.h.* S ta cần tìm được biểu đồ Δ_P và giá trị của đại lượng Δ_S .

Ta sẽ lần lượt nghiên cứu cách xác định những đại lượng đó theo hai phương pháp: *phương pháp cực* và *phương pháp điểm tương trưng*.

A. Phương pháp cực

Thứ tự vẽ đ.a.h.S theo phương pháp cực:

1. Loại bỏ liên kết cần vẽ đ.a.h của đại lượng S trong đó. Đặt các lực S tương ứng vào vị trí liên kết bị loại.
2. Phân biệt và đánh số các miếng cứng. Chọn trái đất làm miếng cứng bất động. (Cũng có thể chọn miếng cứng khác nhưng bất tiện vì sau khi vẽ được đường ảnh hưởng đối với miếng cứng bất động đó ta lại phải điều chỉnh về đ.a.h. đối với miếng cứng bất động là trái đất).
3. Xác định cực của các miếng cứng đối với trái đất và cực quay tương hỗ giữa các miếng cứng.
4. Vẽ biểu đồ chuyển vị theo phương của lực $P=I$ tương ứng với các vị trí của lực $P=I$ di động trên công trình.

Để vẽ biểu đồ Δ_p , ta cần dựa vào những nhận xét sau:

- ❖ Đường chuyển vị của miếng cứng bất động trùng với đường chuẩn của biểu đồ Δ_p (đường chuẩn đặt vuông góc với phương của lực $P=I$).
- ❖ Đường chuyển vị của mỗi miếng cứng chuyển động là một đường thẳng cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực quay của miếng cứng đó đối với trái đất (đóng theo phương song song với lực $P=I$).
- ❖ Hai đường chuyển vị của hai miếng cứng cắt nhau tại điểm ứng dưới cực quay tương hỗ của hai miếng cứng đó (đóng theo phương song song với lực $P=I$).

Như vậy, nếu đã biết các điểm cực thì sau khi cho một miếng cứng chuyển vị tùy ý ta sẽ vẽ được đường chuyển vị của các miếng cứng còn lại, tức là vẽ được biểu đồ Δ_p . Tung độ của biểu đồ hướng theo chiều của $P=I$ mang dấu dương.

5. Xác định chuyển vị Δ_S . Có thể xảy ra hai trường hợp:

- ❖ Đại lượng S là các mômen: lúc này liên kết bị loại là liên kết mômen (cách loại liên kết như trên hình 10.16). Chuyển vị Δ_S chính là tổng đại số các góc xoay của hai miếng cứng k và m có đặt lực S (hình 10.16).

$$\Delta_S = \pm d\varphi_k \pm d\varphi_m, \quad (10.6)$$

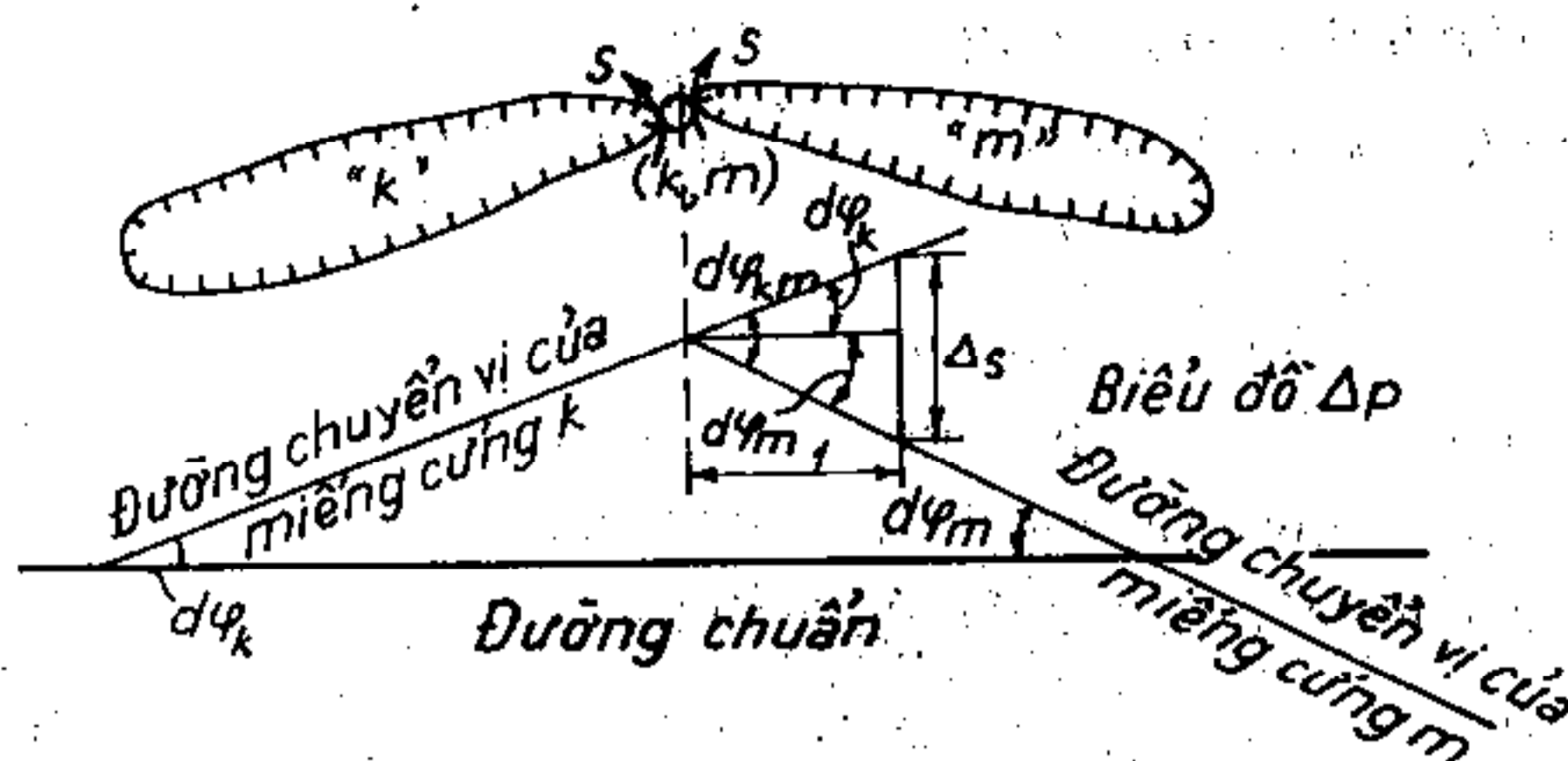
$d\varphi_k$ hoặc $d\varphi_m$ sẽ dương khi những góc xoay này quay cùng chiều với mômen S đặt trên miếng cứng tương ứng.

Cũng có thể quan niệm Δ_S là góc xoay tương đối giữa hai miếng cứng có đặt đại lượng S khi hệ chuyển vị khả dĩ. Từ hình 10.16 ta dễ dàng thấy:

$$\Delta_S = \pm d\varphi_k \pm d\varphi_m = \pm d\varphi_{km} \quad (10.7)$$

$d\varphi_{km}$ là chuyển vị góc tương đối giữa hai miếng cứng k và m trên biểu đồ Δ_P .

Hình 10.16



Để xác định dấu của Δ_S theo quan niệm chuyển vị tương đối, ta giả thiết coi một miếng cứng k hoặc m là cố định, chẳng hạn coi miếng cứng k cố định và dựa vào biểu đồ Δ_P để xem chiều quay của miếng cứng chuyển động m so với miếng cứng cố định k . Nếu miếng cứng m quay cùng chiều với mômen S đặt trên miếng cứng m thì Δ_S mang dấu dương bởi vì lúc này mômen S sẽ sinh công dương.

Trong thực hành, ta có thể tìm tung độ biểu thị chuyển vị Δ_S trên biểu đồ Δ_P như sau: "Nếu trên biểu đồ chuyển vị Δ_P từ điểm ứng dưới cực tương hỗ của hai miếng cứng có đặt các mômen S ta dóng song song với đường chuẩn một đoạn bằng đơn vị thì tại vị trí này phân tung độ nằm giữa hai đường chuyển vị của hai miếng cứng có đặt mômen S chính là tung độ biểu thị giá trị Δ_S ".

Thật vậy, từ trên hình vẽ 10.16, ta thấy phân tung độ này bằng:

$$\pm 1 \cdot d\varphi_k \pm 1 \cdot d\varphi_m = \pm 1 \cdot d\varphi_{km} = \Delta_S.$$

◇ Đại lượng S là lực: lúc này liên kết bị loại bỏ là liên kết thanh và Δ_S chính là tổng đại số các chuyển vị theo phương S của hai điểm đặt lực S hay nói khác đi là độ biến thiên khoảng cách giữa hai điểm đặt lực S .

• Nếu quan niệm Δ_S là tổng các chuyển vị theo phương của mỗi lực S riêng biệt thì (hình 10.17):

$$\Delta_S = \pm \rho_k \cdot d\varphi_k \pm \rho_m \cdot d\varphi_m, \quad (10.8)$$

trong đó:

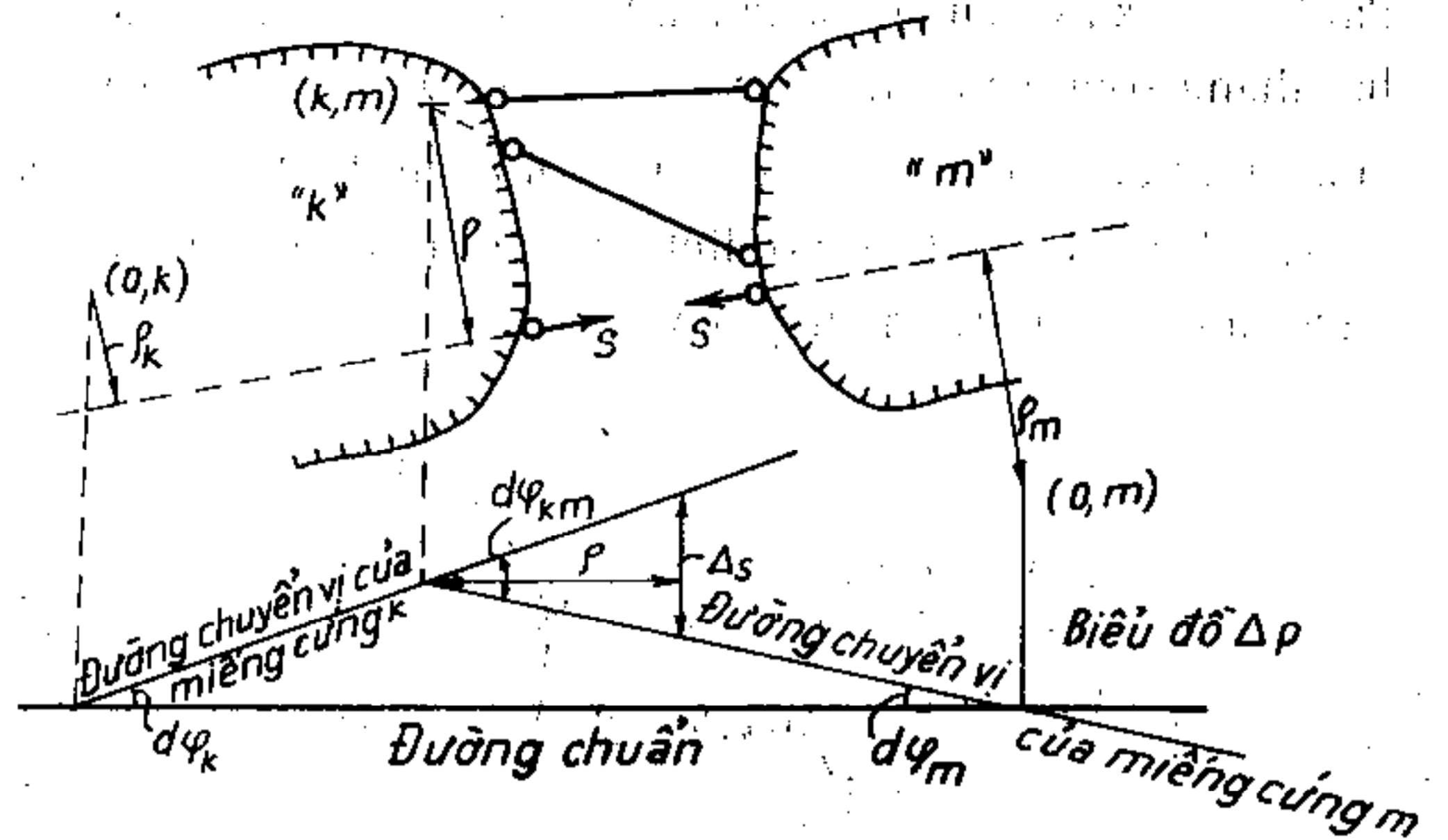
$d\varphi_k$ và $d\varphi_m$ – góc xoay của miếng cứng k và m có đặt lực S ;

ρ_k và ρ_m – khoảng cách từ các cực của miếng cứng k và m đối với trái đất đến phương tác dụng của các lực S .

Tích số $\rho_k \cdot d\varphi_k$ được xem là dương khi đường chuyển vị của miếng cứng k quay một góc $d\varphi_k$ cùng chiều với chiều quay của lực S đặt trên miếng cứng k quanh cực (O, k) .

Trong thực hành người ta ít dùng cách xác định Δ_S theo kiểu này.

Hình 10.17



- Nếu quan niệm Δ_S là chuyển vị tương đối của hai điểm đặt lực S theo phương của S thì khi coi một miếng cứng có đặt lực S là bất động, chẳng hạn miếng cứng k , ta có:

$$\Delta_S = \pm \rho \cdot d\varphi_{km}, \quad (10.9)$$

trong đó:

$d\varphi_{km}$ – góc xoay tương hỗ giữa hai miếng cứng k và m có đặt các lực S trong quá trình hệ chuyển vị khả dĩ;

ρ – khoảng cách từ cực tương hỗ (k, m) của hai miếng cứng k và m đến phương tác dụng của các lực S .

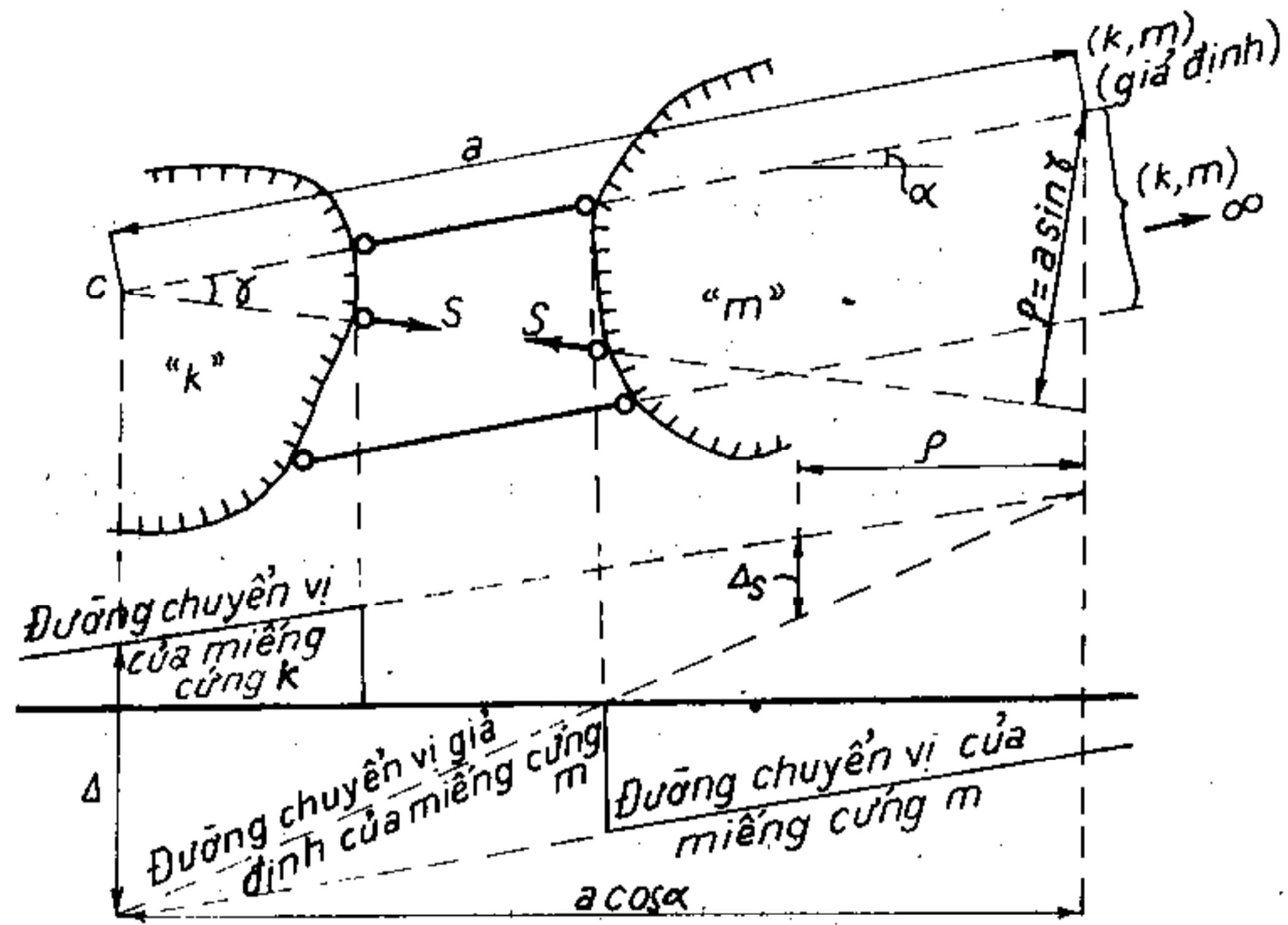
Để xác định dấu của Δ_S , ta coi một miếng cứng có đặt lực S (chẳng hạn miếng cứng k) là bất động rồi trên biểu đồ Δ_P ta tưởng tượng quay miếng cứng còn lại (miếng cứng m) từ miếng cứng bất động đến vị trí của nó trên biểu đồ Δ_P . Nếu chiều quay này cùng chiều với lực S đặt trên miếng cứng chuyển động thì Δ_S có giá trị dương.

Trong thực hành người ta thường dùng cách xác định Δ_S theo quan niệm chuyển vị tương đối vì đơn giản hơn cách trên.

Ngoài ra, để tìm được tung độ biểu thị chuyển vị Δ_S trên biểu đồ Δ_P , ta thực hiện như sau: "Nếu trên biểu đồ Δ_P , từ cực quay tương hỗ của hai đường chuyển vị của hai miếng cứng có đặt lực S ta dựng song song với đường chuẩn một đoạn bằng khoảng cách từ cực tương hỗ của hai miếng cứng trên hệ thực đến phương tác dụng của các lực S thì ở tại vị trí này, phân tung độ nằm giữa hai đường chuyển vị của hai miếng cứng đang xét chính là tung độ biểu thị giá trị Δ_S ".

Thật vậy, từ hình 10.17 ta thấy phân tung độ này bằng $\rho d\varphi_{km}$ tức là bằng Δ_S .

Trường hợp đặc biệt, khi cực tương hỗ (k, m) của hai miếng cứng k và m có đặt lực S ở xa vô cùng, tức là khi hai miếng cứng này được nối với nhau bằng hai thanh song song, ta có $\rho = \infty$ còn $d\varphi_{km} = 0$ bởi vì hai đường chuyển vị của hai miếng cứng này song song với nhau (hình 10.18). Do đó $\Delta_S = \rho \cdot d\varphi_{km} = \infty \cdot 0$, Vậy Δ_S có dạng vô định. Ta sẽ tìm cách khử dạng vô định và đề ra cách tìm Δ_S cho trường hợp này.



Hình 10.18

Giả thiết tâm quay (k, m) không ở xa vô cùng mà nằm ở một vị trí giả định nào đó trên đường kéo dài của một trong hai thanh song song nối liền hai miếng cứng, chẳng hạn ở thanh trên cách giao điểm C của lực S với thanh này một khoảng tùy ý là a . Lúc này đường chuyển vị của hai miếng cứng phải cắt nhau dưới cực giả định (k, m) . Nếu giữ nguyên đường chuyển vị của một miếng cứng (chẳng hạn miếng cứng k) và vẽ lại đường chuyển vị của miếng cứng thứ hai (miếng cứng m) để sao cho hai đường này cắt nhau tại điểm ứng dưới cực giả định (k, m) và sao cho tung độ ứng dưới điểm C không thay đổi thì ta có thể xác định đại lượng Δ_S theo quy cách đã trình bày ở trên với cực tương hỗ giả định (k, m) và các đường chuyển vị giả định (hình 10.18). Để xác nhận cách làm như vậy là đúng ta chỉ cần chứng minh giá trị Δ_S tìm theo cách này luôn luôn không đổi với bất kỳ giá trị nào của a và ngay cả khi $a = \infty$.

Thật vậy, từ hai tam giác đồng dạng trên biểu đồ Δ_P , ta có: $\Delta_S = \Delta \cdot \rho / \cos \alpha$ nhưng $\rho = a \sin \gamma$, nên:

$$\Delta_S = \Delta \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha} \quad (10.10)$$

Δ , α và γ không phụ thuộc a nên Δ_S cũng không phụ thuộc a và biểu thức này nghiệm đúng với bất kỳ giá trị nào của a , ngay cả khi $a = \infty$. Đó là điều cần chứng minh.

Trong thực hành, khi gặp trường hợp cực tương hỗ của hai miếng cứng có đặt lực S ở xa vô cùng, ta có thể không cần xác định tung độ biểu thị Δ_S mà chỉ cần biểu thị phần tung độ nằm giữa hai đường chuyển vị song song theo Δ_S cũng được. Phần tung độ này bằng:

$$\Delta = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} \Delta_S \quad (10.11)$$

trong đó:

α – góc nghiêng của hai thanh song song so với đường chuẩn;

γ – góc hợp giữa phương của S và phương của hai thanh song song.

6. Vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S

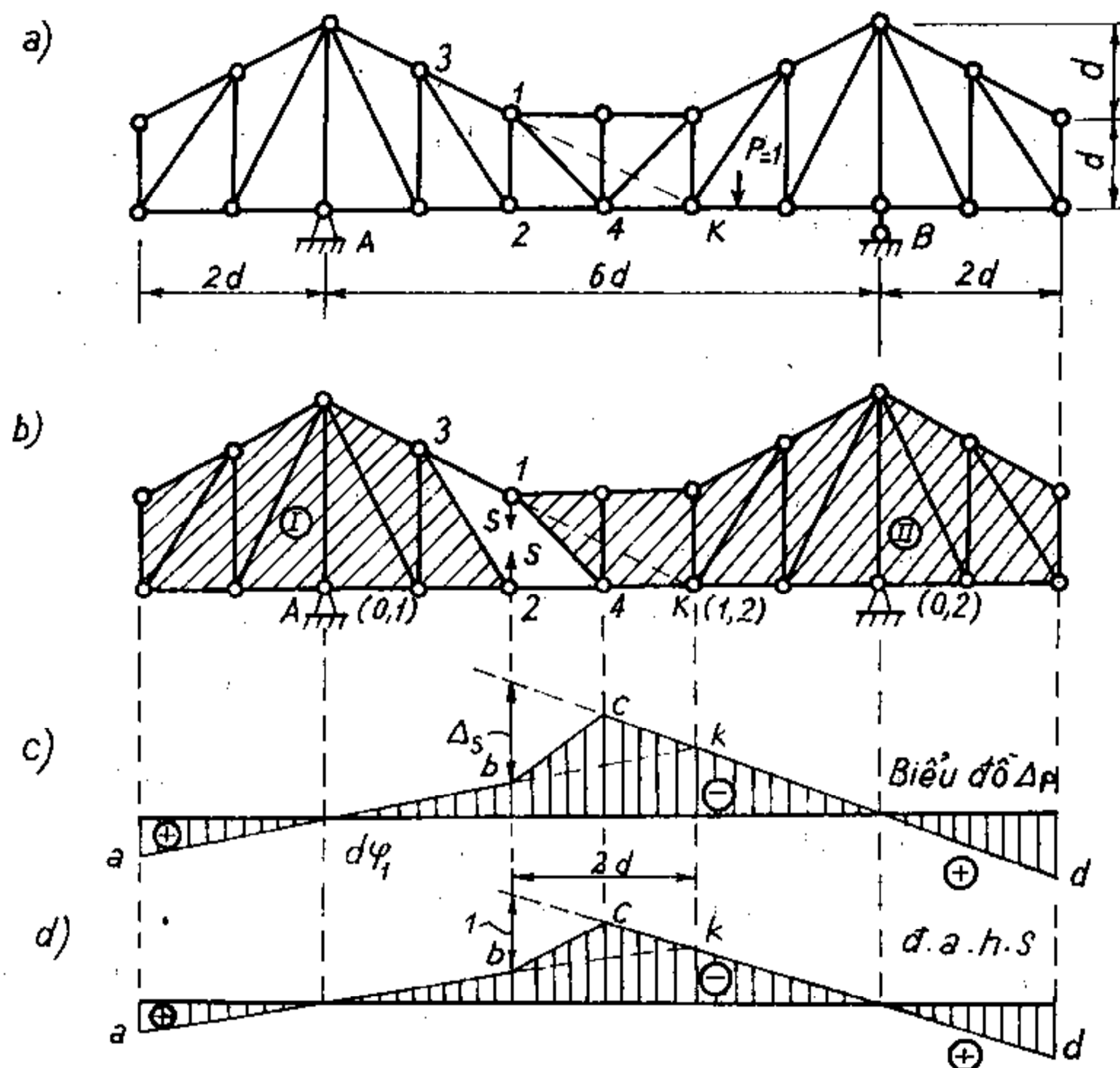
Theo biểu thức (10.5), muốn tìm *d.a.h.S* ta chỉ cần nhân các tung độ của biểu đồ Δ_P với hệ số $-1/\Delta_S$. Như vậy ta có thể vẽ *d.a.h.S* theo quy cách sau:

- ❖ *Dạng d.a.h.S*: *d.a.h.S* đồng dạng với biểu đồ Δ_P .
- ❖ *Đơn vị của d.a.h.S*: Phần tung độ nào biểu thị giá trị Δ_S trên biểu đồ Δ_P chính là phần tung độ biểu thị đơn vị của *d.a.h.S*.
- ❖ *Dấu của d.a.h.S*:
 - nếu $\Delta_S > 0$ thì *d.a.h.S* ngược dấu với biểu đồ Δ_P ;
 - nếu $\Delta_S < 0$ thì *d.a.h.S* cùng dấu với biểu đồ Δ_P .

Ví dụ 10.6. Vẽ đường ảnh hưởng của nội lực trong thanh 1-2 của dàn trên hình 10.19a khi đường xe chạy dưới.

1. Loại bỏ liên kết và đặt lực S như trên hình 10.19b.
2. Lấy trái đất làm miếng cứng bất động, trên hệ còn hai miếng cứng chuyển động là I và II.
3. *Xác định cực của các miếng cứng.* Cực (0,1) ở tại gối cố định A, cực tương hỗ (1,2) là giao điểm của hai thanh nối hai miếng I và II, hai thanh này cắt nhau tại K. Cực (0,2) là giao điểm của hai đường thẳng: đường kéo dài trục của gối tựa di động và đường thẳng nối liền hai cực tương hỗ (0,1) và (1,2). Giao điểm này ở tại điểm B.
4. *Vẽ biểu đồ Δ_P .* Cho miếng cứng I quay quanh cực (0,1) một góc $d\varphi_1$ ngược chiều kim đồng hồ thì đường chuyển vị của miếng cứng này cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực (0,1) và hợp với đường chuẩn một góc $d\varphi_1$ ngược

chiều kim đồng hồ (đường ak trên hình 10.19c). Đường chuyển vị của miếng cứng II cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực $(0,2)$ và cắt đường chuyển vị của miếng cứng I tại điểm ứng dưới cực tương hỗ $(1,2)$ (đường kd trên hình 10.19c). Khi $P=I$ di động trên đường biên dưới, phân tích dụng của các đường chuyển vị của miếng cứng I và II là những đoạn ab và cd với b và c lần lượt là điểm ứng dưới mắt 2 và mắt 4 trên đường chuyển vị của miếng cứng I và II . Phân biểu đồ Δ_P giữa hai đoạn này, tức là giữa hai miếng cứng I và II được xác định bằng đoạn bc vì điểm b và c lần lượt xác định chuyển vị của điểm 2 và điểm 4 thuộc miếng cứng 2-4. Như vậy là đã vẽ xong biểu đồ Δ_P . Phân biểu đồ nằm dưới đường chuẩn mang dấu dương còn phần nằm trên mang dấu âm.



Hình 10.19

5. Xác định Δ_S : Trên biểu đồ Δ_P , từ điểm k ứng dưới cực tương hỗ $(1,2)$ dóng song song với đường chuẩn một đoạn bằng khoảng cách từ cực $(1,2)$ trên hệ thực đến phương của lực S (đoạn này bằng $2d$), phần tung độ nằm giữa hai đường chuyển vị của hai miếng cứng I và II tại vị trí đó chính là Δ_S .

Để tìm dấu của Δ_S trên biểu đồ Δ_P ta tưởng tượng coi miếng cứng I như bất động và quay đường chuyển vị của miếng cứng II từ đường chuyển vị của miếng cứng I tới vị trí của nó. Chiều quay này thuận chiều kim đồng hồ.

Trên hệ biến hình, đứng tại cực tương hỗ $(1,2)$, tưởng tượng quay miếng cứng II thuận chiều kim ta thấy chiều quay này ngược chiều với lực S đặt tại miếng cứng II . Vậy Δ_S là âm.

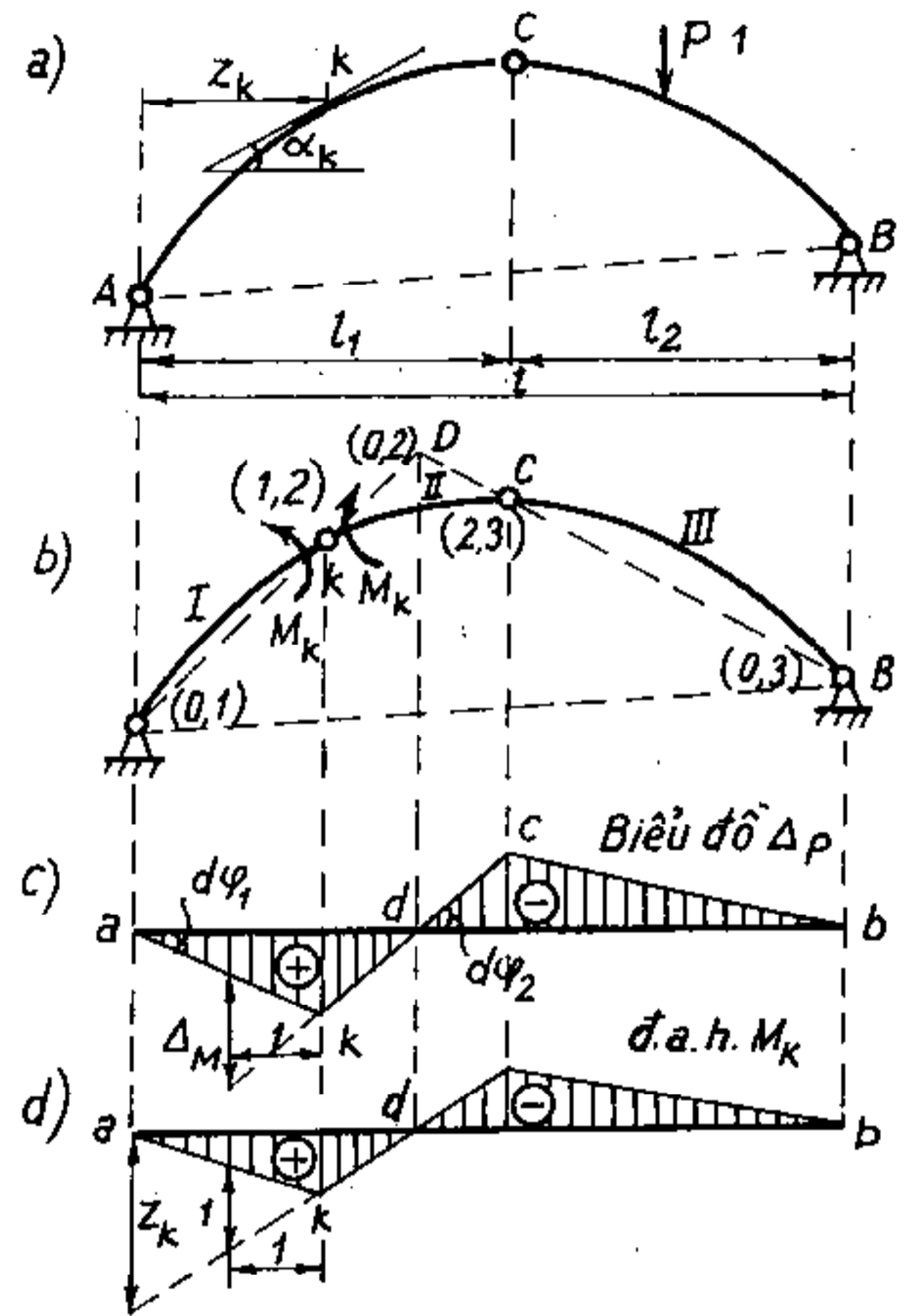
6. Vẽ đ.a.h.S: Vì Δ_S âm nên đ.a.h.S đồng dạng với Δ_P và cùng dấu. Phân tung độ trên đ.a.h.S tương ứng với phân tung độ biểu thị Δ_S trên biểu đồ Δ_P chính là đơn vị của các tung độ đ.a.h.S.

Ví dụ 10.7. Vẽ đ.a.h. mômen uốn, lực cắt và lực dọc tại tiết diện k trong vòm ba khớp trên hình 10.20a.

1. Đường ảnh hưởng M_k

Loại bỏ liên kết và đặt các mômen uốn M_k như trên hình 10.20b. Coi trái đất là miếng cứng bất động và đánh số 0, trên hệ còn ba miếng cứng chuyển động I, II và III . Các cực $(0,1)$ và $(0,3)$ ở tại các khớp A và B . Các cực tương hỗ $(1,2)$ và $(2,3)$ ở tại k và C . Cực $(0,2)$ là giao điểm của hai đường thẳng: đường thẳng nối cực $(0,1)$ với cực $(1,2)$ và đường thẳng nối cực $(0,3)$ với cực $(2,3)$.

Để vẽ biểu đồ Δ_P , ta cho miếng cứng I xoay thuận chiều kim đồng hồ một góc $d\varphi_1$ quanh cực $(0,1)$. Trên biểu đồ Δ_P đường chuyển vị của miếng cứng này là đường ak .



Hình 10.20

Đường chuyển vị của miếng cứng II cắt đường chuyển vị của miếng cứng I tại điểm ứng dưới cực $(1,2)$ và cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực $(0,2)$. Đường chuyển vị của miếng cứng III cắt đường chuyển vị của miếng cứng II tại điểm ứng dưới cực $(2,3)$ và cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực $(0,3)$. Biểu đồ Δ_P vẽ trên hình 10.20c.

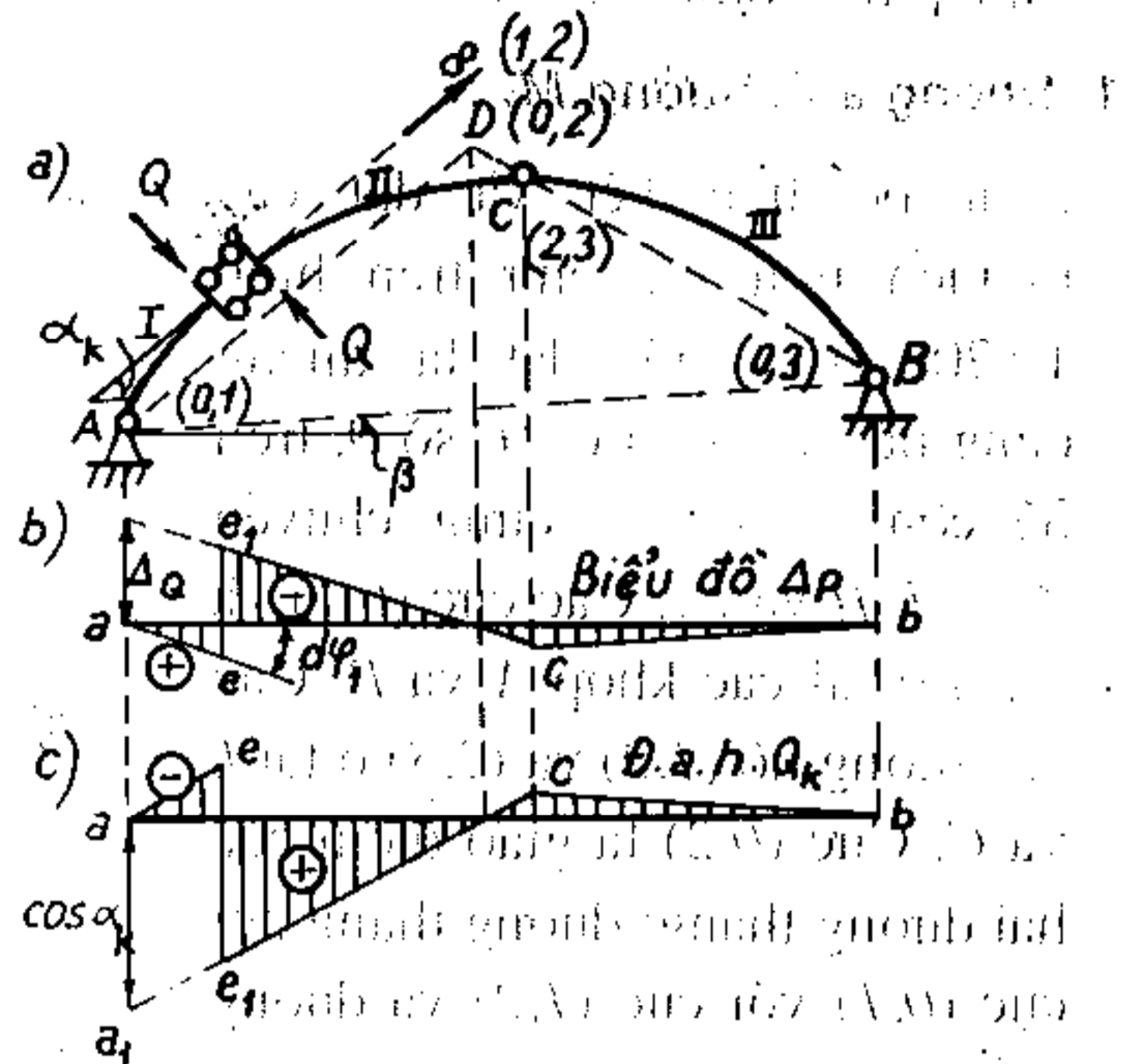
Để xác định Δ_M , trên biểu đồ Δ_P , từ điểm ứng dưới cực $(1,2)$ ta dóng song song với đường chuẩn một đoạn bằng đơn vị rồi vẽ phân tung độ khép giữa hai đường chuyển vị của hai miếng cứng I và II . Phân tung độ này chính là Δ_M . Nếu tưởng tượng cho miếng cứng I cố định, ta thấy miếng cứng II quay ngược chiều kim đồng hồ đối với miếng cứng I . Chiều quay này ngược chiều với

chiều quay mômen M_k đặt trên miếng cứng II nên $\Delta_M < 0$.
 Trong trường hợp này, *d.a.h.* M_k đồng dạng và cùng dấu với biểu đồ Δ_P (hình 10.20d). Đơn vị của *d.a.h.* M_k là phân tung độ tương ứng với phân tung độ biểu thị Δ_M trên biểu đồ Δ_P .

2. Đường ảnh hưởng Q_k

Cách loại bỏ liên kết, cách đặt các lực Q và cách phân biệt các miếng cứng được trình bày trên hình 10.21a.

Các cực (0,1), (0,3) của miếng I và III ở tại khớp A và B . Cực tương hỗ (2,3) ở tại khớp C . Cực tương hỗ (1,2) ở xa vô cùng theo phương của hai thanh song song nối hai miếng cứng I và II . Cực (0,2) là giao điểm của hai đường: đường thẳng nối cực (0,3) với cực (2,3) và đường thẳng nối cực (0,1) với cực (1,2) tức là đường đi qua cực (0,1) và song song với phương của hai thanh song song (nghiêng so với phương ngang một góc α_k).



Hình 10.21

Để vẽ biểu đồ Δ_P , ta cho miếng cứng I quay một góc bất kỳ $d\varphi_1$, và vẽ đường chuyển vị ae tương ứng. Đường chuyển vị của miếng cứng II cắt đường chuyển vị của miếng cứng I ở điểm ứng dưới cực (1,2), nhưng cực (1,2) ở xa vô cùng nên hai đường này phải song song với nhau. Ngoài ra đường này còn phải cắt đường chuẩn ở điểm ứng dưới cực (0,2). Đường chuyển vị của miếng cứng III cắt đường chuyển vị của miếng cứng II ở điểm ứng dưới cực (2,3) và cắt đường chuẩn ở điểm ứng dưới cực (0,3). Biểu đồ Δ_P vẽ trên hình 10.21b.

Trong trường hợp này, cực (1,2) ở xa vô cùng, ta có thể không cần xác định phân tung độ biểu thị Δ_Q mà xác định giá trị của phân tung độ nằm giữa hai đường chuyển vị song song của hai miếng cứng I và II (theo công thức (10.11)).

$$\Delta = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} \Delta_Q$$

Ở đây: $\gamma = 90^\circ$ còn $\alpha = \alpha_k$ nên: $\Delta = \Delta_Q \cos \alpha_k$.

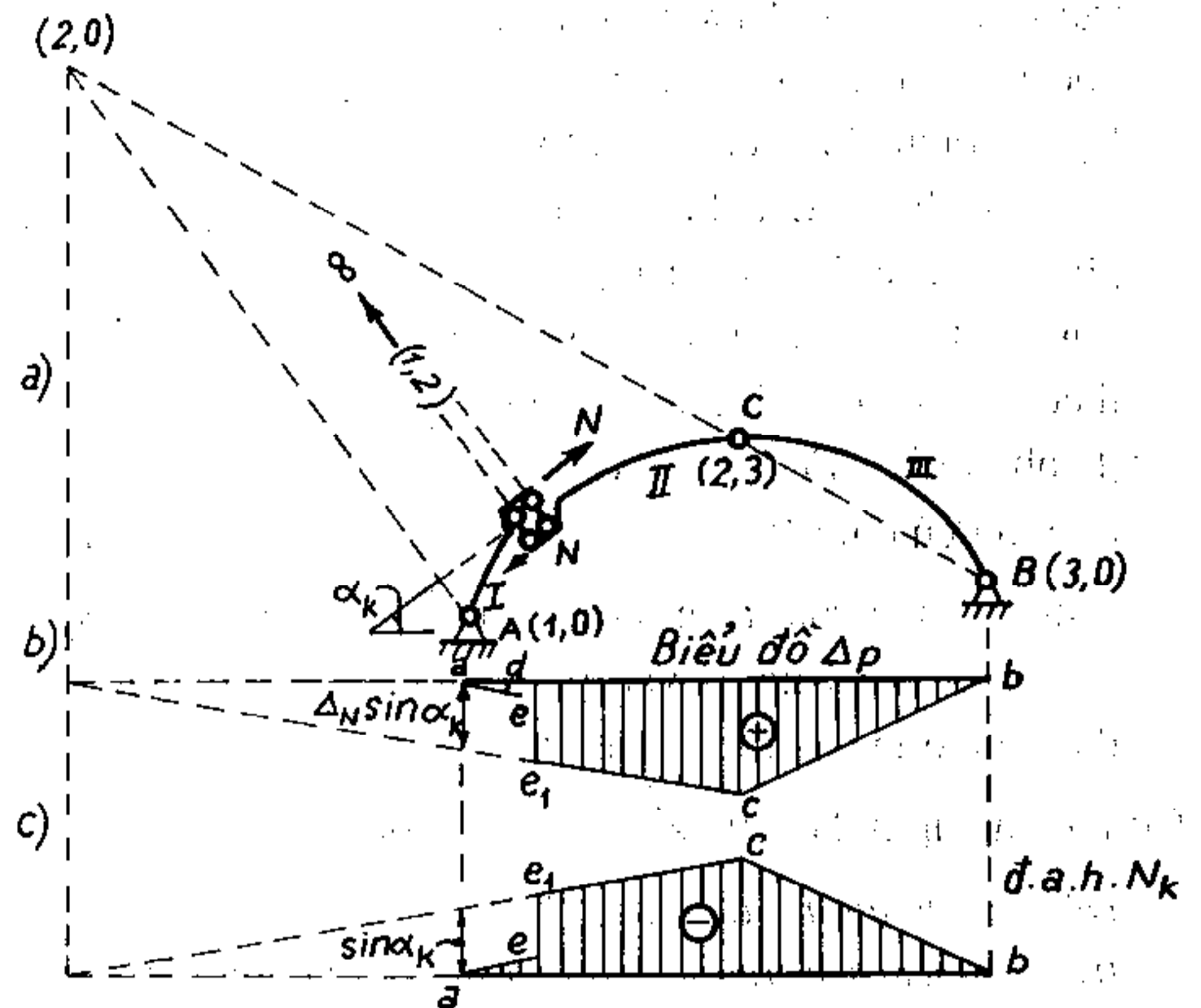
Để xác định dấu của *d.a.h.* Q_k ta cần biết dấu của Δ_Q . Từ biểu đồ Δ_P ta thấy hai miếng cứng I và II quay thuận chiều kim đồng hồ quanh cực của nó, chiều

quay này cùng chiều với chiều quay của các lực Q đặt trên miếng cứng tương ứng quanh các cực nên Δ_Q dương.

