

TRƯỜNG ĐẠI HỌC  
DÂN LẬP HẢI PHÒNG

THƯ VIỆN

605

L 259 TH

LÊU THỌ TRÌNH

# CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP 1

HỆ TĨNH ĐỊNH



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

LÊU THỌ TRÌNH

CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP

DVL732



THƯ VIỆN  
ĐH.ĐAN LẬP HP  
KÝ HIỆU: 605  
L 259 TH  
SỐ:

Gs, Ts. LÊU THỌ TRÌNH

# CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP I

Hệ tĩnh định

THƯ VIỆN ĐH.ĐAN LẬP HP  
PHÒNG ĐỌC  
2001 ĐVL 73d



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2000

13.12.1999

13.12.1999

000000

000000

13.12.1999

13.12.1999

13.12.1999

13.12.1999

60 - 605 41 - 20 - 1 - 99  
KHKT - 99

# Lời tựa

*Cơ học kết cấu là một phần kiến thức cơ sở đối với kỹ sư thuộc các ngành xây dựng cơ bản, môn học được bố trí trong chương trình đào tạo của nhiều trường đại học như xây dựng, giao thông, thủy lợi, mỏ địa chất ...*

*Cơ học kết cấu trang bị cho kỹ sư và sinh viên những kiến thức cần thiết để giải quyết các bài toán thực tế có liên quan đến các khâu từ thiết kế đến thi công và để nghiên cứu các môn kỹ thuật khác của chuyên ngành.*

*Giáo trình được biên soạn nhằm giúp các kỹ sư và sinh viên nghiên cứu, luyện tập khả năng phân tích tính chất chịu lực của kết cấu và kỹ năng tính toán kết cấu chịu các nguyên nhân tác dụng thường gặp trong thực tế như tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các liên kết, chế tạo các thanh không chính xác.*

*Về nội dung, giáo trình được biên soạn nhằm đáp ứng nhu cầu về học và dạy phù hợp với chương trình môn học hiện hành trong các trường đại học, không tham vọng trình bày được đầy đủ các khía cạnh phong phú, đa dạng của Cơ học kết cấu.*

*Tác giả chân thành cảm ơn sự quan tâm và những ý kiến đóng góp của bạn đọc cùng các đồng nghiệp.*

**TÁC GIẢ**



# Ký hiệu các đại lượng

## Hệ tọa độ

$z$	trục thanh;
$x, y$	hệ trục chính trung tâm của tiết diện;
$\rho, \theta$	toa độ cực.

## Các đặc trưng vật liệu

$E$	môđun đàn hồi khi kéo hoặc nén (môđun Young);
$\mu$	hệ số biến dạng ngang (hệ số Poisson);
$G$	môđun đàn hồi khi trượt;
$\alpha$	hệ số giãn nở dài vì nhiệt của vật liệu.

## Các đặc trưng hình học

$A$	diện tích tiết diện;
$S, I, W$	mômen tĩnh, mômen quán tính và mômen chống uốn của tiết diện;
$S_x, S_y$	mômen tĩnh đối với trục $x$ và đối với trục $y$ ;
$I_x, I_y$	mômen quán tính đối với trục $x$ và đối với trục $y$ ;
$I_{xy}$	mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục $xy$ ;
$W_x, W_y$	mômen chống uốn của tiết diện trong mặt phẳng uốn $yz$ và mặt phẳng uốn $xz$ ;
$W_{x,d}$	mômen chống uốn dẻo của tiết diện trong mặt phẳng uốn $yz$ ;
$I_p$	mômen quán tính cực (đối với gốc toạ độ).

## Ngoại lực và phản lực

$P$	lực tập trung;
$p$	cường độ lực phân bố diện tích;
$q$	cường độ lực phân bố theo đường, vuông góc với trục thanh;
$t$	cường độ lực phân bố theo đường, tiếp tuyến với trục thanh;
$M, \mathcal{M}$	mômen tập trung;
$m$	cường độ mômen phân bố;
$R_{jm}$	phản lực tại liên kết $j$ do nguyên nhân $m$ ;
$\bar{R}_{jm}$	phản lực tại liên kết $j$ do nguyên nhân $m$ bằng đơn vị;

$r_{km}$	phản lực đơn vị tại liên kết $k$ do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết $m$ ;
$\dot{r}_{km}$	phản lực đơn vị tại liên kết $k$ do lực $P_m$ ;
$P_{tc}$	tải trọng tiêu chuẩn;
$P_t$	tải trọng tính toán.

### Ứng suất

$\rho, \sigma, \tau$	ứng suất toàn phần, ứng suất pháp, ứng suất tiếp;
$\sigma_{ll}$	giới hạn tỷ lệ;
$\sigma_{ch}$	giới hạn chảy;
$\sigma_b$	giới hạn bền;
$\sigma_0$	ứng suất giới hạn;
$[\sigma]$	ứng suất cho phép;
$R_{tc}$	cường độ tiêu chuẩn, sức chịu tiêu chuẩn;
$R_t$	cường độ tính toán, sức chịu tính toán.

### Nội lực

$N, M, Q$	các thành phần nội lực trong bài toán phẳng;
$\bar{N}, \bar{M}, \bar{Q}$	các thành phần nội lực do lực đơn vị gây ra;
$N$	lực dọc;
$M_x$	mômen uốn trong mặt phẳng $yz$ (mômen uốn quanh trục $x$ );
$M_y$	mômen uốn trong mặt phẳng $xz$ (mômen uốn quanh trục $y$ );
$M_z$	mômen xoắn (mômen xoắn quanh trục $z$ );
$Q_x, Q_y$	lực cắt theo phương $x$ và lực cắt theo phương $y$ ;
$M_{gh}$	mômen uốn giới hạn;

### Biến dạng và chuyển vị

$\psi$	biến dạng xoay tỷ đối (góc hợp giữa hai tiết diện của một phân tố thanh có chiều dài bằng đơn vị khi phân tố bị biến dạng);
$\varepsilon$	biến dạng dọc trục tỷ đối;
$\gamma$	biến dạng trượt tỷ đối;
$\Delta l$	biến dạng dài của đoạn thanh;
$\theta$	góc xoắn tỷ đối của thanh;
$\Delta_{km}$	chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực $P_k$ do nguyên nhân $m$ ;
$Z_{jm}$	chuyển vị cưỡng bức tại liên kết $j$ ở trạng thái $m$ ;
$y, \varphi$	độ võng và góc xoay của tiết diện thanh chịu uốn trong mặt phẳng $yz$ .



- $\delta_{km}$  chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do lực  $P_m$ ;  
 $\dot{\delta}_{km}$  chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do chuyển vị cưỡng bức  $Z_m$ .

### **Các ký hiệu khác**

- $\nu$  hệ số điều chỉnh, kể tới sự phân bố không đều của ứng suất tiếp;  
 $S$  đại lượng nghiên cứu  $S$ ;  
 $\bar{S}$  đại lượng nghiên cứu  $S$  do lực đơn vị gây ra;  
 $(S)$  biểu đồ của đại lượng  $S$ ;  
 $(\bar{S})$  biểu đồ của đại lượng nghiên cứu  $S$  do lực đơn vị gây ra;  
 $T$  công của ngoại lực;  
 $A^*$  công của nội lực;  
 $U$  thế năng biến dạng đàn hồi;  
 $U_P$  thế năng của ngoại lực;  
 $t_{1m}, t_{2m}$  độ biến thiên nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới thanh;  
 $t_{cm}$  độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh;  
 $n$  bậc siêu tĩnh, bậc siêu động, hệ số vượt tải (hệ số độ tin cậy về tải trọng);  
 $k$  hệ số an toàn;  
 $\gamma$  hệ số điều kiện làm việc;  
 $\gamma_{cn}$  hệ số độ tin cậy theo chức năng của kết cấu;  
 $\gamma_{vl}$  hệ số độ tin cậy của vật liệu (hệ số đồng chất của vật liệu).

# Mở đầu

## 1. Đối tượng và nhiệm vụ của Cơ học kết cấu

Cơ học kết cấu là môn *khoa học thực nghiệm*, trình bày các phép tính để kiểm tra *độ bền, độ cứng và độ ổn định* của các công trình chịu các *nguyên nhân tác dụng* khác nhau như tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ và hiện tượng lún.

*Tính công trình về độ bền* nhằm bảo đảm cho công trình có khả năng chịu tác dụng của tải trọng cũng như của các nguyên nhân khác mà không bị phá hoại.

*Tính công trình về độ cứng* nhằm bảo đảm cho công trình không có chuyển vị và rung động lớn có thể làm cho công trình mất trạng thái làm việc bình thường ngay cả khi điều kiện bền vẫn bảo đảm.

*Tính công trình về mặt ổn định* là tìm hiểu khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của công trình dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

Tuy nội dung nghiên cứu của Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu giống nhau nhưng phạm vi nghiên cứu có khác nhau. Sức bền vật liệu nghiên cứu cách tính độ bền, độ cứng và độ ổn định của từng cấu kiện riêng rẽ. Cơ học kết cấu nghiên cứu toàn bộ công trình gồm nhiều cấu kiện riêng rẽ liên kết với nhau tạo thành một kết cấu có khả năng chịu lực và nghiên cứu phương pháp tính toán các kết cấu đó. Đó là sự khác nhau về nguyên tắc song cũng có nhiều vấn đề đồng thời cùng thuộc lĩnh vực nghiên cứu của cả hai môn học.

*Nhiệm vụ chủ yếu* của Cơ học kết cấu là *xác định nội lực (còn gọi là ứng lực) và chuyển vị trong công trình*. Độ bền, độ cứng và độ ổn định của công trình có liên quan đến tính chất cơ học của vật liệu, hình dạng và kích thước của cấu kiện, nội lực phát sinh và phát triển trong công trình. Hơn nữa kích thước của cấu kiện lại phụ thuộc nội lực trong cấu kiện đó. Do đó công việc đầu tiên khi tính công trình là xác định trạng thái nội lực và biến dạng phân bố trong công trình dưới tác động bên ngoài.

Trong thực tế thường gặp hai loại bài toán:

\* *Bài toán kiểm tra*: Ta gặp bài toán này khi đã có sẵn công trình, tức là đã biết rõ hình dạng, kích thước của công trình cũng như đã biết được các nguyên nhân



tác động bên ngoài. Trong trường hợp này cần phải xác định trạng thái nội lực và biến dạng của hệ dưới tác động bên ngoài có thể xảy ra để phán đoán xem công trình có bảo đảm đủ bền, đủ cứng và đủ ổn định hay không, công trình thiết kế có kinh tế hay không?

\* *Bài toán thiết kế*: Ta gặp bài toán này khi cần thiết kế công trình, tức là cần xác định hình dạng, kích thước cụ thể của các cấu kiện trong công trình một cách hợp lý để cho công trình có khả năng thỏa mãn điều kiện bền, điều kiện cứng và điều kiện ổn định dưới tác động của các nguyên nhân bên ngoài đã biết. Để giải quyết bài toán này người thiết kế thường phải dựa vào kinh nghiệm hoặc sử dụng các phương pháp thiết kế sơ bộ để giả thiết trước hình dạng, kích thước của các cấu kiện trong công trình. Tiếp đó, tiến hành giải bài toán kiểm tra như đã nói ở trên để xem công trình vừa mới giả thiết có thỏa mãn các điều kiện bền, điều kiện cứng, điều kiện ổn định hay không, có bảo đảm tiết kiệm nguyên vật liệu hay không. Trên cơ sở đó người thiết kế hiệu chỉnh lại giả thiết ban đầu của mình.

Như vậy, trong cả hai loại bài toán kiểm tra và thiết kế ta đều phải biết cách xác định trạng thái nội lực và biến dạng phân bố trong công trình khi cho biết hình dạng kích thích thước của các cấu kiện trong công trình và các tác động bên ngoài.

Sau khi môn cơ học kết cấu đã giải quyết vấn đề nội lực và biến dạng của công trình, các môn kỹ thuật chuyên môn như Kết cấu thép, Kết cấu bê tông, Kết cấu gỗ, Kết cấu gạch đá sẽ căn cứ vào các kết quả tính nội lực đã tìm được đồng thời tùy theo tính năng của vật liệu do các môn đó nghiên cứu để tiếp tục hoàn thiện việc tính toán công trình. Do đó Cơ học kết cấu là môn kỹ thuật cơ sở, chuẩn bị phục vụ cho các môn học chuyên môn.

Ngoài ra, Cơ học kết cấu còn có nhiệm vụ nghiên cứu dạng hợp lý của các công trình bảo đảm yêu cầu tiết kiệm vật liệu nhất cũng như nghiên cứu các quy luật hình thành công trình bảo đảm cho công trình không bị thay đổi dạng hình học dưới tác động của các nguyên nhân bên ngoài.

Cơ học kết cấu là môn *khoa học thực nghiệm* do đó các khâu lý luận và thực nghiệm có liên quan mật thiết với nhau. Thực nghiệm có thể tiến hành trước hoặc sau khi sáng tạo lý luận, đôi khi tiến hành cả trước lẫn sau. Thực nghiệm tiến hành trước khi sáng tạo lý luận nhằm phát hiện những nhân tố cơ bản trong đối tượng nghiên cứu, đồng thời cũng phát hiện những nhân tố thứ yếu có thể bỏ qua được để đơn giản hóa bước đúc kết lý luận. Thực nghiệm tiến hành sau khi sáng tạo lý luận nhằm kiểm tra kết quả tìm được bằng lý luận. Chỉ có những công trình nghiên cứu nào được thực nghiệm xác nhận mới xứng đáng được tin cậy.

Môn Cơ học kết cấu giữ một vai trò quan trọng đối với kỹ sư xây dựng làm công tác thiết kế cũng như thi công. Cơ học kết cấu trang bị cho kỹ sư thiết kế những tri thức giúp họ phát hiện được nội lực và biến dạng trong công trình và do đó tìm được những hình dạng hợp lý của công trình, thể hiện được một cách đầy đủ và hợp lý những ý nghĩ sáng tạo của mình. Môn học này giúp những người làm công tác thi công có khả năng hiểu biết đúng đắn sự làm việc của công trình, loại trừ được những thiếu sót trong khi xây dựng, quyết định một cách đúng đắn về kích thước các đà giáo, các thiết bị lắp ráp và có khả năng quyết định thay thế cấu kiện này bằng cấu kiện khác tương đương...

## 2. Sơ đồ tính của công trình

Nói chung, khi xác định nội lực trong công trình, nếu xét đến một cách chính xác và đầy đủ tất cả các yếu tố hình học của các cấu kiện thì bài toán sẽ quá phức tạp. Do đó cũng như các môn khoa học khác, Cơ học kết cấu phải dùng phương pháp trừu tượng khoa học để thay thế công trình thực bằng sơ đồ tính của nó.

*Sơ đồ tính của công trình là hình ảnh đơn giản hóa mà vẫn bảo đảm phản ánh được sát với sự làm việc thực của công trình.*

Trong sơ đồ tính người ta lược bỏ các yếu tố không cơ bản và chỉ xét đến các yếu tố chủ yếu quyết định khả năng làm việc của công trình. Khi tính toán ta cần tìm cách thay thế công trình thực bằng sơ đồ tính hợp lý gọi là lựa chọn sơ đồ tính.

Lựa chọn sơ đồ tính là công việc khá phức tạp và đa dạng. Khó có thể nêu ra những quy tắc có tính chất tổng quát về vấn đề này. Việc chọn sơ đồ tính chẳng những tùy thuộc vào hình dạng kết cấu và tầm quan trọng của nó, tùy thuộc vào khả năng tính toán, tùy thuộc vào quan hệ tỷ lệ giữa độ cứng của các cấu kiện trong công trình mà còn tùy thuộc vào tải trọng và tính chất tác dụng của tải trọng. Khi lựa chọn sơ đồ tính chẳng những phải xem xét các giả thiết đơn giản hóa có thể chấp nhận được không, chẳng những phải kiểm tra xem sơ đồ tính có đủ phản ánh sát thực tế về các điều kiện độ bền, độ cứng, ổn định mà còn phải chú ý khảo sát thêm các yêu cầu kinh tế, kỹ thuật khác nữa.

Trong thực tế, để chuyển công trình thực về sơ đồ tính của nó ta cần thực hiện hai bước biến đổi sau:

\* *Bước thứ nhất:* Chuyển công trình thực về sơ đồ của công trình. Bước này được thực hiện theo một số nguyên tắc sau:

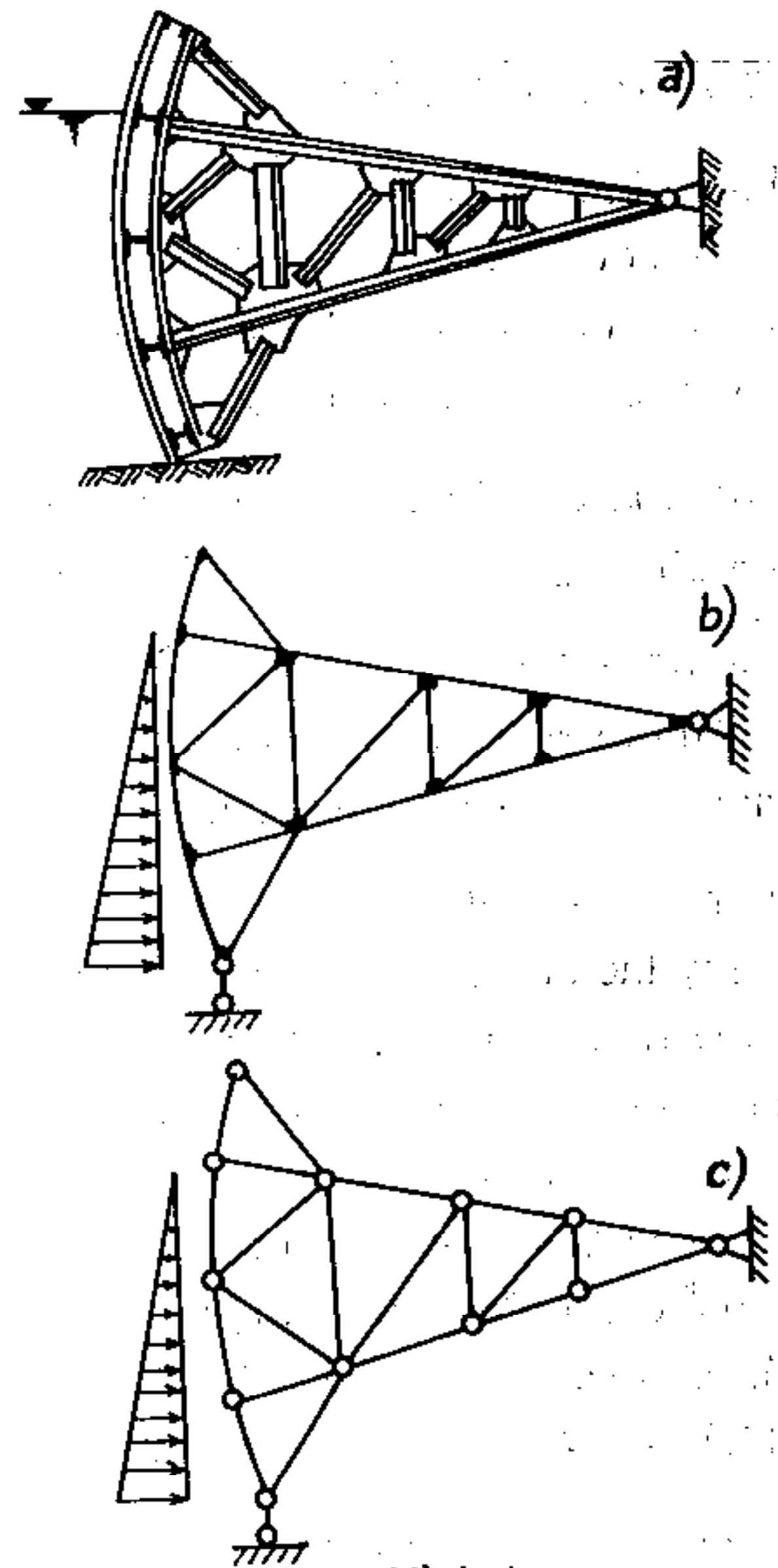
- ◆ Thay các thanh bằng đường trung gian gọi là *trục*. Thay các bản hoặc vỏ bằng các *mặt trung gian*.



- ◆ Thay tiết diện bằng các đại lượng đặc trưng như diện tích  $A$ , mômen quán tính  $I...$  của tiết diện.
  - ◆ Thay các thiết bị tựa bằng các liên kết tựa lý tưởng (không ma sát).
  - ◆ Đưa các tải trọng tác dụng trên mặt cấu kiện về trục của cấu kiện.
- ✱ *Bước thứ hai:* Chuyển sơ đồ của công trình về sơ đồ tính của công trình.

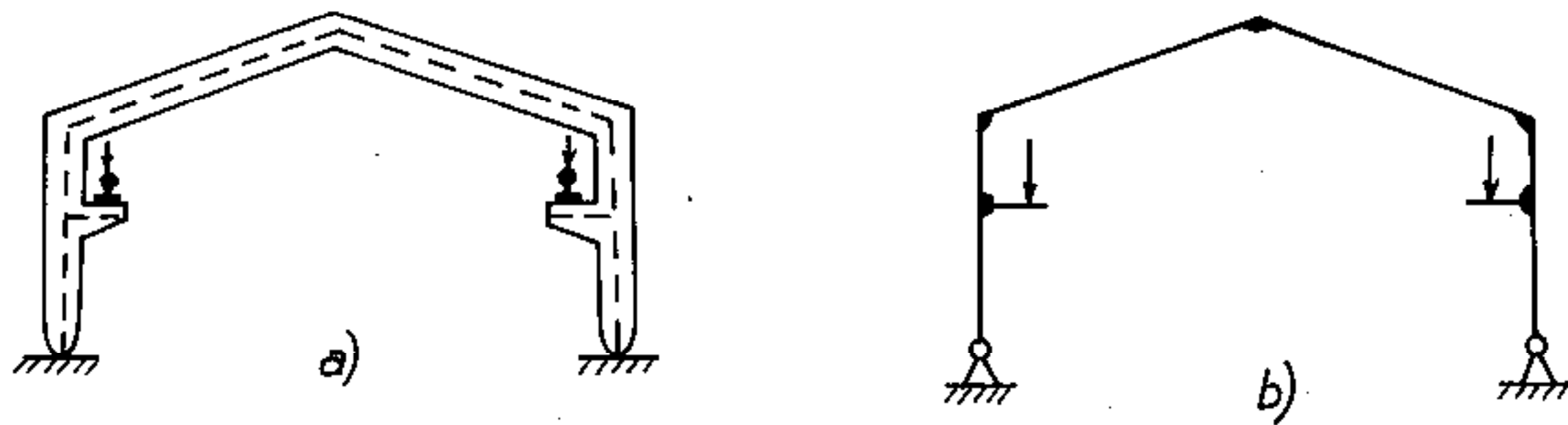
Ở bước này ta bỏ qua thêm một số yếu tố giữ vai trò thứ yếu trong sự làm việc của công trình nhằm bảo đảm cho sơ đồ tính phù hợp với khả năng tính toán của người thiết kế.

Ví dụ, với công trình dàn van cung trên hình 1a, sau khi thực hiện các phép biến đổi trong bước thứ nhất, ta được sơ đồ của công trình như trên hình 1b. Nếu dùng sơ đồ này để tính toán với quan niệm mắt dàn (giao điểm của các thanh) được xem là nút cứng, nghĩa là xem chuyển vị (sự chuyển dời vị trí khi chịu lực) thẳng và chuyển vị góc của các đầu thanh quy tụ ở mỗi nút như nhau, thì bài toán sẽ rất phức tạp nếu không có sự trợ giúp của máy tính điện tử. Trên thực tế, để đơn giản hóa cách tính dàn người ta thường quy đổi tải trọng về mắt dàn và giả thiết xem các mắt của dàn như các khớp lý tưởng, nghĩa là quan niệm các thanh quy tụ vào mắt có thể xoay tự do, không ma sát. Sau khi thực hiện cách đơn giản hóa đó, ta được hệ trên hình 1c, là sơ đồ tính của công trình.



Hình 1

Nếu sơ đồ của công trình đã phù hợp với khả năng và yêu cầu tính toán thì có thể dùng nó làm sơ đồ tính mà không cần đơn giản hóa thêm nữa. Ví dụ, với hệ khung cho trên hình 2a, sau khi thực hiện phép biến đổi ở bước thứ nhất ta có sơ đồ công trình như trên hình 2b. Sơ đồ này cũng là sơ đồ tính vì đã phù hợp với khả năng tính toán.



Hình 2

Như trên đã nói, cách chọn sơ đồ tính của công trình là một vấn đề phức tạp và quan trọng vì chất lượng kết quả tính toán phụ thuộc rất nhiều vào sơ đồ tính.

Cũng cần nhấn mạnh thêm rằng người thiết kế luôn luôn phải có trách nhiệm tự kiểm tra xem sơ đồ tính đã chọn có phù hợp với thực tế không, có phản ánh chính xác sự làm việc thực tế của công trình không. Nếu việc lựa chọn sơ đồ tính dựa trên nhiều giả thiết đơn giản hóa có thể dẫn đến sai lệch quá lớn với sự làm việc thực tế của công trình thì người thiết kế phải tiến hành tính toán lại với sơ đồ tính mới đã được chính xác hóa thêm.

Đối với những phép tính sơ bộ, sơ đồ tính có thể đơn giản, thô sơ còn đối với những bước tính toán có tính chất quyết định thì sơ đồ phải hoàn thiện, chặt chẽ.

### 3. Phân loại công trình

Có nhiều cách phân loại công trình. Dưới đây ta sẽ tìm hiểu một vài cách phân loại thường được sử dụng.

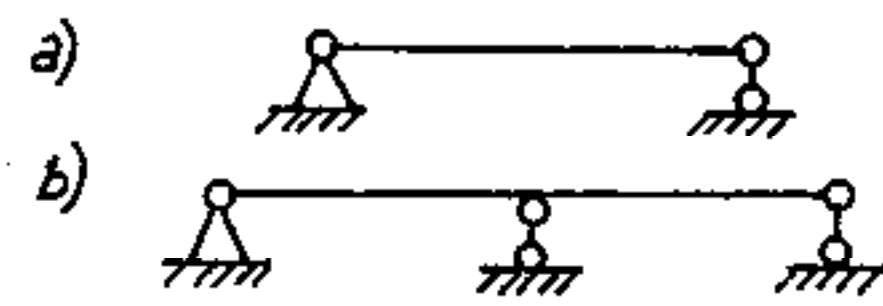
#### A. Phân loại theo sơ đồ tính

Theo cách này ta chia các công trình thành hai loại: *hệ phẳng* và *hệ không gian*.

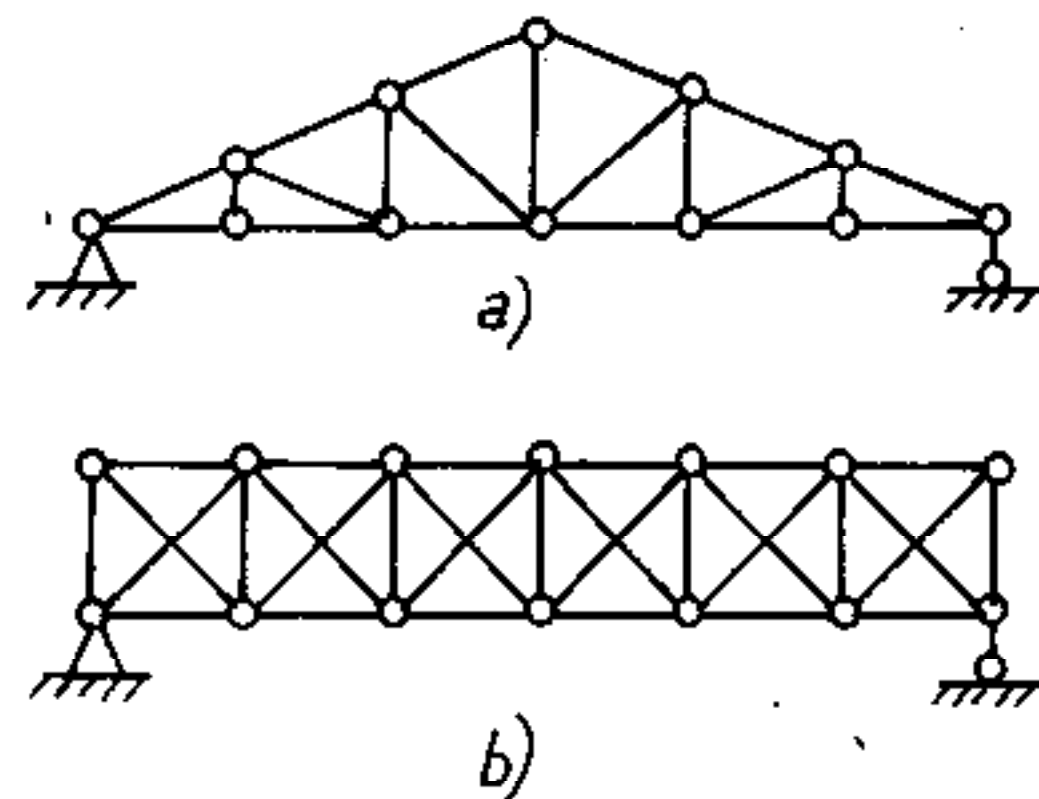
**1. Hệ phẳng:** khi tất cả các cấu kiện của công trình đều nằm trong một mặt phẳng và tải trọng cũng chỉ tác dụng trong mặt phẳng đó.