Vậy *d.a.h.* Q_k có hình dạng giống với biểu đồ Δ_P nhưng trái dấu. Phân tung độ nằm giữa hai đường song song trên *d.a.h.* Q_k có giá trị bằng $\Delta / \Delta_Q = \cos \alpha_k$, (hình 10.21c).

3. Đường ảnh hưởng N_k

Hình 10.22



Cách tìm các cực và cách vẽ biểu đồ Δ_P trình bày trên hình 10.22a và b. Cũng giống như trên, trong trường hợp này ta có thể xác định giá trị của phân tung độ khớp giữa hai đường chuyển vị song song của hai miếng cứng I và II theo công thức (10.11). Nhưng ở đây: $\gamma = 90^\circ$ còn $\alpha = 90^\circ - \alpha_k$ nên: $\Delta = \Delta_N \sin \alpha_k$.

Từ biểu đồ Δ_P ta thấy trong quá trình hệ chuyển vị, hai miếng cứng I và II quay thuận chiều kim đồng hồ, cùng với chiều quay của các lực N quanh cực của các miếng cứng tương ứng nên $\Delta_N > 0$.

Vậy *d.a.h.* N_k có hình dạng giống và ngược dấu với biểu đồ Δ_P . Phân tung độ giữa hai đường song song trên *d.a.h.* N_k có giá trị bằng: $\Delta_N \sin \alpha_k / \Delta_N = \sin \alpha_k$.

B. Phương pháp điểm tương trưng

Trong phương pháp điểm tương trưng, ta biến đổi các đại lượng Δ_P và Δ_S như sau (hình 10.23):

$$\Delta_P = ds_P \cos \alpha = V_P dt \cos \alpha,$$

Nhưng $V_P = KK'$ nên:

$$\Delta_P = KK' \cos \alpha dt = \lambda_P dt.$$

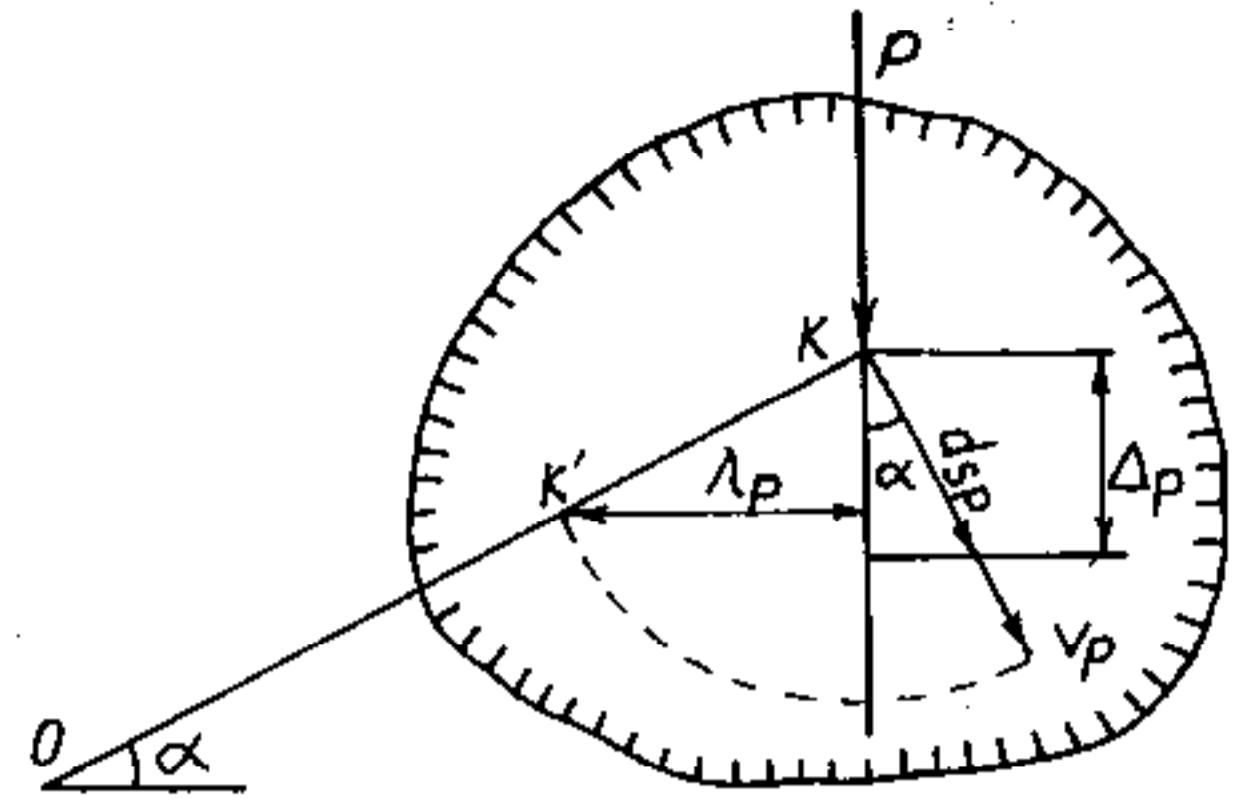
Tương tự: $\Delta S = \lambda_S dt$.

Biểu thức (10.5) có dạng:

$$\text{đ.a.h.} S = -\frac{\lambda_P}{\lambda_S}, \quad (10.12)$$

trong đó:

λ_P – hình chiếu của đoạn tượng trung KK' lên phương vuông góc với lực P . Về ý nghĩa vật lý, λ_P biểu thị vận tốc chuyển vị của điểm đặt lực P theo phương của lực P . Khi P di động thì λ_P cũng biến thiên theo vị trí của lực P và tạo thành biểu đồ vận tốc theo phương của lực P .



Hình 10.23

λ_S – hình chiếu của đoạn tượng trung của điểm đặt lực S lên phương vuông góc với lực S . Về ý nghĩa vật lý, λ_S biểu thị vận tốc chuyển vị của điểm đặt lực S theo phương của lực S . Vì S không thay đổi vị trí nên λ_S cũng không đổi.

Có thể xác định dấu của λ_P và λ_S theo quy tắc sau:

Đặt người quan sát đứng theo phương của lực P hoặc S , nếu điểm tượng trung ở bên trái người quan sát thì chiều của vận tốc hướng xuống phía dưới người quan sát và ngược lại, nếu điểm tượng trung ở bên phải thì chiều của vận tốc hướng lên trên. Nếu chiều vận tốc hướng theo chiều của lực P hoặc S thì λ_P hoặc λ_S sẽ dương (theo ý nghĩa về công) còn nếu hướng ngược lại với chiều của lực P và S thì λ_P hoặc λ_S sẽ âm.

Thứ tự vẽ đường ảnh hưởng theo phương pháp điểm tượng trung:

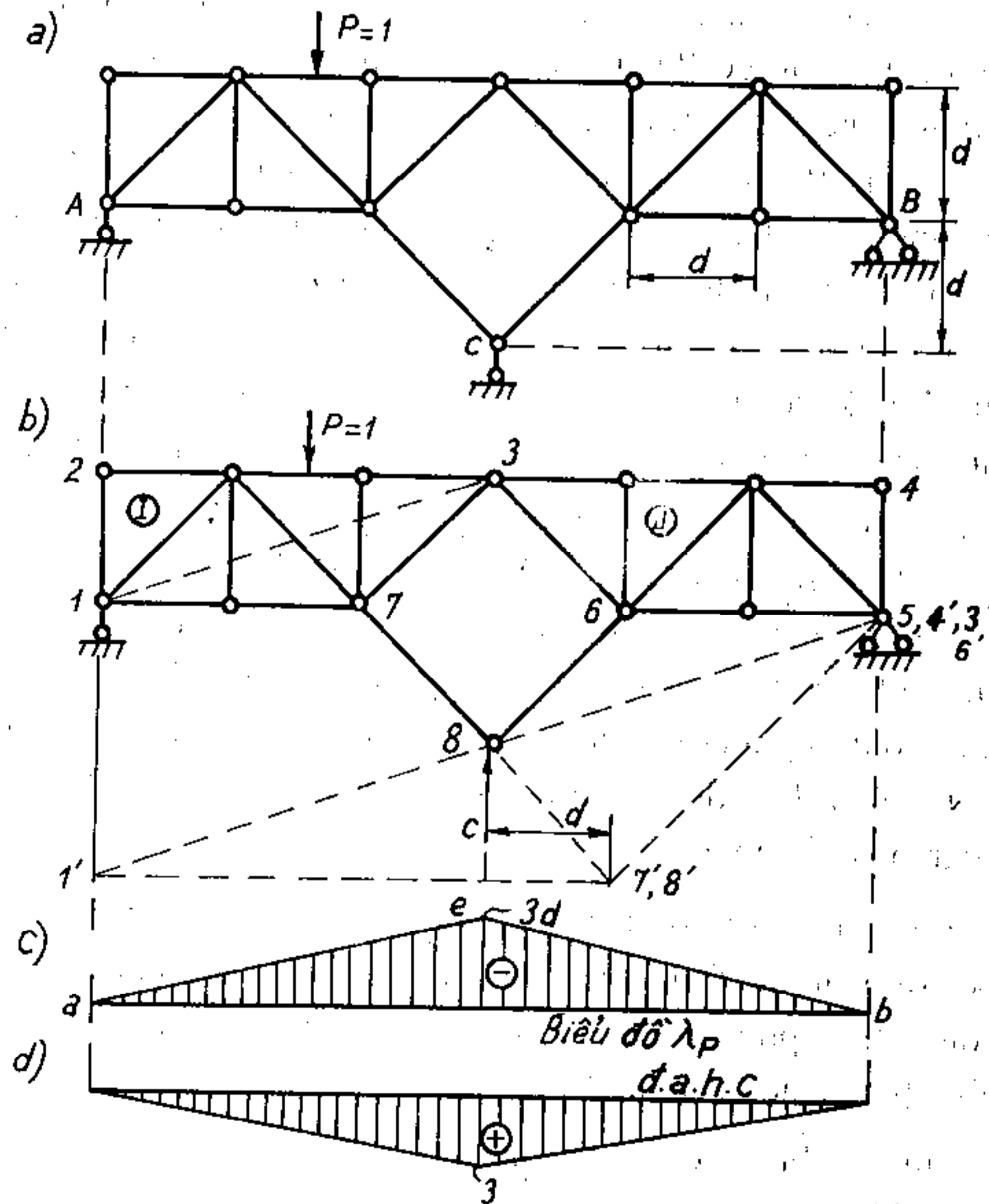
1. Loại bỏ liên kết cần tìm đ.a.h. của đại lượng S trong đó và thay thế tác dụng của liên kết này bằng các lực S .
2. Phân biệt các miếng cứng và đánh số một số điểm đặc biệt trên hệ. Cần đánh số các điểm có đặt các lực S , trên mỗi miếng cứng có lực $P=1$ di động tối thiểu cũng phải đánh số hai điểm.
3. Tự chọn điểm tượng trung của một điểm chuyển động nào đó và tìm điểm tượng trung của các điểm còn lại theo điểm tượng trung đã chọn.
4. Vẽ biểu đồ λ_P . Biểu đồ λ_P bao gồm các đường vận tốc theo phương lực P của các miếng cứng trên đường xe chạy. Đường vận tốc của mỗi miếng cứng được xác định bằng vận tốc theo phương lực P của hai điểm thuộc miếng cứng đang

xét. Giá trị của thành phần vận tốc theo phương của lực P tại một điểm nào đó bằng hình chiếu của đoạn tượng trưng của điểm đang xét lên phương vuông góc với lực P . Dấu của λ_P được xác định theo quy tắc nêu ở trên.

5. Xác định đại lượng λ_S . Giá trị λ_S bằng tổng đại số hình chiếu của hai đoạn tượng trưng của hai điểm đặt lực S lên phương vuông góc với lực S . Dấu của λ_S cũng được xác định theo quy tắc nêu ở trên.
6. Vẽ đ.a.h. S . Nhân các tung độ của biểu đồ λ_P với hệ số tỷ lệ $-1/\lambda_S$ sẽ được đ.a.h. S cần tìm.

Ví dụ 10.8. Vẽ đường ảnh hưởng của phản lực C trong hệ trên hình 10.24a.

Trên hình 10.24b trình bày cách loại bỏ liên kết, cách đặt lực C , cách phân biệt mặng cứng và đánh số các điểm cần thiết.



Hình 10.24

Để xác định các điểm tượng trưng, đầu tiên ta chọn vị trí điểm tượng trưng $4'$ của điểm 4 trên bán kính quay của nó. Trên hình 10.24b, ta chọn $4'$ tại điểm 5.

Như vậy, điểm tượng trưng $3'$ trùng với điểm 5 vì $3'$ là giao điểm của hai đường: bán kính quay $5-3$ của điểm 3 và đường $4'-3'$ song song với $4-3$. Cũng lý luận tương tự, điểm tượng trưng $6'$ cũng trùng với điểm 5. Điểm tượng trưng $1'$ của điểm 1 là giao điểm của hai đường: bán kính quay của 1 và đường $3'-1'$ song song với $3-1$. Điểm tượng trưng $7'$ là giao điểm của đường $1'-7'$ song song với $1-7$ và đường $3'-7'$ song song với $3-7$. Điểm tượng trưng $8'$ là giao điểm của đường $7'-8'$ song song với $7-8$ và đường $6'-8'$ song song với $6-8$.

Để vẽ biểu đồ λ_P ta nhận thấy lực P di động trên hai miếng cứng I và II nên chỉ cần tìm đường vận tốc theo phương P của hai miếng cứng này (hình 10.24c).

Đường vận tốc theo phương P của miếng cứng I được xác định bằng vận tốc theo phương P của hai điểm 1 và 3. Hình chiếu của đoạn tượng trưng $1-1'$ lên phương vuông góc với lực P bằng không nên tung độ của điểm 1 trên biểu đồ λ_P bằng không (điểm a). Hình chiếu của đoạn tượng trưng $3-3'$ lên phương vuông góc với lực P bằng $3d$, nên λ_P có giá trị bằng $3d$. Nếu đặt người quan sát theo phương P và chân hướng xuống phía dưới thì ta thấy điểm $3'$ ở về phía bên phải nên vectơ vận tốc của điểm 3 hướng lên trên tức là hướng ngược chiều với lực P . Vậy tại điểm 3 ta có $\lambda_P = -3d$. Tại vị trí tương ứng với điểm 3 trên biểu đồ λ_P là đóng một tung độ bằng $-3d$ sẽ được điểm e . Nối $a-e$ bằng đường thẳng sẽ được đường vận tốc theo phương P của miếng cứng I .

Đường vận tốc theo phương P của miếng cứng II được xác định bằng vận tốc theo phương P của hai điểm 3 và 4. Vận tốc theo phương P của điểm 3 đã tìm được ở bước trên (điểm c trên biểu đồ λ_P). Vận tốc theo phương P của điểm 4 bằng không vì hình chiếu của $4-4'$ lên phương vuông góc với P bằng không. Do đó, tung độ tương ứng với điểm này trên biểu đồ λ_P có giá trị bằng không (điểm b). Nối e với b sẽ được đường vận tốc của miếng cứng II . Như vậy là đã vẽ xong toàn bộ biểu đồ λ_P .

Giá trị của λ_C được xác định bằng hình chiếu của vectơ $8-8'$ lên phương vuông góc với phản lực C . Giá trị này bằng d . Vì $8'$ nằm ở phía bên phải người quan sát đứng theo phương của lực C nên vận tốc của điểm 8 hướng lên trên, tức là hướng theo chiều của lực C . Do đó $\lambda_C = +d$.

Nhân các tung độ biểu đồ λ_P với thừa số $-1/\lambda_C = -1/d$, ta được *d.a.h.C* cần tìm (hình 10.24d).

Qua những ví dụ trên ta thấy: khi vẽ *d.a.h.* của các đại lượng trong hệ tĩnh định, sử dụng phương pháp động học sẽ nhanh chóng và tiện lợi hơn so với phương pháp tĩnh học. *Phương pháp động học cho phép ta hình dung được hình dạng*

của đ.a.h một cách dễ dàng. Những ưu điểm của phương pháp động học so với các phương pháp tĩnh học càng được phát huy khi hệ khảo sát càng phức tạp.

10. 5. Cách tính hệ siêu tĩnh

Về nguyên tắc, cách tính hệ siêu tĩnh theo phương pháp động học cũng tương tự như cách tính hệ tĩnh định nhưng nói chung không tiện lợi bằng cách tính theo phương pháp tĩnh học. Trong trường hợp này, phương pháp động có những khuyết điểm sau:

- ♦ *Xác định chuyển vị khả dĩ trong hệ siêu tĩnh rất phức tạp. Thật vậy, sau khi loại bỏ một liên kết ra khỏi hệ, hệ còn lại không phải là hệ biến hình nên chuyển vị của hệ không thể xảy ra được nếu không có biến dạng của hệ. Do đó việc tìm chuyển vị khả dĩ của hệ có liên quan đến vấn đề xác định đường đàn hồi của hệ. Như đã biết, xác định đường đàn hồi của hệ không phải là dễ dàng ngay cả khi hệ là tĩnh định.*
- ♦ *Sau khi đã nghiên cứu xong một đại lượng nào đó theo phương pháp động học, nếu muốn nghiên cứu một đại lượng khác ta không thể sử dụng được các số liệu của lần nghiên cứu trước mà phải tính lại toàn bộ. Cũng đã có biện pháp khắc phục khuyết điểm này nhưng lúc này phương pháp động học cũng chưa được tiện lợi bằng phương pháp tĩnh học.*

Tuy nhiên, phương pháp động học có một ưu điểm quan trọng là giúp ta hình dung ngay được hình dạng của đường ảnh hưởng. Đó là một ưu điểm mà phương pháp tĩnh học không thể có được.

Trong mục này, ta chỉ nghiên cứu nguyên tắc về đ.a.h. của các đại lượng trong hệ siêu tĩnh theo phương pháp động học. Trên cơ sở đó, đề cập đến cách tìm dạng đ.a.h. mà không đi sâu vào cách xác định giá trị của tất cả các tung độ đ.a.h.

Sau khi loại bỏ một liên kết khỏi hệ siêu tĩnh như đã trình bày trong mục 10.1 ta được một hệ mới bất biến hình. Lúc này khác với trường hợp hệ tĩnh định, ta thấy:

- * *Chuyển vị của hệ xảy ra kèm theo cả biến dạng đàn hồi của hệ. Bởi vậy không những chỉ có ngoại lực $P=1$ và các lực S sinh công trên những chuyển vị khả dĩ mà các nội lực cũng sinh công trên những biến dạng đàn hồi của hệ.*
- * *Trong hệ siêu tĩnh, dạng chuyển vị khả dĩ không phải là duy nhất mà có nhiều dạng khác nhau. Để thực hiện tương tự như trường hợp hệ tĩnh định, ta chỉ xét chuyển vị khả dĩ là chuyển vị đàn hồi do các lực S có giá trị bằng đơn vị và đặt theo phương của liên kết bị loại bỏ gây ra.*

Ví dụ, đối với hệ siêu tĩnh trên hình 10, 25a, giả thiết S là mômen uốn tại k , ta

loại bỏ liên kết và đặt lực như trên hình 10.25b. Gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ là chuyển vị đàn hồi do các mômen S có giá trị bằng đơn vị gây ra như trên hình 10.25c, rồi áp dụng nguyên lý công khả dĩ cho trường hợp này, ta có:

$$S \cdot \delta_{SS} + 1 \cdot \delta_{PS} = \sum \int M \cdot \bar{M}_S \frac{ds}{EI} + \sum \int N \cdot \bar{N}_S \frac{ds}{EA} + \sum \int v \cdot \bar{Q}_S \frac{ds}{GA}, \quad (10.13)$$

trong đó:

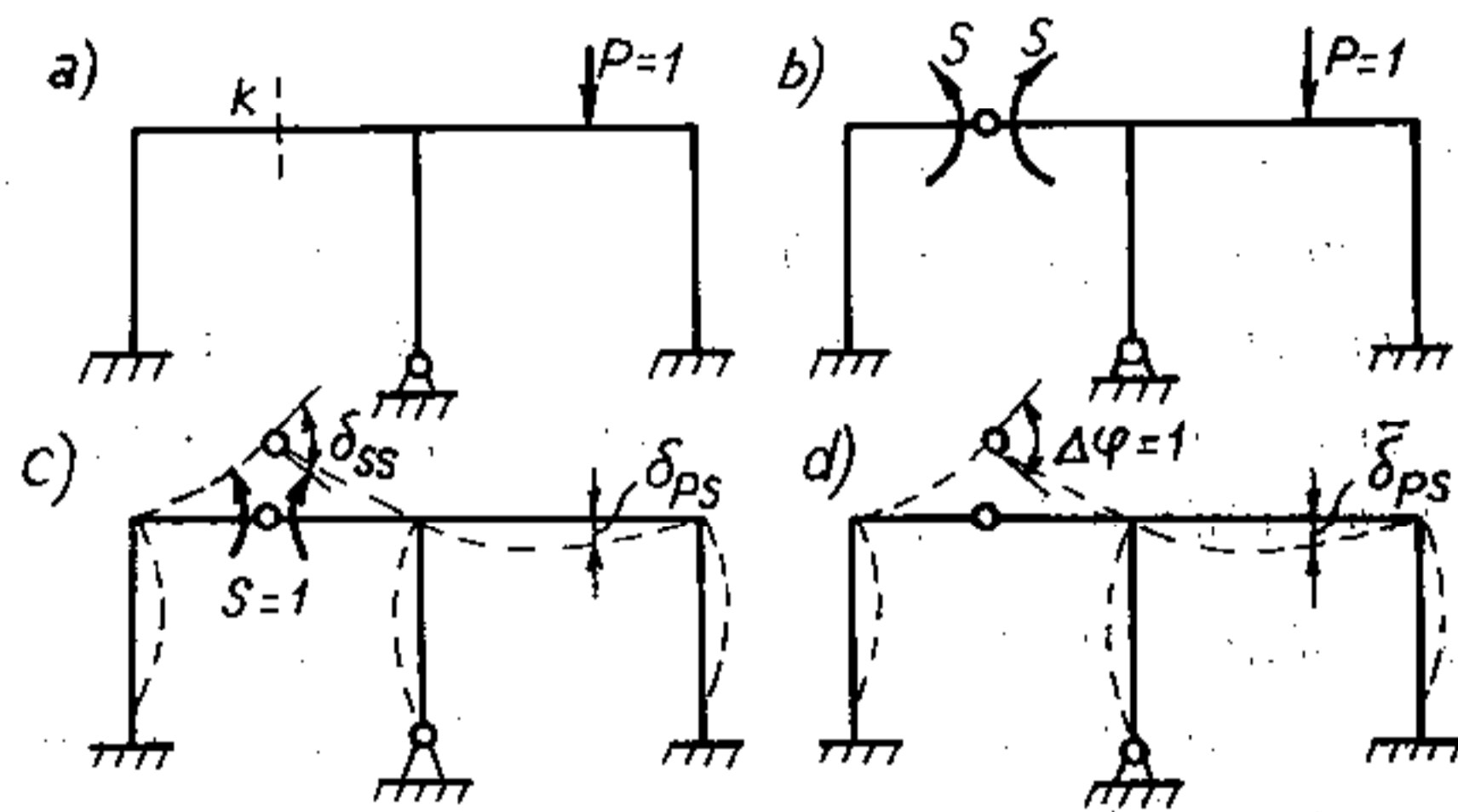
δ_{SS} – chuyển vị theo phương của các lực S do các lực $S=1$ gây ra trong hệ đã loại bỏ liên kết. Đại lượng này không đổi.