Trong hệ phẳng, dựa theo hình dạng của công trình người ta còn chia thành nhiều dạng kết cấu khác nhau:

- ◆ dầm (hình 3a, b);
- ◆ dàn (hình 4a, b);



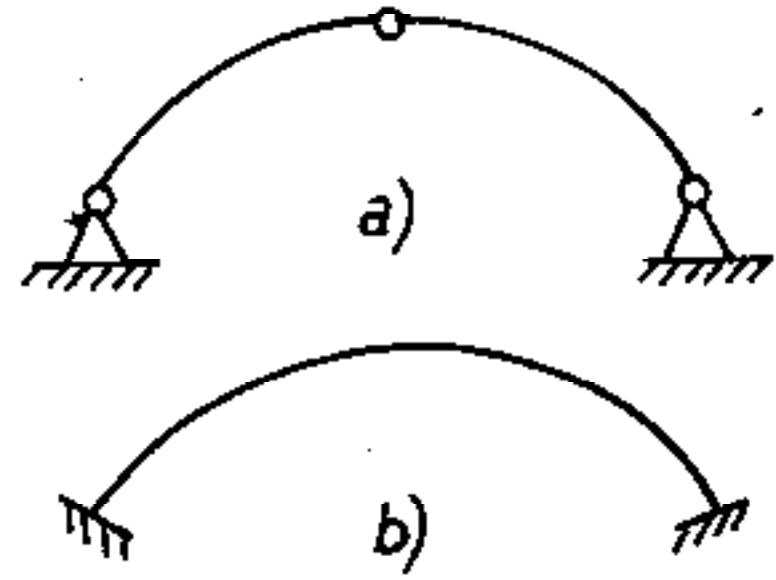
Hình 3



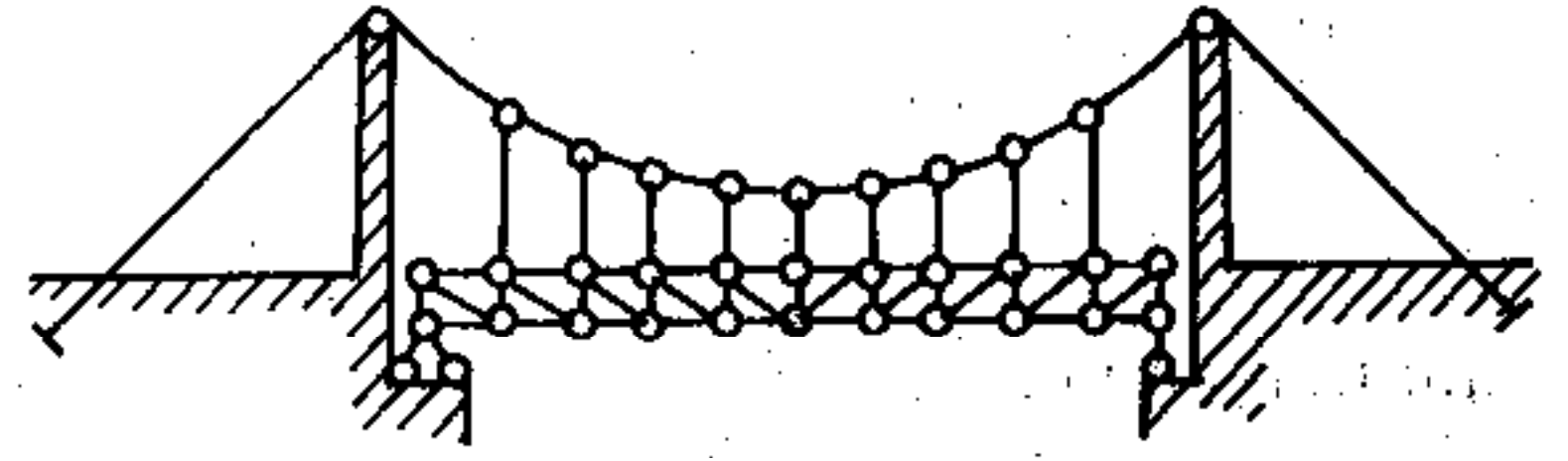
Hình 4



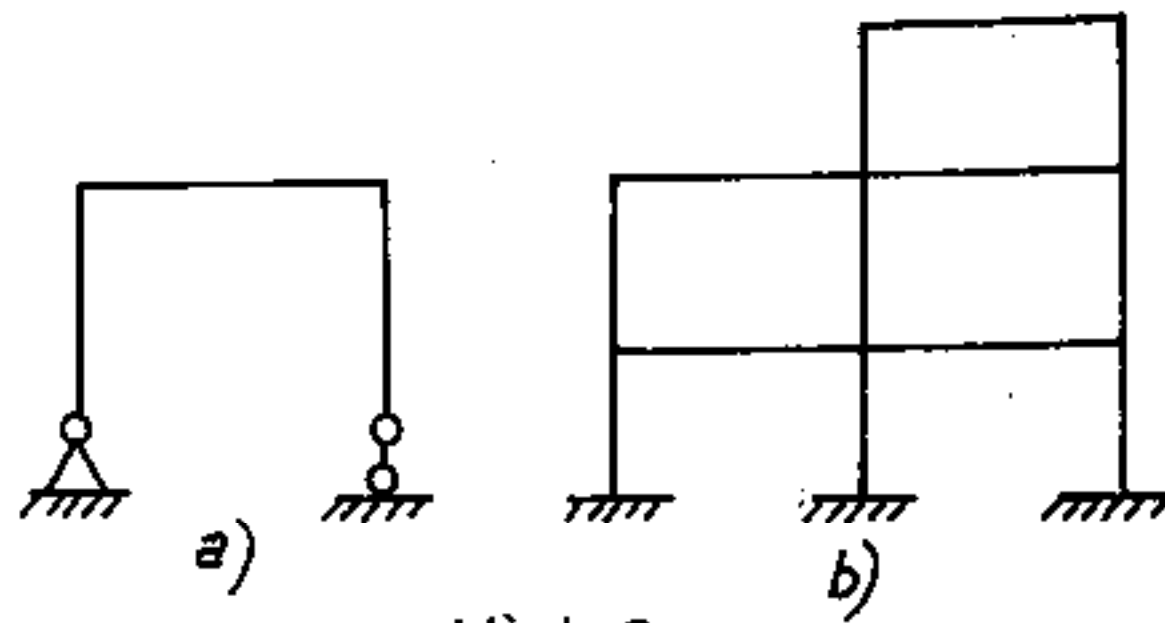
- ◆ vòm (hình 5a, b);
- ◆ khung (hình 6a, b);
- ◆ hệ liên hợp (hệ treo trên hình 7 là hệ liên hợp giữa dầm và dây xích).



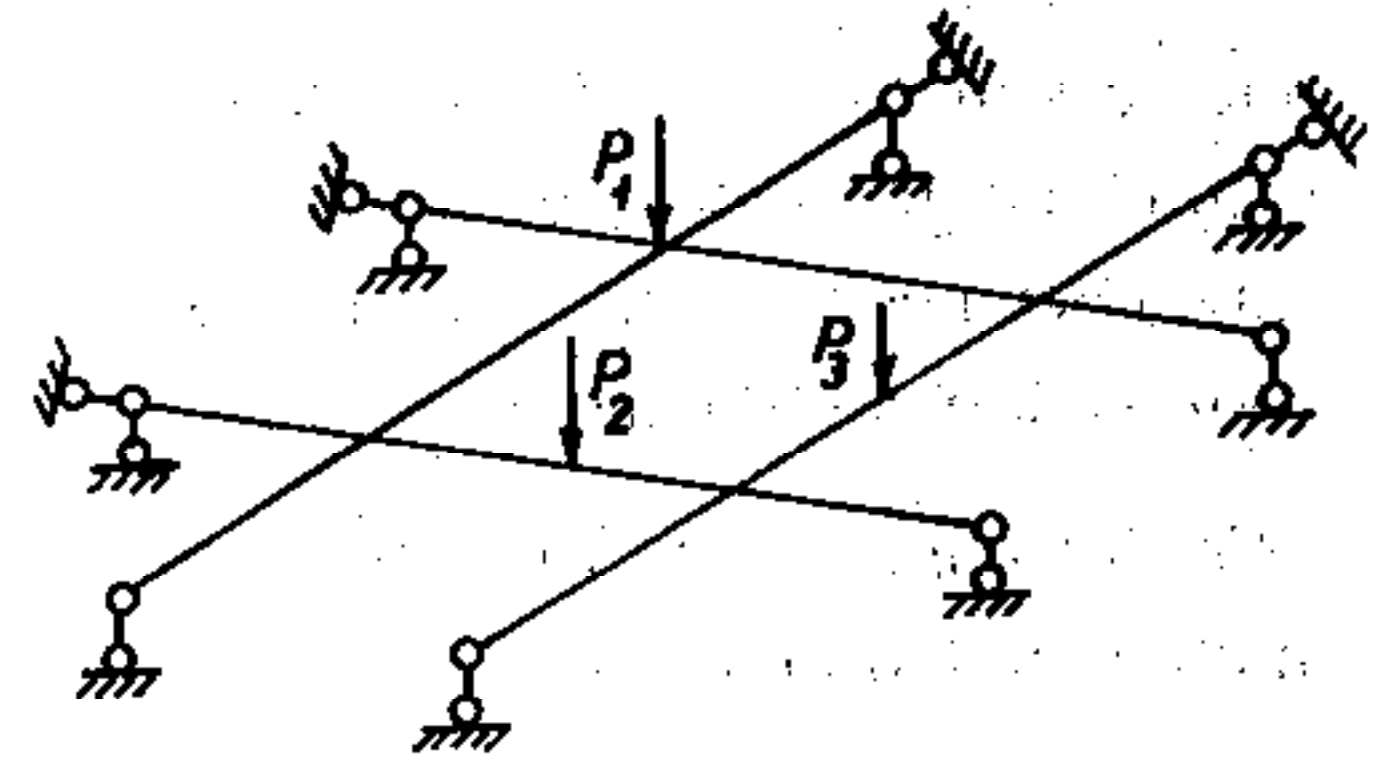
Hình 5



Hình 7

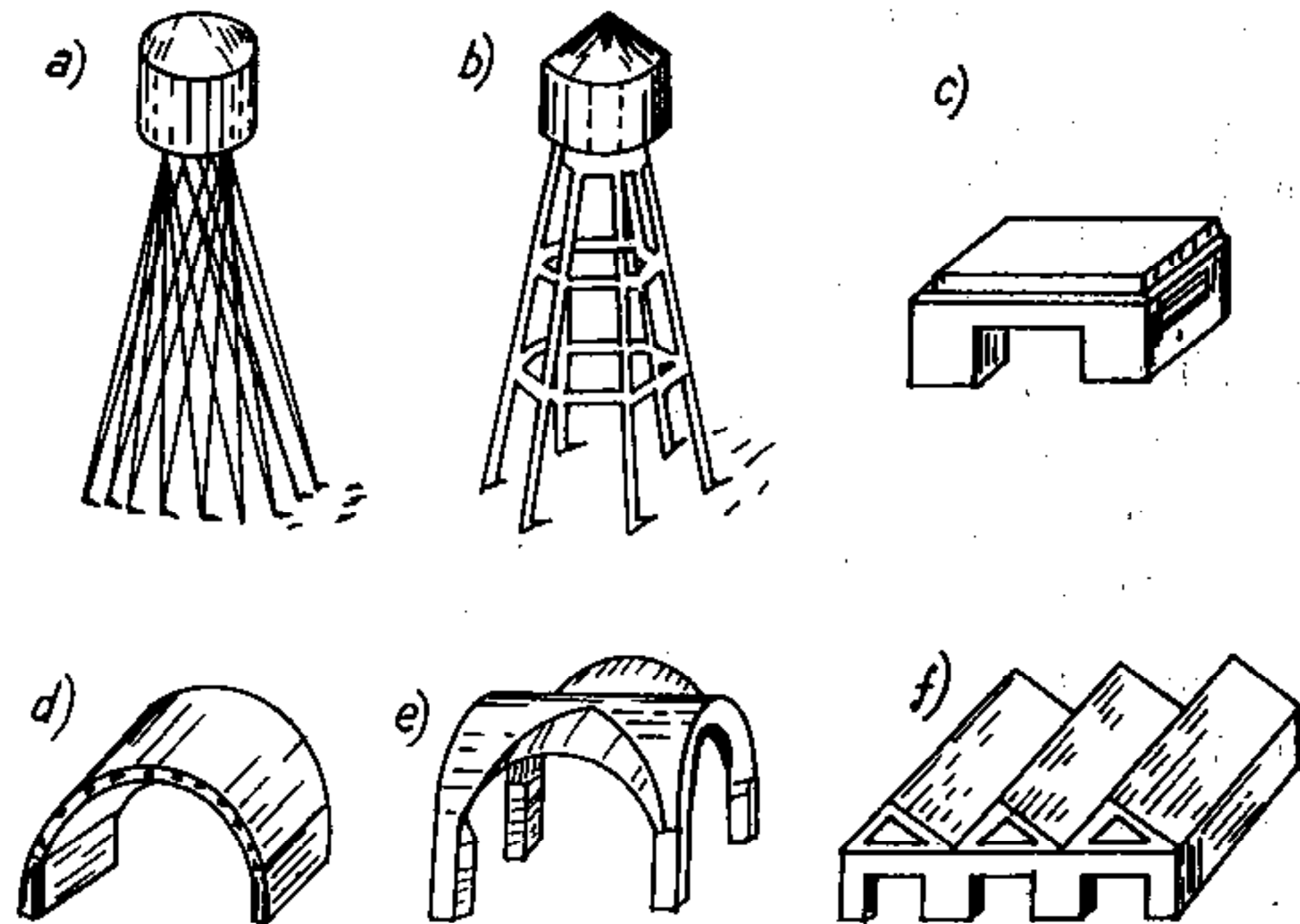


Hình 6



Hình 8

2. Hệ không gian: khi các cấu kiện của công trình không nằm trong cùng một mặt phẳng hoặc nằm trong cùng một mặt phẳng nhưng tải trọng tác dụng ngoài mặt phẳng của công trình. Những hệ không gian thường gặp là:



Hình 9

- ◆ dầm trục giao (hình 8);
- ◆ dàn không gian (phần dưới hình 9a);
- ◆ khung không gian (phần dưới hình 9b);
- ◆ bản (hình 9c);
- ◆ vỏ (hình 9d, e, f).

## ***B. Phân loại theo cách tính công trình***

Khi tính toán công trình, nói chung ta phải sử dụng các điều kiện sau:

- \* Điều kiện cân bằng tĩnh học.
- \* Điều kiện động học hay còn gọi là điều kiện hình học, điều kiện liên tục về biến dạng (biểu thị sự tương quan hình học giữa các điểm trên công trình; chẳng hạn điều kiện biểu thị chuyển vị tại hai tiết diện kề nhau trên công trình là như nhau hoặc khác nhau với một giá trị nào đó).
- \* Điều kiện vật lý biểu thị sự liên hệ giữa nội lực và biến dạng (sự biến đổi hình dạng) của công trình.

Tùy theo cách vận dụng các điều kiện nói trên trong một khâu tính toán nào đó, ta có thể phân loại công trình theo một trong hai cách sau:

### **1. Phân loại theo sự cần thiết hoặc không cần thiết phải sử dụng điều kiện động học khi xác định nội lực trong hệ**

Theo cách này ta có hai loại hệ:

- ◆ **Hệ tĩnh định** là những hệ khi chịu tải trọng ta có thể xác định được nội lực trong hệ chỉ bằng các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Ví dụ, các hệ trên hình 3a; 4a; 5a và 6a là tĩnh định.

- ◆ **Hệ siêu tĩnh** là những hệ khi chịu tải trọng, nếu chỉ sử dụng các điều kiện cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định nội lực trong hệ. Đối với các hệ này ngoài những điều kiện cân bằng tĩnh học ta còn phải sử dụng các điều kiện động học và các điều kiện vật lý.

Những hệ vẽ trên hình 3b; 4b; 5b; 6b và 7 là siêu tĩnh.

### **2. Phân loại theo sự cần thiết hoặc không cần thiết phải sử dụng điều kiện cân bằng khi xác định biến dạng của hệ**

Theo cách này ta có hai loại hệ:

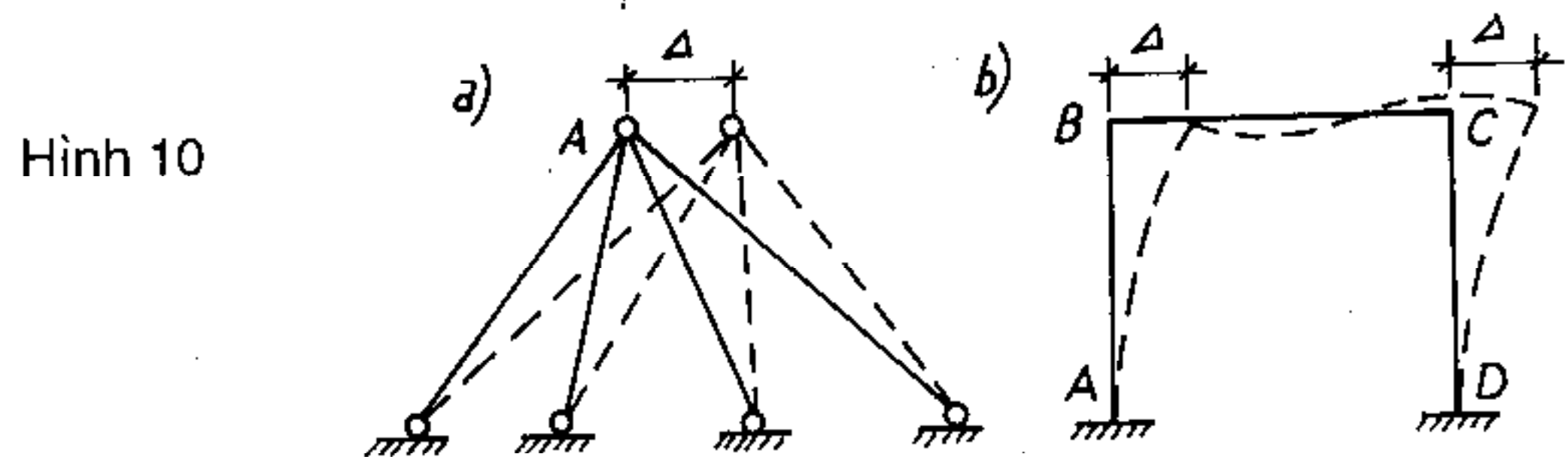
- ◆ **Hệ xác định động** là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức (sự chuyển dời

vị trí cho biết tại một hoặc một số nơi nào đó trên công trình) ta có thể xác định được biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học.

Trên hình 10a là một ví dụ về hệ xác định động. Khi mắt  $A$  của hệ chuyển vị ngang cưỡng bức là  $\Delta$ , từ các điều kiện hình học ta dễ dàng xác định được sự thay đổi chiều dài của từng cấu kiện, tức là xác định được biến dạng của hệ.

- ◆ **Hệ siêu động** là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học không thôi thì chưa đủ để xác định biến dạng của hệ. Lúc này ta cần phải bổ sung thêm các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Hệ trên hình 10b là hệ siêu động. Thật vậy dưới tác dụng của chuyển vị cưỡng bức  $\Delta$ , các cấu kiện trong hệ bị uốn cong và không thể xác định ngay được biến dạng trong các cấu kiện theo các điều kiện hình học đơn thuần.



Ngoài ra, người ta còn phân loại công trình theo nhiều cách khác như:

- \* Phân loại theo *khả năng thay đổi hình dạng hình học của công trình* (xem chương 1).
- \* Phân loại theo *kích thước hình học tương đối của các cấu kiện*. Tùy theo độ lớn của kích thước hình học của các cấu kiện người ta chia thành ba loại:
  - ◆ *Thanh* (kích thước của cấu kiện có một chiều lớn so với hai chiều còn lại);
  - ◆ *Bản* (kích thước của cấu kiện có hai chiều lớn so với chiều còn lại);
  - ◆ *Khối* (kích thước của cấu kiện theo cả ba chiều gần bằng nhau).

#### 4. Các nguyên nhân gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị

Có nhiều nguyên nhân gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình. Dưới đây là các nguyên nhân thường gặp và ta sẽ nghiên cứu:

##### A. Tải trọng

Tải trọng gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình và được phân loại như sau:



### 1. Phân loại theo thời gian tác dụng

- ◆ **Tải trọng lâu dài** là những tải trọng tác dụng trong suốt quá trình làm việc của công trình. Ví dụ: trọng lượng bản thân của công trình.
- ◆ **Tải trọng tạm thời** là những tải trọng chỉ tác dụng trên công trình trong từng thời gian ngắn so với toàn bộ thời gian làm việc của công trình. Ví dụ: tải trọng gió, tải trọng đoàn người...

### 2. Phân loại theo vị trí tác dụng

- ◆ **Tải trọng bất động** là những tải trọng có vị trí không thay đổi trong quá trình làm việc của công trình. Ví dụ: trọng lượng bản thân, trọng lượng các thiết bị đặt trên công trình...
- ◆ **Tải trọng di động** là những tải trọng có vị trí thay đổi trên công trình. Ví dụ: tải trọng đoàn xe lửa, ô tô, đoàn người, cầu chạy...

### 3. Phân loại theo tính chất tác dụng

- ◆ **Tải trọng tác dụng tĩnh** là những tải trọng tác dụng một cách nhịp nhàng, từ từ, tăng dần lên tới giá trị cuối cùng của nó, trong quá trình tác dụng không gây ra lực quán tính.
- ◆ **Tải trọng tác dụng động** là những tải trọng khi tác dụng trên công trình có gây ra lực quán tính. Ví dụ: tải trọng tác dụng đột ngột cùng một lúc với toàn bộ giá trị của nó, tải trọng va chạm (trọng lượng búa trên cọc), tải trọng có giá trị thay đổi theo thời gian một cách tuần hoàn (động cơ điện có khối lượng lệch tâm quay trong khi làm việc); lực địa chấn (động đất)...

Ngoài ra, người ta còn phân loại theo hình thức của tải trọng như tải trọng tập trung, tải trọng phân bố (xem Sức bền vật liệu).

### ***B. Sự thay đổi nhiệt độ***

Sự thay đổi nhiệt độ gây ra biến dạng và chuyển vị trong tất cả các hệ, gây ra nội lực trong hệ siêu tĩnh nhưng không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định (xem chi tiết trong các chương 4 và 5).

### ***C. Sự chuyển vị cưỡng bức của các liên kết, sự chế tạo các cấu kiện không chính xác về kích thước hình học***

Cũng như trường hợp thay đổi nhiệt độ, các nguyên nhân này gây ra biến dạng và chuyển vị trong tất cả các loại hệ; gây ra nội lực trong hệ siêu tĩnh nhưng không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định (xem chi tiết trong các chương 4 và 5).

## 5. Các giả thiết - Nguyên lý cộng tác dụng

Nhằm đơn giản hóa tính toán mà vẫn bảo đảm phản ánh được sát với sự làm việc thực tế của công trình, trong Cơ học kết cấu ta thừa nhận một số giả thiết cơ bản.

**1. Giả thiết vật liệu đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hooke** nghĩa là giữa biến dạng và nội lực có sự liên hệ tuyến tính (xem Sức bền vật liệu).

Giả thiết này biểu thị điều kiện vật lý của bài toán.

Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán được gọi là *đàn hồi tuyến tính*. Trong những trường hợp không cho phép chấp nhận giả thiết này thì bài toán được gọi là *đàn hồi phi tuyến hay phi tuyến vật lý*.

**2. Giả thiết biến dạng và chuyển vị trong hệ rất nhỏ**, nghĩa là dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài, hình dạng của công trình thay đổi rất ít, cho phép ta có thể sử dụng các liên hệ gần đúng giữa các đại lượng hình học. Chẳng hạn, nếu gọi  $\theta$  là góc xoay của một tiết diện nào đó trên công trình trong quá trình biến dạng thì theo giả thiết này ta có thể viết:  $\sin\theta \approx 0$ ;  $\operatorname{tg}\theta \approx 0$ ;  $\cos\theta \approx 1$ .

Do đó, khi xác định nội lực ta có thể thực hiện theo *sơ đồ không biến dạng* của công trình. Nghĩa là mặc dù dưới tác dụng của tải trọng, công trình có thay đổi hình dạng nhưng khi tính nội lực ta vẫn dùng các kích thước hình học tương ứng với hình dạng ban đầu của công trình.

Đối với những trường hợp như bài toán uốn ngang đồng thời với uốn dọc trong Sức bền vật liệu chẳng hạn, nếu dùng giả thiết này thì có thể mắc phải những sai số thuộc về bản chất, do đó phải xác định nội lực theo trạng thái biến dạng.

Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán được gọi là *tuyến tính hình học*. Khi không chấp nhận được giả thiết này thì bài toán được gọi là *phi tuyến hình học* và cách tính sẽ khá phức tạp vì cần được thực hiện theo *sơ đồ biến dạng* của công trình.

Nếu công trình nghiên cứu cho phép được sử dụng các giả thiết 1 và 2 thì công trình đó cũng cho phép áp dụng được một nguyên lý gọi là nguyên lý cộng tác dụng.

**Nội dung nguyên lý cộng tác dụng:**

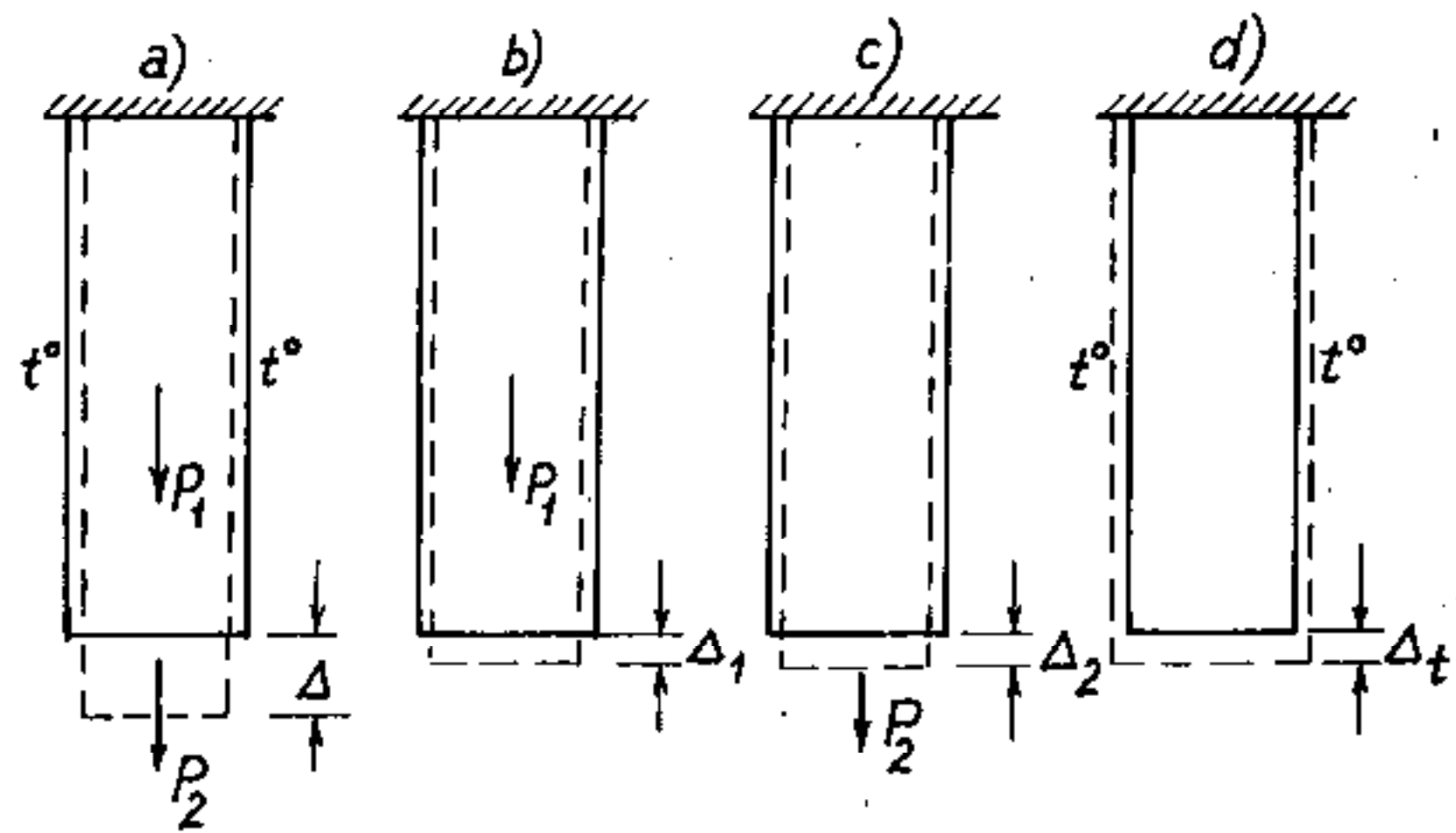
*Một đại lượng nghiên cứu nào đó (chẳng hạn phản lực, nội lực, chuyển vị...) do một số nguyên nhân (ngoại lực, sự thay đổi nhiệt độ...) đồng thời cùng tác dụng trên công trình gây ra được xem như tổng đại số hay tổng hình học những giá trị thành phần của đại lượng đó do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra.*

Lấy tổng đại số nếu đại lượng nghiên cứu là vô hướng còn lấy tổng véctơ nếu đại lượng nghiên cứu được biểu thị bằng các véctơ.

Ví dụ, cần xác định độ dãn của thanh chịu lực  $P_1$ ,  $P_2$  và sự thay đổi nhiệt độ (hình 11a). Nếu gọi  $\Delta_1$  là độ dãn của thanh do riêng lực  $P_1$  gây ra (hình 11b),  $\Delta_2$  là độ dãn của thanh do riêng lực  $P_2$  gây ra (hình 11c) và  $\Delta_t$  là độ dãn của thanh do riêng sự thay đổi nhiệt độ gây ra (hình 11d); theo nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_t.$$

Hình 11



Biểu hiện về mặt giải tích của nguyên lý cộng tác dụng như sau:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_k + \dots + S_n + S_t \quad (1)$$

hay

$$S = \bar{S}_1 P_1 + \bar{S}_2 P_2 + \dots + \bar{S}_k P_k + \dots + \bar{S}_n P_n + S_t, \quad (2)$$

trong đó:

$S$  - đại lượng nghiên cứu do các lực  $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$  và sự thay đổi nhiệt độ hoặc các nguyên nhân khác đồng thời gây ra;

$S_k$  - đại lượng nghiên cứu do riêng lực  $P_k$  gây ra;

$\bar{S}_k$  - đại lượng nghiên cứu do riêng lực  $P_k$  có giá trị bằng đơn vị của lực gây ra,

$$S_k = \bar{S}_k P_k; \quad (3)$$

$S_t$  - đại lượng nghiên cứu do riêng sự thay đổi nhiệt độ gây ra.

Từ biểu thức (2) ta thấy nguyên lý cộng tác dụng biểu thị sự liên hệ tuyến tính giữa đại lượng nghiên cứu  $S$  với tải trọng.

Nguyên lý cộng tác dụng hay còn gọi là nguyên lý độc lập tác dụng của các tác động bên ngoài, giữ một vai trò quan trọng trong Cơ học kết cấu. Với nguyên lý này ta có thể xây dựng được các thuật toán đơn giản nhưng vẫn thỏa mãn được

PHÒNG ĐỌC

2001 ĐVL 732

yêu cầu chính xác trong thực tế. Cũng cần nhấn mạnh thêm là nguyên lý cộng tác dụng chỉ áp dụng được cho những bài toán tuyến tính về vật lý cũng như về hình học.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Đối chiếu nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của các môn học: Cơ học lý thuyết, Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu.
2. Ý nghĩa của sơ đồ tính công trình. Để chuyển công trình thực về sơ đồ tính, cần thực hiện như thế nào?
3. Phân biệt các loại hệ sau: hệ tĩnh định, hệ siêu tĩnh, hệ xác định động, hệ siêu động.
4. Phân biệt các loại tải trọng sau: tải trọng bất động, tải trọng di động, tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.
5. Phát biểu nội dung nguyên lý cộng tác dụng và giải thích các điều kiện áp dụng.



# 1

## Phân tích cấu tạo hình học của các hệ phẳng

Kết cấu dùng trong xây dựng thường được cấu tạo bởi nhiều vật thể đàn hồi nối với nhau để cùng chịu các nguyên nhân tác động bên ngoài như tải trọng. Cách nối có thể thực hiện dưới nhiều hình thức khác nhau nhưng điều cơ bản là dưới tác dụng của tải trọng, kết cấu đó vẫn giữ được hình dạng hình học ban đầu mà không được sụp đổ. Do đó, trước khi đi vào tính toán công trình, người kỹ sư phải biết các quy tắc cho phép cấu tạo hệ thanh có khả năng chịu được tải trọng. Trong chương này giải quyết yêu cầu đó đối với các hệ phẳng.

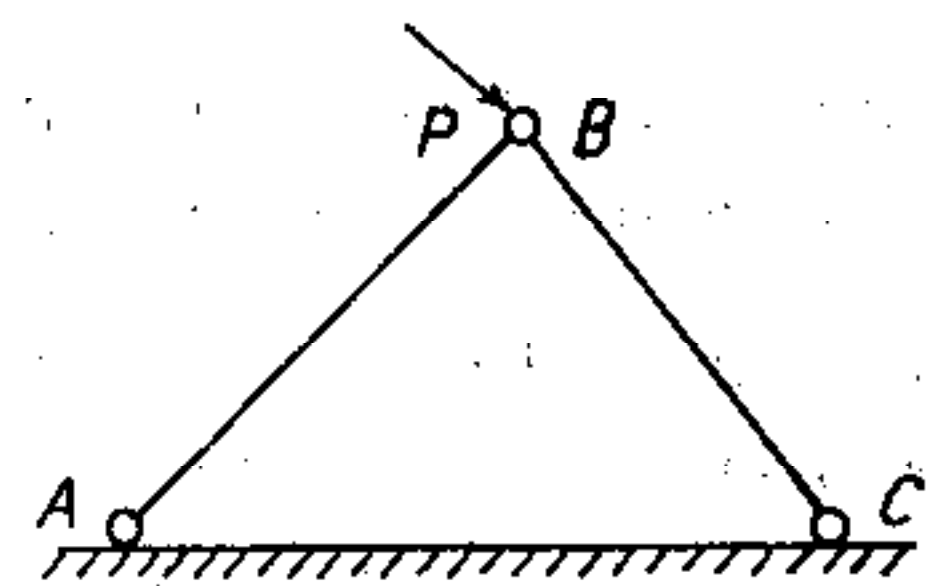
### 1.1. Khái niệm mở đầu

Để xây dựng quy tắc cấu tạo hình học của hệ thanh phẳng ta cần tìm hiểu các khái niệm sau:

#### A. Hệ bất biến hình

*Hệ bất biến hình (BBH) là hệ khi chịu tải trọng vẫn giữ nguyên được hình dạng hình học ban đầu của nó nếu ta xem biến dạng đàn hồi của các vật thể là không đáng kể, hoặc xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.*

Hệ trên hình 1.1 là BBH vì dưới tác dụng của tải trọng, nếu xem các cấu kiện là tuyệt đối cứng thì hệ vẫn giữ nguyên dạng hình học ban đầu của nó. Thực vậy, khi xem các cấu kiện  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  là tuyệt đối cứng tức là chiều dài của chúng không đổi thì như ta đã biết, với ba cạnh xác định ta chỉ có thể dựng được một tam giác duy nhất  $ABC$  mà thôi.



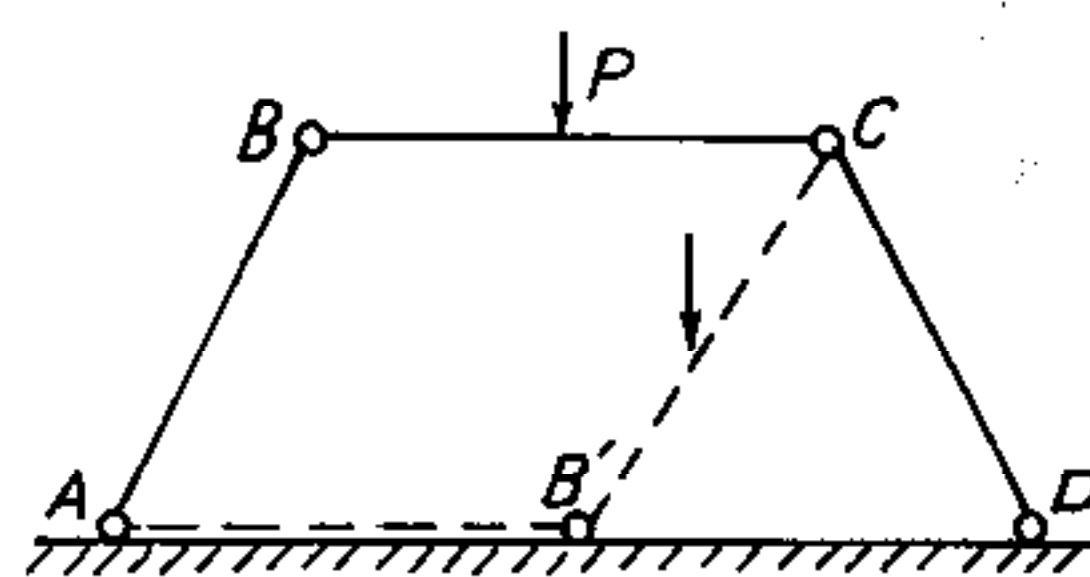
Hình 1.1

Trừ một vài trường hợp đặc biệt còn nói chung các kết cấu trong xây dựng phải là hệ BBH. Hệ BBH có khả năng chịu tải trọng; nội lực phát sinh trong hệ cân bằng với ngoại lực.

## B. Hệ biến hình

Hệ biến hình (BH) là hệ khi chịu tải trọng sẽ thay đổi hình dạng hình học một cách hữu hạn mặc dù ta xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Kết cấu trên hình 1.2 là hệ BH. Dưới tác dụng của tải trọng, hệ  $ABCD$  có thể thay đổi dạng hình học hữu hạn và có thể sụp đổ theo đường đứt nét  $AB'CD$  như trên hình 1.2 mặc dù ta xem các thanh  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  là tuyệt đối cứng.



Hình 1.2

Nói chung kết cấu biến hình không có khả năng chịu tải trọng, do đó trong các công trình xây dựng người ta không dùng hệ BH.

Đôi khi trong thực tế người ta cũng dùng hệ BH để chịu lực nếu tải trọng tác dụng có thể làm cho hệ nằm trong trạng thái cân bằng.

Ví dụ, hệ dây xích trên hình 1.3 là hệ BH (khi tải trọng tác dụng theo phương ngang, hệ thay đổi dạng hình học ban đầu) nhưng vẫn có khả năng chịu lực theo phương dọc theo các mắt xích (phương đứng).



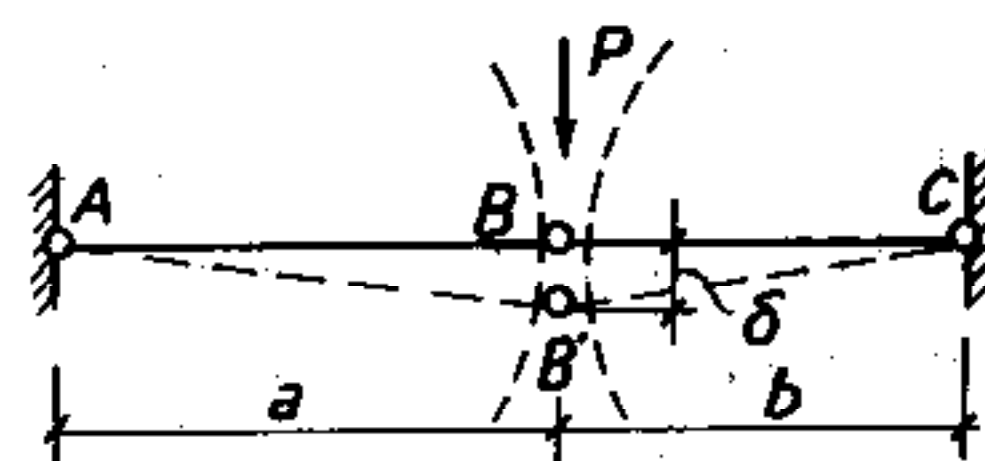
Hình 1.3

## C. Hệ biến hình tức thời

Hệ biến hình tức thời (BHTT) là hệ khi chịu tải trọng sẽ thay đổi dạng hình học vô cùng bé (nếu bỏ qua các lượng vô cùng bé bậc cao về sự thay đổi kích thước hình học) mặc dù ta xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Sau khi thay đổi dạng hình học vô cùng bé, hệ lại trở nên bất biến hình.

Trên hình 1.4 là một ví dụ đơn giản về hệ BHTT. Để xác nhận điều đó ta cần chứng minh điểm  $B$  chỉ có khả năng chuyển dời một đoạn  $BB'$  vô cùng bé.



Hình 1.4

Thật vậy, dưới tác dụng của tải trọng, điểm  $B$  thuộc thanh  $AB$  có khuynh hướng chuyển động theo đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$ . Tương tự, điểm  $B$  thuộc thanh  $BC$  có khuynh hướng chuyển động theo đường tròn tâm  $C$  bán kính  $CB$ . Vì  $ABC$  thẳng hàng nên hai đường tròn đó tiếp xúc tại  $B$ . Do đó điểm  $B$  có khả năng

chuyển dời vô cùng bé theo phương của tiếp tuyến chung tới  $B'$  với một lượng bằng  $\delta$ . Chuyển dời vô cùng bé này có thể xảy ra được bởi vì độ chênh lệch giữa chiều dài của các thanh ở vị trí nằm nghiêng và vị trí nằm ngang là đại lượng vô cùng bé bậc hai. Thật vậy, chẳng hạn với thanh  $BA$  độ chênh lệch này bằng:

$$\Delta a = AB' - AB = a \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{a}\right)^2} - 1 \right] \approx a \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{a}\right)^2 - 1 \right] = \frac{\delta^2}{2a}.$$

Sau khi  $B$  chuyển dời vô cùng bé tới  $B'$ , điểm  $B'$  có khuynh hướng chuyển dời theo hai vòng tròn có tâm  $A$  và  $C$  với bán kính  $AB'$  và  $CB'$ . Hai đường tròn giao nhau nên  $B'$  không có khả năng chuyển động tiếp tục, hệ trở nên BBH.

Như vậy hệ đã cho chỉ có khả năng thay đổi dạng hình học vô cùng bé và là hệ BHTT

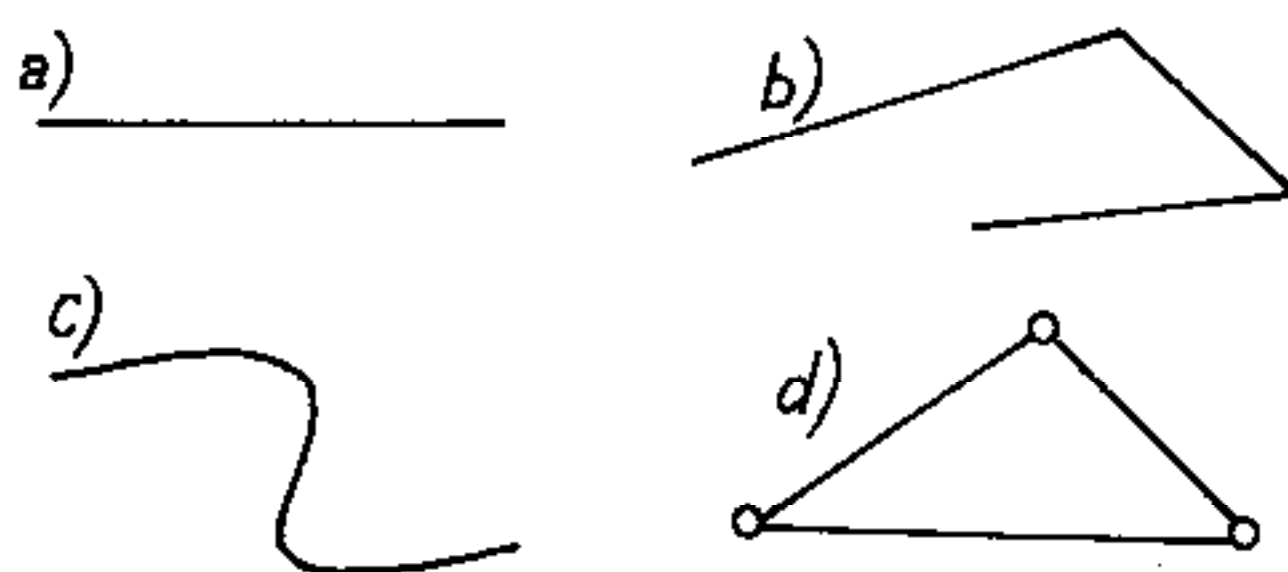
Trong xây dựng người ta không dùng những hệ BHTT hoặc những hệ gần biến hình tức thời (những hệ BBH song cách bố trí có thể dễ dàng dẫn đến BHTT nếu thay đổi nhỏ vị trí của chúng, chẳng hạn hệ có dạng đường đứt nét  $AB'C$  trên hình 1.4) vì như sau này ta sẽ thấy, nội lực trong hệ gần biến hình tức thời rất lớn.

#### D. Miếng cứng

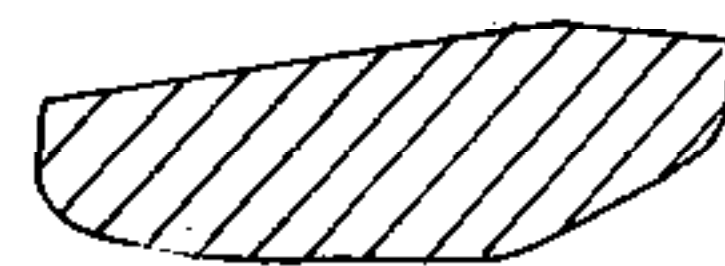
Hệ bất biến hình trong thực tế có nhiều hình dạng khác nhau nhưng cùng chung tính chất là có khả năng chịu tải trọng. Để tiện cho việc nghiên cứu ta có thể khái quát hóa các hệ bất biến hình bằng cách đưa ra khái niệm miếng cứng.

*Miếng cứng là một hệ phẳng bất kỳ bất biến hình một cách rõ rệt.*

Ví dụ, các hệ trên hình 1.5 đều là các miếng cứng. Ta quy ước biểu diễn các miếng cứng như trên hình 1.6.



Hình 1.5



Hình 1.6

#### E. Bậc tự do

Khái niệm về bậc tự do đã được trình bày trong Cơ học cơ sở. Ở đây chỉ nhắc lại định nghĩa:

Bậc tự do của hệ là số thông số độc lập đủ để xác định vị trí của hệ đối với một hệ khác được xem là bất động.

Đối với một hệ trục tọa độ bất động trong mặt phẳng, một điểm có hai bậc tự do là hai chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ khác nhau, còn một miếng cứng có ba bậc tự do là hai chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ khác nhau và một chuyển động quay quanh giao điểm của hai phương đó.

## 1.2. Các loại liên kết

Để nối các miếng cứng với nhau ta dùng các liên kết. Liên kết có thể đơn giản hay phức tạp.

### A. Liên kết đơn giản

Liên kết đơn giản là liên kết chỉ nối hai miếng cứng với nhau.

Người ta chia liên kết đơn giản thành ba loại như sau:

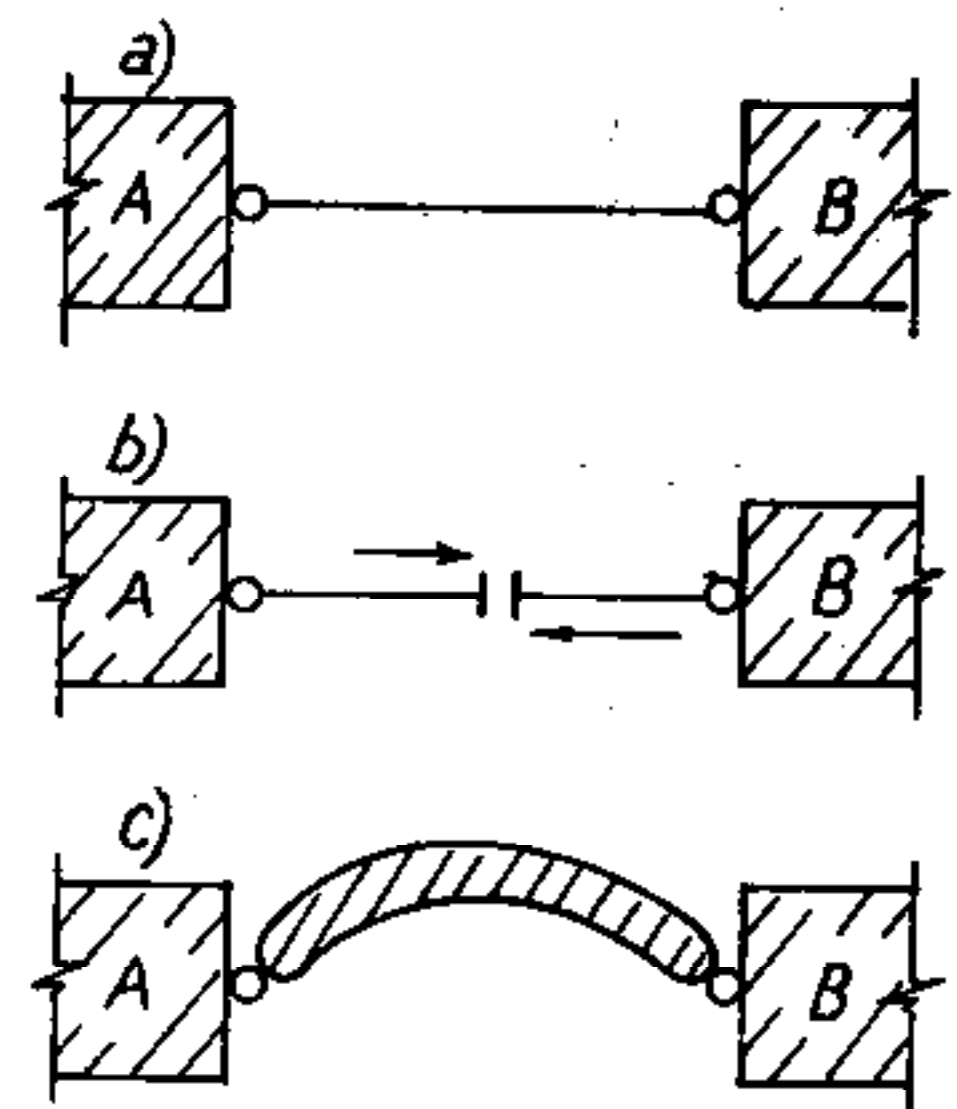
#### 1. Liên kết loại một hay liên kết thanh

Cấu tạo của liên kết này là một thanh có khớp lý tưởng ở hai đầu.

Nếu dùng liên kết thanh để nối miếng cứng  $B$  vào miếng cứng  $A$  được xem là bất động (hình 1.7a) thì sẽ khử được một bậc tự do của miếng cứng  $B$  đối với miếng cứng  $A$  vì  $B$  không thể di chuyển theo phương dọc trục thanh. Đó là tính chất động học của liên kết thanh. Về mặt tĩnh học, trong liên kết thanh có thể phát sinh một phản lực liên kết dọc theo trục thanh (hình 1.7b)

Như vậy, một liên kết thanh khử được một bậc tự do và phát sinh trong đó một phản lực dọc trục thanh.

Căn cứ vào tính chất nói trên ta thấy cấu tạo của liên kết thanh không nhất thiết phải là thanh thẳng như trên hình 1.7a mà có thể là một miếng cứng bất kỳ miễn là hai đầu có khớp lý tưởng như trên hình 1.7c. Trong trường hợp này liên kết vẫn khử được một bậc tự do theo phương dọc theo đường nối hai khớp và trong liên kết vẫn phát sinh một phản lực hướng theo phương nói trên.



Hình 1.7

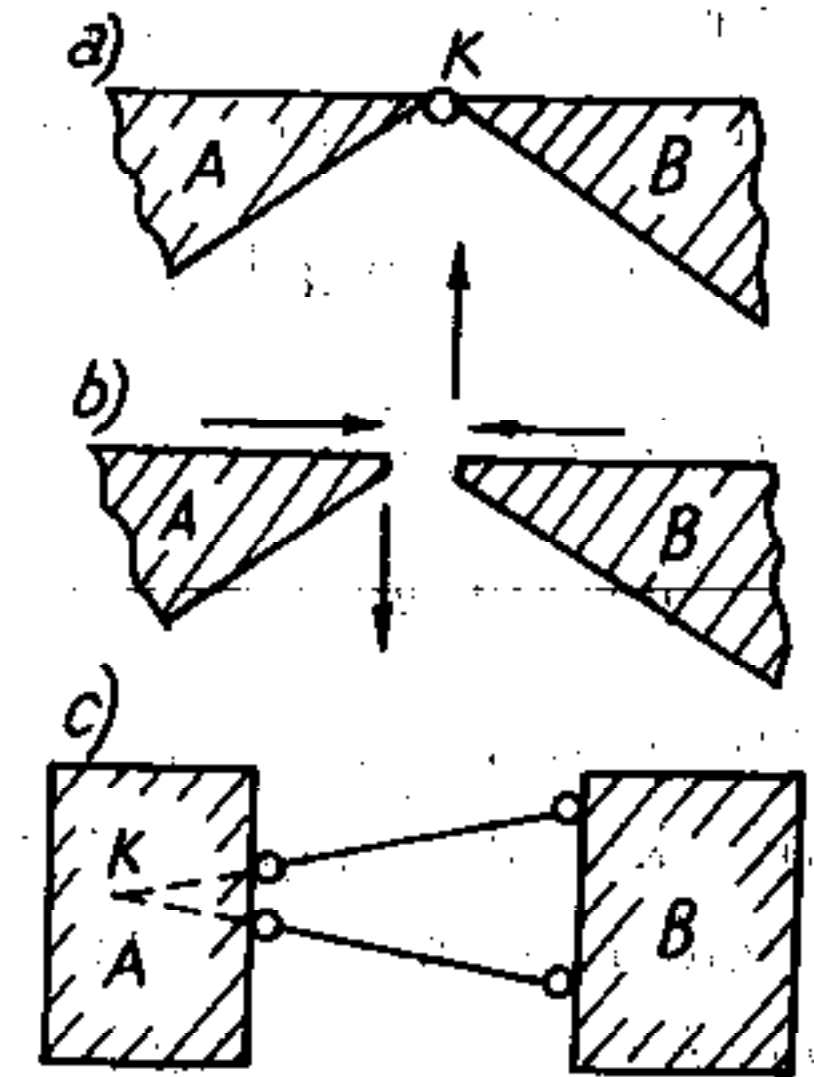
Liên kết thanh là khái niệm mở rộng của gối tựa di động. Liên kết thanh dùng



để nối hai miếng bất kỳ còn gối tựa di động là liên kết dùng để nối một miếng cứng với trái đất. Nếu xem trái đất là một miếng cứng thì gối tựa di động chính là một trường hợp đặc biệt của liên kết thanh.

## 2. Liên kết loại hai hay liên kết khớp

Cấu tạo của liên kết khớp như trên hình 1.8a. Khi dùng liên kết khớp để nối miếng cứng  $B$  vào miếng cứng  $A$  được xem là bất động thì liên kết này khử được hai bậc tự do của  $B$  so với  $A$  vì miếng cứng  $B$  không thể chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ nào trong mặt phẳng đang xét mà chỉ có thể quay quanh miếng cứng  $A$  tại khớp  $K$ . Trong liên kết sẽ phát sinh một phản lực đặt tại  $K$  nhưng có phương bất kỳ nên có thể phân tích thành hai thành phần theo hai phương xác định giao nhau tại khớp  $K$  (hình 1.8b)



Hình 1.8

Như vậy, một liên kết khớp khử được hai bậc tự do và phát sinh hai thành phần phản lực đi qua khớp.

Về mặt động học, liên kết khớp tương đương với hai liên kết thanh. Nếu nối miếng cứng  $B$  với miếng cứng  $A$  bằng hai thanh thì miếng cứng  $B$  bị khử mất hai bậc tự do và chỉ còn có thể quay quanh giao điểm  $K$  của hai thanh (hình 1.8c). Ta gọi giao điểm đó là *khớp giả tạo*.

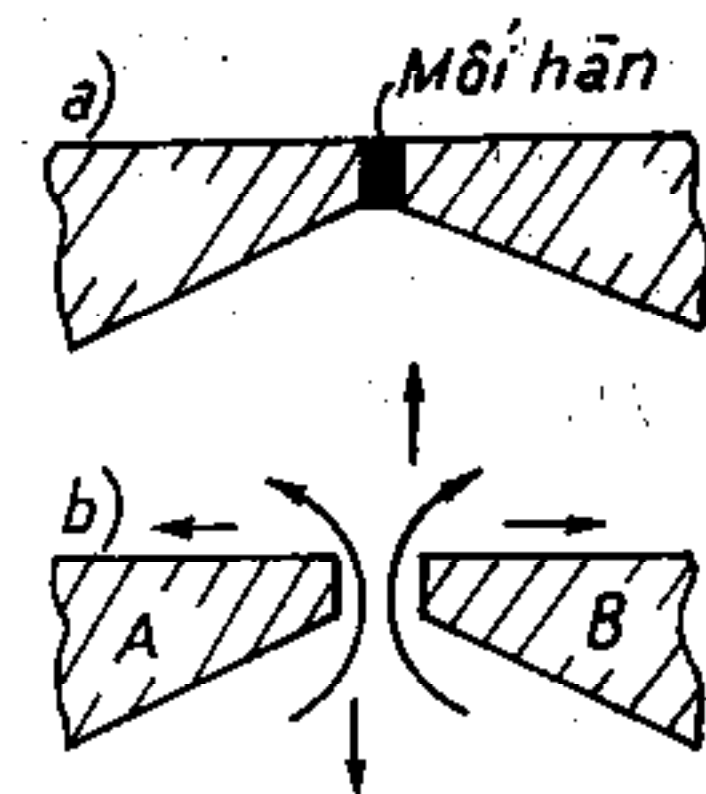
Tương tự như đã trình bày ở trên, liên kết khớp là một khái niệm mở rộng của gối tựa bất động quen biết.

## 3. Liên kết loại ba hay liên kết hàn

Dùng một mối hàn để nối miếng cứng  $B$  với miếng cứng cố định  $A$  tức là gắn chặt  $B$  vào  $A$  (hình 1.9a).

Lúc này mối hàn khử được ba bậc tự do của  $B$  đối với  $A$ . Thật vậy, miếng cứng  $B$  không di chuyển tịnh tiến và cũng không quay được so với  $A$ .

Trong liên kết hàn phát sinh một phản lực có phương và điểm đặt bất kỳ.



Hình 1.9

Đưa lực này về một điểm xác định tại mối hàn ta sẽ được một thành phần

mômen và hai thành phần phản lực hướng theo hai phương xác định nào đó.

Như vậy, một liên kết hàn khử được ba bậc tự do và phát sinh ba thành phần phản lực.

Về mặt động học, một liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hay tương đương với một thanh và một khớp nếu chúng được sắp xếp hợp lý (dưới đây ta sẽ tìm hiểu về điều kiện sắp xếp hợp lý).

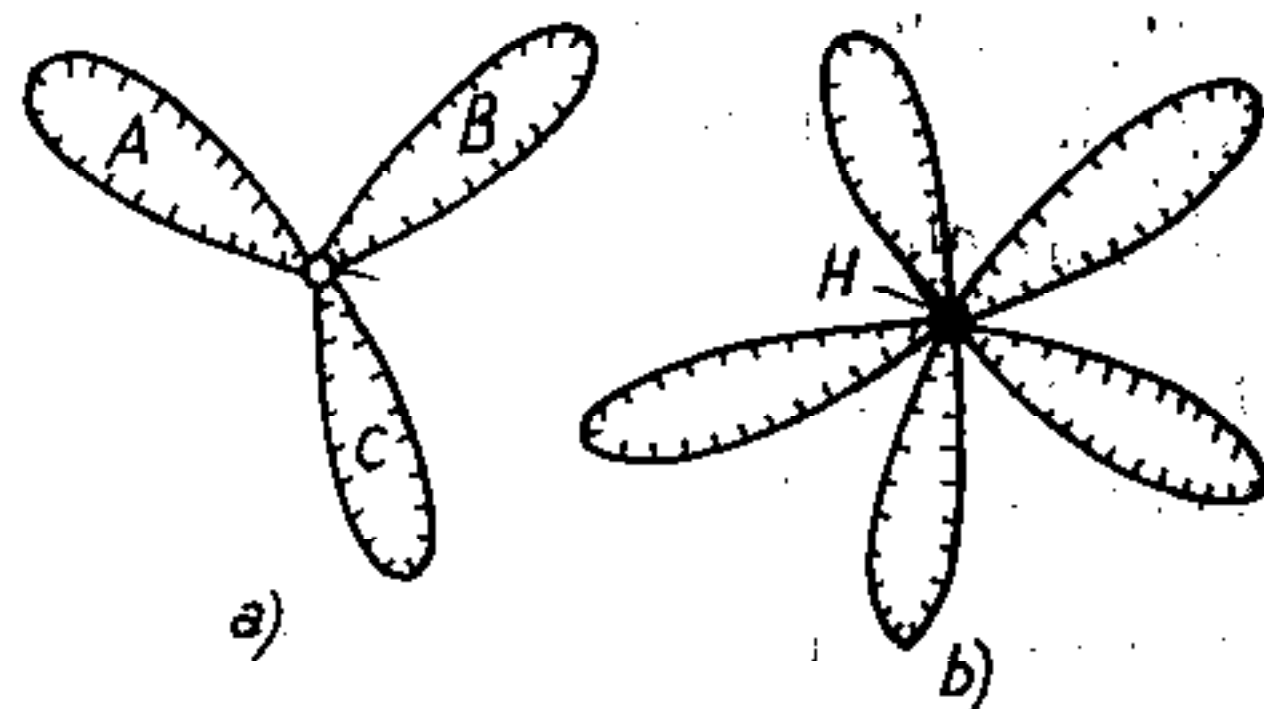
Liên kết hàn là khái niệm mở rộng của liên kết ngàm đã quen biết.

## B. Liên kết phức tạp

*Liên kết phức tạp là liên kết nối nhiều miếng cứng, số miếng cứng lớn hơn hai.*

Trong thực tế ta có thể gặp các liên kết phức tạp dưới dạng khớp phức tạp (hình 1.10a) hoặc liên kết hàn phức tạp (hình 1.10b).

Để tiện cho việc nghiên cứu, người ta thường quy đổi liên kết phức tạp thành các liên kết đơn giản cùng loại tương đương. Do đó cần xây dựng khái niệm về độ phức tạp.



Hình 1.10

*Độ phức tạp của một liên kết phức tạp là số liên kết đơn giản cùng loại tương đương với liên kết phức tạp đó.*

Ví dụ liên kết khớp phức tạp trên hình 1.10a tương đương với hai liên kết khớp đơn giản. Thật vậy, coi A là miếng cứng cố định, nối B với A bằng khớp K sẽ khử được hai bậc tự do của B. Tiếp đó nối C với A cũng bằng khớp K sẽ khử được hai bậc tự do của C. Như vậy khớp K khử được bốn bậc tự do tức là tương đương với hai khớp đơn giản. Do đó độ phức tạp của liên kết này bằng hai.

Từ nhận xét đó ta dễ dàng suy ra: độ phức tạp của một liên kết phức tạp bằng số lượng D của các miếng cứng quy tụ vào liên kết trừ đi một.

$$p = D - 1, \quad (1.1)$$

trong đó:

$p$  - độ phức tạp của liên kết phức tạp;

$D$  - số miếng cứng quy tụ vào liên kết phức tạp.

Ví dụ, liên kết phức tạp trên hình 1.10a có độ phức tạp là  $p = 3 - 1 = 2$ ; liên kết phức tạp trên hình 1.10b có độ phức tạp là  $p = 5 - 1 = 4$ .

### 1.3. Cách nối các miếng cứng thành một hệ bất biến hình

Để nối các miếng cứng ta phải dùng các liên kết. Như vậy, vấn đề đặt ra là: muốn nối một số lượng xác định các miếng cứng thì cần sử dụng bao nhiêu liên kết và các liên kết đó phải được bố trí như thế nào để bảo đảm cho hệ thu được là bất biến hình. Để giải đáp điều đó ta cần lần lượt nghiên cứu *điều kiện cần* và *điều kiện đủ* về cách nối các miếng cứng thành một hệ bất biến hình.

#### A. Điều kiện cần

Điều kiện cần biểu thị mối quan hệ về số lượng các miếng cứng với số lượng các liên kết có trong hệ đang xét.

Ta lần lượt khảo sát các trường hợp sau:

#### 1. Hệ bất kỳ

Giả sử trong hệ có  $D$  miếng cứng được nối với nhau bằng  $T$  liên kết thanh,  $K$  liên kết khớp,  $H$  liên kết hàn, đã quy đổi về liên kết đơn giản.

Coi một miếng cứng nào đó là bất động thì  $(D - 1)$  miếng cứng còn lại sẽ có  $3(D - 1)$  bậc tự do cần phải khử so với miếng cứng bất động. Đó là yêu cầu.

Xét về khả năng, với số lượng các liên kết nói trên có thể khử được  $T + 2K + 3H$  bậc tự do.

Gọi  $n$  là hiệu số giữa số bậc tự do có thể khử được (khả năng) với số bậc tự do cần khử (yêu cầu), ta có:

$$n = T + 2K + 3H - 3(D - 1).$$

Có thể xảy ra ba trường hợp sau:

- $n < 0$ : khả năng thấp hơn yêu cầu, điều đó chứng tỏ *hệ thiếu liên kết*. Ta có thể kết luận ngay là hệ biến hình.
- $n = 0$ : khả năng đáp ứng đúng với yêu cầu, điều đó chứng tỏ *hệ đủ liên kết*. Lúc này hệ có triển vọng BBH nên cần phải xét thêm điều kiện đủ. Nếu hệ BBH thì sẽ là tĩnh định.
- $n > 0$ : khả năng lớn hơn yêu cầu, điều đó chứng tỏ *hệ thừa liên kết*. Trong trường hợp này hệ có triển vọng là BBH nên cần phải xét thêm điều kiện đủ. Nếu hệ BBH thì sẽ là siêu tĩnh. Số  $n$  biểu thị số lượng liên kết thừa tương đương loại một.