δ_{PS} – chuyển vị theo phương P do các lực $S=1$ gây ra trong hệ đã loại bỏ liên kết.

Đại lượng này biến thiên theo vị trí của các lực P .

M, N, Q – nội lực trong hệ đã loại bỏ liên kết do các lực S và P gây ra, nói khác đi là nội lực trong hệ cho ban đầu do tải trọng P (hình 10.25b, a).

$\bar{M}_S, \bar{N}_S, \bar{Q}_S$ – nội lực trong hệ đã loại bỏ liên kết do các lực $S=1$ (hình 10.25c).



Hình 10.25

Theo công thức xác định chuyển vị của hệ thanh, vế phải của (10.13) biểu thị chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của các lực S trong hệ siêu tĩnh cho ban đầu. Trên hình 10.25, chuyển vị này là góc xoay tương hỗ của hai tiết diện đặt hai bên khớp k . Thực ra trong hệ cho ban đầu, chuyển vị này bằng không nên vế phải của (10.13) luôn luôn bằng không. Tính chất này là một ưu điểm của dạng chuyển vị khả dĩ ta đã chọn.

Vậy:
$$S \cdot \delta_{SS} + 1 \cdot \delta_{PS} = 0 \quad (*) \quad (10.14)$$

Suy ra:
$$S = - \frac{\delta_{PS}}{\delta_{SS}} \quad (10.15)$$

Ta thấy, đường ảnh hưởng của đại lượng S là biểu đồ chuyển vị theo phương P do các lực $S=1$ gây ra trong hệ đã loại bỏ liên kết sau khi nhân với hệ số $-1/\delta_{SS}$.

(*) Cũng có thể thiết lập biểu thức này dễ dàng hơn theo định lý tương hỗ của công khả dĩ. Song, như vậy sẽ mất tính nhất quán về cách trình bày phương pháp động học trong cả hệ tĩnh lẫn siêu tĩnh.

Như vậy, muốn tìm *d.a.h.S* trong hệ siêu tĩnh ta phải tính một hệ siêu tĩnh có bậc thấp hơn hệ đã cho một đơn vị và chịu các lực $S=1$. Tiếp đó tìm biểu đồ δ_{PS} và xác định δ_{SS} . Cuối cùng nhân biểu đồ δ_{PS} với hệ số $-1/\delta_{SS}$ sẽ được *d.a.h.S*.

Nếu khi gây chuyển vị khả dĩ tương ứng với vị trí và phương của các lực S ta không cho $S=1$ như trên mà cho các lực S có giá trị để sao cho $\delta_{SS} = \Delta\varphi = 1$ (hình 10.25d) thì chuyển vị theo phương P sẽ là δ^*_{PS} và ta có:

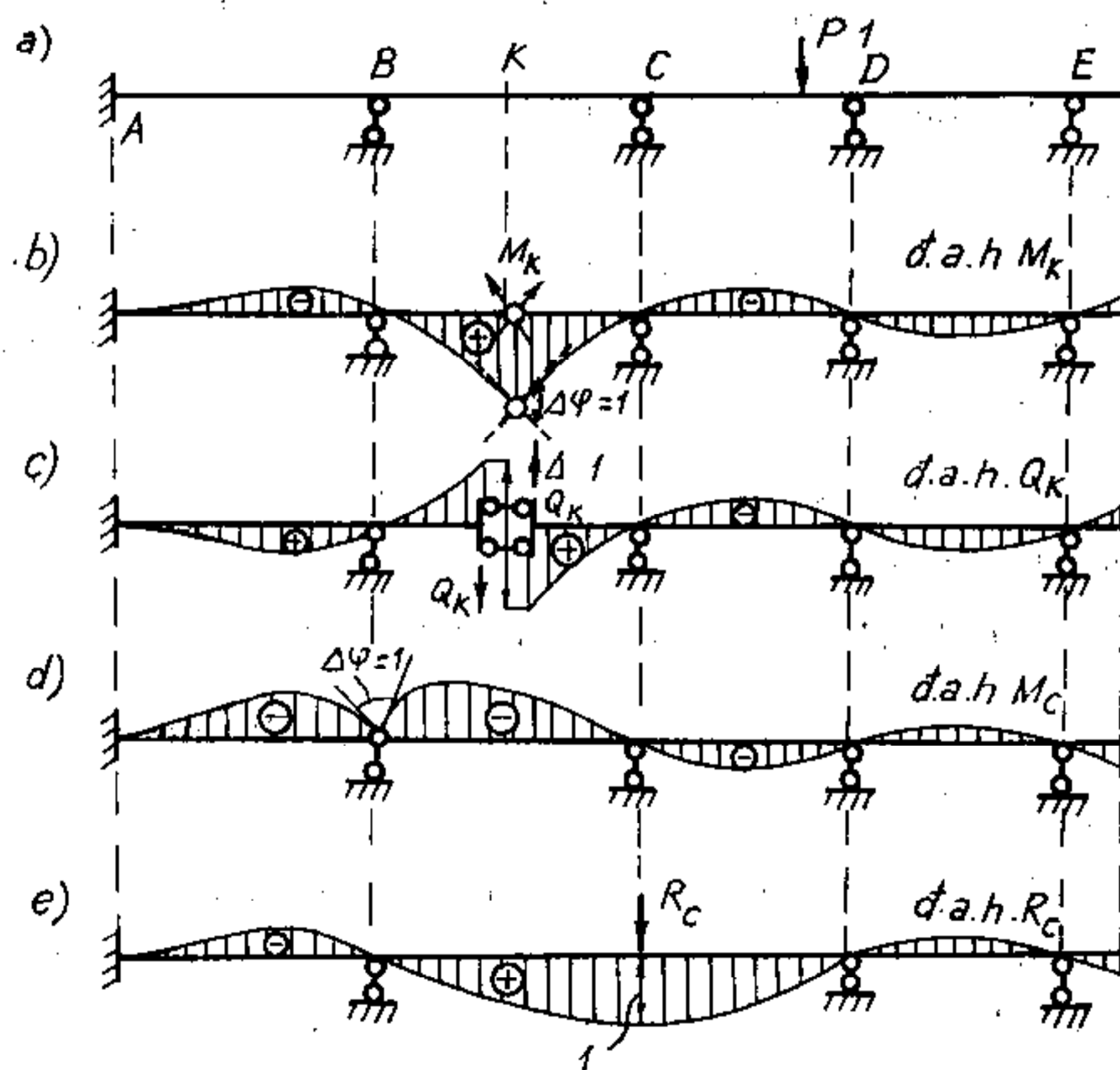
$$S = -\delta^*_{PS} \quad (10.16)$$

Cũng có thể xem biểu đồ δ^*_{PS} như biểu đồ chuyển vị theo phương P do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị ($\delta_{SS}=1$) tương ứng với vị trí và phương của liên kết bị loại bỏ (phương của S) gây ra. Như vậy, ta có thể đề ra quy tắc vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S trong hệ siêu tĩnh theo phương pháp động như sau:

Sau khi đã loại bỏ liên kết cần vẽ d.a.h của đại lượng S trong đó, nếu gây cho hệ một chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tương ứng với vị trí và phương của liên kết bị loại bỏ thì biểu đồ chuyển vị theo phương P của hệ chính là d.a.h.S cần tìm nhưng ngược dấu.

Ví dụ 10.9. Vẽ phác dạng *d.a.h.M_k*, *d.a.h.Q_k*, *d.a.h.M_C* và *d.a.h* của phản lực C trong dầm liên tục trên hình 10.26a.

Hình 10.26



Trên các hình 10.26b, c, d và e trình bày cách loại bỏ liên kết, cách gây chuyển vị cưỡng bức và các kết quả cần tìm.

CÂU HỎI ÔN TẬP

- 10.1. Phương pháp động học được xây dựng trên cơ sở nguyên lý nào? Khi xác định phản lực và nội lực ta cần thực hiện trên hệ như thế nào? Trình bày cách lập hệ đó tương ứng với từng thành phần nội lực.
- 10.2. Thông qua một ví dụ, trình bày thứ tự thực hiện khi xác định phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng theo cách áp dụng trực tiếp nguyên lý công khả dĩ.
- 10.3. Phương pháp cực:
- Nội dung phương pháp.
 - Nêu các quy tắc tìm cực của các miếng cứng.
 - Nêu thứ tự thực hiện khi xác định phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động.
 - Nêu thứ tự thực hiện khi vẽ đường ảnh hưởng của phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định.
 - Tiêu chí bất biến hình và không bất biến hình của phương pháp.
- 10.4. Phương pháp điểm tương trung:
- Nội dung phương pháp.
 - Nêu các quy tắc tìm điểm tương trung.
 - Nêu thứ tự thực hiện khi xác định phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động.
 - Nêu thứ tự thực hiện khi vẽ đường ảnh hưởng của phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định.
 - Tiêu chí bất biến hình và không bất biến hình của phương pháp.
- 10.5. Ưu khuyết điểm của phương pháp động khi tính các hệ tĩnh định và khi tính các hệ siêu tĩnh.
- 10.6. Trình bày cách vẽ phác dạng đường ảnh hưởng trong hệ siêu tĩnh. Tự chọn một khung siêu tĩnh có ba nhịp, vẽ phác dạng các đường ảnh hưởng: phản lực tại một liên kết; mômen uốn, lực cắt, lực dọc tại một tiết diện.

11

Khái niệm về cách tính theo trạng thái giới hạn

11.1. Khái niệm

Trong cách tính kết cấu theo ứng suất cho phép ta chỉ dùng một hệ số an toàn chung để đánh giá độ bền của kết cấu mà không xét một cách chặt chẽ về khả năng thay đổi đặc trưng cơ học và đặc biệt là tính dẻo của vật liệu, cũng như về khả năng thay đổi tải trọng. Thực ra độ bền của vật liệu làm mẫu thí nghiệm dùng để xác định ứng suất cho phép khác tương đối xa độ bền của vật liệu làm kết cấu đồng thời tải trọng tác dụng trên kết cấu cũng có thể có những sai lệch khác nhau.

Do đó người ta đã xây dựng cách đánh giá khác về khả năng của kết cấu. Đó là cách tính kết cấu theo *trạng thái giới hạn*.

Trạng thái giới hạn của kết cấu là trạng thái xảy ra do ứng suất hay do chuyển vị phát triển quá mức làm cho kết cấu không thể làm việc bình thường được nữa.

Trạng thái giới hạn của kết cấu không nhất thiết phải là trạng thái kết cấu bị phá hoại, mà chính là trạng thái kết cấu không thể làm việc bình thường được nữa. Một kết cấu không thể làm việc bình thường có thể là do mất khả năng chịu lực (chẳng hạn không đủ độ bền, không đủ ổn định hay độ chịu mỏi), hoặc do biến dạng quá mức, hoặc do phát sinh các vết nứt. Do đó có thể chia ra hai nhóm trạng thái giới hạn:

* *Trạng thái giới hạn về cường độ*, xác định theo khả năng chịu lực của kết cấu (về độ bền, độ ổn định và độ chịu mỏi).

* *Trạng thái giới hạn về sử dụng*, xác định theo sự biến dạng quá mức của kết cấu (độ cứng), sự xuất hiện các dao động, vết nứt...

So sánh với cách tính theo ứng suất cho phép, cách tính kết cấu theo trạng thái giới hạn có xét đến tính dẻo của vật liệu, thường kinh tế hơn và trong khá nhiều trường hợp lại đơn giản hơn.

Theo cách tính này, có ba loại hệ số an toàn:

1. *Hệ số vượt tải (hệ số độ tin cậy) n* , kể đến khả năng thay đổi của tải trọng so với tải trọng tiêu chuẩn, tức là xét đến sự sai lệch ngẫu nhiên giữa tải trọng tác

dụng và tải trọng tiêu chuẩn. Tải trọng tính toán P_t sẽ bằng tải trọng tiêu chuẩn P_{tc} nhân với hệ số vượt tải n lớn hơn đơn vị.

$$P_t = P_{tc} \cdot n$$

Khi tính về độ chịu mỏi theo trạng thái giới hạn về cường độ và khi tính về độ cứng theo trạng thái giới hạn về sử dụng, tải trọng được lấy bằng tải trọng tiêu chuẩn ($n=1$).

2. Hệ số đồng chất k của vật liệu, kể đến khả năng thay đổi tính chất và giảm độ bền của vật liệu do ảnh hưởng của hình dạng và kích thước của kết cấu gây ra. Hệ số $k > 1$.

3. Hệ số điều kiện làm việc m của kết cấu, kể đến ảnh hưởng của những yếu tố bất lợi cho sự liên kết không chính xác các cấu kiện v.v... Tùy từng trường hợp cụ thể, hệ số này có giá trị tương ứng khác nhau, lớn hơn hoặc nhỏ hơn đơn vị.

Đặc trưng độ bền của vật liệu là sức chịu tính toán R_t vừa phụ thuộc sự đồng chất của vật liệu vừa phụ thuộc điều kiện làm việc của kết cấu, được xác định bằng sức chịu tiêu chuẩn R_{tc} (tức giới hạn chảy, hoặc giới hạn bền hay giới hạn mỏi tùy từng trường hợp) chia cho hệ số không đồng nhất k và nhân với hệ số điều kiện làm việc m ($m < 1$):

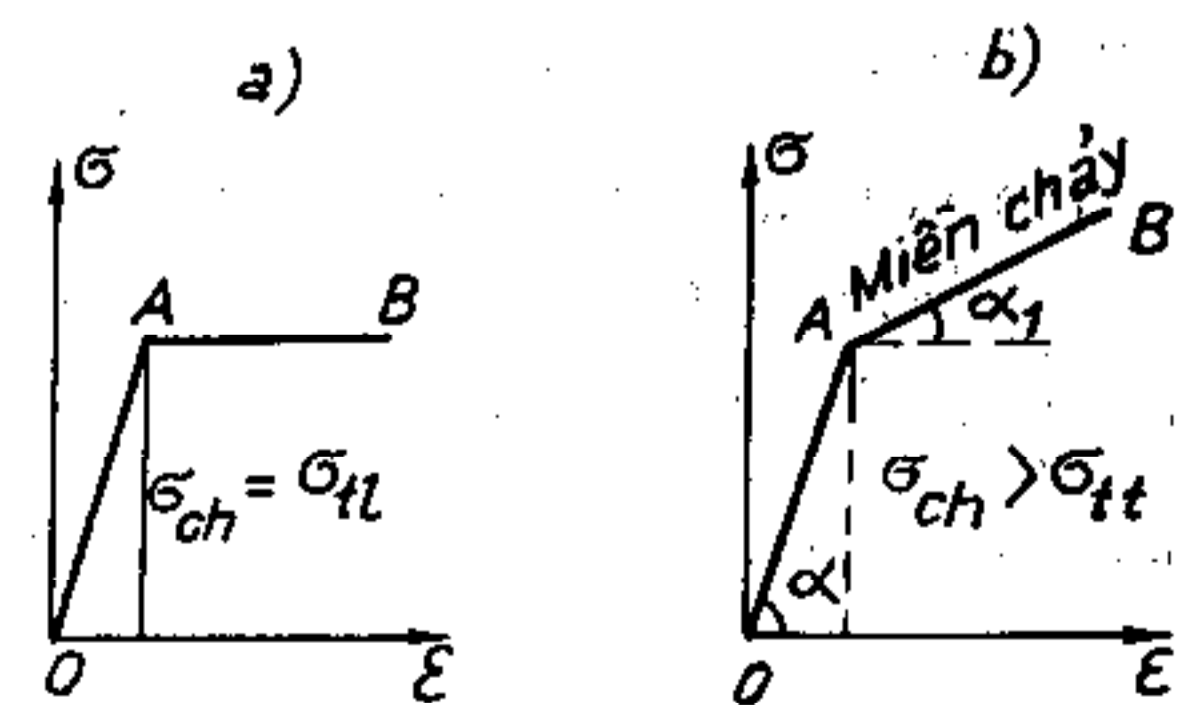
$$R_t = R_{tc} \frac{m}{k}$$

Lý thuyết tính toán kết cấu theo các trạng thái giới hạn có những nội dung phong phú và tùy theo vật liệu giòn hay vật liệu đàn dẻo, kết quả sẽ khác nhau. Trong giáo trình này chỉ giới hạn nghiên cứu với vật liệu đàn dẻo.

Lý thuyết trạng thái giới hạn được xây dựng trên biểu đồ liên hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật liệu trong trạng thái căng một trục. Đối với vật liệu đàn dẻo lý tưởng, khi tính toán người ta thường dùng biểu đồ Prantl như trên hình 11.1a. Theo biểu đồ này, trong miền đàn hồi quan hệ giữa ứng suất σ và biến dạng tỉ đối ϵ là quan hệ đường thẳng OA , còn trong miền đàn dẻo biểu đồ có dạng đường thẳng nằm ngang AB trong đó giới hạn chảy σ_{ch} trùng với giới hạn tỷ lệ σ_{tl} .

Đối với một số vật liệu người ta lại dùng biểu đồ trên hình 11.1b, trong đó miền chảy AB biểu thị bởi đường thẳng nghiêng.

Dưới đây ta xét cách tính toán một số kết cấu làm bằng vật liệu đàn dẻo tuân theo biểu đồ biến dạng Prantl có chú ý đến biến dạng dẻo.



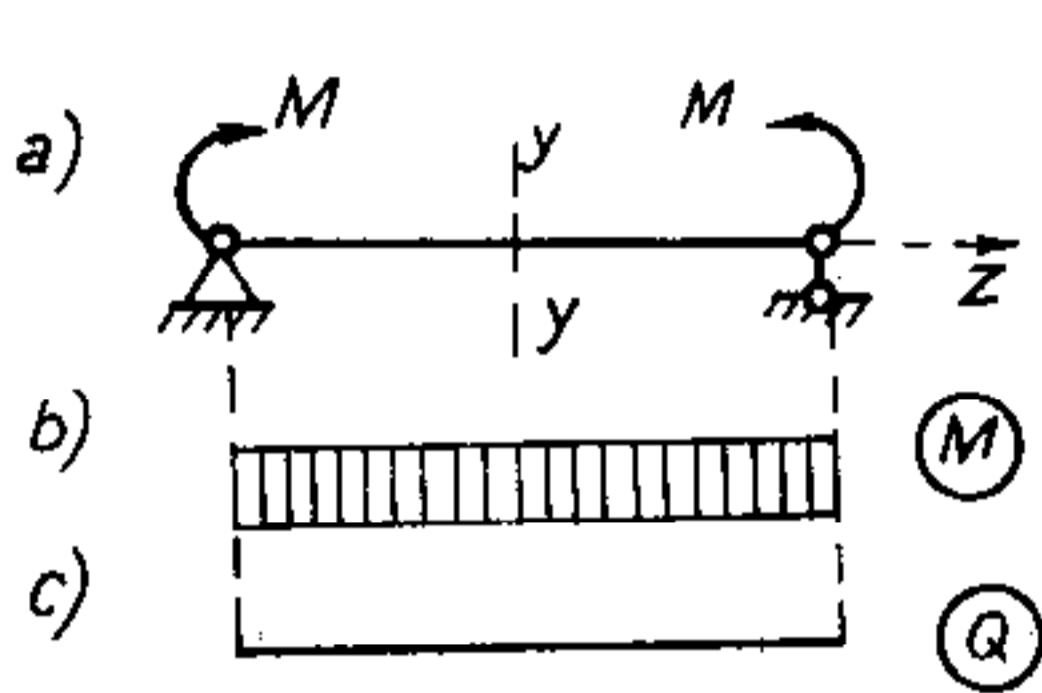
Hình 11.1

11.2. Cách tính dầm tĩnh định

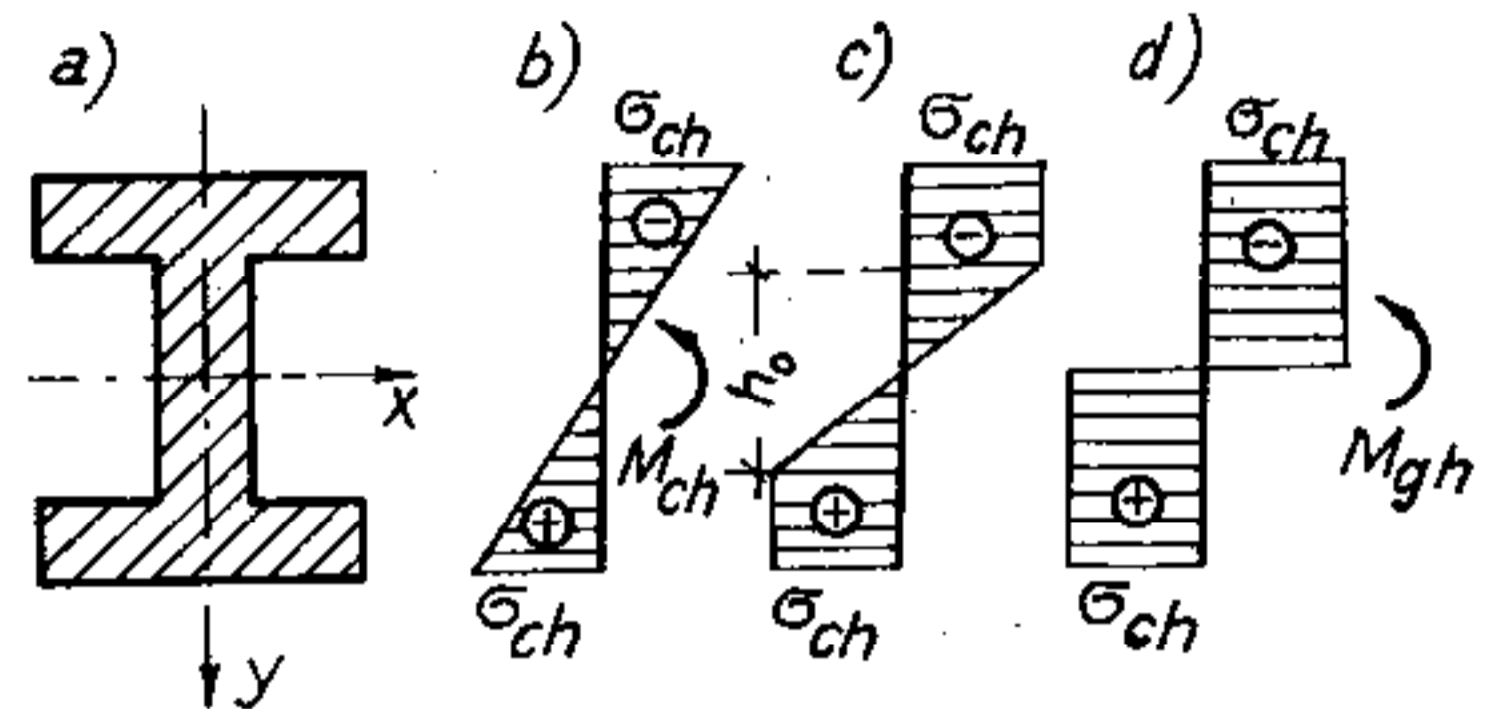
Ta khảo sát sự hình thành biến dạng dẻo trong dầm tĩnh định chịu uốn thuần túy (hình 11.2a). Biểu đồ nội lực của dầm như trên hình 11.2b, c. Tăng dần mômen uốn cho đến khi xuất hiện giới hạn chảy σ_{ch} tại các thớ biên của dầm, lúc đó các tiết diện dầm (hình 11.3a) có biểu đồ ứng suất pháp như trên hình 11.3b. Mômen uốn M_{ch} tương ứng được xác định theo công thức đã biết trong Sức bền vật liệu:

$$M_{ch} = \sigma_{ch} \cdot W,$$

trong đó W là mômen chống uốn của tiết diện. Lúc này dầm còn có khả năng chịu tải trọng thêm vì tất cả các thớ của dầm trừ các thớ biên còn nằm trong phạm vi đàn hồi, chưa đạt tới giới hạn chảy.



Hình 11.2



Hình 11.3.

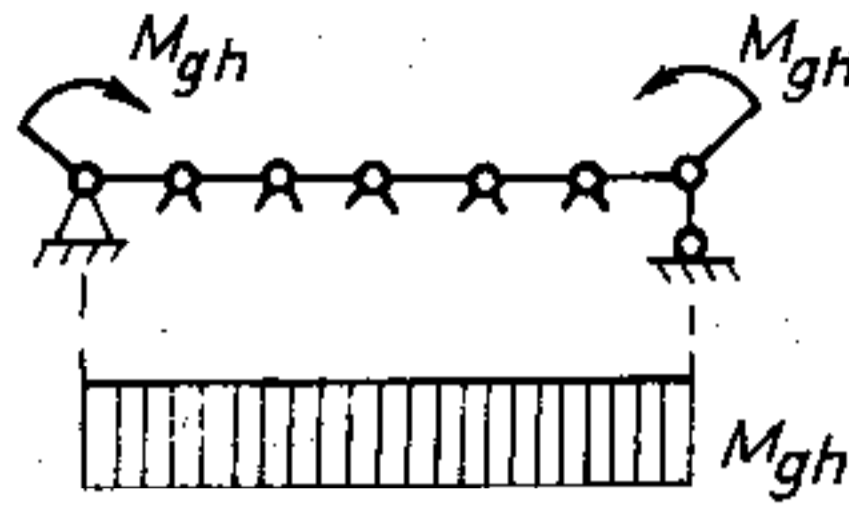
Nếu tiếp tục tăng tải trọng tác dụng sao cho $M > M_{ch}$ ta nhận thấy ngoài các thớ biên của dầm, một số thớ khác cũng dần dần bị chảy dẻo, tiết diện chỉ còn tồn tại một phần có chiều cao h_0 là nằm trong miền đàn hồi. Ta gọi phần còn nằm trong phạm vi đàn hồi này là *nhân đàn hồi* (hình 11.3c). Tiếp tục tăng tải trọng lên nữa thì đến một lúc nào đó toàn bộ tiết diện của dầm sẽ đạt tới giới hạn chảy (hình 11.3d). Lúc này dầm không có khả năng chịu tải trọng lớn hơn nữa, độ võng tăng lên rất nhanh và mômen uốn đạt tới giá trị giới hạn:

$$M = M_{gh}.$$

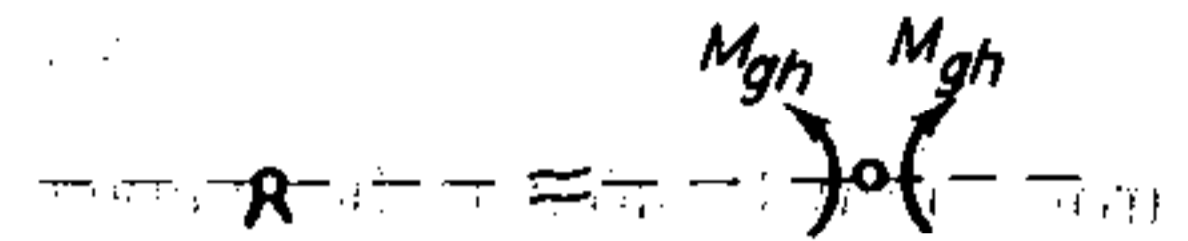
Như vậy giá trị M_{gh} là giá trị mômen uốn của dầm tương ứng với lúc dầm mất khả năng chịu lực bình thường: toàn bộ tiết diện của dầm bị chảy dẻo, dầm trở thành một hệ biến hình, tại tiết diện đó phát sinh một khớp gọi là *khớp dẻo*.

Khớp dẻo có đặc tính khác với khớp thông thường là *không thể ngăn cản kết cấu tiếp tục biến dạng theo hướng hình thành khớp dẻo, nhưng lại có khả năng ngăn cản biến dạng của kết cấu theo hướng ngược trở lại, làm cho vật liệu đang ở trạng thái chảy dẻo trở về trạng thái đàn hồi*. Do đó ta gọi khớp dẻo là "*khớp một chiều*". Trong ví dụ cụ thể này mọi tiết diện của dầm đều đạt tới trạng thái chảy dẻo đồng thời, nghĩa là đều phát sinh các khớp dẻo mở về phía dưới (hình 11.4). Những khớp dẻo này phân bố trên dầm và không ngăn cản được dầm biến dạng

về phía dưới là hướng hình thành khớp dẻo, trái lại chúng có thể ngăn cản được biến dạng ngược lại của dầm. Về mặt chịu lực, khớp dẻo cũng khác với khớp thông thường là nếu tại tiết diện phát sinh khớp dẻo ta thay khớp dẻo bằng khớp thông thường thì còn phải đặt thêm vào đó một cặp ngẫu lực ngược chiều ở hai bên tiết diện với giá trị bằng mômen giới hạn M_{gh} (hình 11.5).



Hình 11.4



Hình 11.5

Ta xác định M_{gh} tại tiết diện có khớp dẻo theo các phương trình cân bằng (hình 11.3d). Từ điều kiện tổng hình chiếu của các ứng suất pháp lên phương z , ta có:

$$\sum Z = \int_{A_k} \sigma_{ch} dA - \int_{A_n} \sigma_{ch} dA = 0,$$

Từ điều kiện tổng mômen của các ứng suất pháp bằng mômen giới hạn, ta có:

$$M_{gh} = \int_{A_k} y \sigma_{ch} dA + \int_{A_n} y \sigma_{ch} dA,$$

trong đó A_k , A_n – lần lượt là phần diện tích bị kéo và bị nén của tiết diện.

Từ phương trình thứ nhất ta suy ra $A_k = A_n$, nghĩa là tại tiết diện có khớp dẻo phần diện tích bị kéo đúng bằng phần diện tích bị nén.

Từ phương trình thứ hai ta xác định được:

$$M_{gh} = \int_{A_k} y \sigma_{ch} dA + \int_{A_n} y \sigma_{ch} dA = 2\sigma_{ch} \int_{A_k} y dA = 2\sigma_{ch} \int_{A_n} y dA.$$

Vậy
$$M_{gh} = 2\sigma_{ch}|S_k| = 2\sigma_{ch}|S_n|,$$

trong đó S_k và S_n – lần lượt là mômen tĩnh của phần diện tích chịu kéo và mômen tĩnh của phần diện tích chịu nén đối với trục trung hòa.

Tương tự như bài toán trong giới hạn đàn hồi, ta biểu diễn M_{gh} theo công thức quen biết:

$$M_{gh} = \sigma_{ch} W_d, \tag{11.1}$$

với
$$W_d = 2|S_k| = 2|S_n|, \tag{11.2}$$

gọi là mômen chống uốn dẻo của tiết diện.

❖ Đối với tiết diện chữ nhật, $W_d = bh^2/4$. So với mômen chống uốn trong giới hạn đàn hồi $W = bh^2/6$ ta có: $W_d = 1,5W$.

❖ Đối với tiết diện chữ I: $W_d = (1,15 : 1,17)W$.

❖ Đối với tiết diện tròn: $W_d = 1,7W$.

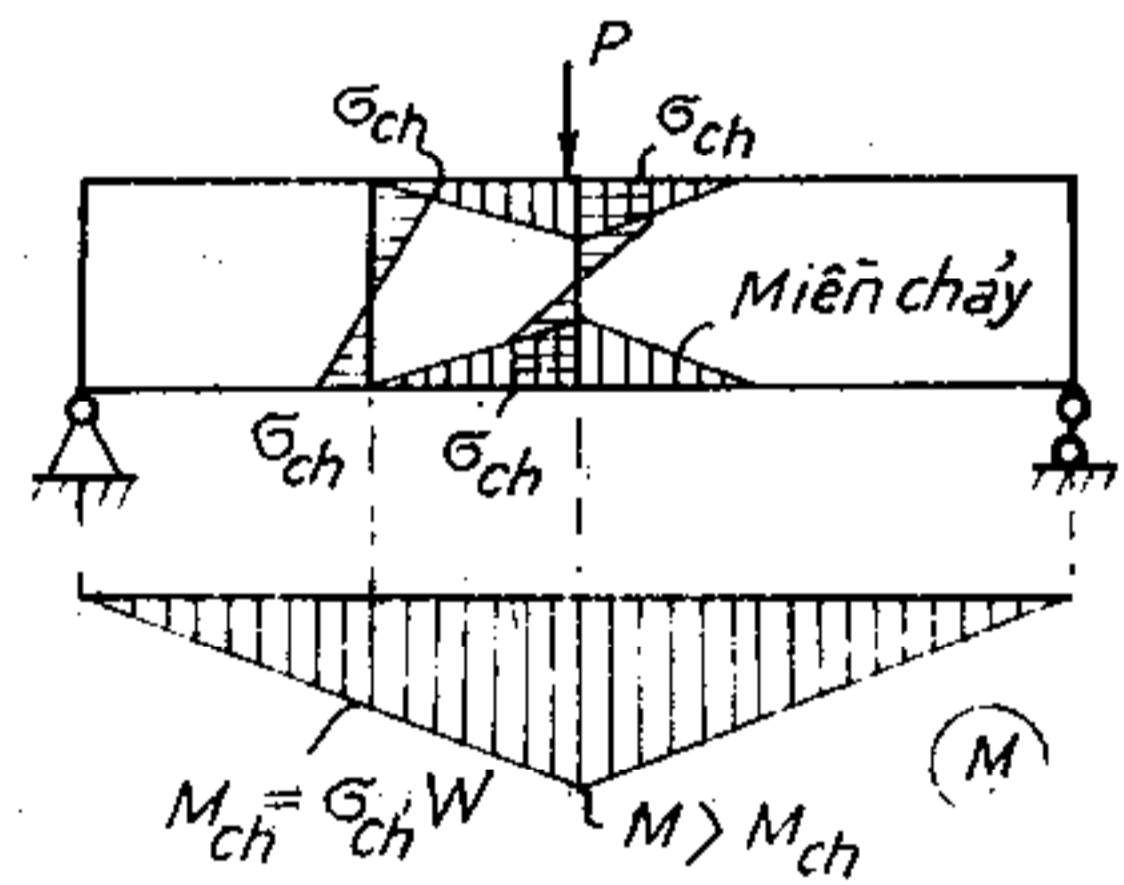
❖ Đối với tiết diện hình ống: $W_d = 1,27W$.

Ta nhận thấy có sự liên hệ: $\frac{W_d}{W} = \frac{M_{gh}}{M_{ch}}$

Đối với dầm tiết diện chữ nhật, tỉ số này bằng 1,5. Như vậy khi tính dầm tiết diện chữ nhật chịu uốn thuần túy theo trạng thái giới hạn ta được phép tăng khả năng chịu mômen uốn trong dầm lên 50% so với khi tính dầm theo ứng suất cho phép tức là khi xem dầm mất khả năng chịu lực ngay từ khi mới có ứng suất ở thớ biên đạt tới trạng thái chảy dẻo.

Trong trường hợp dầm chịu uốn ngang phẳng, ngoài ứng suất pháp tác dụng trên các tiết diện còn có ứng suất tiếp. Lúc đó bài toán sẽ phức tạp hơn, các ứng suất pháp trong dầm không thể hoàn toàn đạt tới trạng thái chảy dẻo như trên hình 11.3d, bởi vì ngoài ứng suất pháp dầm còn chịu ứng suất tiếp cho nên trên tiết diện luôn tồn tại một phần vật liệu nằm trong giới hạn đàn hồi (hình 11.6). Ngoài ra ở đây còn chưa xét đến hiện tượng cứng cổ của vật liệu. Tuy nhiên hiện tượng này cũng gây ảnh hưởng nhỏ đến kết quả tính toán nên được bỏ qua.

Để đảm bảo cho dầm chịu uốn ngang phẳng không bị chảy dẻo, lực giới hạn P_{gh} bao giờ cũng phải nhỏ hơn P_d là lực tương ứng khi tiết diện nguy hiểm nhất trên dầm có ứng suất pháp hoàn toàn chảy dẻo. Do đó sự phân bố của ứng suất pháp trong dầm chịu uốn ngang phẳng thực tế có dạng như trên hình 11.6, trong đó miền gạch thẳng đứng là miền vật liệu đạt tới trạng thái chảy dẻo.



Hình 11.6

Trong thực tế, ảnh hưởng của lực cắt đối với kết quả tính toán nhỏ cho nên thường được bỏ qua tuy rằng làm như vậy thì tải trọng giới hạn P_{gh} sẽ lớn hơn một chút.

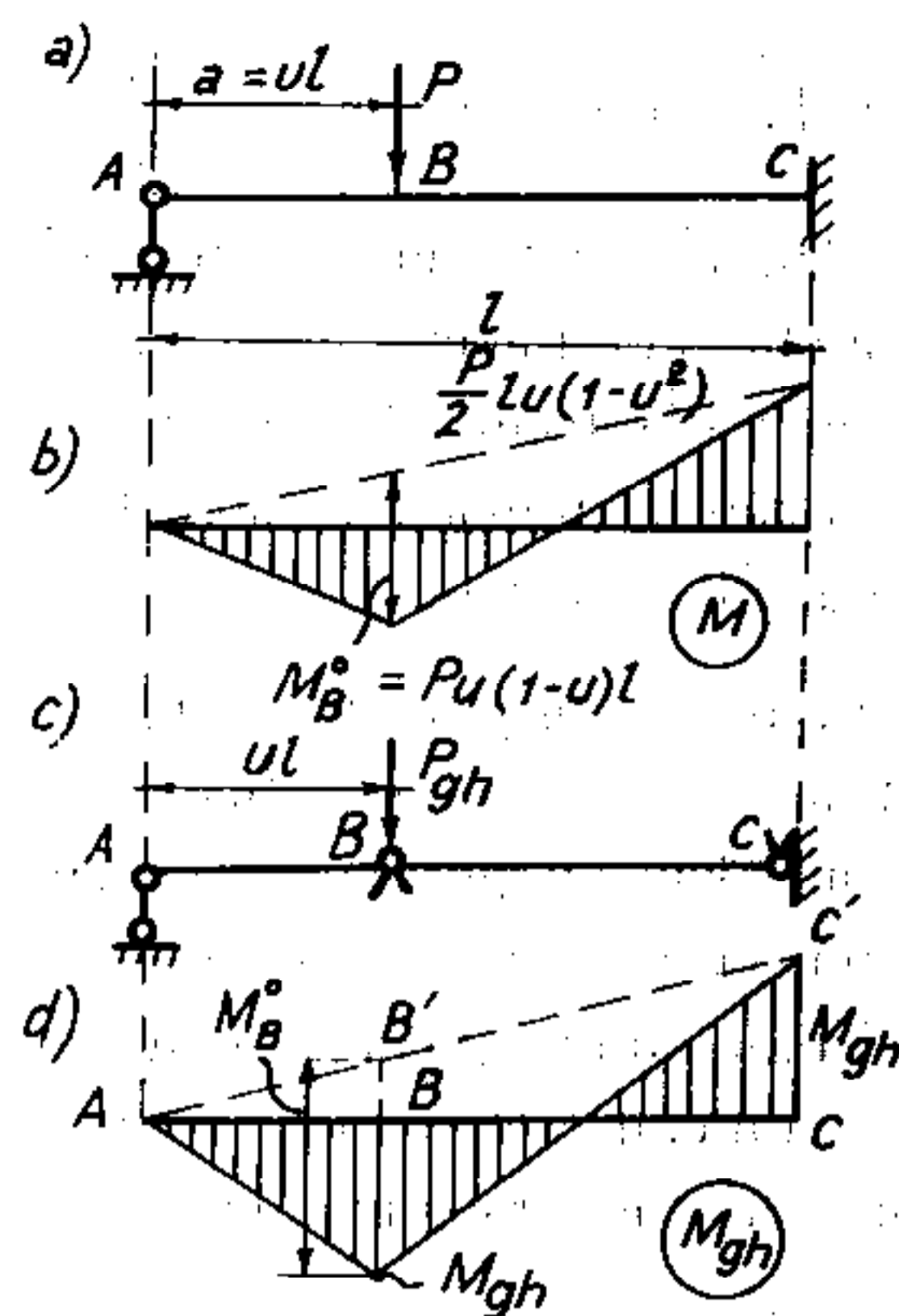
11.3. Cách tính dầm siêu tĩnh

Cũng như hệ tĩnh định, sự phá hoại của dầm siêu tĩnh dưới tác dụng của tải trọng phụ thuộc vào tính chất vật liệu chế tạo dầm và khả năng phát sinh biến hình ở một bộ phận nào đó của dầm. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu cụ thể trường hợp dầm một nhịp và trường hợp dầm nhiều nhịp.

A. Dầm một nhịp

1. Dầm có một đầu ngàm và một đầu khớp. Giả sử cần tìm mômen uốn giới hạn của dầm siêu tĩnh một nhịp như trên hình 11.7a.

Biểu đồ mômen uốn khi dầm còn làm việc trong trạng thái đàn hồi như trên hình 11.7b. Ta nhận thấy, dầm sẽ đạt tới trạng thái giới hạn khi nó trở thành một hệ biến hình không có khả năng chịu thêm tải trọng, nghĩa là khi trên dầm phát sinh hai khớp dẻo ở hai tiết diện để sao cho dầm có ba khớp tương hỗ thẳng hàng. Các tiết diện dễ phát sinh khớp dẻo là tiết diện B và tiết diện C, vì các tiết diện này có trị số mômen dương và mômen âm lớn hơn các tiết diện khác (hình 11.7c). Khớp dẻo B ở trong nhịp mở về phía dưới và khớp dẻo C ở ngàm mở về phía trên.



Hình 11.7

Khi dầm đạt tới trạng thái giới hạn, mômen uốn tại các tiết diện phát sinh khớp dẻo B, C, có giá trị bằng M_{gh} . Biểu đồ mômen uốn tương ứng như trên hình 11.7d. Từ hình 11.7d ta thấy các tam giác ABB' và ACC' đồng dạng nên có:

$$M_B^o = M_{gh} + BB' = M_{gh} + M_{gh} \frac{a}{l},$$

trong đó M_B^o – mômen uốn tại tiết diện B do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản có hai khớp ở hai đầu.

$$\text{Do đó} \quad M_{gh} = \frac{l}{l+a} M_B^o. \quad (11.3)$$

Như vậy, giá trị mômen giới hạn M_{gh} trong dầm hoàn toàn xác định được nếu biết vị trí xuất hiện khớp dẻo trong dầm.

Trong trường hợp dầm chịu nhiều tải trọng hay tải trọng phân bố, nói chung ta chưa biết ngay vị trí xuất hiện khớp dẻo. Lúc này, vị trí khớp dẻo được xác định sao cho biểu thức tính M_{gh} có giá trị cực đại.

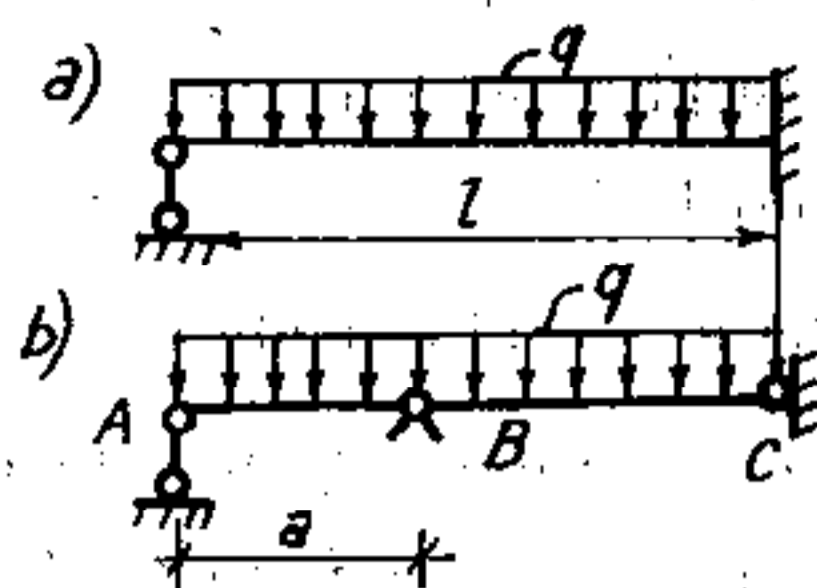
Ví dụ 11.1. Xác định vị trí xuất hiện khớp dẻo B trong nhịp dầm chịu tải trọng phân bố đều với cường độ q kN/m (hình 11.8a).

Tại ngàm C xuất hiện khớp dẻo mở về phía trên. Giả sử khớp dẻo B sẽ xuất hiện ở vị trí có hoành độ a như trên hình 11.8b. Điều kiện để xác định vị trí xuất hiện khớp dẻo là tìm giá trị của a sao cho M_{gh} có giá trị cực đại.

Trong trường hợp này, giá trị M_B^o trong công thức (11.3) là mômen uốn tại tiết diện có hoành độ a trong dầm đơn giản do tải trọng q gây ra:

$$M_B^o = \frac{ql}{2}a - \frac{1}{2}qa^2.$$

Do đó:
$$M_{gh} = \frac{ql}{2} \times \frac{a(l-a)}{l+a}.$$



Hình 11.8

Điều kiện để M_{gh} cực đại là đạo hàm của M_{gh} theo a bằng không

$$\frac{dM_{gh}}{da} = \frac{ql}{2} \left[\frac{(l-2a)(l+a) - a(l-a)}{(l+a)^2} \right] = 0. \text{ Suy ra } a = 0,414l,$$

nghĩa là khớp dẻo B sẽ xuất hiện cách khớp A một khoảng $a = 0,414l$.