Như vậy, trong trường hợp hệ bất kỳ ta có điều kiện cân:

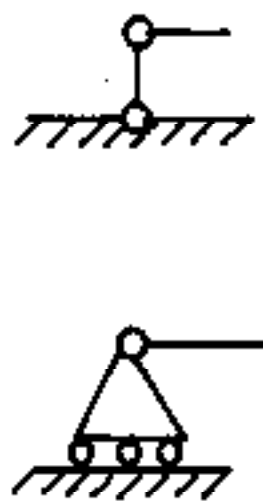
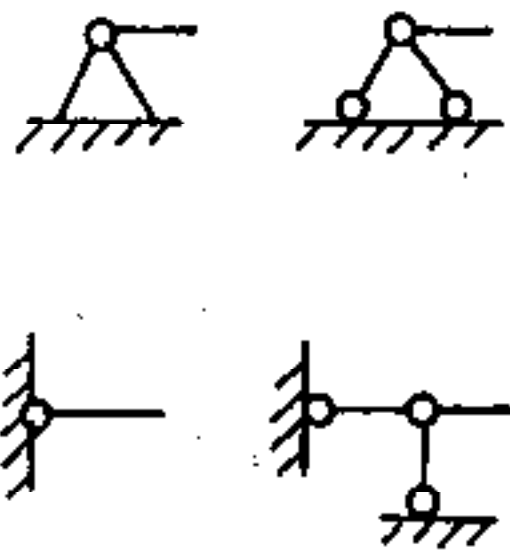
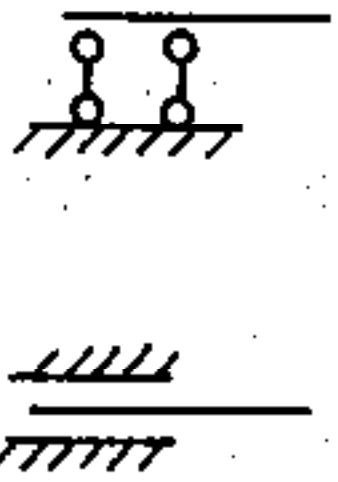

$$n = T + 2K + 3H - 3(D - 1) \geq 0. \quad (1.2)$$

## 2. Hệ nối với đất

Trong thực tế, phần lớn các công trình đều được nối với trái đất. Nếu quan niệm trái đất là một miếng cứng thì ta vẫn có thể dùng công thức (1.2) để khảo sát điều kiện cân cho những hệ này. Tuy nhiên bài toán hệ nối với trái đất cũng khá phổ biến nên để tiện cho việc sử dụng ta sẽ thiết lập công thức biểu thị điều kiện cân cho trường hợp này.

Giả sử trong hệ có  $D$  miếng cứng không kể trái đất, được nối với nhau bằng  $T$  liên kết thanh,  $K$  liên kết khớp,  $H$  liên kết hàn đã quy đổi về liên kết đơn giản và được nối với đất bằng  $C$  liên kết tựa tương đương loại một (xem bảng 1.1).

Bảng 1.1

Tên	Gối di động	Gối cố định	Ngàm trượt	Ngàm cứng
Sơ đồ				
C =	1	2		3

Coi trái đất là bất động, như vậy muốn nối  $D$  miếng cứng với nhau và với trái đất thì yêu cầu phải khử được  $3D$  bậc tự do. Về khả năng, với số lượng các liên kết đã nêu, có thể khử được  $T + 2K + 3H + C$  bậc tự do.

Cũng lý luận tương tự như trên, trong trường hợp này, ta có điều kiện cân:

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D \geq 0. \quad (1.3)$$

Công thức này có ý nghĩa tương tự như (1.2) và là trường hợp đặc biệt của (1.2)

## 3. Hệ dàn

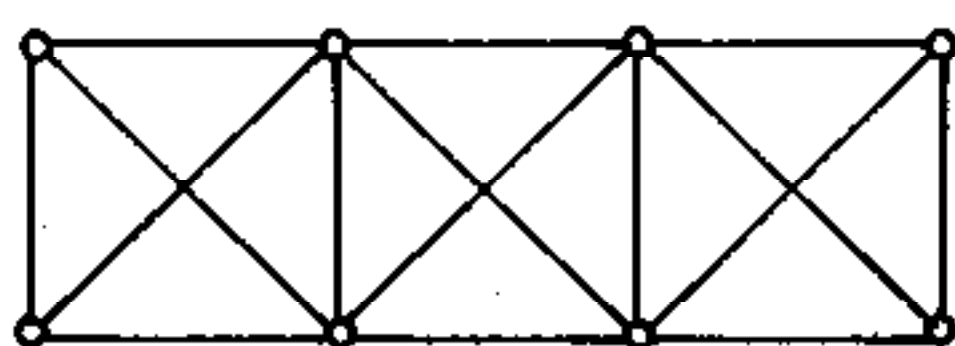
Dàn là hệ gồm các thanh thẳng nối với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.



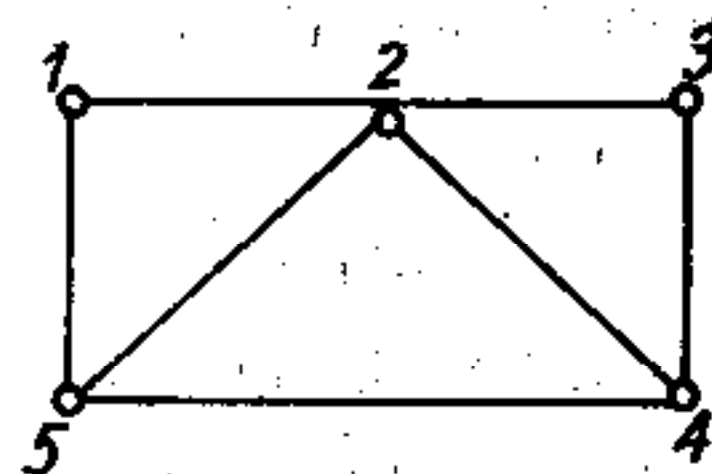
Giao điểm của các thanh được gọi là *mắt*.

Hệ trên hình 1.11 là hệ dàn. Hệ trên hình 1.12 không phải là hệ dàn vì thanh 1-3 không phải chỉ có khớp ở hai đầu.

Đối với hệ dàn, ta cũng có thể áp dụng công thức (1.2) hoặc (1.3) để khảo sát song cần chú ý là trong hệ dàn các liên kết khớp thường là khớp phức tạp nên cần quy đổi về khớp đơn giản. Cách làm như vậy thường dễ nhầm lẫn. Để tạo điều kiện thuận lợi cho việc khảo sát, dưới đây ta sẽ thiết lập các điều kiện cần áp dụng riêng cho hệ dàn, trong đó không cần quan tâm đến độ phức tạp của liên kết khớp.



Hình 1.11



Hình 1.12

a) Trường hợp dàn không nối với đất. Giả sử trong hệ dàn có  $D$  thanh và  $M$  mắt. Xem một thanh nào đó là miếng cứng bất động. Như vậy hệ còn lại  $D-1$  thanh và  $M-2$  mắt cần nối vào miếng cứng bất động. Như đã biết, mỗi điểm trong mặt phẳng có hai bậc tự do, do đó để nối  $(M-2)$  mắt thì số bậc tự do cần phải khử là  $2(M-2)$ , đó là yêu cầu. Xét về khả năng, hệ còn lại  $(D-1)$  thanh tương đương loại một nên khả năng có thể khử được là  $(D-1)$  bậc tự do. Cũng lập luận tương tự như trên ta có công thức biểu thị điều kiện cần cho trường hợp dàn không nối với đất như sau:

$$n = (D-1) - 2(M-2) \geq 0,$$

hay

$$n = D + 3 - 2M \geq 0. \quad (1.4)$$

Ý nghĩa của (1.4) cũng được giải thích tương tự như đối với (1.2).

b) Trường hợp hệ dàn nối với đất. Giả sử trong hệ dàn có  $D$  thanh,  $M$  mắt và  $C$  liên kết tựa tương đương loại một nối với đất. Coi trái đất là miếng cứng bất động thì số mắt cần nối vào miếng cứng bất động đó là  $M$ . Do đó số bậc tự do cần phải khử là  $2M$ . Về khả năng, số bậc tự do có thể khử được là  $D + C$ .

Tương tự như trên, ta thiết lập được công thức biểu thị điều kiện cần cho hệ dàn nối với đất như sau:

$$n = D + C - 2M \geq 0. \quad (1.5)$$

Ý nghĩa của (1.5) cũng được giải thích tương tự như đối với (1.2).

## B. Điều kiện đủ

Khi điều kiện cần đã được thỏa mãn, hệ có thể là đủ hoặc thừa liên kết nhưng nếu cách bố trí liên kết không được hợp lý thì các liên kết này vẫn không có khả năng khử tất cả các bậc tự do của hệ và hệ có thể là biến hình hoặc biến hình tức thời.

Như vậy, điều kiện đủ để cho hệ bất biến hình là các liên kết cần được bố trí hợp lý.

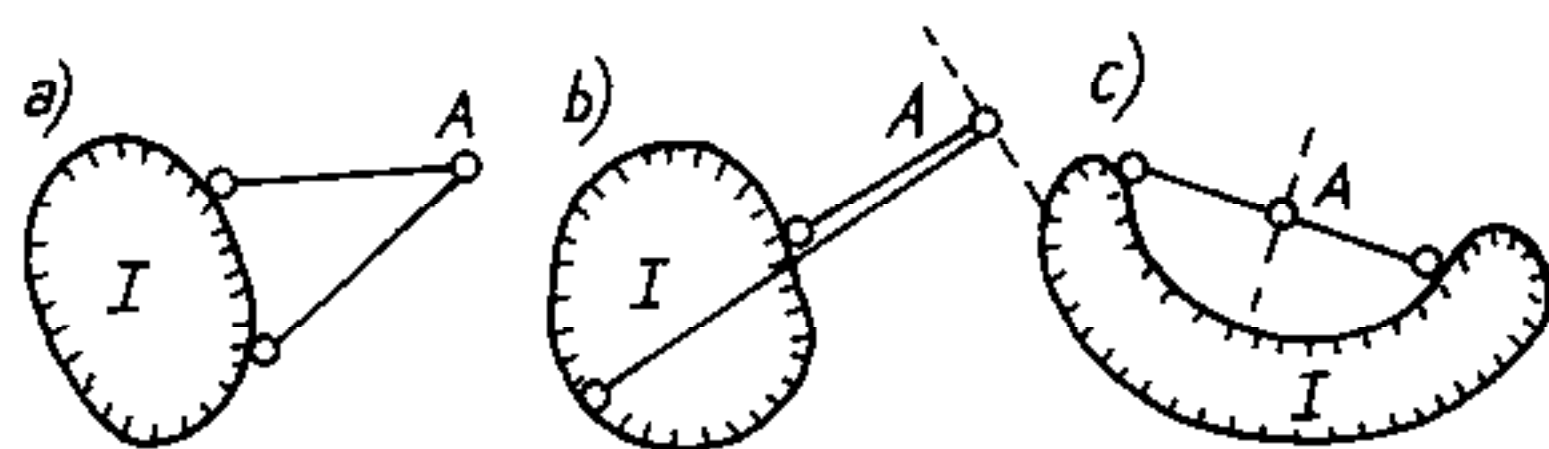
Nhưng làm thế nào để có thể khẳng định được các liên kết đã bố trí là hợp lý? Để giải quyết vấn đề này ta lần lượt khảo sát một số bài toán cụ thể.

### 1. Cách nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng thành hệ bất biến hình

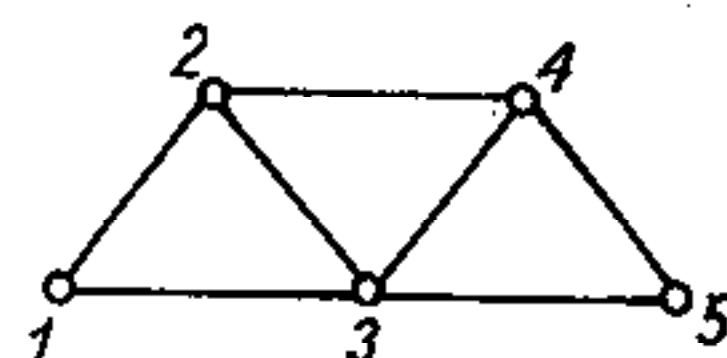
Xét miếng cứng bất động  $I$  và một điểm (mắt)  $A$  nằm ngoài miếng cứng đó. Để nối điểm  $A$  vào miếng cứng ta cần phải khử hai bậc tự do của  $A$  nghĩa là phải dùng hai liên kết thành như trên hình 1.13a. Hai thanh này không được nằm trên cùng một đường thẳng như trên hình 1.13b, c, vì nếu không thì điểm  $A$  có thể chuyển vị vô cùng bé theo phương vuông góc với hai thanh và hệ là BHTT (chứng minh tương tự như đối với hệ trên hình 1.4).

Như vậy, điều kiện cần và đủ để nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng thành một hệ bất biến hình là phải dùng hai thanh không thẳng hàng.

Gọi hệ hai thanh không thẳng hàng này là bộ đôi.



Hình 1.13



Hình 1.14

Do sự cấu tạo hợp lý và chỉ vừa đủ để liên kết một điểm vào một hệ nên bộ đôi có tính chất sau:

Bộ đôi không làm thay đổi tính chất động học của hệ, nghĩa là nếu hệ cho ban đầu là BBH (hoặc BH, BHTT) thì sau khi thêm hoặc bớt một bộ đôi ta sẽ được một hệ mới, hệ mới này vẫn là BBH (hoặc BH, BHTT).

Có thể vận dụng tính chất nói trên của bộ đôi để phát triển miếng cứng, nhằm mục đích đưa hệ nhiều miếng cứng về hệ gồm một số ít các miếng cứng để khảo sát cho dễ dàng.

Ta sẽ tìm hiểu cách phát triển miếng cứng thông qua hệ vẽ trên hình 1.14. Tam

giác khớp  $1-2-3$  là một miếng cứng, thêm vào miếng cứng này bộ đôi  $(4-2)$   $(4-3)$ , ta sẽ được hệ mới  $1-2-4-3$  cũng BBH. Tương tự, thêm vào hệ BBH  $1-2-4-3$  bộ đôi  $(5-4)$   $(5-3)$  ta sẽ được hệ mới  $1-2-4-5-3$  cũng BBH. Như vậy, có thể kết luận toàn hệ là BBH.

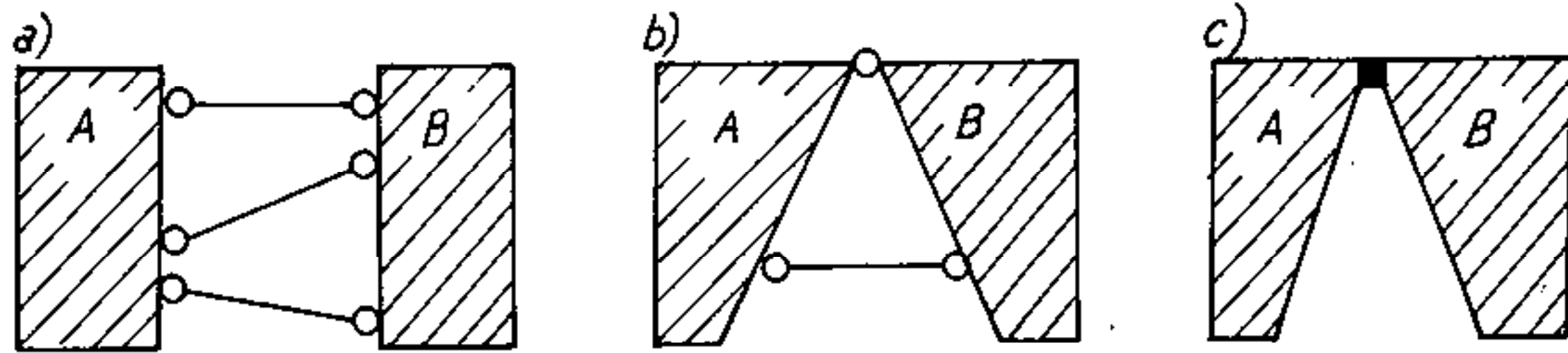
Cũng có thể phân tích sự cấu tạo hình học theo trình tự ngược lại (thu hẹp hệ). Theo cách này, ta lần lượt loại ra khỏi hệ cho ban đầu từng bộ đôi một, cuối cùng sẽ được một hệ mới, căn cứ vào cấu tạo của hệ này ta có thể kết luận về sự cấu tạo hình học của hệ cho ban đầu. Ví dụ, với hệ vẽ trên hình 1.14 ta lần lượt loại bỏ khỏi hệ các bộ đôi  $(5-4)(5-3)$ ;  $(4-2)(4-3)$  và  $(2-1)(2-3)$ , hệ còn lại là thanh  $1-3$  bất biến hình, do đó hệ cho ban đầu là BBH.

## 2. Cách nối hai miếng cứng thành một hệ bất biến hình

Từ điều kiện cần ta thấy muốn nối hai miếng cứng thành hệ BBH thì tối thiểu phải dùng ba thanh hoặc một khớp và một thanh, hoặc một mối hàn (hình 1.15).

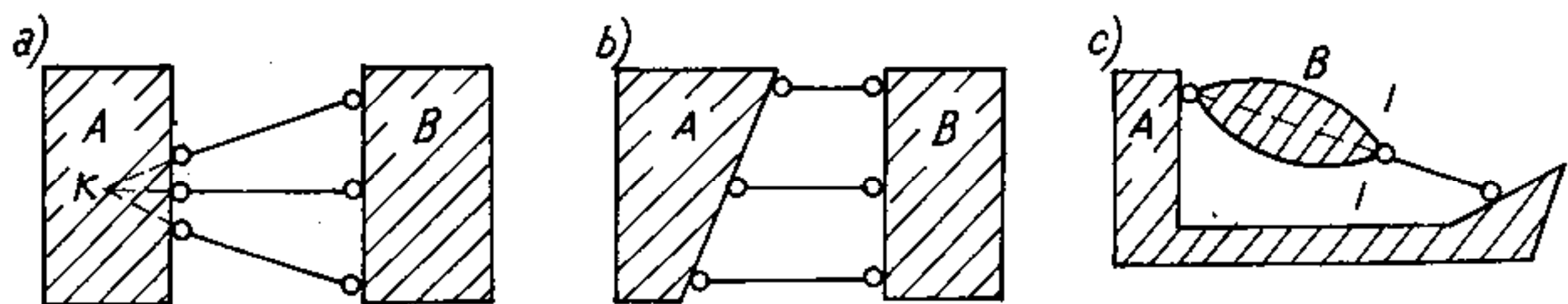
Dùng một mối hàn (hình 1.15c) để nối hai miếng cứng thì bao giờ cũng được một hệ BBH.

Nếu dùng ba thanh thì điều kiện bố trí hợp lý là *ba liên kết thanh không được đồng quy hoặc song song* (hình 1.15a).



Hình 1.15

Thật vậy, trong trường hợp dùng ba thanh đồng quy như trên hình 1.16a thì cả ba thanh đó đều không ngăn cản được chuyển vị xoay vô cùng bé với tâm quay  $K$  của miếng cứng  $B$  quanh miếng cứng quy ước bất động  $A$ . Chuyển vị xoay đó là vô cùng bé bởi vì sau khi dịch chuyển, ba thanh trở thành không đồng quy nữa và hệ lại BBH. Hệ trên hình 1.16a là BHTT.



Hình 1.16

Khi dùng ba thanh song song như trên hình 1.16b thì hệ là BHTT bởi vì lúc này hệ là trường hợp đặc biệt của trường hợp ba thanh đồng quy (giao điểm của ba thanh ở vô cùng). Khi ba thanh song song có chiều dài bằng nhau thì chuyển vị xảy ra là hữu hạn, hệ sẽ biến hình.

Nếu dùng một khớp và một thanh thì điều kiện bố trí hợp lý là *liên kết thanh không được đi qua khớp* (hình 1.15b)..

Trong trường hợp liên kết thanh đi qua khớp thì hệ sẽ BHTT (hình 1.16c, cách chứng minh như đã thực hiện với hệ trên hình 1.4).

Tóm lại, trong bài toán hai miếng cứng ta có thể phát biểu như sau:

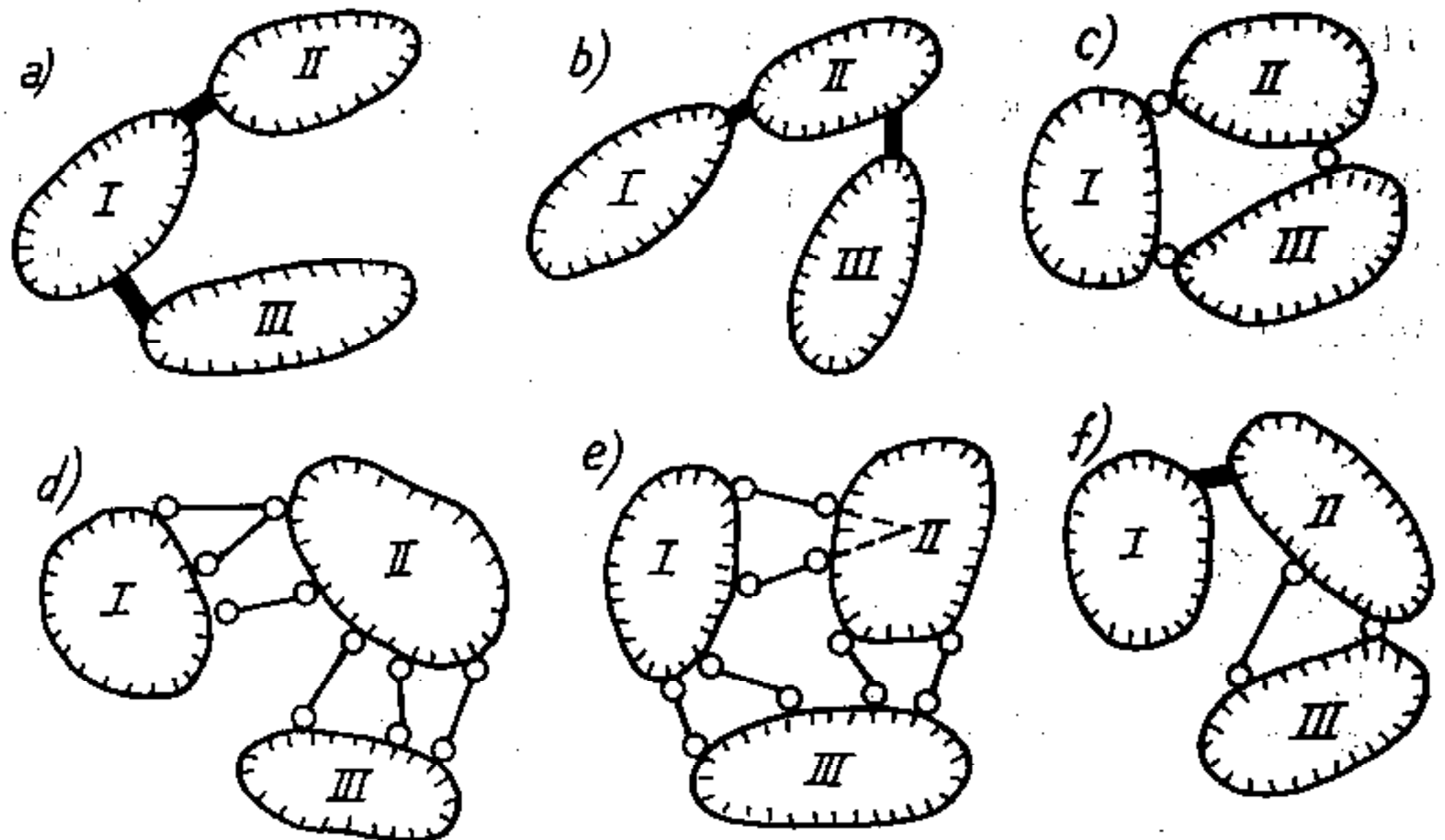
*Muốn nối hai miếng cứng thành một hệ bất biến hình thì điều kiện cần và đủ là phải dùng ít nhất:*

- hoặc ba liên kết thanh không đồng quy hay không song song;
- hoặc một liên kết khớp và một liên kết thanh không đi qua khớp;
- hoặc một mối hàn.

### 3. Cách nối ba miếng cứng thành một hệ bất biến hình

Từ điều kiện cần ta thấy muốn nối ba miếng cứng thành một hệ BHH thì tối thiểu phải dùng sáu liên kết tương đương loại một. Như vậy có thể thực hiện theo nhiều cách nối như sau:

- dùng hai mối hàn (hình 1.17a, b);
- dùng ba khớp (hình 1.17c);
- dùng sáu liên kết thanh (hình 1.17d, e);
- dùng một mối hàn, một khớp và một thanh (hình 1.17f);
- v. v...



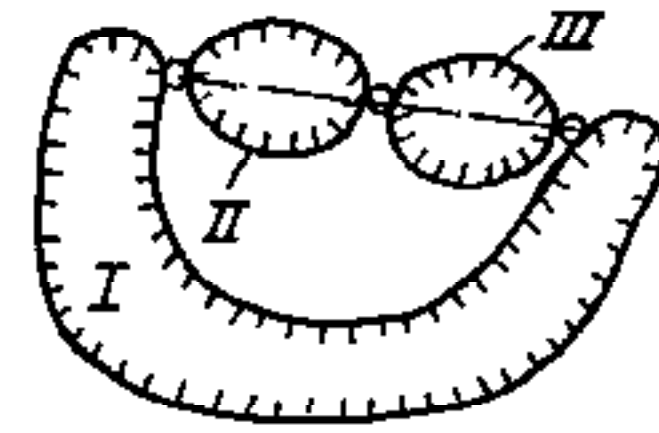
Hình 1.17

Qua những cách nối ba miếng cứng giới thiệu trên hình 1.17 ta thấy: trong một số trường hợp có thể sử dụng các điều kiện nối hai miếng cứng đã biết để phân tích điều kiện đủ. Các cách nối trên hình 1.17a, b, d, f thuộc trường hợp này. Ví dụ với hệ trên hình 1.17f, ta có thể xem như đã dùng một mối hàn để nối hai miếng cứng I và II thành hệ BBH, tiếp đó nối III với hệ BBH vừa thu được bằng một khớp và một thanh không đi qua khớp.

Khi ba miếng cứng được liên kết từng cặp hai miếng cứng với nhau bằng một khớp hoặc hai thanh như trên hình 1.17c, e, ta không thể dùng điều kiện nối hai miếng cứng để phân tích mà phải dùng điều kiện nối ba miếng cứng như sau:

*Điều kiện cần và đủ để nối ba miếng cứng là ba khớp thực hoặc giả tạo tương hỗ (giao điểm của hai thanh nối từng cặp hai miếng cứng) không được nằm trên cùng một đường thẳng.*

Nếu ba khớp tương hỗ cùng nằm trên một đường thẳng thì hệ sẽ BHTT. Hệ vẽ trên hình 1.18 là BHTT vì cấu tạo của nó tương tự như hệ BHTT đã khảo sát trên hình 1.4.



Hình 1.18

#### 4. Trường hợp tổng quát

Trong trường hợp tổng quát, khi điều kiện cần đã được thỏa mãn ta có thể phân tích điều kiện đủ theo biện pháp sau:

Vận dụng tính chất của bộ đội, điều kiện nối hai miếng cứng hoặc ba miếng cứng đã biết để phát triển từng miếng cứng của hệ hoặc thu hẹp hệ đã cho đến mức tối đa cho phép. Như vậy, ta sẽ đưa bài toán hệ có nhiều miếng cứng về bài toán có số lượng miếng cứng ít hơn.

- ❖ Nếu hệ thu được đưa về một miếng cứng thì hệ sẽ bất biến hình.
- ❖ Nếu hệ thu được đưa về hai miếng cứng thì sử dụng điều kiện nối hai miếng cứng để khảo sát.
- ❖ Nếu hệ thu được đưa về ba miếng cứng thì sử dụng điều kiện nối ba miếng cứng để khảo sát.

Phần lớn các hệ trong thực tế đều có thể sử dụng biện pháp trên để phân tích sự cấu tạo hình học. Trong những trường hợp phức tạp, khi không thể dùng biện pháp trên để phân tích ta có thể dùng các phương pháp khác như phương pháp tải trọng bằng không (xem chương 2) hoặc phương pháp động học (xem chương 10).



## 1.4. Ví dụ áp dụng

*Ví dụ 1.1.* Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.19.

❖ *Điều kiện cần-* Hệ đã cho là hệ nối với đất, ta sẽ dùng công thức (1.3) để khảo sát điều kiện cần. Có thể thực hiện theo nhiều cách quan niệm khác nhau:

a) *Quan niệm mỗi thanh thẳng là một miếng cứng*

Lúc này ta có:  $D = 6; T = 0; K = 2; H = 3; C = 5$ .

Theo (1.3):  $n = 0 + 2.2 + 3.3 + 5 - 3.6 = 0$ . Hệ đủ liên kết.

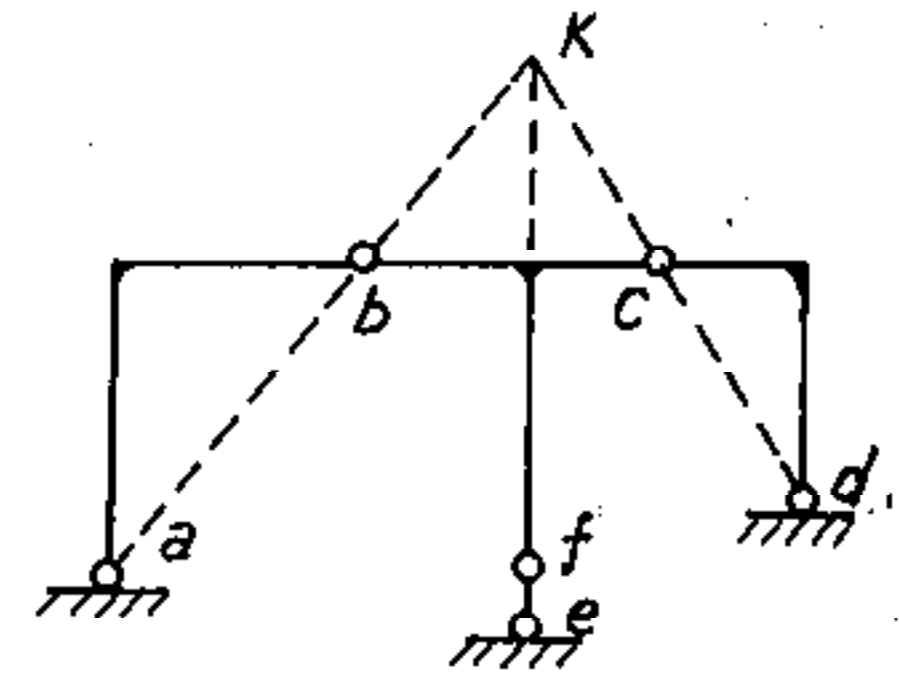
Cách quan niệm này chỉ làm phức tạp bài toán vì hai miếng cứng được nối với nhau bằng một mối hàn thực ra đã trở thành một miếng cứng.

b) *Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng*

Lúc này ta có  $D = 3$  (các miếng cứng  $ab, bcf, cd$ ). Các liên kết nối giữa ba miếng cứng:  $T = 0; K = 2; H = 0$ . Số liên kết nối với đất tương đương loại một:  $C = 5$ .

Theo (1.3):  $n = 0 + 2.2 + 3.0 + 5 - 3.3 = 0$ .

Hệ đủ liên kết.



Hình 1.19

c) *Giải theo cách chọn số miếng cứng tối thiểu*

Quan niệm thanh gãy khúc  $bcf$  là một miếng cứng còn các thanh gãy khúc  $ab, cd$  là liên kết loại một nối với đất, ta có:  $D = 1; T = 0; K = 0; H = 0; C = 3$ . Theo (1.3):  $n = 3 - 3.1 = 0$ . Hệ đủ liên kết.