Sau khi tính được giá trị của mômen giới hạn M_{gh} trong dầm ta xác định được tải trọng giới hạn tính toán nếu đã biết tiết diện của dầm, hoặc có thể chọn được tiết diện của dầm nếu đã biết tải trọng tính toán theo điều kiện (11.1).

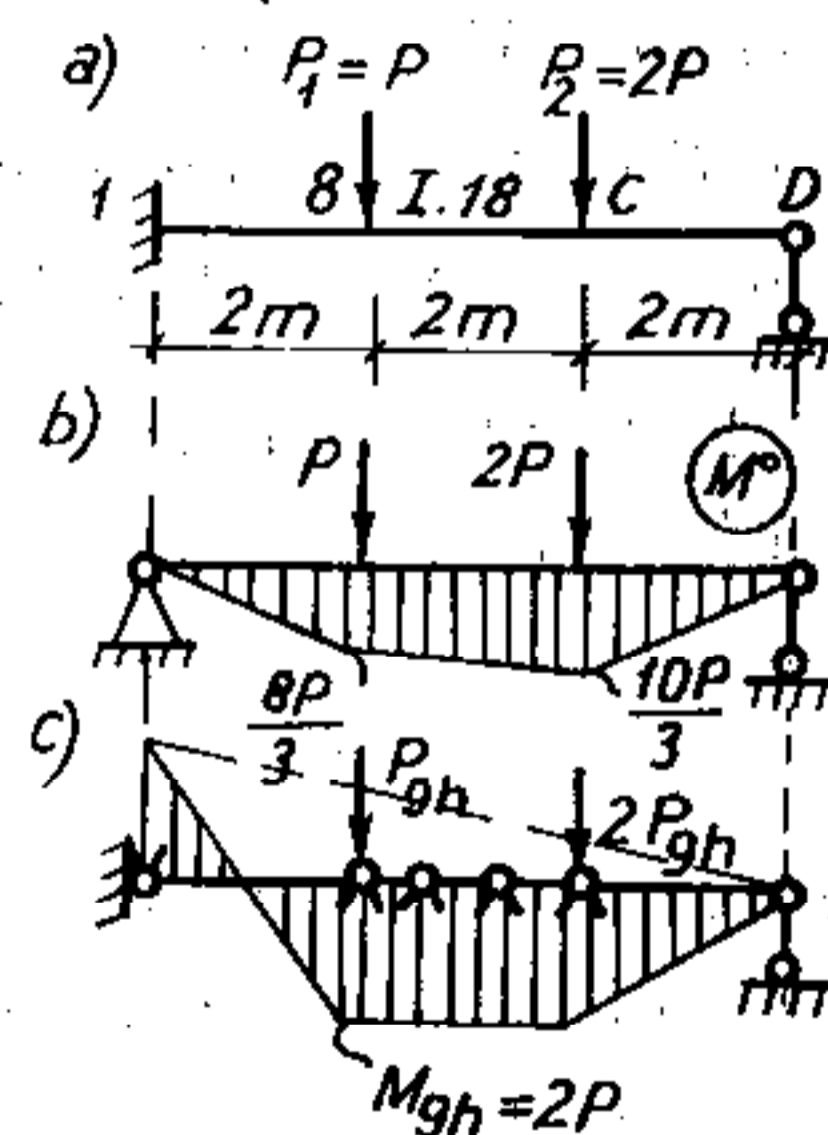
Ví dụ 11.2. Xác định tải trọng giới hạn của dầm siêu tĩnh cho trên hình 11.9a.

Cho biết dầm làm bằng thép có $\sigma_{ch} = 20 \text{ kN/cm}^2$; tiết diện I.18.

Từ bảng số liệu thép hình, với tiết diện I.18, mômen tĩnh của nửa tiết diện đối với trục uốn là $S_x = 81,4 \text{ cm}^3$. Do đó, theo (11.2):

$$W_d = 2S = 2 \cdot 81,4 = 163 \text{ cm}^3.$$

Tại ngàm A phát sinh khớp dẻo mở về phía trên. Ta cần tìm vị trí phát sinh khớp dẻo trong nhịp dầm. Muốn thế ta vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản có hai đầu là khớp (hình 11.9b). Qua biểu đồ ta thấy khớp dẻo có thể ở dưới tải trọng P_2 hoặc dưới tải trọng P_1 .



Hình 11.9

• Nếu khớp dẻo xuất hiện ở dưới tải trọng P_2 ta có:

$$M_{gh} = \frac{l}{l+a} M_B^o = \frac{6}{6+4} \times \frac{10P}{3} = 2P \text{ kNm}.$$

• Nếu khớp dẻo xuất hiện ở dưới tải trọng P_1 ta có:

$$M_{gh} = \frac{l}{l+a} M_B^o = \frac{6}{6+2} \times \frac{8P}{3} = 2P \text{ kNm.}$$

Hai kết quả M_{gh} này bằng nhau có nghĩa là bất kỳ tiết diện nào của dầm nằm trong khoảng giữa hai lực P_1, P_2 đều ở trạng thái giới hạn phát sinh khớp dẻo (hình 11.9c).

Để xác định tải trọng giới hạn của dầm ta viết điều kiện (11.1): $M_{gh} = \sigma_{ch} \cdot W_d$. Trong trường hợp này ta có: $M_{gh} = 2P \text{ kNm}$; $\sigma_{ch} = 20 \text{ kN/cm}^2 = 20 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$; $W_d = 163 \text{ cm}^3 = 163 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. Do đó $2P_{gh} = 20 \cdot 10^4 \cdot 163 \cdot 10^{-6} \text{ kN}$.

Vậy $P_{gh} = 16,3 \text{ kN}$.

2. Dầm bị ngàm hai đầu. Dầm bị ngàm hai đầu như trên hình 11.10a sẽ đạt đến trạng thái giới hạn khi ở trong dầm xuất hiện đủ ba khớp dẻo: hai khớp A, C ở hai đầu ngàm, còn khớp B ở trong nhịp dầm (hình 11.10b).

Vị trí của khớp dẻo B ở trong nhịp sẽ trùng với tiết diện có mômen uốn lớn nhất M_B^o do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản (hình 11.10c).

Từ hình 11.10b, ta thấy:

$$M_B^o = 2M_{gh}, \text{ do đó } M_{gh} = M_B^o / 2,$$

trong đó M_B^o – mômen uốn tại tiết diện B trong dầm đơn giản tức là tiết diện có mômen uốn lớn nhất.

Do đó điều kiện đạt đến trạng thái giới hạn trong trường hợp dầm có hai đầu bị ngàm sẽ là

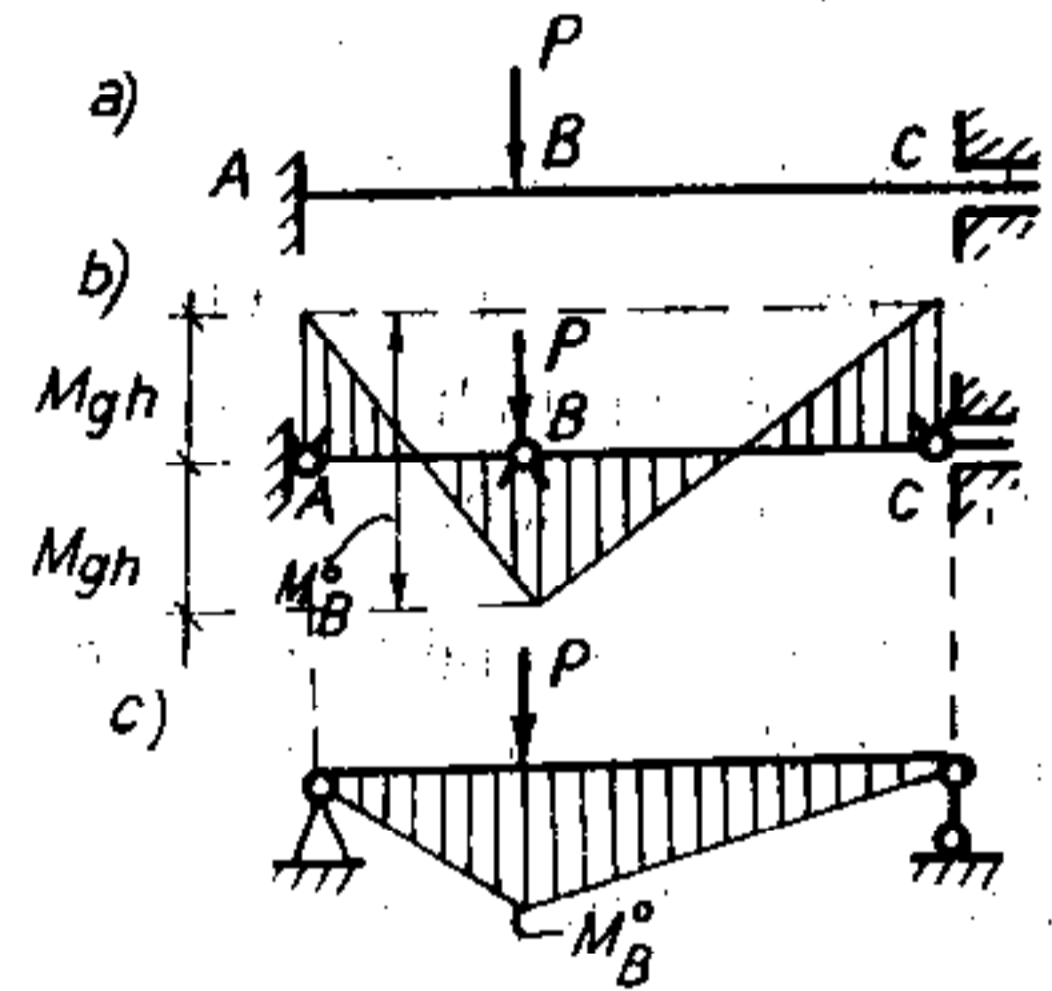
$$M_{gh} = \frac{1}{2} M_B^o = \sigma_{ch} W_d. \quad (11.4)$$

Ví dụ 11.3. Chọn tiết diện chữ nhật cho dầm trên hình 11.11. Cho biết tỷ số giữa chiều cao và bề ngang của tiết diện $h/b = 2$; hệ số vượt tải $n_p = 1,5$; $n_q = 1,1$; giới hạn chảy $\sigma_{ch} = 20 \text{ kN/cm}^2$.

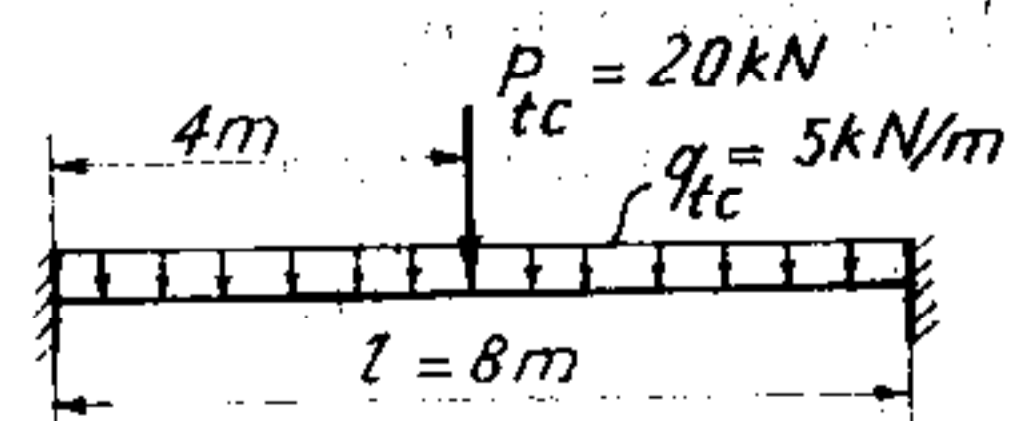
Mômen uốn lớn nhất tại tiết diện B ở giữa nhịp dầm đơn giản

$$M_B^o = n_p P_{tc} \frac{l}{4} + n_q q_l \frac{l^2}{8}$$

Từ điều kiện đạt đến trạng thái giới hạn (11.4) ta có:



Hình 11.10



Hình 11.11

$$M_{gh} = \frac{1}{2} M_B^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1,5 \cdot 20 \cdot 800}{4} + \frac{1,1 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 800^2}{8} \right] = 20W_d.$$

Suy ra $W_d = 260 \text{ cm}^3$. Nhưng $W_d = bh^2/4$ với $h/b = 2$.

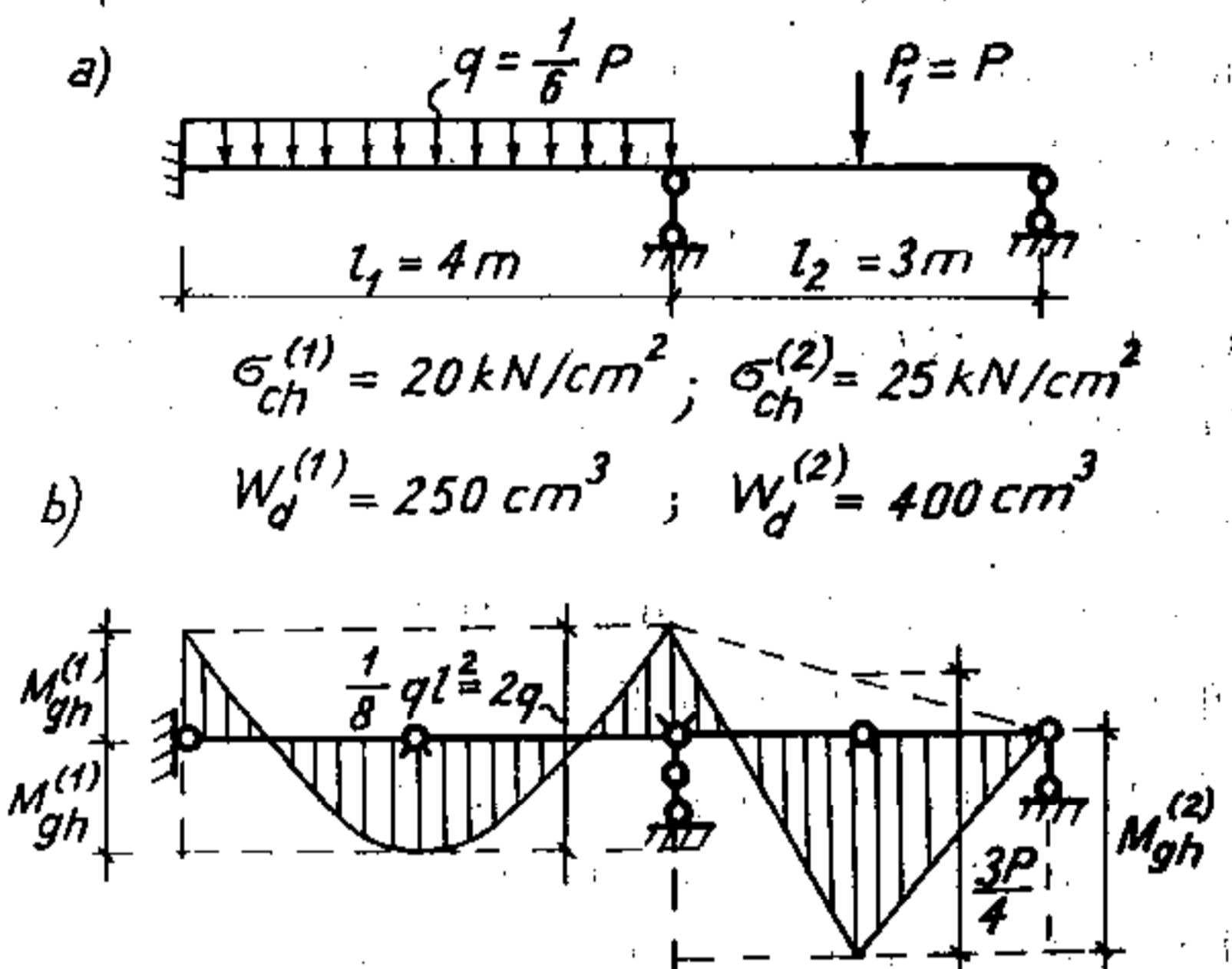
Do đó $b \cdot (2b)^2/4 = 260 \text{ cm}^3$. Suy ra $b = 6,38 \text{ cm}$.

Ta chọn tiết diện chữ nhật có các cạnh $b = 6,4 \text{ cm}$; $h = 2b = 12,8 \text{ cm}$.

B. Dầm liên tục có tiết diện không đổi trong từng nhịp

Trạng thái giới hạn của dầm liên tục xảy ra khi trong phạm vi một nhịp nào đó của dầm xuất hiện ba khớp dẻo lần lượt mở về các phía khác nhau. Thông thường hai khớp xuất hiện ở gối tựa, còn khớp thứ ba xuất hiện trong nhịp dầm.

Ta sẽ xác định tải trọng giới hạn của dầm liên tục với giả thiết dầm bị phá hoại hoàn toàn trong từng nhịp một. Giả sử xét dầm liên tục trên hình 11.12a. Trước hết ta cần phải biểu thị tất cả các tải trọng tác dụng trên dầm theo một thông số chung, chẳng hạn theo tải trọng P , ta có $P_1 = P$; $q = P/6$. Tiếp đó tìm giá trị của thông số P sao cho dầm đạt tới trạng thái giới hạn.



Hình 11.12

Đối với từng nhịp của dầm ta đã biết trước vật liệu (σ_{ch}) và tiết diện (W_d), do đó tìm được mômen uốn giới hạn theo công thức (11.1). Chẳng hạn trong ví dụ này ta tính được mômen uốn giới hạn trong từng nhịp một như sau:

• Nhịp thứ nhất: $M_{gh}^{(1)} = \sigma_{ch}^{(1)} W_d^{(1)} = 20 \cdot 250 = 5000 \text{ kNcm} = 50 \text{ kNm}$.

• Nhịp thứ hai: $M_{gh}^{(2)} = \sigma_{ch}^{(2)} W_d^{(2)} = 25 \cdot 400 = 10000 \text{ kNcm} = 100 \text{ kNm}$.

Mômen uốn tại gối trung gian phải bằng giá trị nhỏ nhất tức là 50 kNm .

Sau khi tính được các mômen uốn giới hạn cho từng nhịp một của dầm, ta kẻ đường mômen uốn giới hạn tương ứng (đường đứt nét trên hình 11.12b). "Treo" biểu đồ mômen uốn do tải trọng đặt trên nhịp gây ra trong dầm đơn giản vào đó ta sẽ được kết quả như trên hình 11.12b. Từ hình này ta suy ra các tải trọng giới hạn trong từng nhịp:

• Nhip 1: $M_{gh}^{(1)} + M_{gh}^{(2)} = \frac{ql^2}{8}$; $\Rightarrow 50+50 = 2q_{gh}l = 2 \cdot \frac{1}{6} P_{gh} \Rightarrow P_{gh} = 300 \text{ kN}$.

• Nhip 2: $\frac{1}{2} M_{gh}^{(1)} + M_{gh}^{(2)} = \frac{3P_{gh}}{4}$; $\Rightarrow 25+100 = \frac{3P_{gh}}{4} \Rightarrow P_{gh} = 167 \text{ kN}$.

Như vậy, đối với toàn dầm ta phải lấy tải trọng giới hạn ứng với giá trị lực nhỏ nhất vì ta xem rằng dầm đạt tới trạng thái giới hạn khi nhip thứ hai của dầm đạt tới trạng thái giới hạn (mặc dù lúc đó nhip thứ nhất của dầm chưa đạt tới trạng thái giới hạn), tức là chọn $P_{gh} = 167 \text{ kN}$.

11.4. Cách tính dầm có tiết diện thay đổi

Sự thay đổi tiết diện thường làm cho bài toán phức tạp hơn vì các lý do sau: khó xác định vị trí của khớp dẻo, có khả năng xuất hiện ba khớp dẻo liên tiếp mở về cùng một chiều, có khả năng xuất hiện nhiều phương án ba khớp dẻo lần lượt mở về các phía khác nhau.

Tuy nhiên, trạng thái giới hạn của dầm chỉ xảy ra khi có xuất hiện ba khớp dẻo lần lượt mở về các phía khác nhau và tương ứng với phương án cho giá trị tải trọng giới hạn nhỏ nhất.

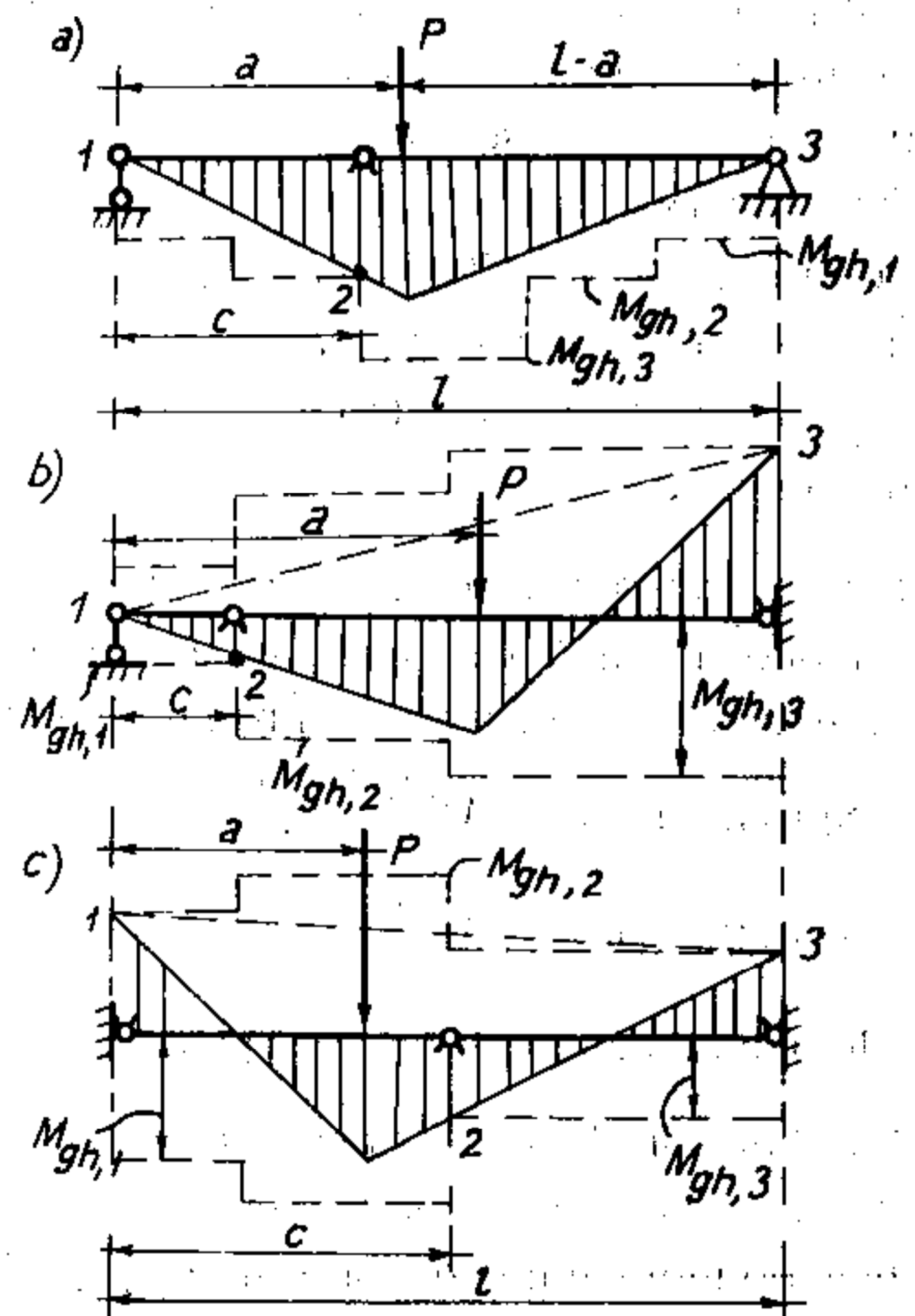
Như vậy, để giải bài toán cho trường hợp này ta cần thực hiện như sau:

1. Căn cứ vào kích thước của các tiết diện, vẽ biểu đồ mômen uốn giới hạn (nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt) theo biểu thức:

$$M_{gh} = \sigma_{ch} W_d.$$

Nếu trong dầm có khả năng xuất hiện cả mômen dương lẫn mômen âm thì cần vẽ biểu đồ mômen uốn giới hạn về cả hai chiều (đường nét đứt trên các hình 11.13).

2. Treo biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản để sao cho biểu đồ này nằm trong phạm vi biểu đồ mômen uốn giới hạn và tiếp xúc tại một số điểm để sao cho hình thành ba khớp dẻo lần lượt mở về hai phía khác nhau.



Hình 11.13

Đối với dầm đơn giản trên hình 11.13a, ta cần cho biểu đồ mômen uốn trong dầm đơn giản đi qua hai khớp biên và tiếp xúc tại một điểm nào đó ở phần dưới với biểu đồ mômen uốn giới hạn (điểm 2).

Đối với dầm có một đầu ngàm, một đầu khớp như hình 11.13b, biểu đồ mômen uốn trong dầm đơn giản phải đi qua khớp 1 và tiếp xúc với biểu đồ mômen uốn giới hạn tại hai điểm 2 và 3 ở hai phía khác nhau.

Đối với dầm bị ngàm ở hai đầu như trên hình 11.13c, biểu đồ mômen uốn trong dầm đơn giản phải tiếp xúc với biểu đồ mômen uốn giới hạn tại ba điểm 1, 2, 3 lần lượt mở về hai phía khác nhau.

3. Từ điều kiện hình học, lập điều kiện xảy ra trạng thái giới hạn. Ví dụ, với các hệ trên hình 11.13a, b, c, ta có các điều kiện xảy ra trạng thái giới hạn như sau:

• Hình 11.13a:
$$\frac{P(l-a)}{l}c = M_{gh,2}$$

• Hình 11.13b:
$$\frac{P(l-a)}{l}c = M_{gh,1} + M_{gh,3} \frac{c}{l}$$

• Hình 11.13c:
$$\frac{Pa}{l}(l-c) = 2M_{gh,3} + (M_{gh,1} - M_{gh,3}) \frac{(l-c)}{l}$$

Từ các điều kiện trên, ta dễ dàng suy ra giá trị cần tìm của tải trọng giới hạn.

Đối với dầm liên tục có tiết diện thay đổi, cách thực hiện cũng tương tự song cần chú ý phát hiện đầy đủ các phương án hình thành ba khớp dẻo (hoặc hai khớp dẻo đối với nhịp đã có sẵn một khớp thực) lần lượt mở về hai phía khác nhau cho từng nhịp dầm.

Nếu có nhiều phương án hình thành ba khớp dẻo thỏa mãn điều kiện nêu trên thì cần thực hiện tính toán cho từng phương án để tìm ra phương án cho giá trị tải trọng giới hạn nhỏ nhất.

11.5. Cách tính khung và vòm siêu tĩnh

Tính khung và vòm theo trạng thái giới hạn thường phức tạp vì không phải lúc nào ta cũng thấy được rõ ràng vị trí xuất hiện khớp dẻo. Vị trí xuất hiện khớp dẻo của khung và vòm có thể xảy ra với nhiều phương án khác nhau và phụ thuộc vào các giá trị nội lực M , Q , N trong hệ.

Trong nhiều trường hợp, để đơn giản hóa tính toán mà vẫn tìm được kết quả gần đúng (thậm chí có khi chính xác), ta thừa nhận những giả thiết sau:

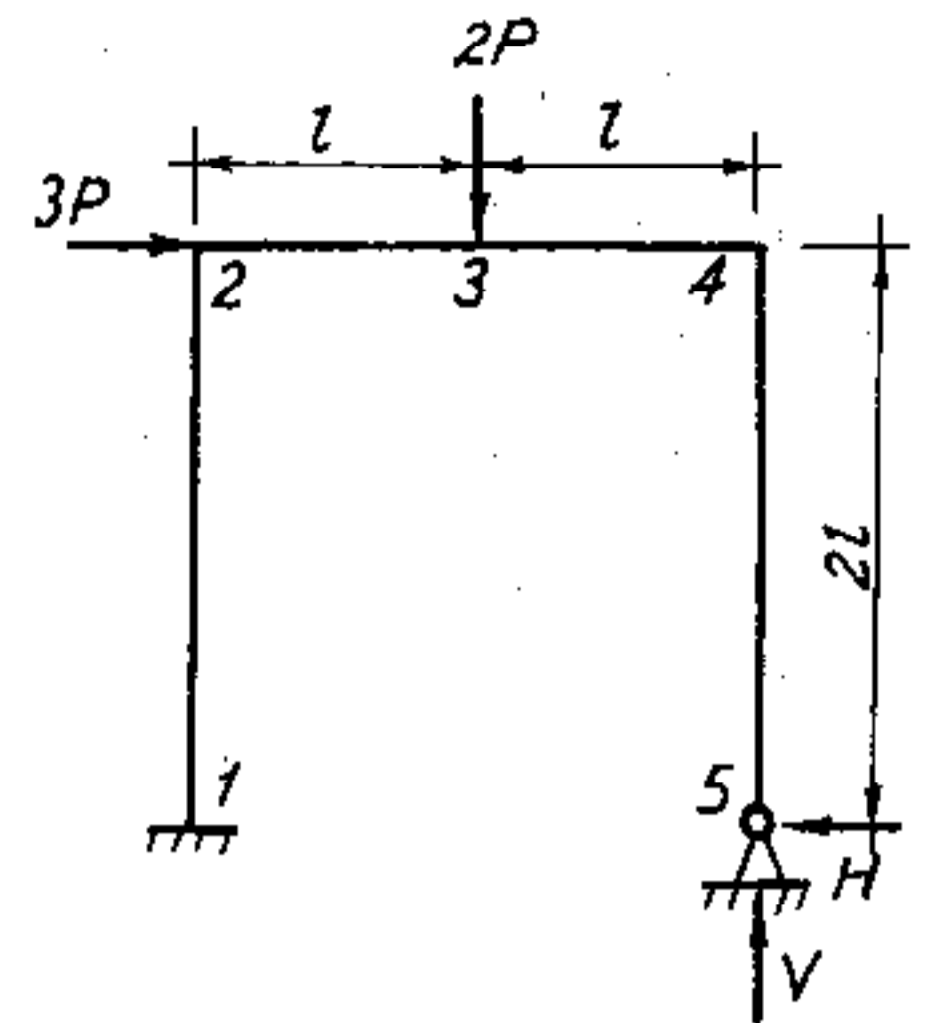
- * Không xét đến ảnh hưởng của lực cắt.
- * Nội lực được xác định theo sơ đồ không biến dạng (thực ra ở trạng thái giới hạn hệ có chuyển vị lớn và nội lực sẽ thay đổi nhiều).

- * Khớp dẻo chỉ không ngăn cản hệ có chuyển vị về phía khớp mở, và có tác dụng giảm bớt một bậc siêu tĩnh của hệ.

Hai giá thiết đầu thường làm tăng độ an toàn của kết cấu so với thực tế.

Để trình bày chi tiết hơn ta xét khung siêu tĩnh trên hình 11.14.

Các tiết diện có thể phát sinh khớp dẻo thường là tiết diện có giá trị mômen uốn dương hoặc âm lớn nhất. Do đó, trước hết ta cần nhận xét biểu đồ mômen uốn của hệ tìm được khi vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Hệ chỉ có các tải trọng tập trung tác dụng cho nên biểu đồ mômen uốn chỉ gồm những đoạn thẳng. Những giá trị mômen uốn dương và âm lớn nhất chỉ có thể phát sinh ở các tiết diện 1, 2, 3, 4 ghi trên hình vẽ. Tại khớp 5, giá trị mômen uốn bằng không.



Hình 11.14

Hệ sẽ đạt tới trạng thái giới hạn khi trở thành hệ biến hình có một bậc tự do không có khả năng chịu thêm tải trọng, nghĩa là khi trên hệ siêu tĩnh phát sinh một số khớp dẻo lớn hơn số bậc siêu tĩnh của hệ một đơn vị. Cụ thể trong trường hợp này hệ sẽ đạt tới trạng thái giới hạn khi xuất hiện thêm ba khớp dẻo bởi vì hệ này là hệ siêu tĩnh có bậc bằng hai.

Các tiết diện có thể phát sinh khớp dẻo là các tiết diện 1, 2, 3, 4 vì tại đó mômen uốn có giá trị dương hoặc âm lớn nhất. Trong số bốn tiết diện này chỉ cần có ba tiết diện phát sinh khớp dẻo cũng đủ làm cho hệ đạt tới trạng thái giới hạn. Cho nên, về mặt lý luận sẽ có ba phương án tổ hợp khớp dẻo khác nhau để biến hệ thành biến hình có một bậc tự do như trên hình vẽ 11.15a, b, c. Nhưng trong thực tế chỉ có một trong ba trường hợp kể trên xảy ra. Do đó cần phải phân tích xem trường hợp nào trong ba tổ hợp kể trên là duy nhất phù hợp với thực tế. Một trong những cách giải quyết vấn đề này là xuất phát từ việc tính toán các giá trị mômen uốn của hệ tìm được khi vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Sau đó so sánh các giá trị mômen uốn lớn nhất về trị số tuyệt đối với giá trị mômen giới hạn M_{gh} phát sinh ở các vị trí khớp dẻo ta sẽ xác định được giá trị của tải trọng giới hạn.

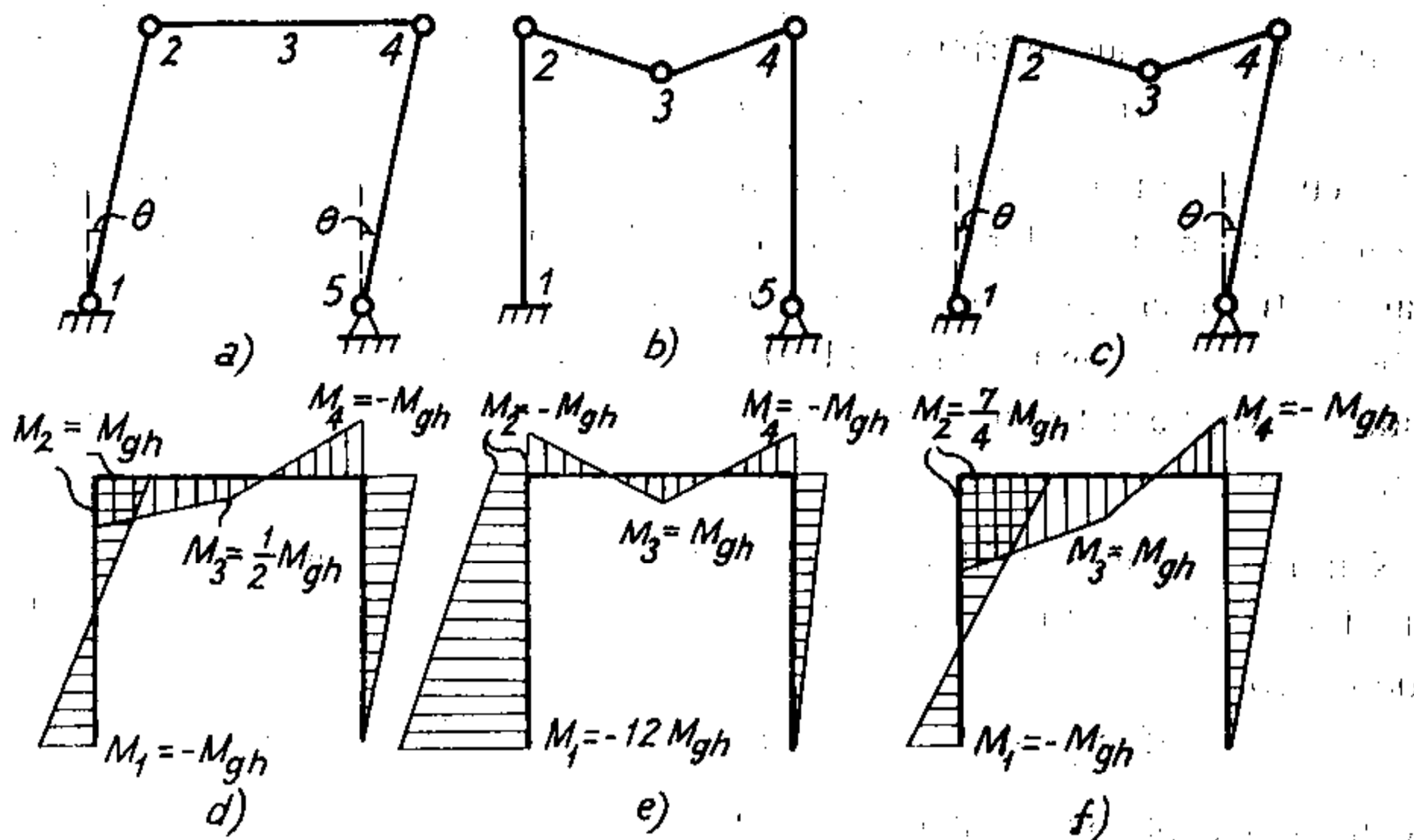
Gọi V và H là hai thành phần phản lực thẳng đứng và nằm ngang ở khớp tựa 5, có chiều như trên hình 11.14. Ta sẽ tính được các giá trị mômen uốn M_1, M_2, M_3, M_4 ở các tiết diện 1, 2, 3, 4 của khung khi làm việc trong giai đoạn đàn hồi.

$$M_4 = -2Hl; \quad M_3 = -2Hl + Vl; \quad M_2 = -2Hl + 2Vl - 2Pl; \quad M_1 = 2Vl - 2Pl - 6Pl.$$

Khử V và H ta được:

$$-M_2 + 2M_3 - M_4 = 2Pl; \quad (a)$$

$$-M_1 + M_2 - M_4 = 6Pl. \quad (b)$$



Hình 11.15

Sau khi tính được các giá trị mômen uốn dương và âm lớn nhất của hệ, ta sẽ phân tích vị trí khớp dẻo có thể xuất hiện.

1. Giả sử khung bị phá hoại theo tổ hợp ba khớp dẻo như trên hình 11.15a, lúc đó mômen uốn tại các tiết diện 1, 2, 4 đạt tới giá trị giới hạn M_{gh}

$$M_1 = -M_{gh}; \quad M_2 = M_{gh}; \quad M_4 = -M_{gh}.$$

Thay các giá trị này vào phương trình (b), ta sẽ tính được tải trọng giới hạn ứng với trạng thái giới hạn trên hình 11.15a.

$$M_{gh} + M_{gh} + M_{gh} = 6Pl. \quad \text{Suy ra} \quad P = \frac{M_{gh}}{2l}$$

Thay các giá trị vừa tìm được vào phương trình (a) ta sẽ tìm được M_3 .

$$-M_{gh} + 2M_3 + M_{gh} = 2 \frac{M_{gh}}{2l} l. \quad \text{Suy ra} \quad M_3 = \frac{M_{gh}}{2}$$

Biết các giá trị M_1, M_2, M_3, M_4 và $M_5 = 0$ của hệ, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ mômen uốn cho toàn hệ như trên hình 11.15d. Ta thấy giá trị mômen uốn tại mọi tiết diện (trừ ba tiết diện 1, 2, 4) đều nhỏ hơn giá trị M_{gh} nghĩa là khi ba tiết diện 1, 2, 4 bị chảy dẻo thì các tiết diện khác còn lại của hệ chưa bị chảy dẻo. Như vậy, ba khớp dẻo 1, 2, 4 là ba khớp dẻo xuất hiện đầu tiên làm hệ đạt tới trạng thái giới hạn. Đến đây ta thấy giả thiết lúc đầu không gặp mâu thuẫn gì cả, do đó tổ hợp ba khớp dẻo 1, 2, 4 phù hợp với thực tế.

2. Để thấy rõ hơn, ta tiếp tục giả thiết khung bị phá hoại theo tổ hợp ba khớp dẻo như trên hình 11.15b, nghĩa là các tiết diện 2, 3, 4 bị chảy dẻo đầu tiên. Ta có:

$$M_2 = -M_{gh}; \quad M_3 = M_{gh}; \quad M_4 = -M_{gh}.$$

Vận dụng các phương trình (a) và (b) như trong trường hợp trên ta sẽ tìm được:

$$P = 2M_{gh}/l; \quad M_1 = -12M_{gh}.$$

Căn cứ vào những số liệu trên ta cũng vẽ được biểu đồ mômen uốn ở trạng thái giới hạn tương ứng như trên hình 11.15e. Ta thấy mômen uốn tại tiết diện 1 (và tại các tiết diện khác nữa) có giá trị lớn hơn mômen uốn giới hạn. Do đó ba khớp 2, 3, 4 không thể là ba khớp dẻo đầu tiên đưa hệ tới trạng thái giới hạn được vì khi ba tiết diện 2, 3, 4 xuất hiện khớp dẻo thì đã có các tiết diện khác chảy dẻo.

3. Nếu tiếp tục giả thiết khung bị phá hoại theo tổ hợp ba khớp dẻo như trên hình 11.15c ta cũng sẽ thấy vô lý. Thực vậy, khi các tiết diện 1, 3, 4 xuất hiện khớp dẻo ta có:

$$M_1 = -M_{gh}; \quad M_3 = M_{gh}; \quad M_4 = -M_{gh}.$$

Cũng từ các phương trình (a) và (b) ta có:

$$P = 5M_{gh}/8l; \quad M_2 = 7M_{gh}/4.$$

và vẽ được biểu đồ mômen uốn tương ứng như trên hình 11.15f. Từ biểu đồ này, ta thấy tổ hợp ba khớp dẻo trên hình 11.15c không thể xảy ra đầu tiên được vì tiết diện 2 (và các tiết diện khác) xuất hiện khớp dẻo trước.

Qua phân tích ở trên ta có thể kết luận: *tổ hợp ba khớp dẻo trên hình 11.15a và biểu đồ mômen uốn tương ứng trên hình 11.15d là trường hợp duy nhất xảy ra trong thực tế khi hệ đạt tới trạng thái giới hạn.* Lúc đó, giá trị của $P = \frac{M_{gh}}{2l}$.

Nếu so sánh các giá trị của tải trọng P tính được trong ba trường hợp giả thiết ở trên, ta cũng thấy giá trị của tải trọng P trong trường hợp này là giá trị nhỏ nhất.

Những lý luận trên chính là cơ sở để giải các bài toán phức tạp khi tính kết cấu theo trạng thái giới hạn. Tất nhiên việc phát triển các nhận xét trình bày ở trên thành những lý luận tổng quát còn đòi hỏi phải có nhiều công sức hơn nữa.

Trong bài toán khung, ngoài mômen uốn còn có lực cắt và lực dọc. Ảnh hưởng của lực cắt thường được bỏ qua. Khi xét đến ảnh hưởng của lực dọc, điều kiện chảy dẻo của tiết diện chịu uốn và chịu kéo hoặc nén đồng thời cũng được thiết lập theo nguyên tắc tương tự như đã trình bày trong mục 11.2 (xem phần bài tập). Trên thực tế, phần ảnh hưởng của lực dọc thường nhỏ so với phần ảnh hưởng của mômen uốn nên cũng thường được bỏ qua.

Cách tính vòm siêu tĩnh theo trạng thái giới hạn còn phức tạp hơn cách tính

khung vì thường phải xét đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc, ngoài ra, lực dọc thay đổi trong vòm cũng gây khó khăn cho việc xác định vị trí của khớp dẻo. Nói chung ta có thể ước định vị trí gần đúng của các khớp dẻo theo biểu đồ mômen uốn trong giai đoạn đàn hồi, đặc biệt là trong trường hợp vòm có mômen uốn khá lớn. Sau khi xác định được vị trí khớp dẻo ta tiến hành tính toán tương tự như trường hợp khung siêu tĩnh.