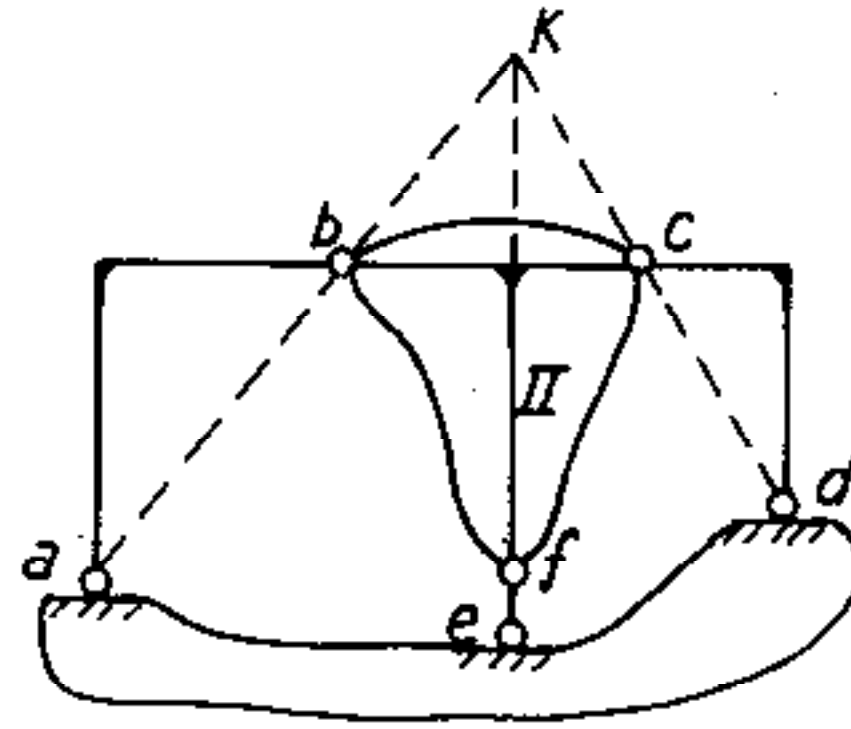
d) *Quan niệm trái đất là một miếng cứng và dùng công thức (1.2)*

Lúc này ta có:  $D = 2; T = 3; K = 0; H = 0$ .

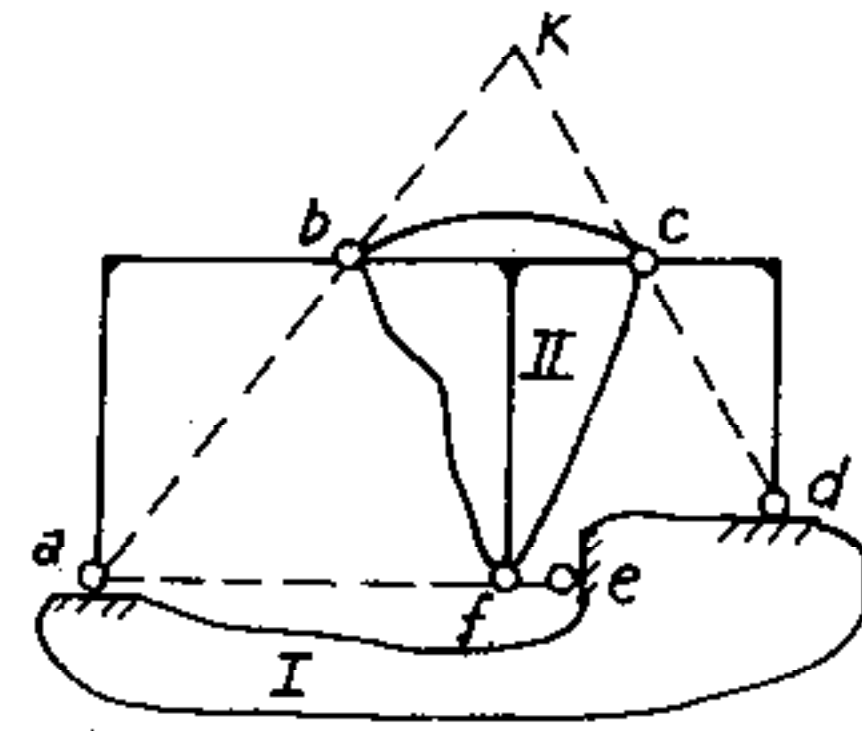
Theo (1.2):  $n = 3 + 2.0 + 3.0 - 3(2 - 1) = 0$ . Hệ đủ liên kết.

Như vậy khi phân tích điều kiện cần ta có thể thực hiện theo nhiều cách quan niệm khác nhau, song với bất kỳ cách quan niệm nào ta cũng thu được một kết quả thống nhất.

❖ *Điều kiện đủ-* Hệ đã cho có thể đưa về bài toán hai miếng cứng như trên hình 1.20. Hai miếng cứng được nối với nhau bằng ba thanh ( $ab, ef, dc$ ) đồng quy. Vậy hệ là BHTT.



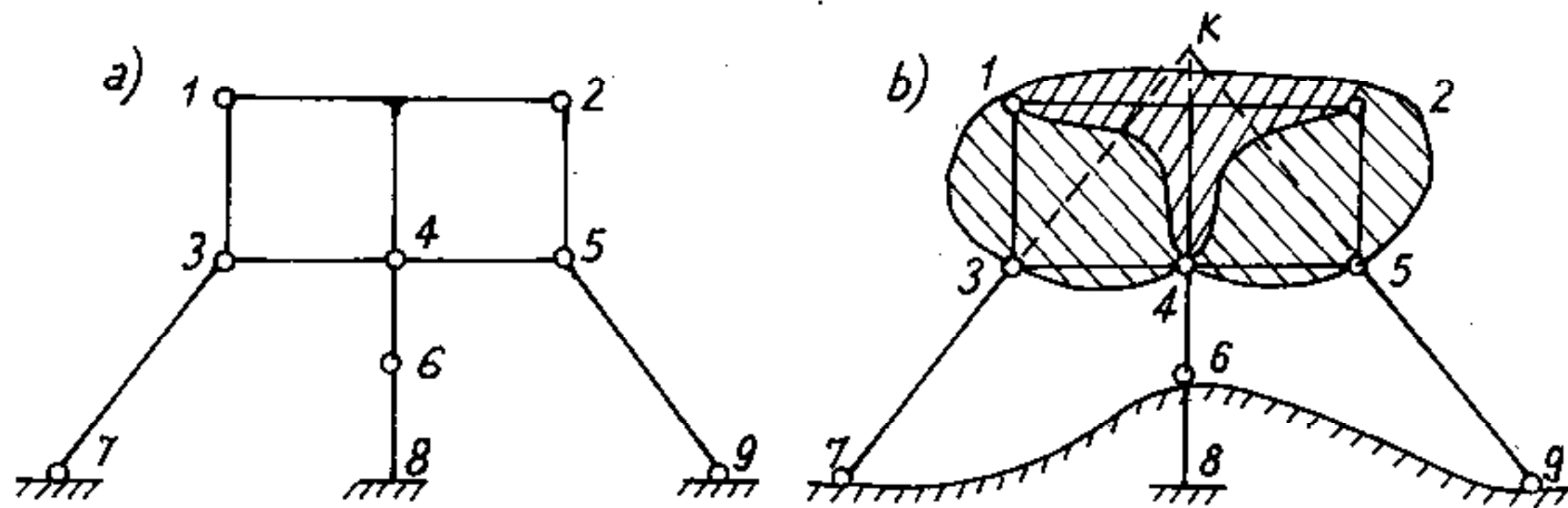
Hình 1.20



Hình 1.21

Nếu thay đổi cách bố trí liên kết sao cho ba thanh  $ab$ ,  $ef$  và  $dc$  không đồng quy nữa, chẳng hạn như hệ trên hình 1.21, thì sẽ được một hệ BBH.

**Ví dụ 1.2.** Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.22a



Hình 1.22

❖ **Điều kiện cân**– Hệ nối với đất nên ta sẽ dùng công thức (1.3) để phân tích. Quan niệm hệ gồm bốn miếng cứng:  $1-2-4$ ;  $3-7$ ;  $6-8$  và  $5-9$ . Lúc này các thanh  $1-3$ ;  $3-4$ ;  $2-5$ ;  $4-5$  và  $4-6$  thỏa mãn yêu cầu của liên kết thanh.

Ta có:  $D = 4$ ;  $T = 5$ ;  $K = 0$ ;  $H = 0$ ;  $C = 7$ .

Theo (1.3):  $n = 5 + 2.0 + 3.0 + 7 - 3.4 = 0$ . Hệ đủ liên kết.

❖ **Điều kiện dư**– Ta sẽ tìm cách phát triển dần các miếng cứng. Nếu nối miếng cứng  $6-8$  vào trái đất bằng liên kết hàn tại 8 thì miếng cứng trái đất sẽ phát triển tới vị trí  $7-6-9$  như trên hình 1.22b. Mặt khác, xét miếng cứng  $1-2-4$ . Nếu nối vào miếng cứng này hai bộ đôi  $(3-1)(3-4)$  và  $(5-2)(5-4)$  thì miếng cứng  $1-2-4$  sẽ phát triển thành  $1-2-5-3$ . Như vậy, hệ sẽ gồm hai miếng cứng được nối với nhau bằng ba thanh  $7-3$ ;  $6-4$  và  $9-5$ . Vì hệ đối xứng nên ba thanh này đồng quy tại  $K$ , do đó toàn bộ hệ là BHTT.

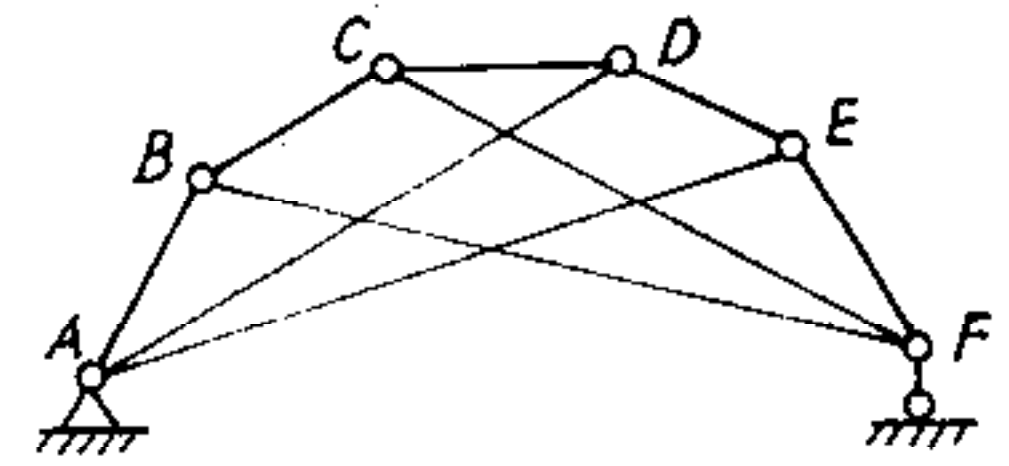
**Ví dụ 1.3.** Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ dàn trên hình 1.23.

❖ **Điều kiện cân**– Bài toán này là hệ dàn nối với đất nên ta sẽ dùng công thức (1.5) để khảo sát.

Trong trường hợp này ta có:  $D = 9; M = 6; C = 3$ .

Do đó theo (1.5):  $n = 9 + 3 - 2.6 = 0$ . Hệ đủ liên kết.

❖ *Điều kiện đủ*— Ta có thể dựa vào nhận xét sau để làm đơn giản bài toán: Trường hợp hệ nối với đất bằng ba liên kết tựa bố trí hợp lý, nếu phần hệ chưa nối với đất mà BBH thì toàn bộ hệ sẽ BBH. Do đó, trong trường hợp này ta có thể loại bỏ trái đất để phân tích sự cấu tạo.



Hình 1.23

Quan niệm hai tam giác khớp  $ADE$  và  $FBC$  là hai miếng cứng. Như vậy phần dàn chưa nối với đất gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng ba thanh  $AB, CD$  và  $EF$  không đồng quy hoặc song song. Kết luận: hệ BBH.

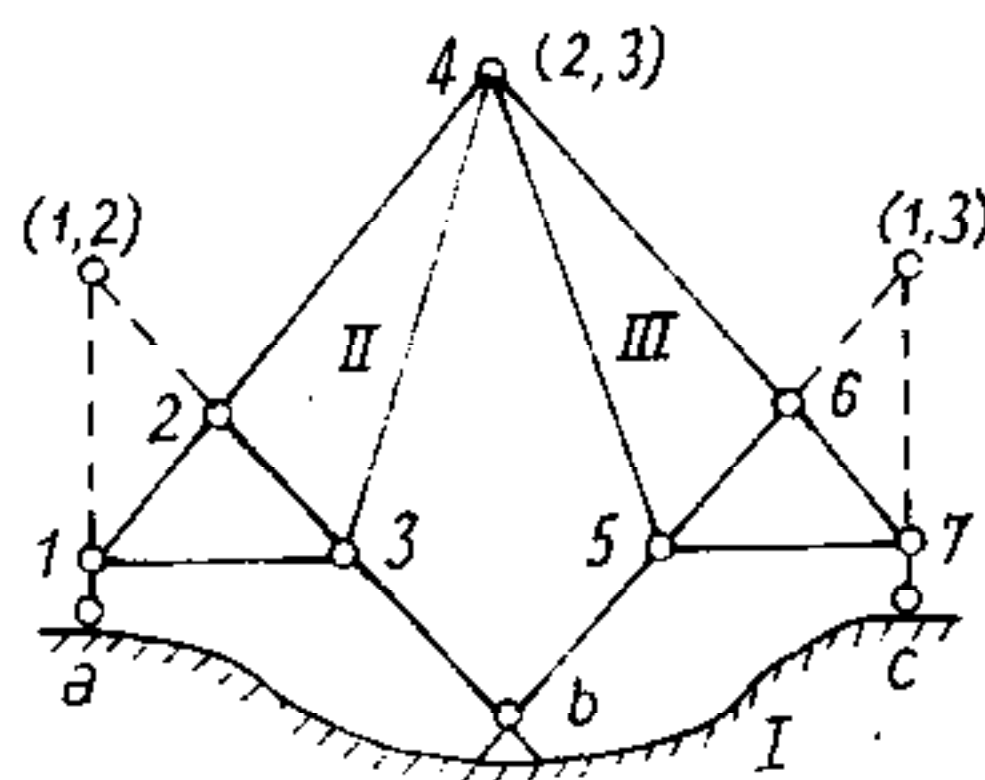
*Ví dụ 1.4.* Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.24.

❖ *Điều kiện cần*— Bài toán đã cho là hệ dàn nối với đất.

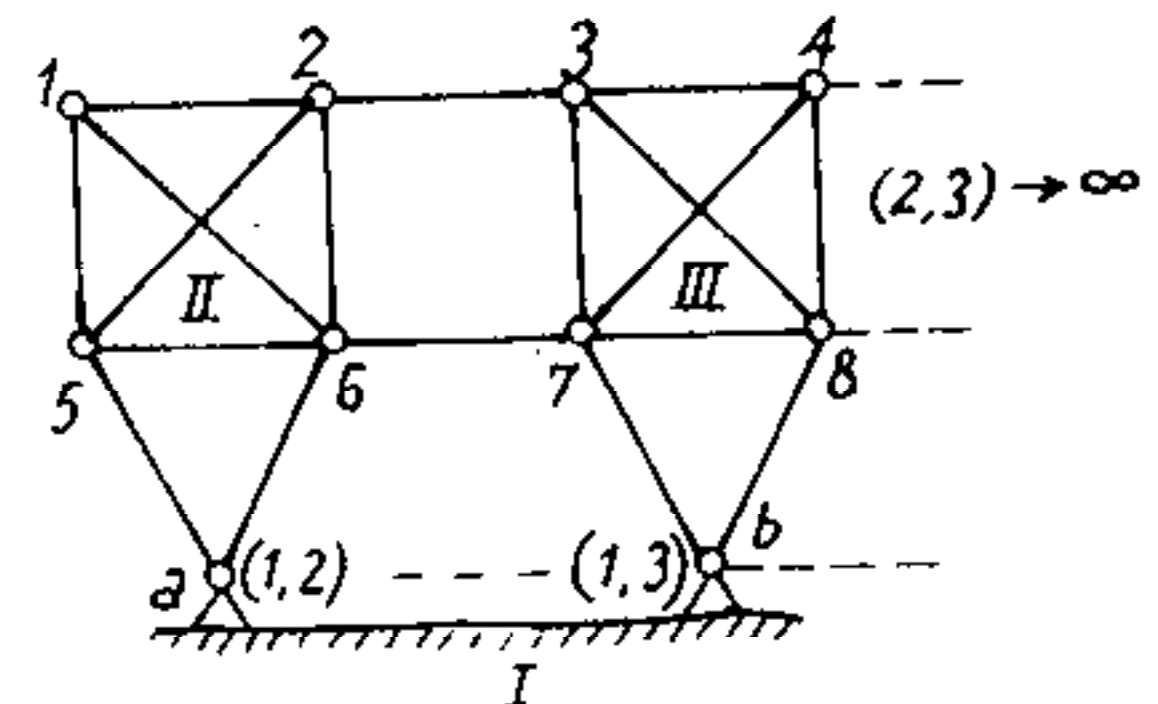
Trong trường hợp này ta có:  $D = 12; M = 8; C = 4$ .

Theo (1.5):  $n = 12 + 4 - 2.8 = 0$ . Hệ đủ liên kết.

❖ *Điều kiện đủ*— Gọi trái đất là miếng cứng  $I$ . Từ tam giác khớp  $1-2-3$ , sử dụng bộ đôi  $(4-2)(4-3)$  sẽ được miếng cứng  $1-4-3$  ký hiệu là  $II$ . Tương tự  $4-7-5$  cũng là một miếng cứng, ký hiệu là  $III$ . Ba miếng cứng này được nối với nhau từng đôi một bằng các khớp tương hỗ  $(1,2), (2,3), (1,3)$  như trên hình 1.24. Ba khớp tương hỗ không thẳng hàng nên hệ đang xét là BBH.



Hình 1.24



Hình 1.25

*Ví dụ 1.5.* Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.25.

❖ *Điều kiện cần*— Hệ đã cho là hệ dàn nối với đất. Ta có:  $D = 18; M = 10; C = 4$ .

Theo (1.5):  $n = 18 + 4 - 2 \cdot 10 = 2 > 0$ . Hệ thừa hai liên kết tương đương loại một.

❖ *Điều kiện dư*– Gọi trái đất là miếng cứng I. Từ tam giác khớp  $a-5-6$  ta có thể phát triển thành miếng cứng  $a-5-1-2-6$  gọi là miếng cứng II bằng cách thêm vào hai bộ đôi, chẳng hạn  $(1-5)(1-6)$  và  $(2-5)(2-6)$ . Trong quá trình phát triển thành miếng cứng II ta thấy có một thanh thừa. Tương tự ta cũng được miếng cứng  $b-7-3-4-8$  gọi là miếng cứng III; trong đó cũng có một thanh thừa. Như vậy bài toán được đưa về ba miếng cứng nối với nhau bằng ba khớp tương hỗ. Khớp tương hỗ  $(2,3)$  nối II với III là giao điểm của hai thanh song song nên ở xa vô cùng. Các khớp tương hỗ  $(1,2)$  và  $(1,3)$  nằm trên đường thẳng song song với hai thanh nối hai miếng cứng II và III nên khớp  $(2,3)$  sẽ nằm trên đường thẳng nối  $(1,2)$  và  $(1,3)$ . Kết luận: hệ BHTT.

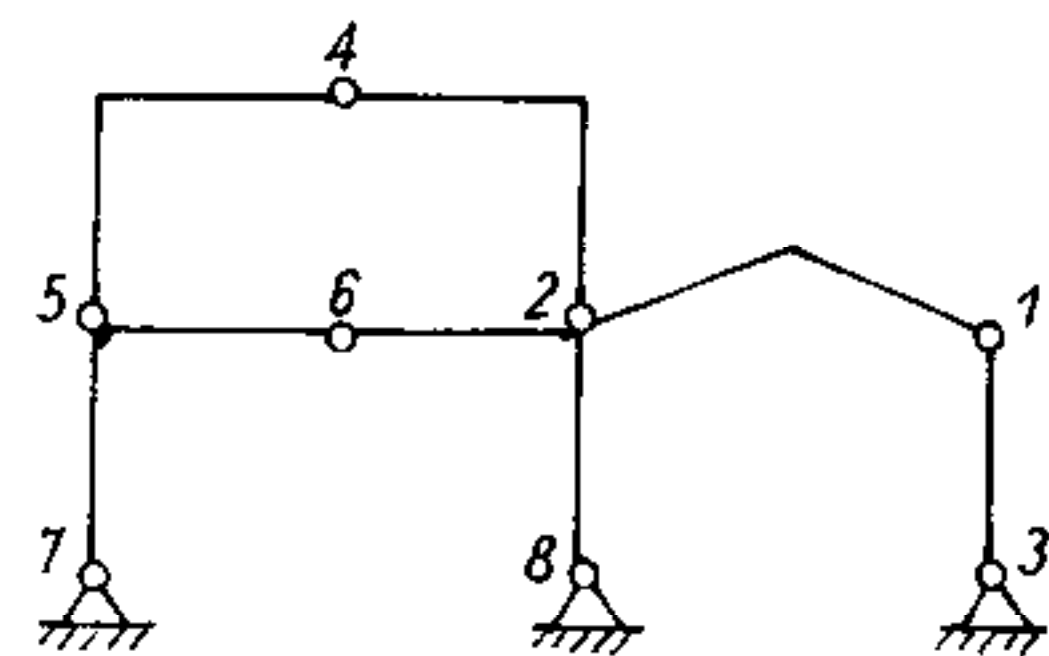
Trong trường hợp này, cũng có thể quan niệm trái đất là một miếng cứng có hai khớp  $a, b$  được dùng để nối hai miếng cứng II và III, giữ vai trò như một liên kết thanh  $ab$ . Bài toán đưa về trường hợp hai miếng cứng II và III được nối với nhau bằng ba thanh song song  $2-3, 6-7$  và  $a-b$ . Kết luận: hệ BHTT.

**Ví dụ 1.6.** Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.26.

❖ *Điều kiện cần*– Từ điều kiện cần (1.3) ta dễ dàng tìm được  $n = 0$  tức là hệ đủ liên kết.

❖ *Điều kiện dư*– Nếu chú ý là có thể quan niệm liên kết thanh một cách rộng rãi hơn như trên hình 1.7c thì ta có thể vận dụng tính chất của bộ đôi để giải bài toán này bằng biện pháp thu hẹp hoặc phát triển miếng cứng như sau:

Loại bỏ bộ đôi  $(1-2)(1-3)$  ra khỏi hệ thì hệ còn lại là  $7-5-4-2-8$  không thay đổi tính chất động học. Tiếp đó loại bỏ bộ đôi  $(4-5)(4-2)$  thì hệ còn lại là  $7-6-8$  cũng vẫn không thay đổi tính chất động học. Cuối cùng sau khi loại bỏ bộ đôi  $(6-7)(6-8)$  ta được hệ còn lại là trái đất. Vì trái đất là một hệ BBH nên toàn bộ hệ đã cho cũng là BBH.



Hình 1.26

Cũng có thể phân tích bài toán bằng cách phát triển miếng cứng theo thứ tự ngược lại.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 1.1. Ý nghĩa của việc nghiên cứu sự cấu tạo hình học của kết cấu?
- 1.2. Thế nào là hệ bất biến hình, biến hình và biến hình tức thời. Khả năng áp dụng các hệ đó trong xây dựng?
- 1.3. Thiết lập các công thức biểu thị điều kiện cần để nối các miếng cứng thành hệ bất biến hình. Nêu đối tượng áp dụng cho từng công thức.
- 1.4. Giải thích tính chất của bộ đôi và trình bày cách vận dụng.
- 1.5. Phát biểu và giải thích điều kiện cần và đủ để nối hai miếng cứng, ba miếng cứng thành một hệ bất biến hình.



# 2

## Cách xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động

Trong hệ tĩnh định, nội lực chỉ phát sinh khi hệ chịu tải trọng. Nội dung chủ yếu của chương này là nghiên cứu phương pháp tính hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động với giả thiết là tải trọng tác dụng tĩnh.

Xuất phát từ định nghĩa hệ tĩnh định, ta thấy: nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động phụ thuộc sơ đồ hình học của công trình và sơ đồ tải trọng, không phụ thuộc vật liệu, kích thước tiết diện cũng như không phụ thuộc công trình làm việc trong giai đoạn đàn hồi hay đàn dẻo. Nội lực chỉ phụ thuộc vật liệu và kích thước tiết diện khi tính hệ thanh với trọng lượng bản thân chưa biết.

Cũng cần chú ý là khái niệm về nội lực tại một tiết diện  $k$  nào đó của hệ, hoàn toàn có thể đồng nhất với khái niệm về phản lực trong các liên kết nếu quan niệm tiết diện  $k$  là một liên kết hàn hoặc liên kết tương đương nối hai miếng cứng ở hai bên tiết diện  $k$ . Như vậy, về sau này ta có thể đồng nhất việc xác định nội lực với việc xác định phản lực trong các liên kết.

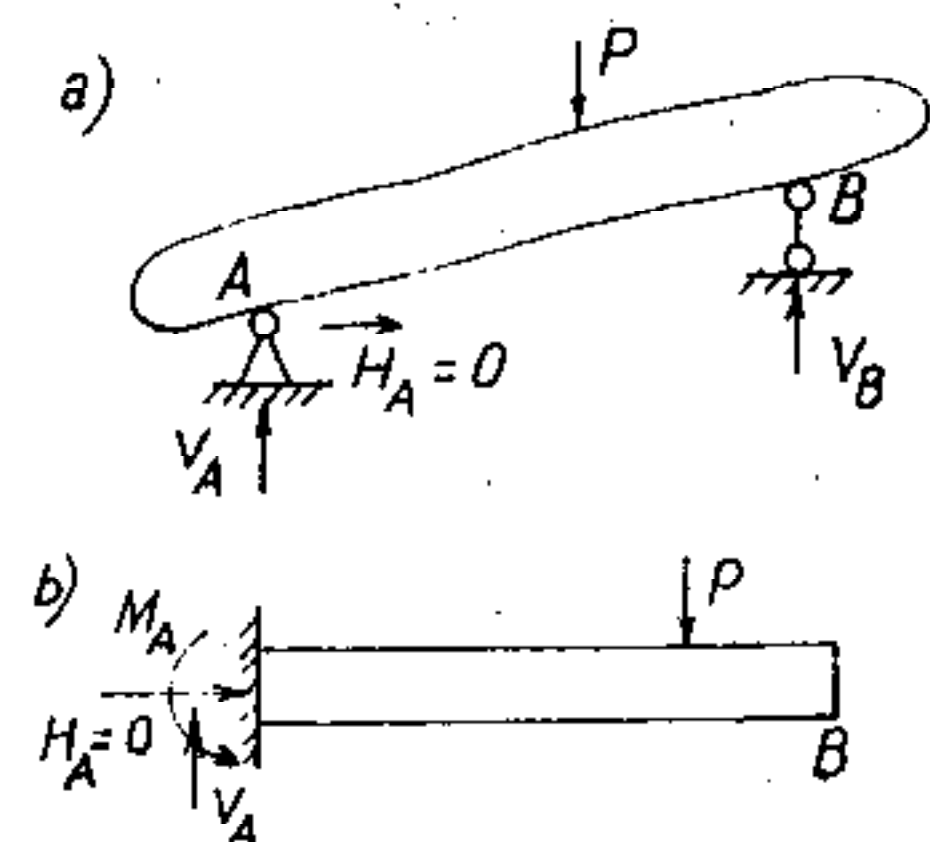
### 2.1. Phân tích tính chất chịu lực của các hệ tĩnh định

#### A. Hệ đơn giản

Căn cứ vào phương của phản lực tựa khi hệ chịu tải trọng thẳng đứng, người ta chia các hệ đơn giản thành hai trường hợp cơ bản: hệ dầm và hệ ba khớp.

##### 1. Hệ dầm

Hệ dầm là hệ bất biến hình được cấu tạo từ một miếng cứng nối với trái đất bằng một gối cố định và một gối di động có phương thẳng đứng (hình 2.1a) hoặc bằng một liên kết ngàm (hình 2.1b). Dưới tác dụng của tải trọng thẳng đứng, thành phần phản lực nằm ngang trong hệ luôn luôn bằng không.

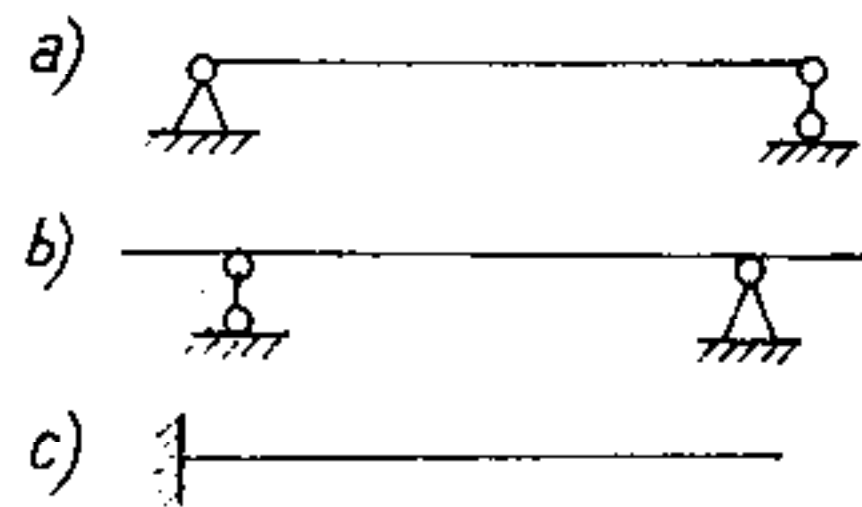


Hình 2.1

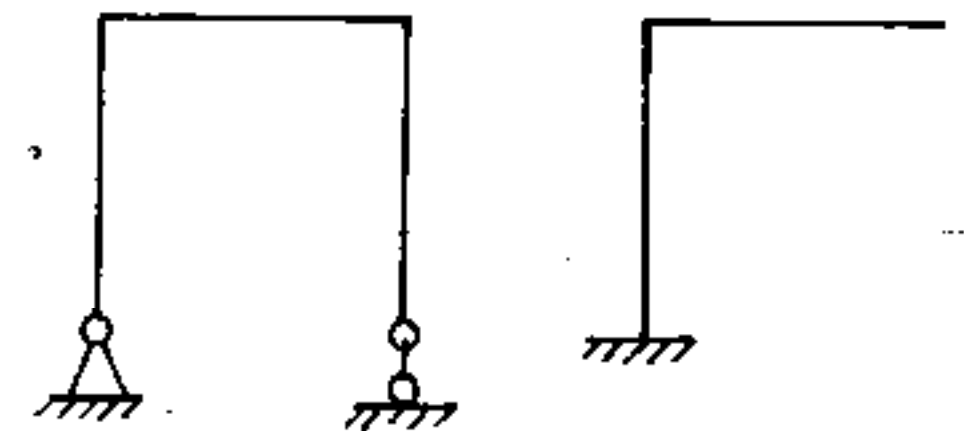
Tùy theo sự cấu tạo của miếng cứng, hệ dầm được phân loại như sau:

a) *Dầm tĩnh định đơn giản*, khi miếng cứng được hình thành từ một thanh thẳng, bao gồm:

- Dầm đơn giản không có đầu thừa (hình 2.2a).
- Dầm đơn giản có đầu thừa (hình 2.2b).
- Dầm côngxôn (hình 2.2c)



Hình 2.2



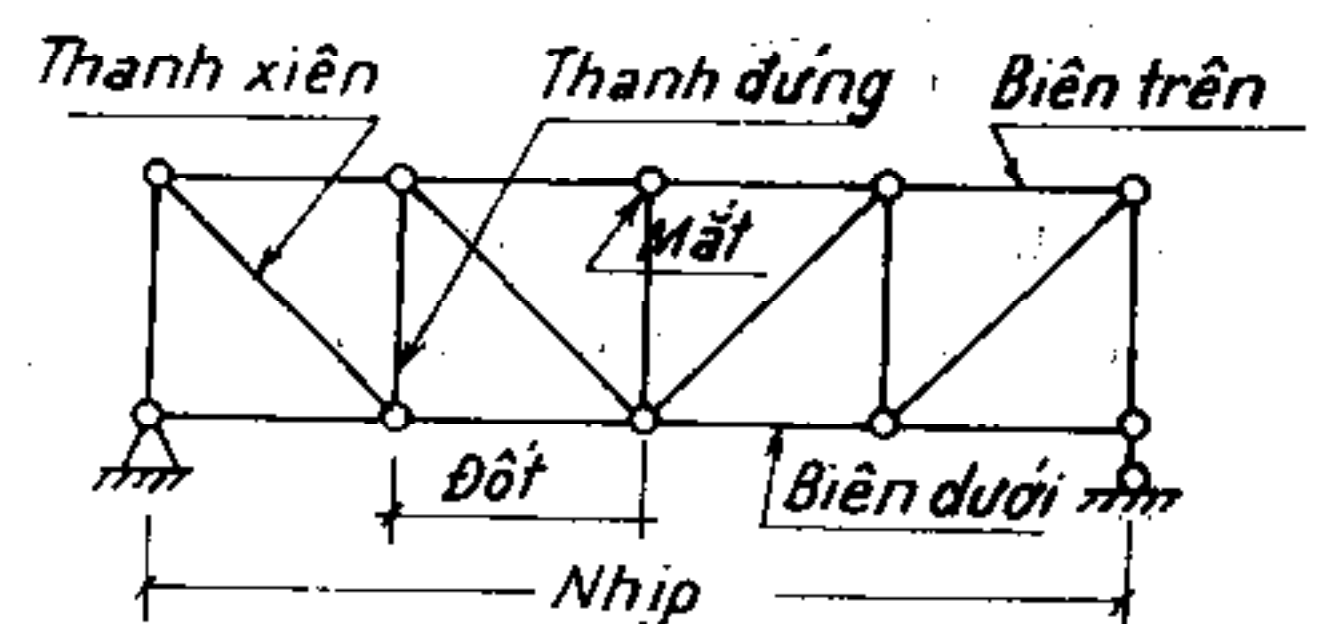
Hình 2.3

Dưới tác dụng của tải trọng bất kỳ, trong dầm phát sinh các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc. Lực dọc bằng không khi trục dầm nằm ngang và tải trọng thẳng đứng.

b) *Khung tĩnh định*, khi miếng cứng được hình thành từ một thanh gãy khúc (hình 2.3). Trong khung phát sinh các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc.

c) *Dàn dầm tĩnh định*, khi miếng cứng được hình thành từ các thanh thẳng nối với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh (hình 2.4).

Khoảng cách giữa các gối tựa của dàn gọi là *nhịp*. Giao điểm của các thanh gọi là *mắt dàn*. Những thanh nằm trên chu vi của dàn tạo thành đường *biên trên* và *biên dưới*. Các thanh nằm trong các đường biên tạo thành *hệ thanh bụng*. Hệ thanh bụng gồm có các *thanh đứng* và các *thanh xiên*.



Hình 2.4

Khoảng cách giữa các mắt thuộc đường biên gọi là *đốt* (xem hình 2.4).

Để tính toán dàn được đơn giản, ta thừa nhận các giả thiết sau:

- 1) *Mắt của dàn phải nằm tại giao điểm của các trục thanh và là khớp lý tưởng (các đầu thanh quy tụ ở mắt có thể xoay một cách tự do không ma sát).*

2) Tải trọng chỉ tác dụng tại các mắt của dàn.

• Trọng lượng bản thân của các thanh không đáng kể so với tải trọng tác dụng trên dàn.

Trong thực tế, các thanh thường được nối với nhau bằng đinh tán hoặc mối hàn, rất ít khi nối bằng khớp (bulông, chốt...). Những mối nối này không phải là khớp lý tưởng, ngoài ra các thanh đều có trọng lượng riêng, cho nên kết quả tính toán theo các giả thiết trên chỉ là gần đúng.

Từ các giả thiết trên ta đi đến kết luận quan trọng như sau:

*Các thanh trong dàn chỉ chịu kéo hoặc nén, nghĩa là trong dàn chỉ tồn tại lực dọc  $N$  mà không có mômen uốn  $M$  và lực cắt  $Q$ .*

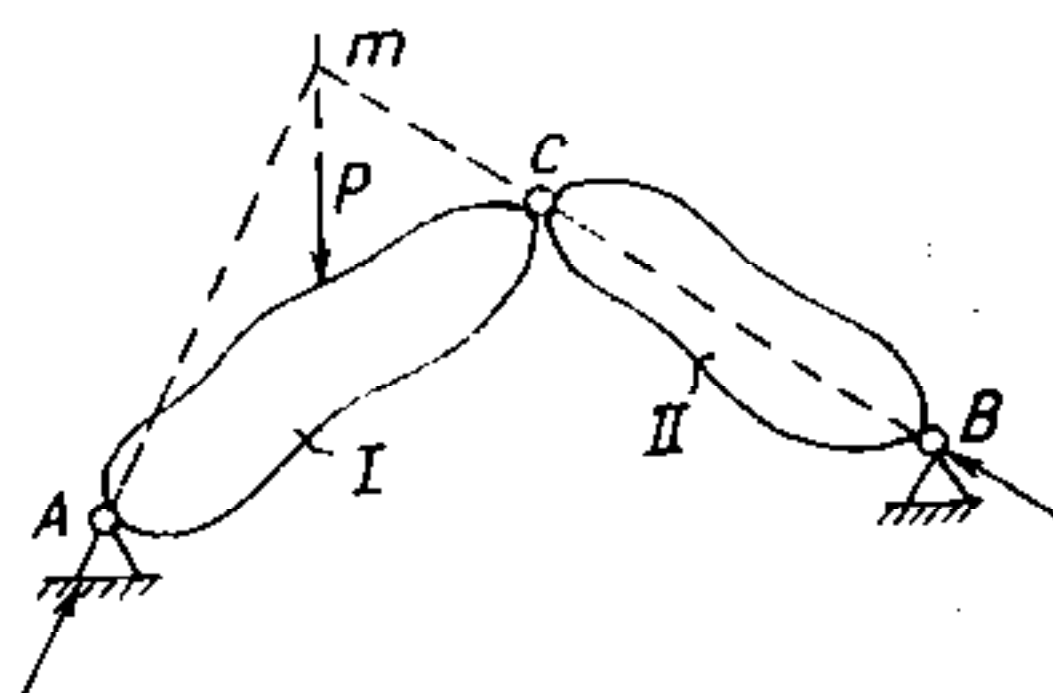
Thật vậy, vì trọng lượng bản thân của mỗi thanh trong dàn không đáng kể và tải trọng chỉ đặt ở mắt nghĩa là thanh không chịu tải trọng trên chiều dài của nó, hơn nữa vì các khớp ở hai đầu thanh là lý tưởng nên ta có thể xem mỗi thanh trong dàn như một liên kết loại một. Như đã biết từ chương 1, trong các liên kết loại một chỉ xuất hiện một thành phần phản lực hướng theo trục thanh, do đó trong các thanh của dàn chỉ tồn tại lực dọc  $N$ .

Ưu điểm của dàn là có thể vượt qua được những nhịp lớn và tiết kiệm được vật liệu. Nếu dùng dầm đặc để vượt qua những nhịp lớn thì chiều cao của dầm đặc phải lớn và vật liệu làm việc không đồng đều. Thật vậy, trong dầm có mômen uốn do đó ứng suất phân bố không đều trên toàn tiết diện, các thớ bên làm việc nhiều còn các thớ giữa làm việc ít. Trong dàn thì các thanh chỉ chịu kéo hoặc nén đúng tâm nên ứng suất phân bố đều trên toàn tiết diện, do đó các thớ làm việc như nhau và tiết kiệm được vật liệu.

## 2. Hệ ba khớp (hay hệ vòm)

Hệ ba khớp (hình 2.5) là hệ được cấu tạo từ hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp (khớp  $C$ ) và nối với trái đất bằng hai gối tựa bất động ( $A$  và  $B$ ).

Nếu xem trái đất là một miếng cứng thì hệ sẽ gồm ba miếng cứng nối với nhau bằng ba khớp tương hỗ không thẳng hàng  $A, B, C$ . Như vậy hệ ba khớp là hệ bất biến hình, đủ liên kết.



Hình 2.5

Hệ ba khớp là hệ có *lực xô*, nghĩa là trong hệ phát sinh thành phần phản lực nằm ngang ngay cả khi tải trọng tác dụng thẳng đứng.

Đó là điều khác nhau cơ bản giữa hệ ba khớp và hệ dầm.

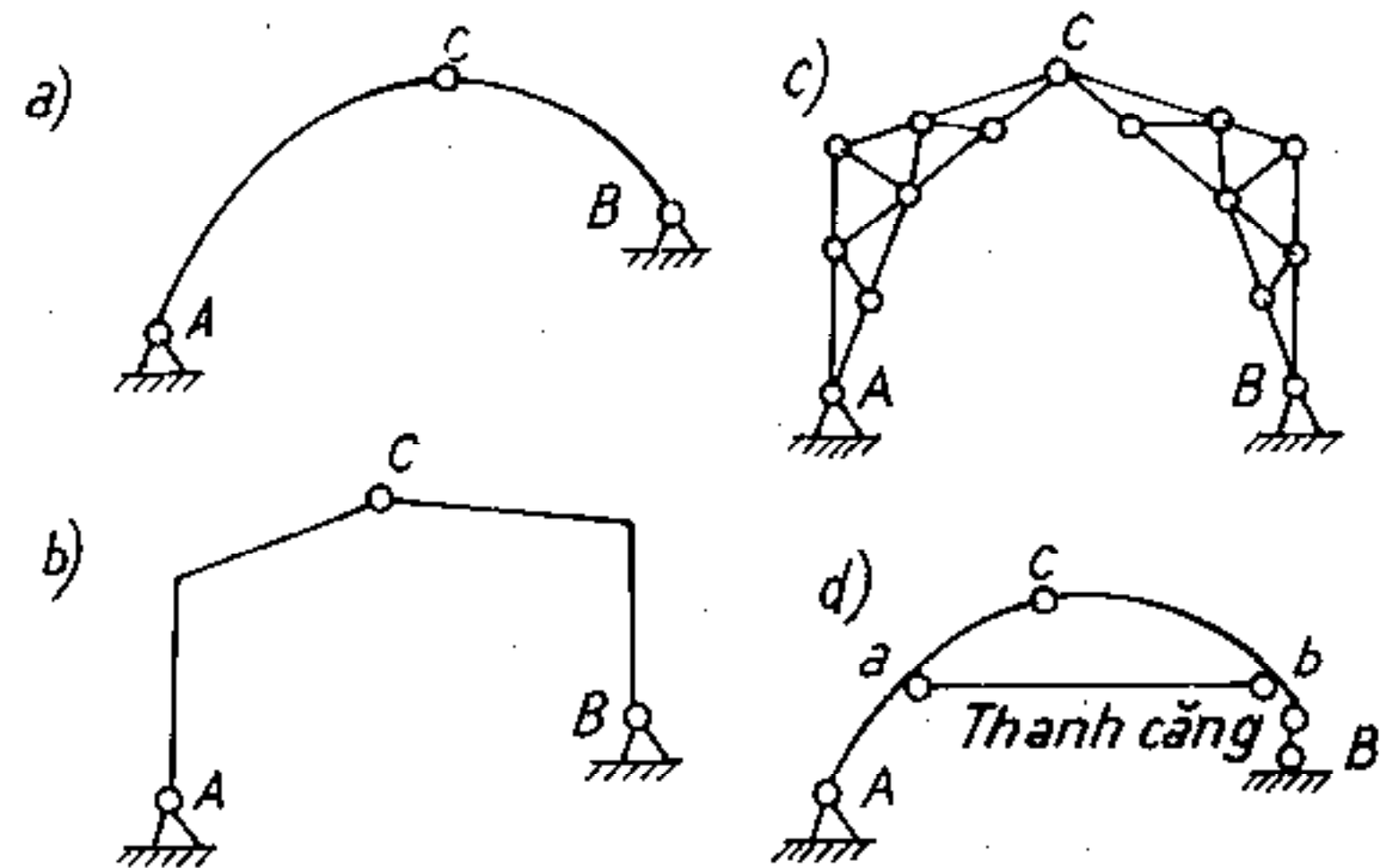
Để xác nhận điều đó ta xét hệ trên hình 2.5. Khi tải trọng thẳng đứng  $P$  tác dụng trên miếng cứng bên trái  $I$  của hệ, phản lực tại gối  $B$  phải đi qua khớp  $C$ . Thật vậy, lúc này trên miếng cứng  $II$  chỉ chịu tác dụng của hai lực đặt tại  $B$  và  $C$ , muốn cho miếng cứng  $II$  cân bằng thì hai lực đó phải trực đối, do đó phản lực tại  $B$  có phương  $BC$ .

Mặt khác, khi xét cân bằng của toàn hệ ta thấy trên hệ có ba lực tác dụng: lực  $P$ , phản lực tại  $B$  và phản lực tại  $A$ . Điều kiện để cho hệ cân bằng là ba lực này phải đồng quy, do đó phản lực tại  $A$  buộc phải đi qua giao điểm  $m$  của hai lực  $P$  và  $B$ .

Như vậy, khi tải trọng tác dụng thẳng đứng, các phản lực  $A$  và  $B$  nói chung có thành phần nằm ngang tức là có *lực xô* (trừ trường hợp đặc biệt khi khớp  $C$  và  $B$  cùng trên đường thẳng đứng, lúc này hệ trở thành hệ dầm).

Hệ ba khớp được sử dụng rộng rãi trong thực tế dưới nhiều hình thức:

Hình 2.6



- *Vòm ba khớp* (hình 2.6a), khi các miếng cứng của hệ là các thanh cong, trong vòm ba khớp phát sinh đầy đủ các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc.
- *Khung ba khớp* (hình 2.6b), khi các miếng cứng của hệ là các thanh gãy khúc hoặc thẳng. Trong khung ba khớp phát sinh đầy đủ các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt, lực dọc.
- *Dàn vòm ba khớp* (hình 2.6c), khi các miếng cứng của hệ là dàn phẳng bất biến hình và tĩnh định. Trong các thanh của dàn vòm ba khớp chỉ phát sinh lực dọc.

Hệ ba khớp có thanh căng (hình 2.6d). Hệ này gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng khớp  $C$  và thanh căng  $ab$ , tiếp đó liên kết với trái đất bằng một gối cố định  $A$  và một gối di động  $B$ . Thanh căng có tác dụng tiếp nhận lực xô, chịu lực dọc. Trong các miếng cứng  $AC$  và  $CB$ , nói chung phát sinh đầy đủ các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc.

Kết cấu hệ ba khớp có ưu điểm là có thể vượt qua được các nhịp khá lớn so với kết cấu dầm. Thật vậy, như dưới đây sẽ thấy, mômen uốn và lực cắt trong vòm ba khớp thường rất nhỏ so với mômen uốn và lực cắt trong dầm có điều kiện làm việc như nhau về nhịp và tải trọng. Hơn nữa, nếu khéo chọn dạng của trục vòm thì mômen uốn và do đó lực cắt tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không hoặc xấp xỉ bằng không, vòm chỉ chịu lực nén là chủ yếu. Lúc này có thể sử dụng được các loại vật liệu chịu nén tốt như gạch, đá là những loại vật liệu dễ kiếm để xây dựng vòm.

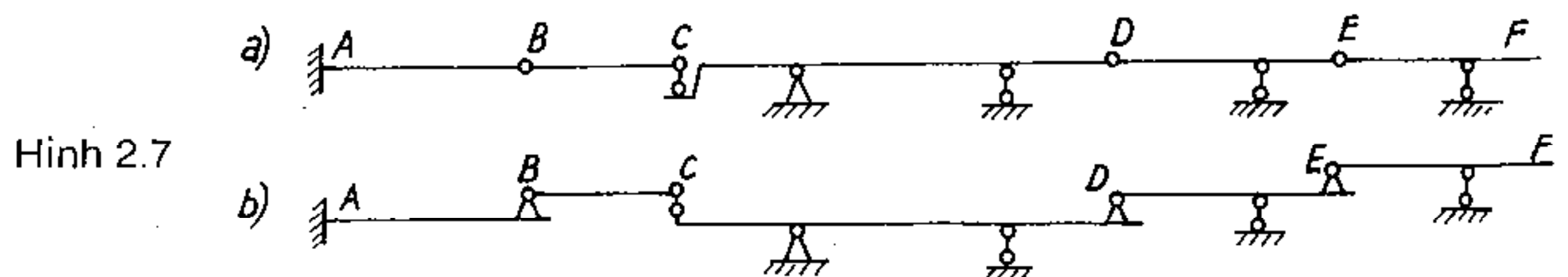
Đối với những nhịp nhỏ, sử dụng kết cấu vòm sẽ không kinh tế bằng kết cấu dầm vì chế tạo kết cấu vòm thường phức tạp hơn.

Một nhược điểm nữa cần chú ý khi sử dụng kết cấu vòm ba khớp là phải xây dựng kết cấu bên dưới gối tựa  $A$  và  $B$  khá lớn để chịu thành phần lực xô. Có thể khắc phục nhược điểm này bằng cách sử dụng vòm ba khớp có thanh căng. Lúc này dưới tác dụng của tải trọng thẳng đứng, các phản lực ở gối tựa chỉ có thành phần thẳng đứng còn thanh căng tiếp nhận lực xô, do đó kết cấu bên dưới gối sẽ nhẹ nhàng hơn.

## B. Hệ ghép

Hệ ghép tĩnh định là hệ gồm nhiều hệ tĩnh định đơn giản nối với nhau bằng các liên kết khớp hoặc thanh và nối với trái đất bằng các liên kết tựa sao cho hệ là bất biến hình và đủ liên kết.

Trên hình 2.7a giới thiệu một hệ ghép gồm năm dầm đơn giản nối với nhau, hệ này còn được gọi là hệ dầm tĩnh định nhiều nhịp. Cũng dễ dàng xác nhận được là hệ bất biến hình và đủ liên kết.



Từ sự cấu tạo của hệ, ta có nhận xét sau: nếu loại bỏ dầm  $BC$  thì dầm  $AB$  vẫn bất biến hình, ngược lại, nếu loại bỏ dầm  $AB$  thì dầm  $BC$  trở thành biến hình. Vì thế ta gọi hệ  $BC$  là hệ phụ của hệ  $AB$  và gọi hệ  $AB$  là hệ chính của dầm  $BC$ .



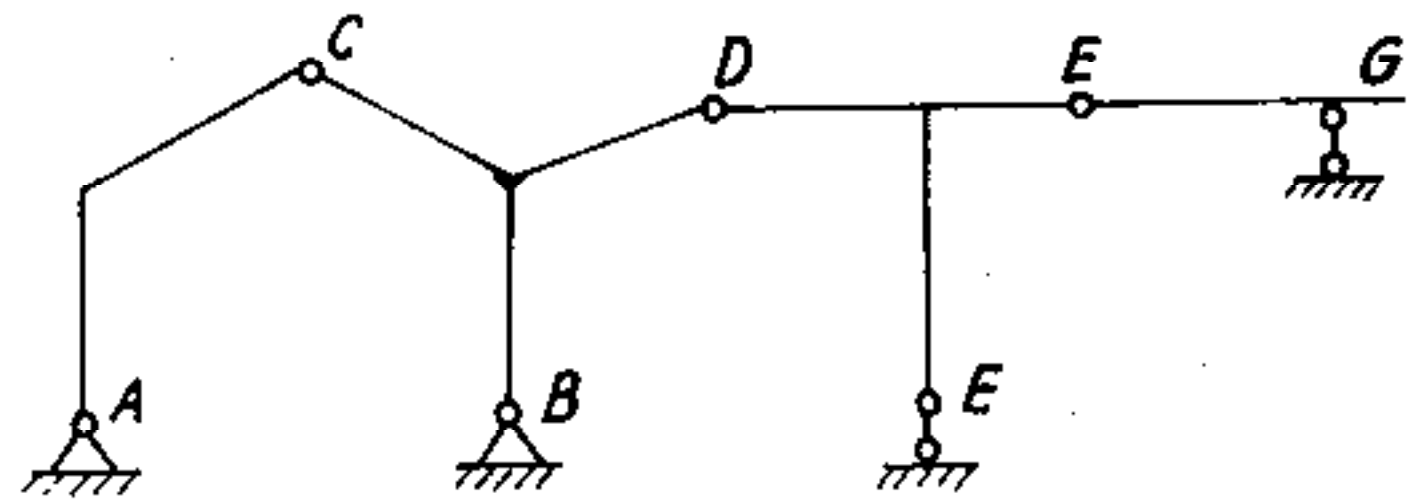
Như vậy, hệ chính là hệ sẽ bất biến hình nếu loại bỏ các hệ lân cận, hệ phụ là hệ sẽ biến hình nếu loại bỏ các hệ lân cận.

Trong hệ này, ta thấy hệ  $DE$  là chính của hệ  $EF$  đồng thời là phụ của hệ  $CD$ .

Các hệ phụ muốn đứng vững được thì phải dựa vào hệ chính của nó. Do đó có thể biểu diễn hệ đã cho theo sơ đồ cấu tạo như trên hình 2.7b, trong đó các hệ phụ được đặt trên các hệ chính tương ứng.

Hệ ghép trên hình 2.8 gồm khung ba khớp  $ACBD$ , khung  $DEF$  và dầm đơn giản  $FG$  nối với nhau bằng các khớp  $D, F$ . Trong đó:  $ACBD$  là hệ chính,  $DEF$  là hệ phụ của  $ACBD$  và là hệ chính của  $FG$ , còn  $FG$  là hệ phụ

Hình 2.8



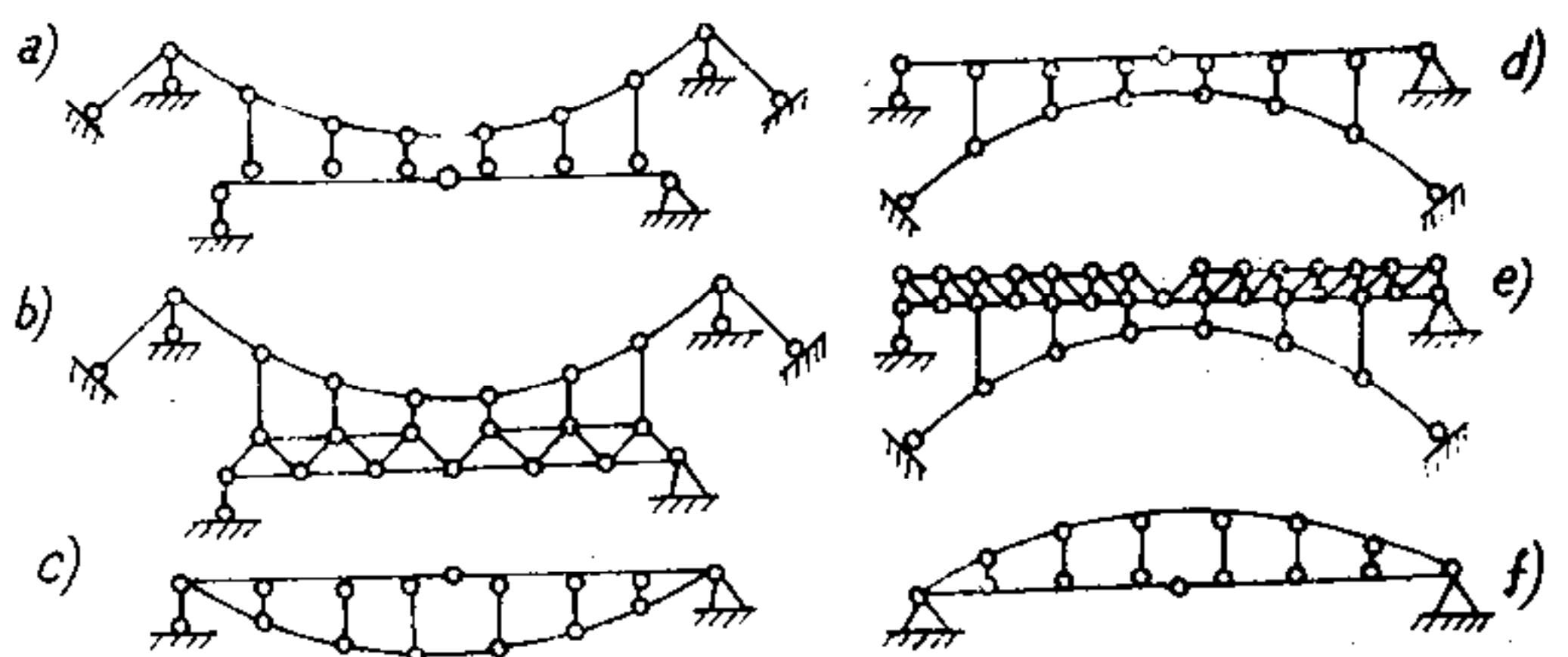
Về tính chất truyền lực, ta có nhận xét sau:

- \* Tải trọng tác dụng trên hệ chính chỉ gây ra nội lực trong hệ chính mà không gây ra nội lực trong hệ phụ. Lúc này do hệ quả biến dạng của hệ chính, hệ phụ chỉ bị nghiêng đi mà không bị biến dạng nên không phát sinh nội lực.
- \* Tải trọng tác dụng trên hệ phụ thì cả hệ phụ lẫn hệ chính cũng phát sinh nội lực. Tải trọng truyền áp lực từ hệ phụ vào hệ chính qua liên kết nối giữa hệ phụ và hệ chính.

### C. Hệ liên hợp

Hệ liên hợp tĩnh định là hệ bất biến hình được cấu tạo bởi nhiều hệ (dầm đơn giản, vòm, dàn dầm, dàn vòm, dây cáp hoặc dây xích...) nối với nhau bằng số liên kết vừa đủ để cùng tham gia chịu lực.

Hình 2.9



Trên hình 2.9 trình bày một số hệ liên hợp đơn giản cấu tạo bởi dầm hoặc dàn dầm nối với hệ thanh khớp là những hệ liên hợp thường gặp.

Dưới tác dụng của tải trọng thẳng đứng hướng từ trên xuống dưới, các cấu kiện của hệ liên hợp có tính chất chịu lực như sau:

- ◆ Các cấu kiện tạo thành đường cong hay đường đa giác vòng xuống dưới sẽ chịu kéo (hình 2.9a, b, c) nên thường làm bằng vật liệu chịu kéo tốt như dây cáp hoặc dây xích. Ta gọi những cấu kiện này là *dây xích*.
- ◆ Các cấu kiện tạo thành đường cong hay đường đa giác vòng lên trên đều chịu nén (hình 2.9d, e, f). Những cấu kiện này được làm bằng vật liệu chịu nén tốt và gọi là *vòm dèo*.
- ◆ Hệ dầm hoặc dàn chịu uốn gọi là *dầm cứng*. Dầm cứng được gia cường bằng dây xích (hình 2.9a, b, c) gọi là *hệ treo*. Lúc này dầm cứng chịu mômen uốn nếu dây xích không neo vào dầm cứng (hình 2.9a, b) và chịu mômen uốn cùng với lực nén nếu dây xích được neo vào dầm cứng (hình 2.9c).

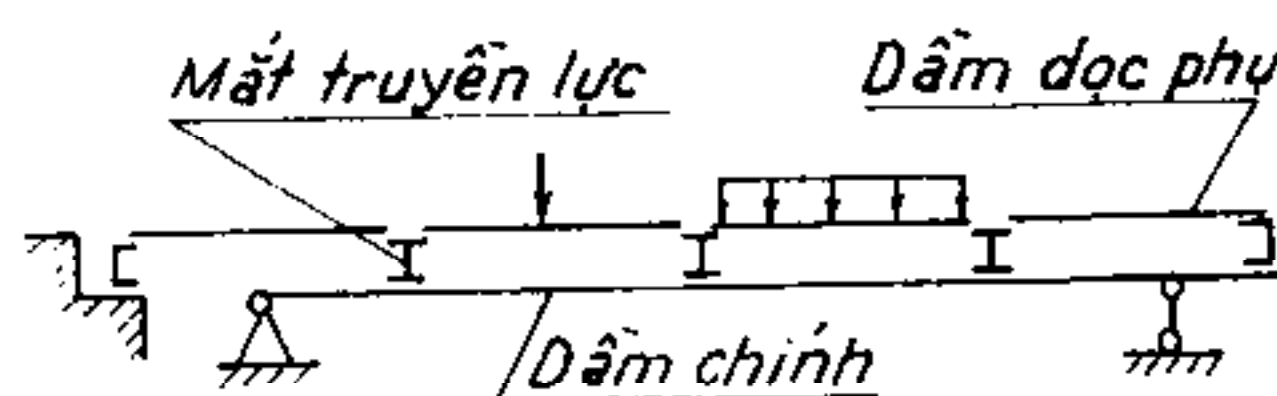
Dầm cứng được gia cường bằng vòm dèo (hình 2.9d, e, f) gọi là *hệ vòm*. Tùy theo chân vòm dèo có liên kết (hình 2.9f) hay không liên kết (hình 2.9d, e) với dầm cứng, trong dầm cứng sẽ xuất hiện mômen uốn cùng với lực kéo hay chỉ xuất hiện mômen uốn.

- ◆ Vì tải trọng thường di động trên dầm cứng nên:
  - Các thanh đứng bố trí ở phía trên dầm cứng (hình 2.9a, b, f) thường chịu kéo.
  - Các thanh đứng bố trí ở phía dưới dầm cứng (hình 2.9c, d, e) thường chịu nén.

Hiện nay, hệ liên hợp tĩnh định thường ít được sử dụng song hệ liên hợp siêu tĩnh lại được quan tâm nghiên cứu phát triển để vượt qua các khẩu độ lớn. Ví dụ, cầu treo dây văng Tatara ở Nhật có nhịp 890 m (1999); cầu treo dây parabol Akashi- Kaikyo ở Nhật, có ba nhịp 960+1990+960 m (1999).

#### D. Hệ có hệ thống truyền lực

Trong thực tế xây dựng, thường gặp những hệ trong đó tải trọng không tác dụng trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính mà truyền áp lực vào kết cấu chịu lực qua một hệ thống dầm gọi là hệ thống truyền lực.



Hình 2.10

Trên hình 2.10 giới thiệu dầm có hệ thống truyền lực. Trong hệ này, tải trọng chỉ đặt trên các dầm dọc phụ và truyền áp lực từ dầm dọc phụ xuống dầm dọc chịu lực chính (gọi là dầm dọc chính) qua các điểm tựa của dầm dọc phụ trên dầm dọc chính. Những điểm tựa này được gọi là *mắt truyền lực*. Trong thực tế các mắt truyền lực thường là hệ thống dầm ngang đặt vuông góc với dầm dọc phụ và chính. Khoảng cách giữa hai mắt truyền lực gọi là *đốt*.

Hệ có hệ thống truyền lực thường được dùng trong kết cấu sàn nhà, mái nhà và kết cấu mặt cầu... nhằm mục đích: giảm nhẹ trọng lượng kết cấu chịu lực chính, bảo vệ kết cấu chịu lực chính khỏi bị hư hỏng trong quá trình chịu tải, cố định vị trí đặt lực trên kết cấu chịu lực chính.

Kết cấu chịu lực chính có thể là bất kỳ (dầm, dàn, vòm, khung...) tĩnh định hoặc siêu tĩnh.

## 2.2. Cách xác định nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động

Để xác định phản lực trong các liên kết hoặc nội lực tại một tiết diện nào đó ta sử dụng phương pháp mặt cắt nhằm biến nội lực thành ngoại lực, thiết lập các điều kiện cân bằng dưới dạng giải tích, từ đó suy ra các phản lực hoặc nội lực cần tìm.