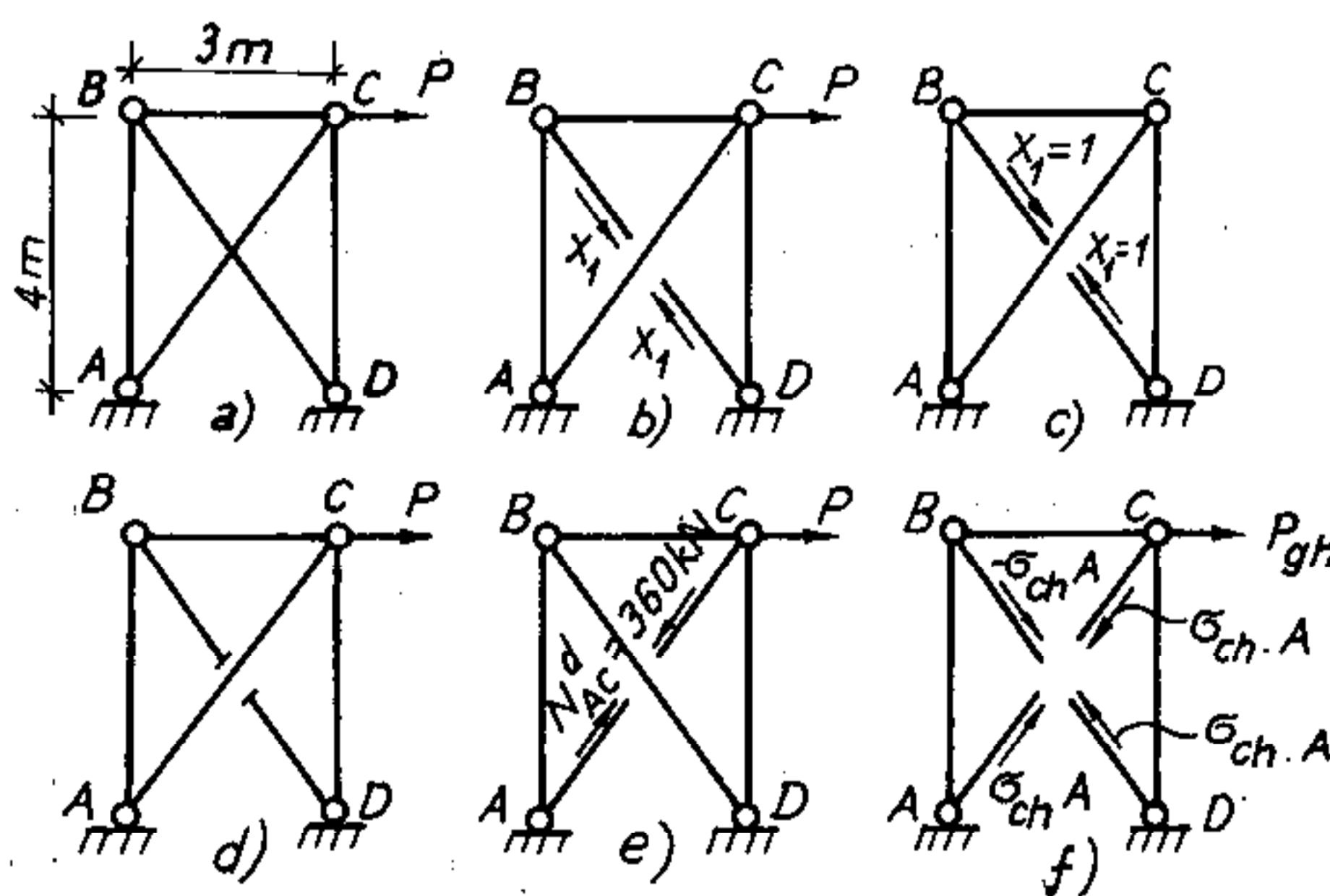
11.6. Cách tính dàn siêu tĩnh

Trạng thái giới hạn của dàn được xác định theo điều kiện chảy dẻo của những thanh nào mà khi loại chúng ra khỏi dàn thì hệ trở thành biến hình.

Có thể xác định tải trọng giới hạn của dàn theo nhiều cách, chẳng hạn bằng cách khảo sát sự cân bằng theo các dạng phá hoại khác nhau của dàn tức là bằng cách khảo sát sự cân bằng của những dàn bị biến hình khác nhau do loại đi từ dàn đã cho một số thanh và thay thế tác dụng của chúng bằng các lực dọc trong các thanh đó khi đã đạt tới trạng thái chảy dẻo. Ta sẽ chọn lấy giá trị nhỏ nhất trong tất cả những tải trọng giới hạn tìm được. Thường thường những thanh đạt trạng thái giới hạn đầu tiên là những thanh có ứng suất lớn nhất khi xác định theo trạng thái đàn hồi.

Ví dụ 11.4. Xác định tải trọng giới hạn cho dàn vẽ trên hình 11.16a. Cho biết:

$$A = \text{const} = 15 \text{ cm}^2; \quad \sigma_{ch} = 24 \text{ kN/cm}^2; \quad h = 4 \text{ m}; \quad l = 3 \text{ m}; \quad E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$



Hình 11.16

Hệ vẽ trên hình 11.16a có bậc siêu tĩnh bằng 1. Do đó, khi đạt tới trạng thái giới hạn trong hệ sẽ phải có hai thanh chảy dẻo. Vì chưa biết hai thanh nào của dàn chảy dẻo, cho nên ta sẽ tìm những thanh có nội lực lớn nhất theo cách tính trong trạng thái đàn hồi.

Phương trình chính tắc: $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0,$

trong đó:
$$\delta_{11} = \sum_i \frac{\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i1}}{(EA)_i} l_i; \quad \Delta_{1P} = \sum_i \frac{\bar{N}_{i1} N_{iP}^0}{(EA)_i} l_i,$$

\bar{N}_{i1} – lực dọc trong thanh thứ i của hệ cơ bản do lực $X_1=1$ gây ra;

N_{iP}^0 – lực dọc trong thanh thứ i của hệ cơ bản do tải trọng P gây ra.

Hệ cơ bản và các sơ đồ tính nội lực do $X_1=1$ và do tải trọng P gây ra trong hệ cơ bản như trên hình 11.16b, c, d. Các phép tính được thực hiện trong bảng 11.1.

Bảng 11.1

| Thanh | l_i (m) | \bar{N}_{i1} | N_{iP}^0 | $\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i1} l_i$ | $\bar{N}_{i1} N_{iP}^0 l_i$ | $N_i = N_{iP}^0 + \bar{N}_{i1} X_1$ |
|-------|-----------|----------------|------------|---------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| AB | 4,00 | -4/5 | 0 | 64/25 | 0 | 0,622 P |
| AC | 5,00 | 1 | 5 P/3 | 5 | 25 P/3 | 0,889 P |
| BD | 5,00 | 1 | 0 | 5 | 0 | -0,778 P |
| BC | 3,00 | -3/5 | 0 | 27/25 | 0 | 0,468 P |
| CD | 4,00 | -4/5 | -4 P/3 | 64/25 | 64 P/15 | -0,711 P |
| | | | | 405/25 | 189 P/15 | |

Ta có:
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{189P}{15} \times \frac{25}{405} = -0,778P.$$

Kết quả tính nội lực trong hệ theo trạng thái đàn hồi ghi trên bảng 11.1.

Từ bảng 11.1 ta thấy thanh AC là thanh chịu kéo lớn nhất: $N_{AC} = N_{max} = 0,889P$. Thanh này chính là thanh đầu tiên đạt tới trạng thái giới hạn, lúc đó nội lực trong thanh sẽ là:

$$N_{AC} = \sigma_{ch} A = 24.15 \approx 360 \text{ kN.}$$

Tải trọng tương ứng với thanh AC bị chảy dẻo được xác định từ điều kiện:

$$N_{AC}^d = 0,889P = 360 \text{ kN.}$$

Do đó $P = 405 \text{ kN}$.

Khi thanh AC đạt tới trạng thái giới hạn, hệ vẫn còn khả năng chịu lực vì chưa trở thành một hệ biến hình. Muốn cho dàn đạt tới trạng thái giới hạn ta phải tăng tải trọng P để có thêm một thanh nữa của dàn chảy dẻo, lúc đó hệ mới trở thành biến hình và không có khả năng chịu thêm tải trọng. Thanh bị chảy dẻo tiếp sau thanh AC là thanh có nội lực lớn nhất sau khi đã loại bỏ thanh AC và thay tác dụng của nó bằng lực dọc $N_{AC}^d = 360 \text{ kN}$. Lúc này dàn xem như là một hệ tĩnh định chịu tải trọng P và lực $N_{AC}^d = 360 \text{ kN}$ (hình 11.16e). Ta tính nội lực trong

các thanh của dàn này bằng phương pháp tách mắt và được kết quả như sau:

$$N_{AB} = (4P/3) - 288 \text{ kN}; \quad N_{AC} = 360 \text{ kN}; \quad N_{BC} = P - 216 \text{ kN};$$

$$N_{BD} = -(5P/3) - 360 \text{ kN}; \quad N_{CD} = -288 \text{ kN};$$

- Giả thiết thanh BC là thanh bị chảy dẻo ngay sau thanh AC . Viết điều kiện chảy dẻo của thanh này ta được:

$$N_{BC} = P - 216 = \sigma_{ch} \cdot A = 24.15 = 360 \text{ kN}. \quad \text{Suy ra } P_{gh} = 576 \text{ kN}.$$

- Nếu xem thanh bị chảy dẻo ngay sau thanh AC là thanh AB , ta có:

$$N_{AB} = (20P/15) - 288 = \sigma_{ch} \cdot A = 24.15 = 360 \text{ kN}. \quad \text{Suy ra } P_{gh} = 486 \text{ kN}.$$

- Nếu xem thanh bị chảy dẻo ngay sau thanh AC là thanh chịu nén BD , ta có:

$$N_{BD} = -(5P/3) + 360 = -\sigma_{ch} \cdot A = -24.15 = -360 \text{ kN}. \quad \text{Suy ra } P_{gh} = 432 \text{ kN}.$$

So sánh các kết quả, ta chọn giá trị P_{gh} nhỏ nhất làm tải trọng giới hạn của dàn:

$$P_{gh} = 432 \text{ kN}$$

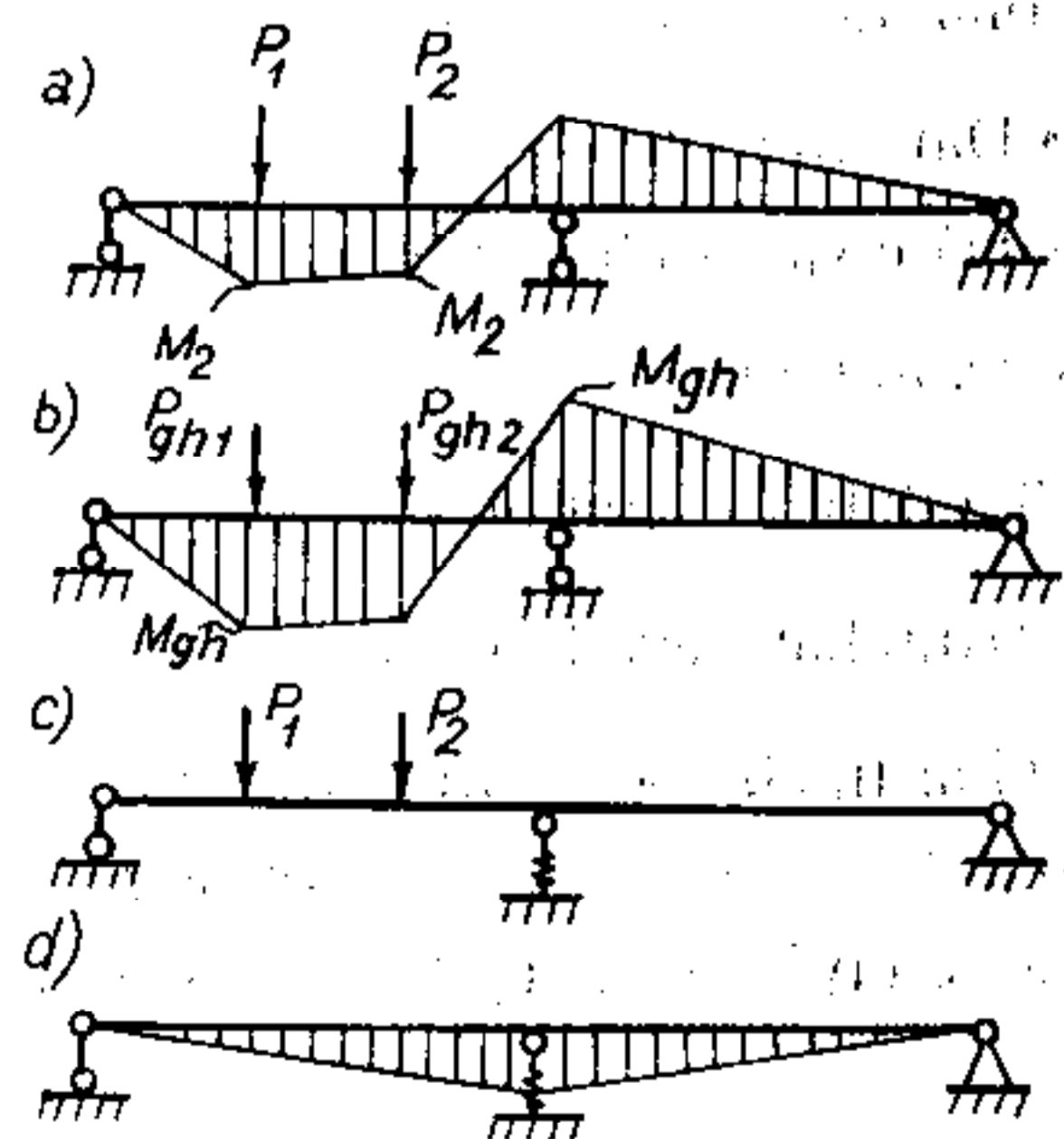
Đó là giá trị nhỏ nhất đủ để làm cho hai thanh AC và BD của dàn chảy dẻo và hệ trở thành biến hình, không có khả năng chịu thêm tải trọng (hình 11.16f).

Cần chú ý là ngoài việc xét hệ đạt tới trạng thái giới hạn, ta còn phải xét xem khi $P_{gh} = 432 \text{ kN}$ thì dàn có bị mất ổn định không. Nếu dàn bị mất ổn định thì tải trọng giới hạn của dàn sẽ do điều kiện ổn định quyết định.

11.7. Ảnh hưởng của liên kết dàn hồi, sự chuyển vị cưỡng bức, sự thay đổi nhiệt độ đến giá trị của tải trọng giới hạn

Để tìm hiểu ảnh hưởng của các nguyên nhân nói trên đối với giá trị của tải trọng giới hạn, ta xét trường hợp hệ có liên kết dàn hồi làm ví dụ.

Xét dầm liên tục hai nhịp chịu tác dụng của lực P_1 và P_2 như trên hình 11.17a. Giả sử rằng ở giai đoạn đàn hồi, mômen uốn tại tiết diện dưới điểm đặt lực P_1 lớn hơn mômen uốn tại tiết diện dưới điểm đặt lực P_2 . Khớp dẻo đầu tiên phát sinh tại tiết diện ứng dưới P_1 còn khớp dẻo thứ hai phát sinh trên gối tựa trung gian (hình 11.17b).



Hình 11.17

Nếu gối tựa trung gian là gối đàn hồi (hình 11.17c) thì ta cần bổ sung vào biểu đồ mômen uốn của dầm trên gối cứng (hình 11.17b) phần biểu đồ mômen uốn do ảnh hưởng của liên kết đàn hồi như trên hình 11.17d. Tuy nhiên, tải trọng giới hạn vẫn không thay đổi. Thật vậy, ở trạng thái giới hạn, nhịp thứ nhất của dầm chỉ trở thành biến hình khi biểu đồ mômen uốn trong dầm đơn giản được "treo" để sao cho mômen âm lớn nhất vừa đúng bằng mômen giới hạn ở phía trên còn mômen dương lớn nhất vừa đúng bằng mômen giới hạn ở phía dưới, nghĩa là như trên hình 11.17b. Cách thực hiện này là duy nhất. Do đó, tuy có bổ sung phần biểu đồ do ảnh hưởng của liên kết đàn hồi thì vị trí của các khớp dẻo vẫn không thay đổi. Như vậy, tải trọng giới hạn không phụ thuộc tính đàn hồi của các liên kết.

Cũng lý luận tương tự, người ta chứng minh được là tải trọng giới hạn không phụ thuộc ứng suất có sẵn trong hệ siêu tĩnh cũng như không phụ thuộc ứng suất phát sinh do các nguyên nhân khác, chẳng hạn do sự thay đổi nhiệt độ, sự chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa và chế tạo không chính xác.

CÂU HỎI ÔN TẬP

- 11.1. So sánh cách tính theo ứng suất cho phép và cách tính theo trạng thái giới hạn.
- 11.2. Cách tính theo trạng thái giới hạn được xây dựng trên cơ sở biểu đồ liên hệ giữa ứng suất và biến dạng như thế nào?
- 11.3. Nêu những điểm giống nhau và khác nhau giữa: "khớp thực" và "khớp dẻo".
- 11.4. Phát biểu tiêu chí xảy ra trạng thái giới hạn. Nêu cụ thể cho các trường hợp:
 - Dầm tĩnh định.
 - Dầm siêu tĩnh một nhịp.
 - Dầm liên tục.
- 11.5. Trình bày cách tính khung siêu tĩnh theo trạng thái giới hạn.
- 11.6. Trình bày cách tính dầm siêu tĩnh theo trạng thái giới hạn.
- 11.7. Giải thích tại sao trong hệ siêu tĩnh tải trọng giới hạn không phụ thuộc tính đàn hồi của liên kết, ứng suất có sẵn, ứng suất phát sinh do sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của gối tựa và chế tạo không chính xác.

Tài liệu tham khảo chính

1. Charon P. *La méthode de Cross et le calcul pratique des constructions hyperstatiques*. P. Eyrolles, 1968.
2. Darkov A. *Structural mechanics*. 4th ed. M. 1983.
3. Kani G. *Le calcul des portiques étagés multiples*. Dunod, 1958.
4. Kiselev V. *Structural mechanics*. Mir. 1982.
5. Рабинович И. М. *Основы строительной механики стержневых систем*. Стройиздат, Москва, 1956.
6. Рабинович И. М. *Курс строительной механики стержневых систем - Часть I - Статически определимые системы*. Стройиздат, Москва, 1950.
7. Рабинович И. М. *Курс строительной механики стержневых систем - Часть II - Статически неопределимые системы*. Горстройиздат, Москва, 1954.
8. Timoshenko S. P., Young D. H. *Theory of Structures*. 2nd. ed. Mc. Graw-Hill Bk. Co, 1965.
9. *Справочник проектировщика - Расчетно - теоретический. Книга I*. Стройиздат, Москва, 1950.
10. Lêu Thọ Trình - Hồ Anh Tuấn. *Cách tính hệ siêu tĩnh theo phương pháp phân phối mômen*. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 1965.
11. Lêu Thọ Trình - Hồ Anh Tuấn. *Cơ học kết cấu - Tập I*. Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1983.
12. Lêu Thọ Trình. *Cơ học kết cấu - Tập II và tập III*. Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1986.
13. Lêu Thọ Trình. *Cơ học kết cấu - Tập I - Hệ tĩnh định*. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 1992.
14. Lêu Thọ Trình. *Cơ học kết cấu - Tập II- Hệ siêu tĩnh*. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 1993.

Mục lục

Chương 5. Phương pháp lực và cách tính hệ phẳng siêu tĩnh

- 5.1. Khái niệm về hệ siêu tĩnh - Bậc siêu tĩnh 3
- 5.2. Nội dung phương pháp lực và cách tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng bất động, sự thay đổi nhiệt độ, sự cấu tạo chiều dài không chính xác, sự chuyển vị gối tựa 17
- 5.3. Áp dụng 17
- 5.4. Cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh 32
- 5.5. Cách kiểm tra kết quả 37
- 5.6. Một số điều cần chú ý khi tính các hệ siêu tĩnh bậc cao 43
- 5.7. Cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ 46
- 5.8. Biện pháp đơn giản hóa bằng cách thay đổi vị trí và phương của các ản 64
- 5.9. Cách tính dầm liên tục 60
- 5.10. Cách tính dầm liên tục đặt trên các gối tựa đàn hồi 78
- 5.11. Cách tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng di động 81
- 5.12. Biểu đồ bao nội lực trong hệ siêu tĩnh 91
- Câu hỏi ôn tập 93

Chương 6. Phương pháp chuyển vị và cách tính hệ phẳng siêu động

- 6.1. Khái niệm 95
- 6.2. Cách tính hệ siêu động chịu tải trọng bất động 100
- 6.3. Cách xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh trong hệ có các thanh đứng không song song 115
- 6.4. Cách tính hệ siêu động chịu sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức 120

| | |
|--|-----|
| 6.5. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu lực tập trung chỉ đặt ở nút | 128 |
| 6.6. Cách tính hệ siêu động chịu tải trọng di động | 129 |
| Câu hỏi ôn tập | 138 |
| Chương 7. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp | |
| 7.1. So sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị - Cách chọn phương pháp tính | 139 |
| 7.2. Phương pháp hỗn hợp | 141 |
| 7.3. Phương pháp liên hợp | 144 |
| Câu hỏi ôn tập | 146 |
| Chương 8. Hệ không gian | |
| 8.1. Các loại liên kết không gian | 147 |
| 8.2. Cách nối các vật thể thành một hệ không gian bất biến hình | 151 |
| 8.3. Cách xác định phản lực và nội lực trong hệ không gian tĩnh định | 156 |
| 8.4. Cách phân tích dàn không gian thành những dàn phẳng | 163 |
| 8.5. Cách xác định chuyển vị trong hệ không gian | 164 |
| 8.6. Cách tính hệ không gian siêu tĩnh theo phương pháp lực | 166 |
| 8.7. Cách tính hệ không gian siêu động theo phương pháp chuyển vị | 170 |
| Câu hỏi ôn tập | 174 |
| Chương 9. Phương pháp phân phối mômen | |
| 9.1. Phương pháp H. Cross | 175 |
| 9.2. Phương pháp G. Kani | 194 |
| Câu hỏi ôn tập | 210 |
| Chương 10. Phương pháp động học | |
| 10.1. Khái niệm | 211 |
| 10.2. Cách tính hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động | 213 |
| 10.3. Điều kiện bất biến hình của hệ thanh có đủ số liên kết | 222 |
| 10.4. Cách tính hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động | 224 |
| | 261 |

| | |
|---|-----|
| 10. 5. Cách tính hệ siêu tĩnh | 237 |
| Câu hỏi ôn tập | 240 |
| Chương 11. Khái niệm về cách tính theo trạng thái giới hạn | |
| 11.1. Khái niệm | 241 |
| 11.2. Cách tính dầm tĩnh định | 243 |
| 11.3. Cách tính dầm siêu tĩnh | 245 |
| 11.4. Cách tính dầm có tiết diện thay đổi | 250 |
| 11.5. Cách tính khung và vòm siêu tĩnh | 251 |
| 11.6. Cách tính dàn siêu tĩnh | 255 |
| 11.7. Ảnh hưởng của liên kết đàn hồi, sự chuyển vị cưỡng bức, sự thay đổi nhiệt độ đến giá trị của tải trọng giới hạn | 257 |
| Câu hỏi ôn tập | 258 |
| Tài liệu tham khảo chính | 259 |

Gs, Ts. LÊU THỌ TRÌNH

CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP II

HỆ SIÊU TĨNH

Chịu trách nhiệm xuất bản : Pgs, Ts. TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập : MINH HẰNG, THANH ĐỊNH
Kỹ mỹ thuật : NHƯ MAI
Sửa bản in : MINH HẰNG
Trình bày bìa : HƯƠNG LAN

11.000.000 VNĐ

11.000.000 VNĐ

11.000.000 VNĐ

11.000.000 VNĐ

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 TRẦN HUNG ĐẠO, HÀ NỘI

In 1500 bản, khổ 16 x 24cm. Tại Xí nghiệp in 19-8, số 3
đường Nguyễn Phong Sắc, Nghĩa Tân - Cầu Giấy - Hà Nội.
Giấy phép xuất bản số 451-10-2 cấp ngày 4 tháng 9 năm 2000
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2000.

Thư viện - DHDL Hải Phòng



2001DVL738

Giá: 31.000đ