**Thứ tự tiến hành:**

- 1) Thực hiện các mặt cắt qua các liên kết cần xác định phản lực (hoặc qua tiết diện cần tìm nội lực). Mỗi mặt cắt phải chia hệ thành hai phần độc lập.
- 2) Khảo sát một phần hệ nào đó. Thay thế tác dụng của phần hệ bị loại bỏ bằng các phản lực (nội lực) tương ứng tại các liên kết (tiết diện) bị cắt. Các phản lực (nội lực) chưa biết có thể giả thiết hướng theo chiều dương.
- 3) Lập các điều kiện cân bằng tĩnh học dưới dạng giải tích cho phần hệ khảo sát.

Với mỗi mặt cắt ta có các điều kiện cân bằng dưới dạng tổng hình chiếu trên một số trục hoặc tổng mômen đối với một số điểm, cụ thể như sau:

\* Nếu các lực đặt vào phần hệ đang xét là *hệ lực đồng quy tại điểm O* thì có thể dùng một trong ba dạng điều kiện sau:

- a)  $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$ , ( $X$  và  $Y$  là hai trục chiếu bất kỳ không song song với nhau). Trong thực tế thường dùng điều kiện này.
- b)  $\sum X = 0$ ;  $\sum M_A = 0$ , ( $OA$  không được vuông góc với trục chiếu  $X$ ).
- c)  $\sum M_A = 0$ ;  $\sum M_B = 0$ , ( $AOB$  không được thẳng hàng).

\* Nếu các lực đặt vào phần hệ đang xét là *hệ lực song song*, ta có hai dạng điều kiện:

a)  $\sum X = 0; \sum M_A = 0$ , (trục chiếu không được vuông góc với phương của các lực song song).

b)  $\sum M_A = 0; \sum M_B = 0$ , ( $AB$  không được song song với phương của các lực song song).

\* Nếu các lực đặt vào phần hệ đang xét là *hệ lực bất kỳ*, ta có thể dùng một trong các điều kiện:

a)  $\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M_A = 0$ , (các trục chiếu  $X$  và  $Y$  không được song song với nhau).

b)  $\sum X = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0$ , ( $A$  và  $B$  không được nằm trên đường thẳng vuông góc với trục  $X$ ).

c)  $\sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0$ , ( $A, B$  và  $C$  không được cùng nằm trên một đường thẳng).

Nhất thiết phải chú ý đến điều kiện hạn chế của các dạng điều kiện cân bằng, nếu không thì các phương trình cân bằng sẽ không độc lập với nhau và có thể xảy ra trường hợp phương trình cân bằng vẫn được thỏa mãn trong khi hệ không cân bằng.

*Trong hệ tĩnh định ta sẽ thiết lập được một hệ phương trình cân bằng độc lập vừa đủ để xác định số thành phần phản lực liên kết (nội lực) cần tìm trong hệ.*

Thật vậy, nếu quan niệm hệ bất kỳ gồm  $D$  miếng nối với nhau bằng  $T$  liên kết thanh,  $K$  liên kết khớp đơn giản,  $H$  mối hàn đơn giản, ta có  $T + 2K + 3H$  thành phần phản lực cần tìm. Số phương trình cân bằng độc lập được xác định bằng số bậc tự do của hệ tức là bằng  $3(D-1)$ . Vì hệ là tĩnh định nên:

$$n = T + 2K + 3H - 3(D-1) = 0, \text{ hay } 3(D-1) = T + 2K + 3H.$$

Như vậy là số phương trình cân bằng độc lập vừa bằng số thành phần phản lực liên kết cần tìm.

4) Giải hệ phương trình cân bằng ta xác định được các thành phần phản lực (nội lực) cần tìm. Kết quả mang dấu dương thì chiều của thành phần phản lực đúng với chiều giả thiết còn kết quả mang dấu âm thì ngược với chiều đã giả thiết.

**Ví dụ 2.1.** Xác định các thành phần phản lực tại liên kết khớp  $A, B$  và  $C$  (hình 2.11a).

Từ các điều kiện cân bằng của toàn hệ ta xác định các phản lực tựa, kết quả ghi trên hình 2.11a.

Thực hiện mặt cắt 1-1, xét cân bằng của miếng cứng I (hình 2.11b), ta có:

$$\sum X = X_C - X_A = 0; \quad (a)$$

$$\sum Y = Y_A + Y_C - P = 0; \quad (b)$$

$$\sum M_C = Y_A a + X_A h_1 = 0. \quad (c)$$

Thực hiện mặt cắt 2-2; xét cân bằng của miếng cứng II (hình 2.11b), ta có:

$$\sum X = X_B - X_C = 0; \quad (d)$$

$$\sum Y = Y_B - Y_C = 0; \quad (e)$$

$$\sum M_C = Y_B b + X_B h_2 = 0. \quad (f)$$

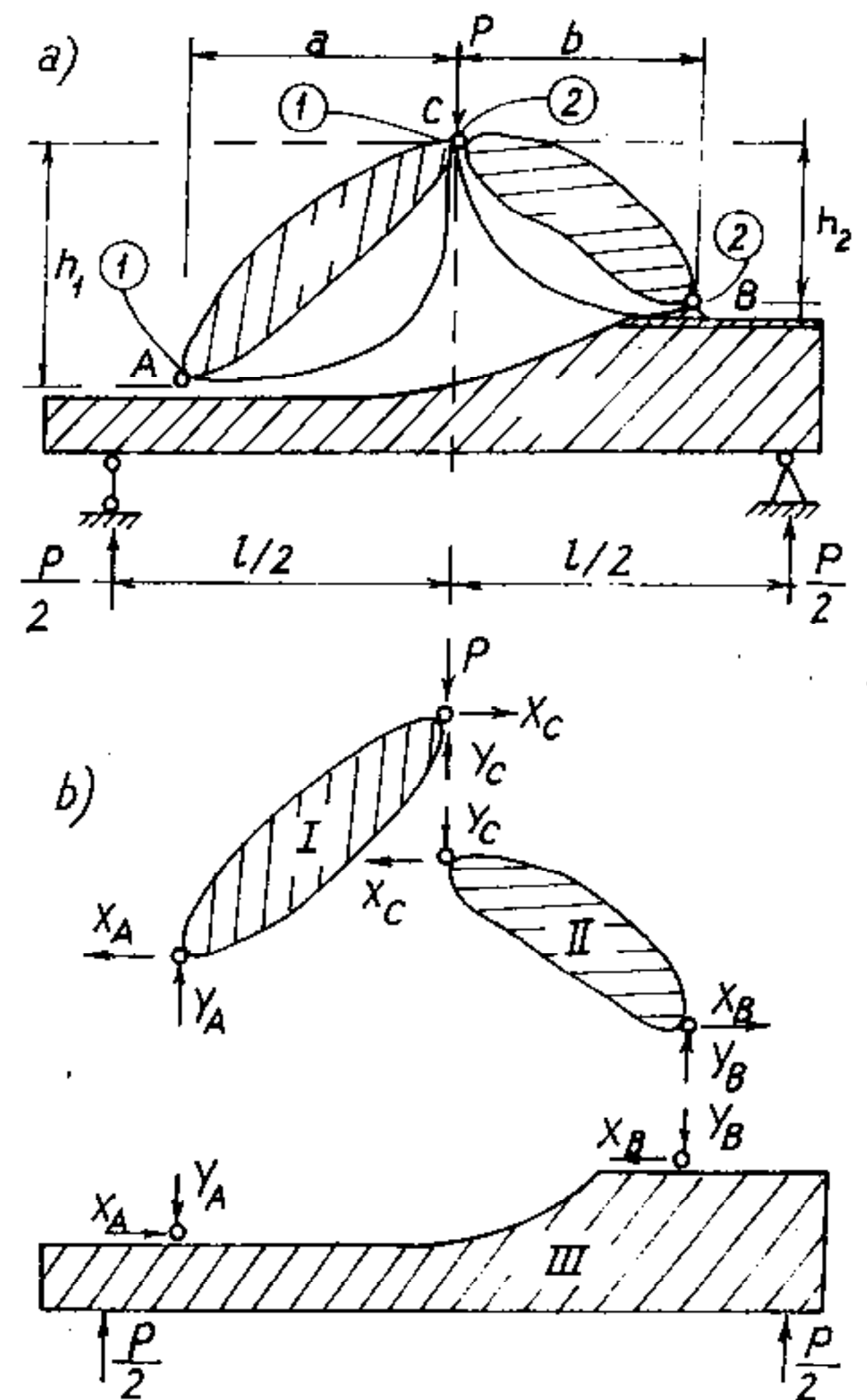
Ta được sáu phương trình đủ để xác định sáu thành phần phản lực cần tìm.

Kết quả:

$$X_A = X_B = X_C = \frac{-Pab}{bh_1 + ah_2};$$

$$Y_A = \frac{Pab}{bh_1 + ah_2};$$

$$Y_B = Y_C = +\frac{Pah_2}{bh_1 + ah_2}.$$



Hình 2.11

Về nguyên tắc, khi vận dụng phương pháp mặt cắt để tính hệ tĩnh định ta sẽ lập được một hệ phương trình vừa đủ để xác định các đại lượng chưa biết. Sau này, tùy từng trường hợp cụ thể ta có thể vận dụng linh hoạt các mặt cắt và các phương trình cân bằng để sao cho việc giải hệ phương trình được dễ dàng.

### 2.3. Cách tính dãn dầm tĩnh định chịu tải trọng bất động

Như đã phân tích ở 2.1, trong các thanh dầm chỉ tồn tại lực dọc  $N$ . Do đó, khi thực hiện mặt cắt qua mỗi thanh dầm ta chỉ cần thay thế tác dụng của phần thanh bị loại bỏ bằng một thành phần nội lực là lực dọc  $N$ .

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách xác định lực dọc trong các thanh dầm theo một số phương pháp thường được áp dụng trong thực hành.

#### A. Phương pháp tách mắt

Phương pháp tách mắt là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt, trong đó



hệ lực cần khảo sát cân bằng là hệ lực đồng quy. Phương pháp này thường được dùng để tính hệ dàn.

Nội dung của phương pháp tách mắt là *khảo sát sự cân bằng của từng mắt được tách ra khỏi dàn*.

**Thứ tự áp dụng:**

- ◆ *Lần lượt tách từng mắt ra khỏi dàn bằng những mặt cắt bao quanh mắt.*
- ◆ *Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Quy ước lực dọc dương là kéo tức là hướng từ mắt ra ngoài. Khi chưa biết lực dọc trong thanh thì giả thiết nó có chiều dương hướng ra ngoài mắt đang xét. Sau khi thay thế ta được một hệ lực đồng quy tại mỗi mắt.*
- ◆ *Khảo sát sự cân bằng của từng mắt. Vì hệ lực là phẳng và đồng quy nên tại mỗi mắt có hai phương trình cân bằng, thường dùng hai phương trình hình chiếu theo hai phương bất kỳ X và Y không song song:*

$$\sum X = 0 \quad \text{và} \quad \sum Y = 0.$$

*Từ các phương trình cân bằng đó ta suy ra được nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều đã giả định là đúng, lực dọc là kéo. Nếu kết quả mang dấu âm thì chiều của nội lực cần tìm ngược chiều đã giả định, lực dọc là nén.*

Về nguyên tắc, có thể tách các mắt theo thứ tự bất kỳ và tại mỗi mắt có thể viết phương trình hình chiếu lên hai phương X, Y bất kỳ, cuối cùng vẫn tìm được đầy đủ các nội lực trong dàn. Tuy nhiên, nếu thứ tự tách mắt và cách chọn trục không khéo thì trong một phương trình cân bằng có thể tồn tại nhiều lực chưa biết, do đó phải giải một hệ phương trình. Biện pháp tốt nhất là chọn sao cho trong mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa một ẩn số. Muốn vậy, khi áp dụng phương pháp tách mắt ta nên thực hiện theo những chỉ dẫn sau:

- \* *Nên lần lượt tách các mắt theo thứ tự để sao cho tại mỗi mắt chỉ có hai nội lực chưa biết.*

Tại mỗi mắt ta chỉ có hai phương trình cân bằng cho nên nếu ở đó chỉ có một hoặc hai nội lực chưa biết thì có thể tìm được ngay. Trong trường hợp hệ cho trên hình 2.12, có thể tách theo thứ tự 1, 2, 3, 4...

- \* *Tại mỗi mắt, muốn tìm nội lực trong thanh chưa biết thứ nhất thì nên dùng phương trình hình chiếu lên phương vuông góc với thanh chưa biết thứ hai.*

Làm như vậy thì trong mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số và các kết quả

tìm được sẽ độc lập với nhau, đỡ mắc sai lầm dốt đây.

**Ví dụ 2.2.** Xác định nội lực trong các thanh 1-2, 1-3 và 2-3 trong hệ vẽ trên hình 2.12a.

Tách mắt 1 (hình 2.12b), để tìm  $N_{1-3}$  ta sử dụng phương trình hình chiếu lên phương X vuông góc với thanh 1-2

$$\sum X = N_{1-3} \sin \alpha - A \cos \alpha = 0;$$

suy ra  $N_{1-3} = 2P \cot \alpha$  (lực kéo).

Để tìm  $N_{1-2}$  ta dùng phương trình hình chiếu lên phương Y vuông góc với thanh 1-3

$$\sum Y = N_{1-2} \sin \alpha + A = 0;$$

suy ra  $N_{1-2} = -2P / \sin \alpha$  (lực nén).

Sau khi biết  $N_{1-2}$  ta có thể tách mắt 2 để tìm  $N_{2-4}$  và  $N_{2-3}$  (hình 2.12c). Chẳng hạn cần tìm  $N_{2-3}$  ta chiếu các lực lên phương vuông góc với thanh 2-4

$$\sum Y = N_{2-3} \cos \beta + N_{1-2} \cos \beta + P = 0;$$

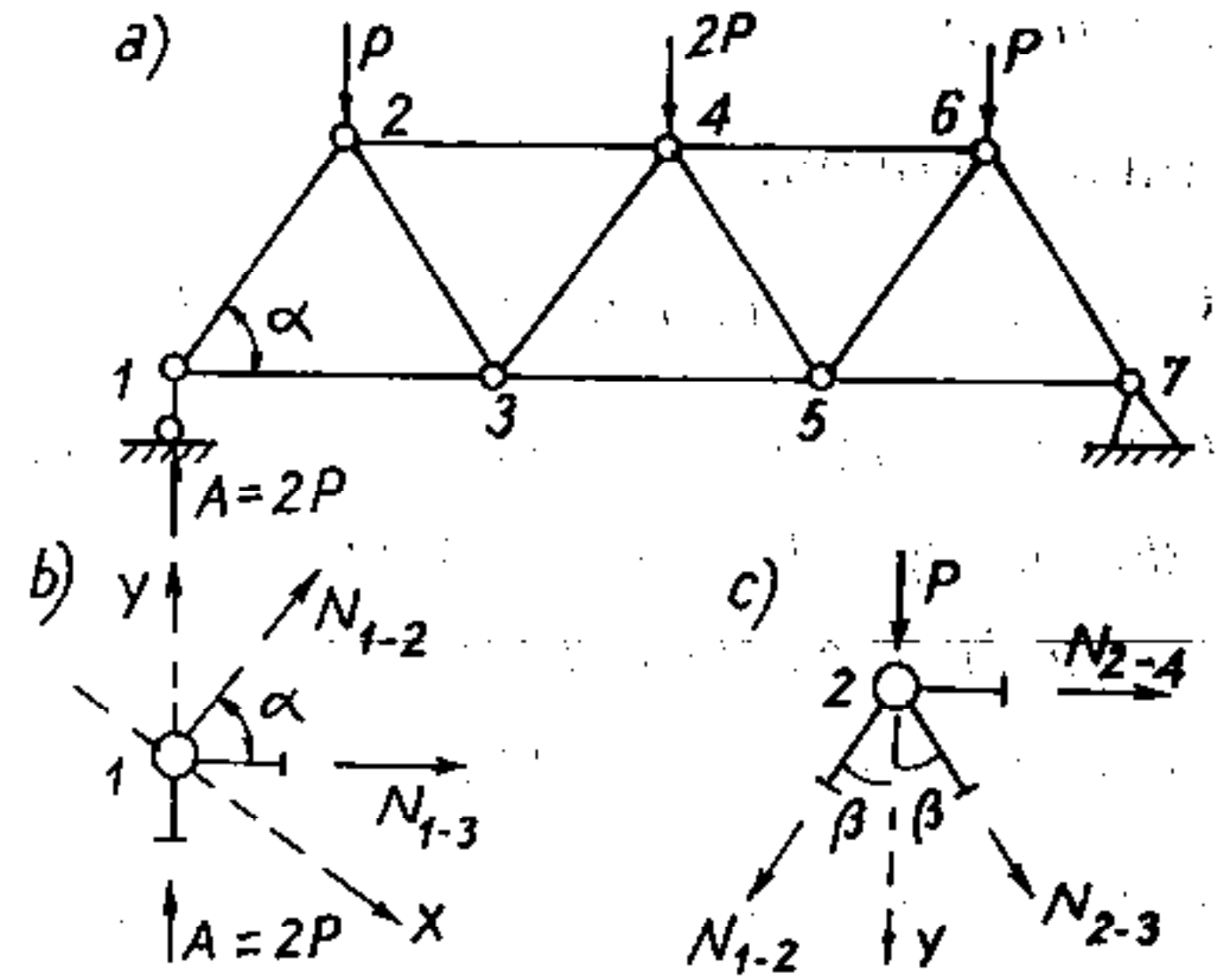
Nhưng  $N_{1-2} = -2P / \sin \alpha$  và  $\cos \beta = \sin \alpha$ , nên  $N_{2-3} = P / \sin \alpha$  (lực nén).

Từ phương pháp tách mắt ta suy ra được các nhận xét quan trọng sau:

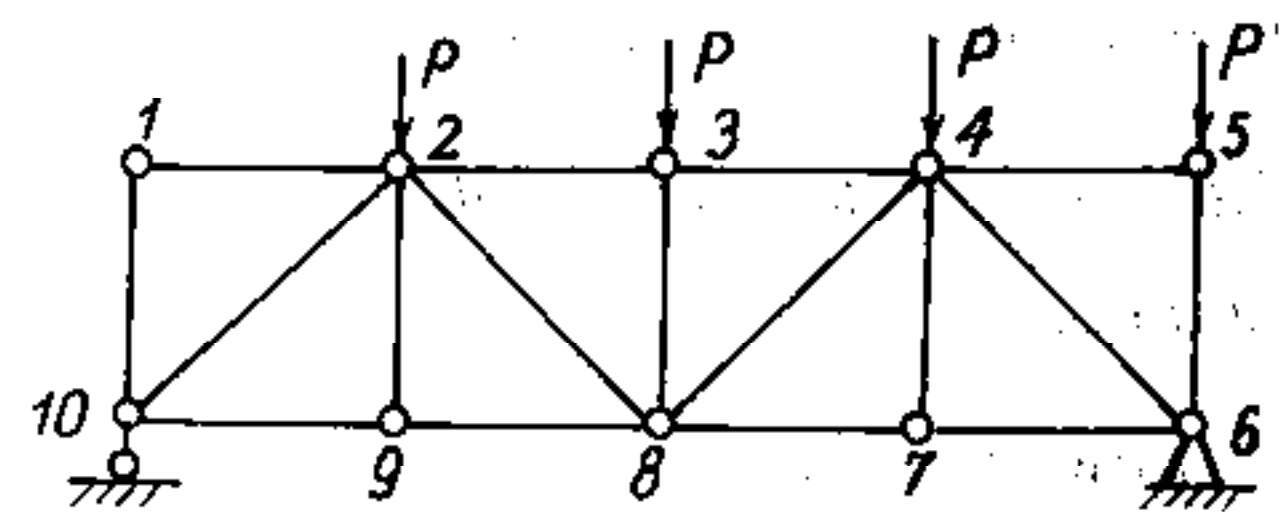
1) Tại một mắt chỉ có hai thanh không thẳng hàng và không có tải trọng tác dụng thì hai thanh đó không làm việc tức là lực dọc trong hai thanh đó bằng không.

Ví dụ như trường hợp đàn trên hình 2.13, lực dọc trong các thanh 1-2 và 1-10 bằng không vì mắt 1 thỏa mãn các yêu cầu đề ra.

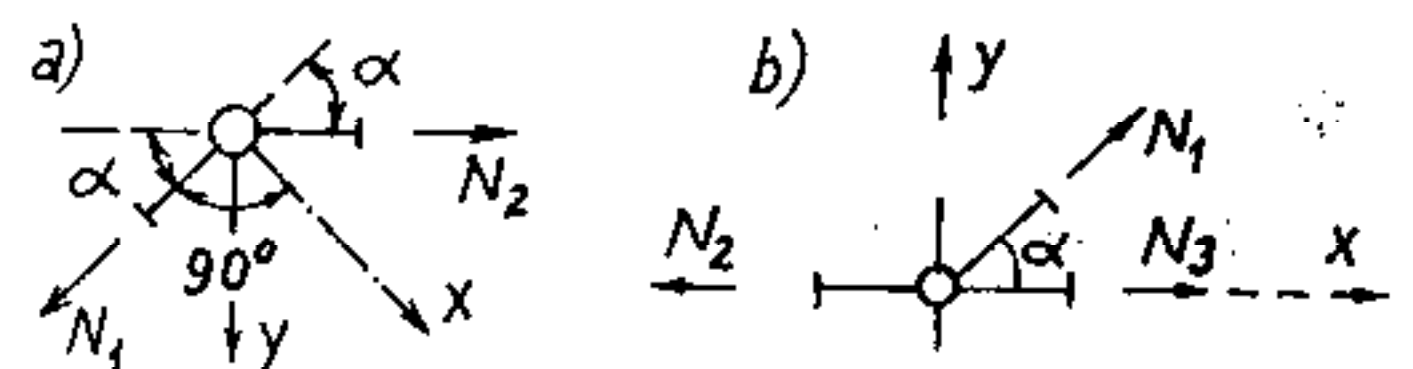
Để chứng minh tính chất đó ta khảo sát sự cân bằng của một mắt có hai thanh không thẳng hàng và không có lực đặt ở mắt (hình 2.14a).



Hình 2.12



Hình 2.13



Hình 2.14

$$\sum X = N_2 \sin \alpha = 0; \text{ vì } \alpha \neq 0 \text{ nên } N_2 = 0.$$

$$\sum Y = N_1 \sin \alpha = 0; \text{ vì } \alpha \neq 0 \text{ nên } N_1 = 0.$$

2) Tại một mắt có ba thanh trong đó có hai thanh thẳng hàng và nếu tại mắt đó không có tải trọng tác dụng thì thanh không thẳng hàng không làm việc (lực dọc bằng không) còn lực dọc trong hai thanh thẳng hàng bằng nhau.

Trong trường hợp hệ trên hình 2.13 ta có: Tại mắt 9:  $N_{9-2} = 0$  còn  $N_{9-10} = N_{9-8}$ . Tại mắt 7:  $N_{7-4} = 0$  còn  $N_{7-8} = N_{7-6}$ . Tại mắt 5 ta thấy chỉ có hai thanh và một lực  $P$ , thẳng hàng với thanh 5-6; có thể xem lực  $P$  như một thanh đã biết nội lực, do đó:  $N_{5-4} = 0$  còn  $N_{5-6} = -P$ .

Để chứng minh tính chất trên ta khảo sát sự cân bằng của mắt vẽ trên hình 2.14b, ta có:

$$\sum Y = N_1 \sin \alpha = 0; \text{ vì } \alpha \neq 0 \text{ nên } N_1 = 0.$$

$$\sum X = N_3 - N_2 = 0; \text{ nên } N_3 = N_2.$$

Đó là điều cần chứng minh.

Trước khi tính dàn ta nên chú ý sử dụng các tính chất trên để phát hiện các thanh không làm việc và loại chúng ra khỏi hệ, như vậy hệ còn lại sẽ đơn giản và dễ dàng tính toán hơn.

Phương pháp tách mắt có ưu điểm là đơn giản, dễ áp dụng nhưng cũng có nhược điểm là nếu để xảy ra sai lầm trong một bước tính toán nào đó thì các kết quả tiếp sau cũng bị sai kéo theo.

### **B. Phương pháp mặt cắt đơn giản**

Phương pháp mặt cắt đơn giản là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt, được áp dụng khá tiện lợi để tính dàn tĩnh định khi có thể thực hiện tách đôi dàn thành hai phần độc lập bằng một mặt cắt qua các thanh với số nội lực chưa biết nói chung không lớn hơn ba. Phương pháp này do A. Ritter (1826-1908) kiến nghị đầu tiên và được hoàn thiện bởi giáo sư F. S. Iaxinxki (1856-1899).

#### **Thứ tự áp dụng:**

- ◆ Thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm nội lực và qua hai thanh khác chưa biết nội lực, mặt cắt cần phải chia dàn ra thành hai phần độc lập.
- ◆ Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng các lực dọc tương ứng. Cũng như phương pháp tách mắt, khi chưa biết lực dọc ta giả thiết là dương nghĩa là hướng ra ngoài mắt đang xét.

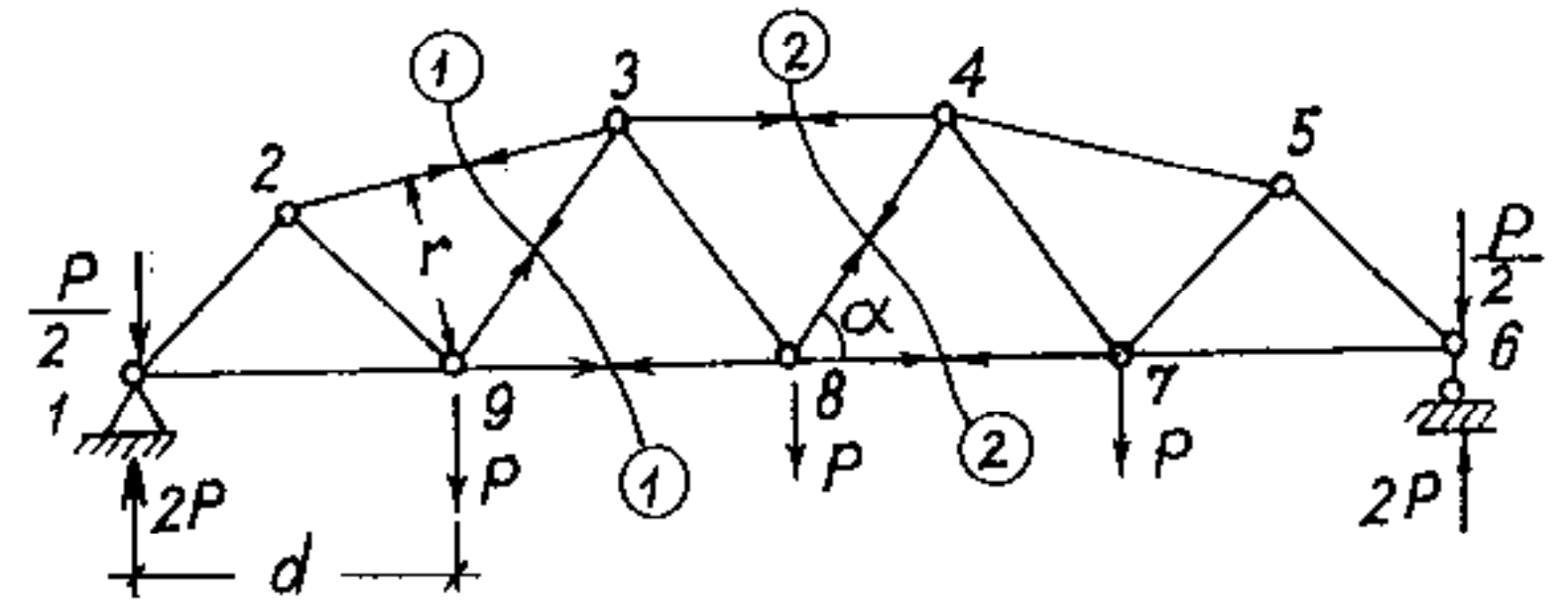
- ♦ *Viết điều kiện cân bằng của một phần dàn bị cắt (phần phải hoặc phần trái). Trong trường hợp này ta có hệ lực phẳng bất kỳ, nên có ba phương trình cân bằng. Từ các phương trình cân bằng đó suy ra các nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều nội lực hướng theo chiều giả định, tức là kéo. Ngược lại nếu kết quả mang dấu âm thì chiều nội lực hướng ngược chiều giả định, tức là nén.*

Để tìm được các phương trình cân bằng trong đó mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số ta nên thực hiện theo chỉ dẫn sau:

- \* *Trường hợp ba thanh chưa biết nội lực cắt nhau từng đôi một, để tìm nội lực trong thanh thứ nhất, nên dùng phương trình cân bằng dưới dạng tổng mômen của các lực đối với giao điểm của hai thanh còn lại.*
- \* *Trường hợp trong số ba thanh bị cắt chưa biết nội lực có hai thanh song song, để tìm nội lực trong thanh không song song ta dùng phương trình cân bằng dưới dạng tổng hình chiếu của các lực lên phương vuông góc với hai thanh song song.*

**Ví dụ 2.3.** Xác định lực dọc trong các thanh 2-3 và 4-8 của dàn trên hình 2.15.

*Tìm  $N_{2-3}$ : thực hiện mặt cắt 1-1 qua thanh 2-3 và hai thanh chưa biết nội lực 3-9 và 9-8. Thay thế các thanh bị cắt bằng lực dọc tương ứng như trên hình 2.15.*



Hình 2.15

Khảo sát cân bằng phần bên trái mặt cắt. Để tìm được ngay  $N_{2-3}$  ta viết phương trình cân bằng dưới dạng tổng mômen của các lực thuộc phần bên trái mặt cắt đối với giao điểm của hai thanh 3-9 và 9-8 tức là đối với điểm 9. Khi đó, các lực chưa biết  $N_{3-9}$ ,  $N_{9-8}$  không tham gia phương trình cân bằng, ta có:

$$\sum M_9^{lr} = -N_{2-3}r - \left(2P - \frac{P}{2}\right)d = 0, \text{ suy ra } N_{2-3} = -\frac{3Pd}{2r} \text{ (lực nén).}$$

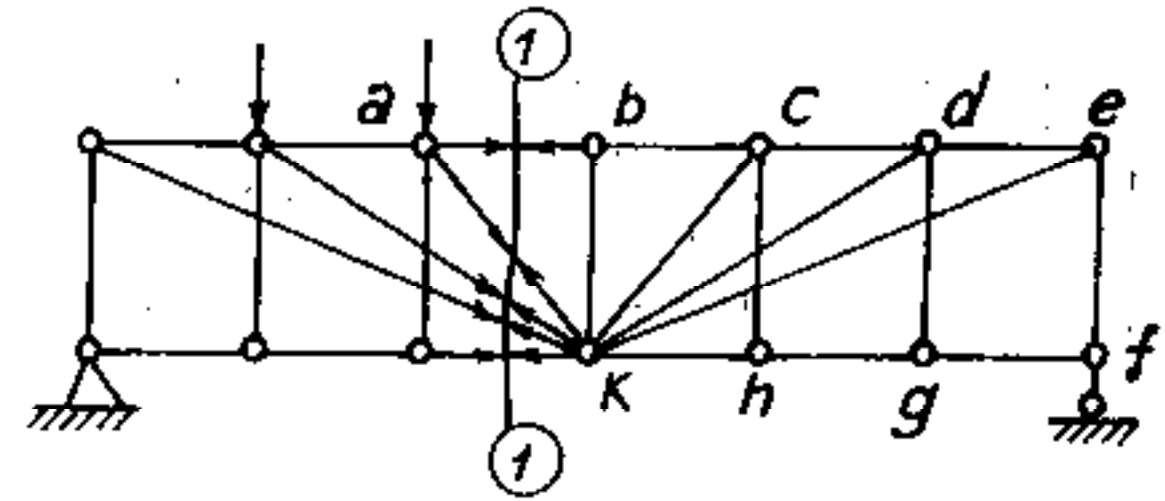
*Tìm  $N_{4-8}$ : thực hiện mặt cắt 2-2 như trên hình 2.15. Mặt cắt này qua ba thanh chưa biết nội lực, trong đó hai thanh 3-4 và 8-7 song song. Do đó, để tìm  $N_{4-8}$  ta dùng phương trình cân bằng dưới dạng hình chiếu các lực thuộc phần phải (hoặc phần trái) lên phương vuông góc với hai thanh song song 3-4 và 8-7, ta có:*

$$\sum Y^{ph} = -N_{4-8} \sin \alpha - P + \left(2P - \frac{P}{2}\right) = 0, \text{ suy ra } N_{4-8} = \frac{P}{2 \sin \alpha} \text{ (lực kéo).}$$

**Chú thích:**

Nếu mặt cắt đi qua bốn thanh (hoặc hơn nữa) chưa biết nội lực thì nói chung ta không thể xác định ngay được các lực dọc theo một mặt cắt. Trong trường hợp đặc biệt khi các thanh bị cắt đồng quy tại một điểm  $K$  nào đó trừ một thanh thì ta có thể tìm ngay được nội lực trong thanh không đồng quy từ một mặt cắt.

Ví dụ, với hệ trên hình 2.16, mặt cắt 1-1 đi qua năm thanh chưa biết nội lực trong đó có bốn thanh đồng quy ở điểm  $K$ , để tìm  $N_{a-b}$  trong thanh không đồng quy ta có thể dùng phương trình cân bằng  $\sum M_K = 0$ .



Hình 2.16

**C. Phương pháp mặt cắt phối hợp**

Phương pháp này được áp dụng để tính dàn khi không dùng được phương pháp mặt cắt đơn giản, nghĩa là khi tại một mặt cắt, số lực chưa biết lớn hơn ba. Mục đích chính của phương pháp này là tìm cách thiết lập một số phương trình cân bằng chỉ chứa một số lực chưa biết bằng số phương trình đó. Lúc này ta phải giải hệ phương trình. Tất nhiên số phương trình càng ít càng tốt.

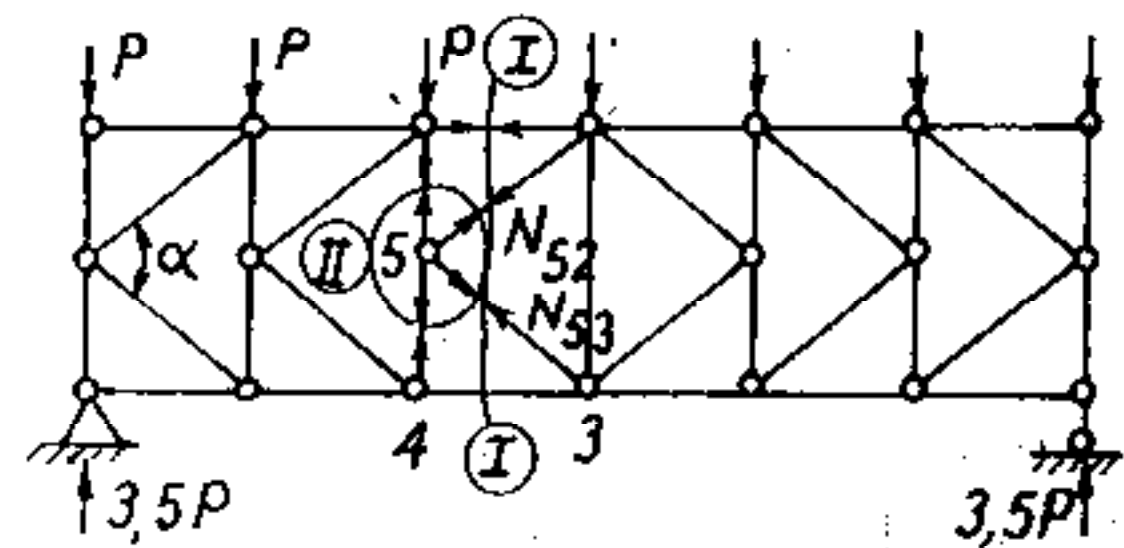
Như đã biết, khi thiết lập một phương trình cân bằng trong mỗi mặt cắt nói chung ta chỉ có thể loại trừ được hai lực chưa biết. Bởi vậy:

❖ Khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua bốn thanh chưa biết nội lực mới đủ điều kiện là cắt qua thanh cần tìm nội lực và chia dàn thành hai phần độc lập thì ta phải dùng hai mặt cắt phối hợp. Với hai mặt cắt thì ta có thể tìm ngay được hai nội lực theo hai phương trình. Muốn vậy:

- Hai mặt cắt cùng phải đi qua hai thanh cần tìm nội lực và mỗi mặt cắt chỉ có thể đi qua hai thanh khác chưa cần tìm nội lực. Hai thanh chưa cần tìm nội lực thuộc mặt cắt thứ nhất phải khác biệt với hai thanh chưa cần tìm nội lực thuộc mặt cắt thứ hai, nếu không thì hai mặt cắt sẽ trùng hợp.
- Trong mỗi mặt cắt, thiết lập một phương trình cân bằng sao cho các lực chưa cần tìm không tham gia. Như vậy, ta sẽ lập được hai phương trình chỉ chứa hai ẩn số cần tìm.

**Ví dụ 2.4.** Xác định lực dọc trong thanh 2-5 và 5-3 của dàn trên hình 2.17.

Thực hiện mặt cắt 1-1: mặt cắt này đi qua hai thanh cần tìm nội lực 2-5 và 5-3 đồng thời qua hai thanh chưa cần tìm nội lực là 1-2 và 4-3.



Hình 2.17



Để thiết lập phương trình cân bằng chỉ chứa  $N_{2-5}$  và  $N_{3-5}$  ta dùng phương trình hình chiếu của các lực bên trái mặt cắt lên phương thẳng đứng

$$\sum Y^{\text{tr}} = N_{2-5} \sin(\alpha/2) - N_{3-5} \sin(\alpha/2) - 3,5P - P - P = 0,$$

hay 
$$N_{2-5} \sin(\alpha/2) - N_{3-5} \sin(\alpha/2) - 0,5P = 0. \quad (\text{a})$$

Thực hiện mặt cắt II–II (tách mắt). Mặt cắt này đi qua hai thanh cần tìm nội lực 2–5; 3–5 và hai thanh khác chưa cần tìm nội lực là 1–5; 5–4. Để thiết lập phương trình chỉ chứa  $N_{2-5}$  và  $N_{3-5}$  ta dùng phương trình hình chiếu của các lực tác dụng bên trong mặt cắt lên phương ngang

$$\sum X = N_{2-5} \cos(\alpha/2) + N_{3-5} \cos(\alpha/2) = 0. \quad (\text{b})$$

Giải hệ phương trình (a) và (b) ta được: 
$$N_{3-5} = -N_{2-5} = \frac{0,25P}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

❖ Khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua năm thanh chưa biết nội lực mới đủ điều kiện cắt qua thanh cần tìm nội lực và chia hệ thành hai phần độc lập thì phải dùng ba mặt cắt phối hợp. Với ba mặt cắt phối hợp ta có thể tìm ngay được ba nội lực theo ba phương trình. Muốn vậy:

- Các mặt cắt phải đi qua ba thanh cần tìm nội lực và mỗi mặt cắt còn có thể đi qua hai thanh khác nữa chưa cần tìm nội lực.
- Trong mỗi mặt cắt ta thiết lập một phương trình chỉ chứa các ẩn số cần tìm. Giải hệ ba phương trình đó ta sẽ thu được ba nội lực cần tìm.

Cũng lý luận tương tự như vậy đối với các trường hợp cần dùng bốn mặt cắt phối hợp, năm mặt cắt phối hợp...

Đối với những hệ thông thường ta chỉ cần dùng hai mặt cắt phối hợp là đủ.

#### D. Phương pháp họa đồ - Giản đồ Maxwell- Cremona

Phương pháp họa đồ là phương pháp vẽ để giải bài toán. Phương pháp này đơn giản, mức độ chính xác của kết quả phụ thuộc mức độ chính xác và quy mô của bản vẽ song nói chung có thể đáp ứng được yêu cầu thực tế.

Có thể vận dụng phương pháp họa đồ để giải nhiều bài toán khác nhau của cơ học và để xác định phản lực, nội lực cũng như vẽ biểu đồ nội lực trong các hệ tĩnh định. Trong mục này chỉ giới thiệu cách vận dụng phương pháp họa đồ để tính hệ dàn, đó là trường hợp thường được dùng trong thiết kế.

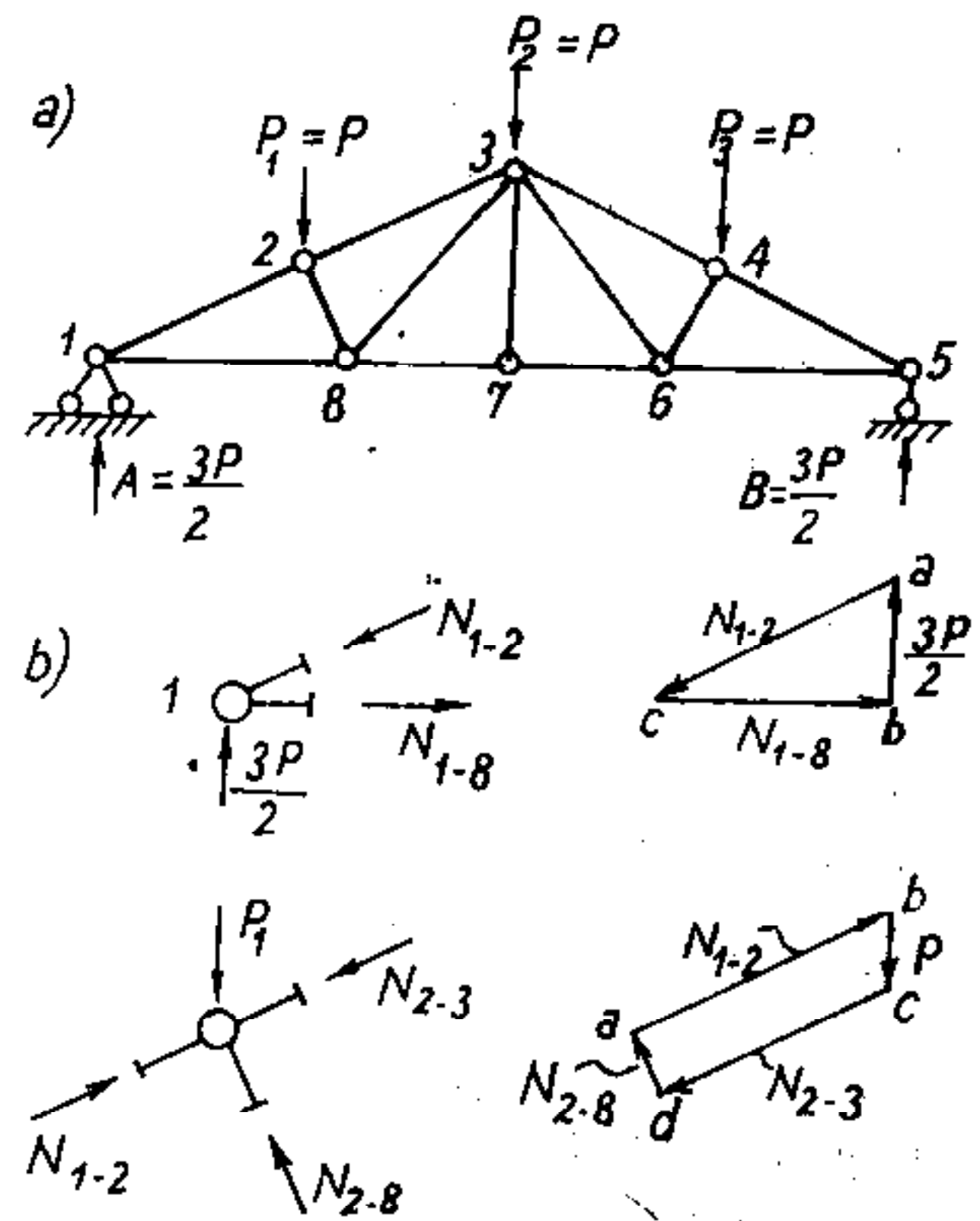
Cách giải bài toán được trình bày trên một hình vẽ gọi là *giản đồ nội lực* hay *giản đồ Maxwell – Cremona*, do nhà vật lý người Anh J. Clerk Maxwell (1831-1879) đề cập và nhà hình học Italia là Luigi Cremona (1830-1903) phát triển áp dụng vào kết cấu dàn.

Trước khi đi vào nghiên cứu giản đồ nội lực ta cần tìm hiểu cách xác định nội lực trong các thanh của dàn bằng họa đồ.

Giả sử các phản lực gối tựa đều biết (cách xác định phản lực bằng họa đồ đã được đề cập trong Cơ học cơ sở) yêu cầu xác định nội lực trong các thanh của dàn. Từ Cơ học cơ sở ta đã biết: *điều kiện cân và đủ để cho hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ lực này phải khép kín*. Lần lượt áp dụng điều kiện này cho từng mắt của dàn bị tách ra theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt của dàn chỉ có hai nội lực chưa biết trị số nhưng đã biết phương thì ta sẽ xác định được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.

Cách thực hiện cũng giống như trong phương pháp tách mắt, nhưng ở đây không dùng điều kiện cân bằng giải tích mà dùng điều kiện cân bằng họa đồ.

Đối với dàn trên hình 2.18a nếu tách mắt 1 ta thấy tại mắt này có ba lực: phản lực A đã biết, hai lực  $N_{1-2}$  và  $N_{1-8}$  chưa biết nhưng có phương xác định. Để vẽ đa giác lực của chúng, trên hình 2.18b ta sẽ vẽ vectơ  $\vec{ba}$  cùng phương và cùng chiều với phản lực A và có chiều dài biểu thị trị số của A theo một tỷ lệ xích nào đó. Từ ngọn và gốc của vectơ này, kẻ hai đường song song với hai phương của thanh 1-2 và 1-8, hai đường này cắt nhau tại c. Theo điều kiện cân bằng đã nêu ở trên đoạn ac và cb lần lượt biểu thị giá trị của lực  $N_{1-2}$  và  $N_{1-8}$ .



Hình 2.18

Chiều của vectơ  $\vec{ac}$  hướng vào mắt 1 nên  $N_{1-2}$  là lực nén, còn chiều mũi tên  $\vec{cb}$  hướng ra ngoài mắt nên  $N_{1-8}$  là lực kéo.

Tiếp đó chuyển sang mắt 2. Tại mắt này có bốn lực: hai lực đã biết là P và  $N_{1-2}$ , hai lực chưa biết nhưng có phương xác định là  $N_{2-3}$  và  $N_{2-8}$ . Hình 2.18c là đa giác lực của hệ lực này; sau khi vẽ hai vectơ  $\vec{ab}$  và  $\vec{bc}$  biểu thị phương chiều và trị số của hai lực đã biết là  $N_{1-2}$  và P, từ a và c kẻ hai đường song song với phương của thanh 2-8 và 2-3 cho tới khi cắt nhau tại d. Từ điều kiện cân bằng

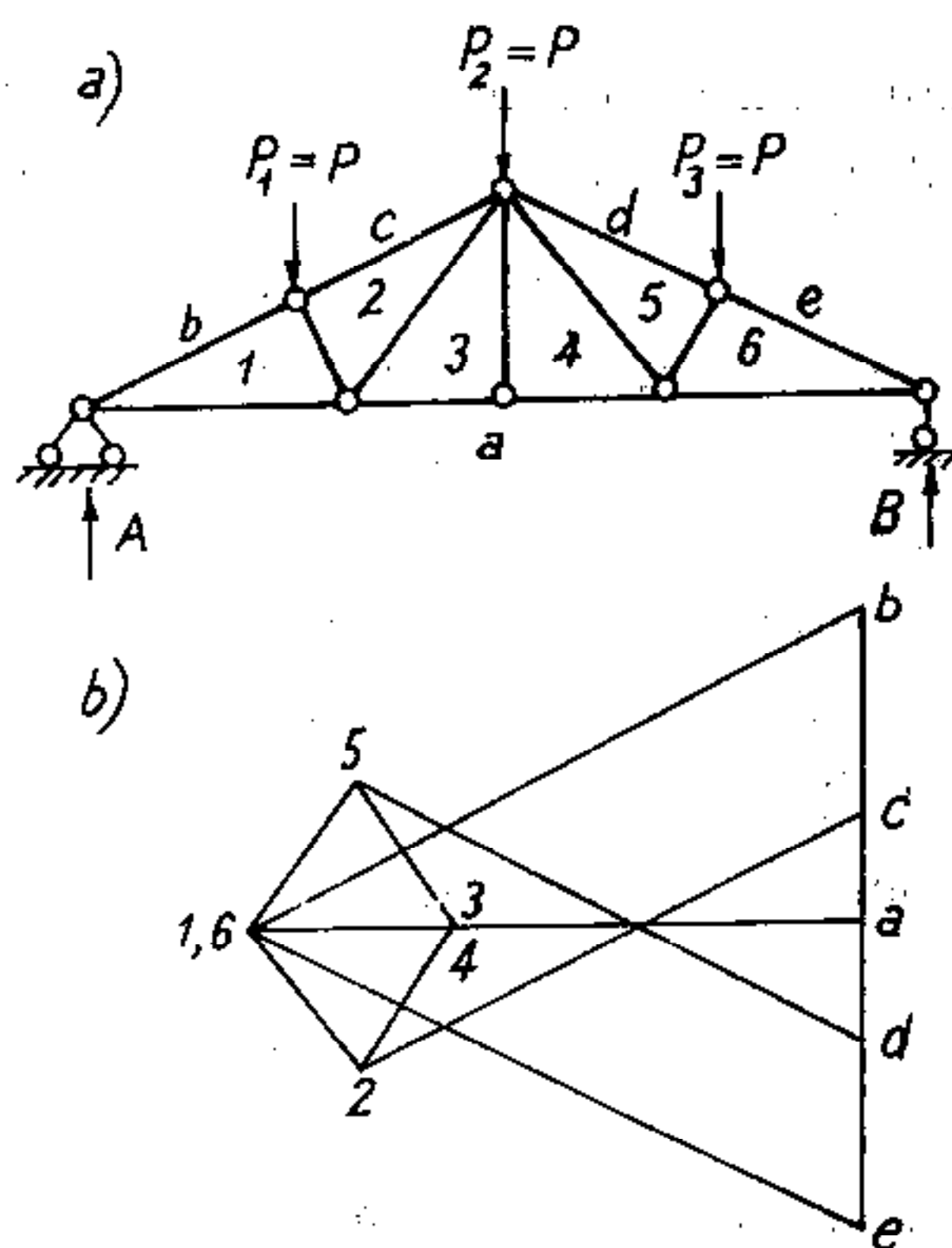
ta thấy hai lực cần tìm  $N_{2-3}$  và  $N_{2-8}$  được biểu thị bằng hai vectơ  $\vec{cd}$  và  $\vec{da}$ , những lực này hướng vào mắt 2 nên là lực nén.

Cũng tiến hành tương tự như vậy đối với các mắt khác theo thứ tự 8, 7, 3 ta sẽ xác định được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.

*Nếu gộp tất cả các đa giác lực vẽ cho từng mắt trên một hình vẽ chung với cùng một tỷ lệ xích thì ta sẽ được giản đồ nội lực.*

Để vẽ giản đồ nội lực ta cần thống nhất một số điều kiện và quy ước đồng thời tiến hành theo thứ tự như sau:

- 1) Xác định các phản lực tựa (có thể sử dụng phương pháp họa đồ hoặc giải tích).
- 2) Ký hiệu các miền ngoài chu vi dàn bằng các chữ cái  $a, b, c, \dots$  theo chiều kim đồng hồ. Mỗi miền được giới hạn trong phạm vi hai ngoại lực. Lúc này ta quy ước đọc tên các ngoại lực và phản lực bằng hai chỉ số biểu thị hai miền ở hai bên do lực đó phân giới. Chú ý phải *đọc hai chỉ số theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn*. Ví dụ lực  $P_1$  đọc là  $b-c$ ; phản lực  $B$  đọc là  $e-a$ ... (hình 2.19a).



Hình 2.19

- 3) Vẽ đa giác lực cho các ngoại lực và phản lực theo một tỷ lệ xích nào đó. Khi vẽ đa giác lực ta không vẽ chiều mũi tên của lực mà ghi hai chỉ số tương ứng biểu thị lực. Chỉ số đầu biểu thị góc, chỉ số thứ hai biểu thị ngọn của vectơ lực tương ứng. Ví dụ, lực  $P_1$  (hình 2-19a) được biểu thị bằng đoạn  $bc$  trên đa giác lực (hình 2.19b), vì  $P_1$  hướng xuống nên điểm ngọn  $c$  nằm dưới điểm góc  $b$ . Đa giác lực của ngoại lực và phản lực đối với dàn trên hình 2.19a là đường khép kín  $abcdea$  (hình 2.19b).
- 4) Đánh số các miền ở trong dàn bằng các con số theo thứ tự 1, 2, 3... Lúc này nội lực trong mỗi thanh được đọc bằng hai con số biểu thị hai miền ở hai bên thanh. Khi cắt một thanh nào đó ta phải thay thế tác dụng của nó bằng hai lực ngược chiều có giá trị bằng nhau đặt tại hai mắt mà thanh đó nối.

Cách đọc hai lực này cũng có khác nhau, muốn đọc nội lực đặt tại mắt  $i$  nào đó ta đọc bằng hai chỉ số biểu thị hai miền ở hai bên thanh tương ứng theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ quanh mắt  $i$ . Ví dụ với lực dọc trong thanh biên trên đầu tiên ở bên trái, khi lực này đặt tại mắt  $A$  ta đọc là  $b-l$  còn khi đặt tại mắt có chịu lực  $P_1$  ta đọc là  $l-b$ .

5) Lần lượt vẽ đa giác lực cho từng mắt theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có hai thanh chưa biết nội lực. Khi vẽ cần chú ý sử dụng cách ký hiệu nói trên, không vẽ các mũi tên, lực đã biết vẽ trước rồi dựa vào điều kiện khép kín của đa giác lực để xác định lực chưa biết. Tất cả các đa giác lực vẽ cho mỗi mắt đều phải được thực hiện trên cùng một hình vẽ của đa giác lực đã vẽ ở bước ba, theo cùng một tỷ lệ xích.

Ví dụ: xét mắt  $A$ , trên hình 2.19b, đoạn  $ab$ , biểu thị phần lực  $A$  đã biết, từ  $b$  và  $a$  lần lượt vẽ các đường song song với các lực chưa biết  $b-l$  và  $l-a$ . Giao điểm của hai đường này xác định vị trí của điểm  $l$ . Đoạn  $b-l$  và  $l-a$  biểu thị giá trị của lực  $b-l$  và  $l-a$ . Chiều  $l-a$  hướng ra ngoài mắt đang xét nên lực  $l-a$  là kéo.

Tiếp tục xét mắt đặt dưới lực  $P_1$  ta vẽ được đường khép kín  $l-b-c-2-l$ . Đối với các mắt khác cũng tiến hành tương tự sẽ được giản đồ nội lực.

Ta thấy mỗi mắt của dàn tương ứng một đa giác lực khép kín, mỗi miền của dàn tương ứng với một điểm của giản đồ nội lực.

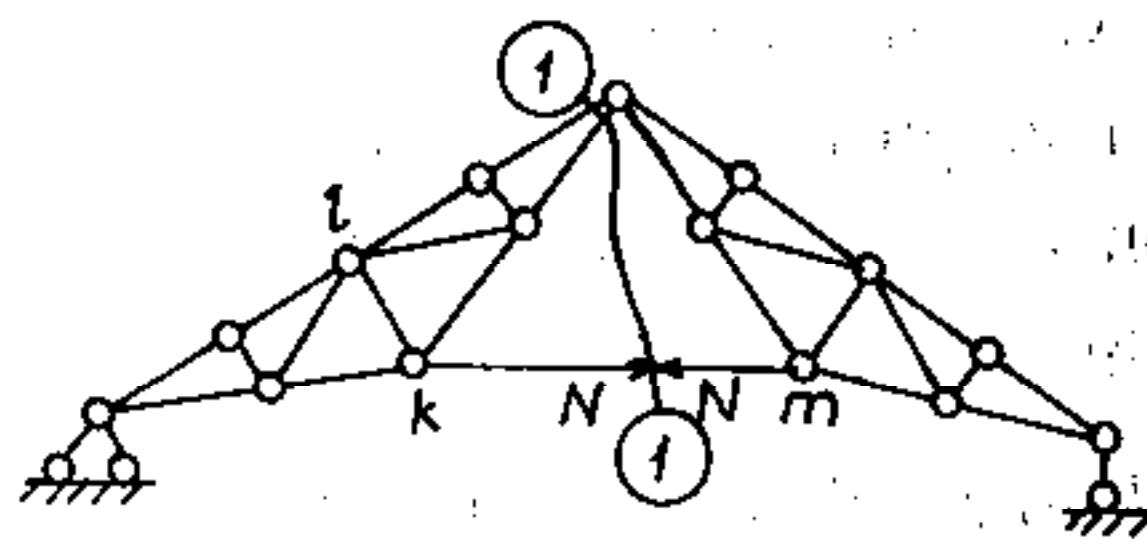
Muốn xác định giá trị của nội lực trong thanh  $i-k$  nào đó của dàn ta đo chiều dài của đoạn  $i-k$  tương ứng trên giản đồ nội lực theo tỷ lệ xích đã chọn khi vẽ giản đồ.

Muốn biết chiều hoặc dấu của nội lực ta thực hiện như đã trình bày ở điểm 4.

### Chú ý

1. Khi gặp những dàn trong đó không thể thực hiện tách mắt để sao cho tại đó chỉ có hai nội lực chưa biết, ta cần kết hợp với cách tính giải tích để giải quyết.

Ví dụ với dàn vẽ trên hình 2.20 khi tách đến mắt  $k$  và mắt  $l$  ta sẽ gặp phải khó khăn trên. Để giải quyết trước khi vẽ giản đồ ta cần dùng phương pháp mặt cắt (mặt cắt 1-1) để xác định lực dọc  $N$  trong thanh  $k-m$ ; sau đó vẽ giản đồ như thường lệ (vì lực  $N$  đã biết).

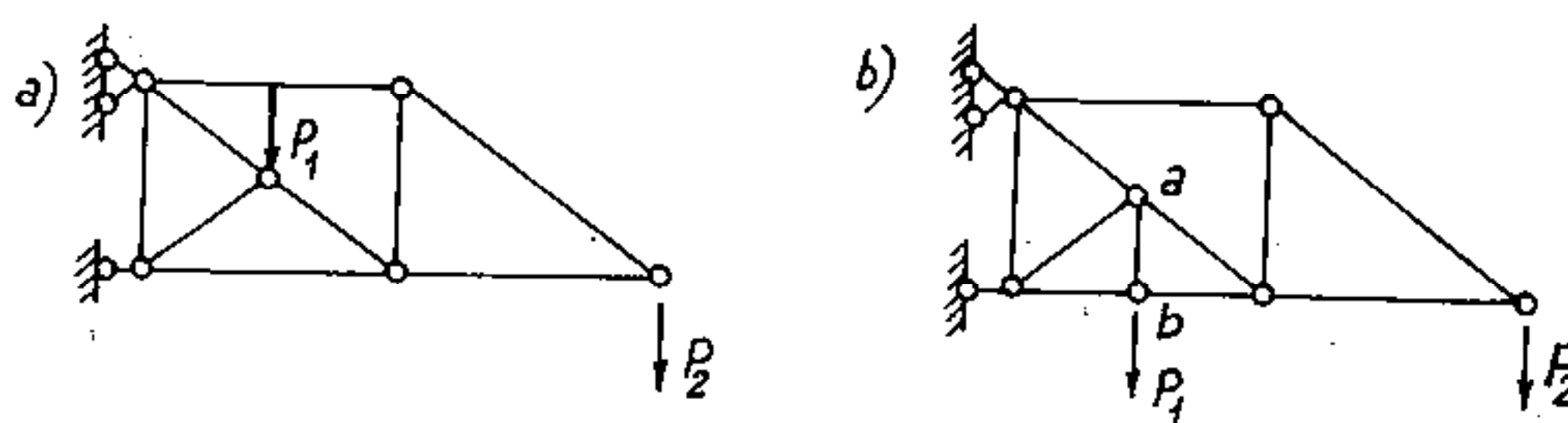


Hình 2.20

2. Nếu ngoại lực nằm trong chu vi dàn thì trước khi đặt tên các miền ngoài chu vi dàn ta đưa các ngoại lực ra ngoài chu vi bằng cách đặt thêm các thanh quy ước. Tất nhiên thanh quy ước phải

đặt sao cho tính chất làm việc của dàn không thay đổi.

Ví dụ khi gặp trường hợp dàn vẽ trên hình 2.21a ta có thể đưa lực  $P_1$  ra ngoài chu vi dàn bằng cách đặt thêm thanh quy ước  $a-b$  như trên hình 2-21b.



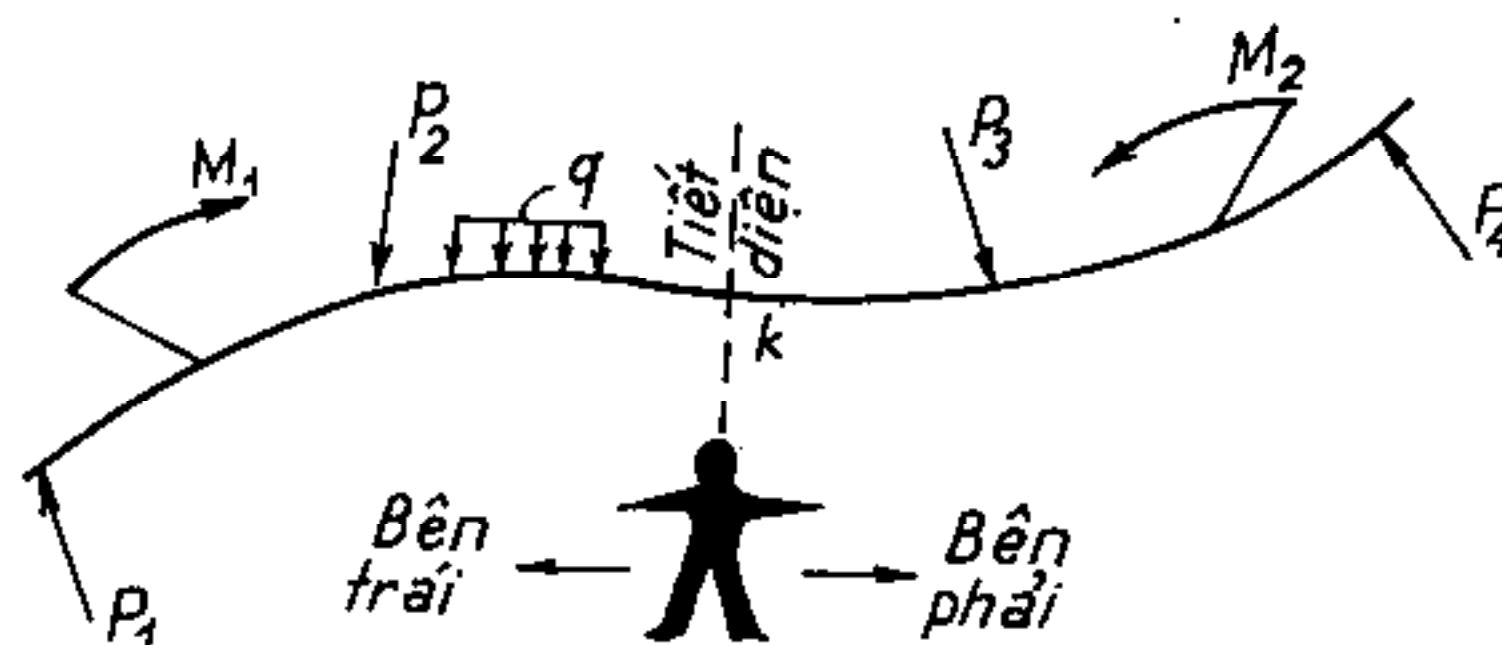
Hình 2.21

## 2.4. Biểu đồ nội lực và cách tính dầm, khung chịu tải trọng bất động

Vẽ đúng và nhanh các biểu đồ nội lực là một yêu cầu rất cơ bản khi tính toán hệ thanh tĩnh định cũng như siêu tĩnh. Bởi vậy trong mục này ta đề cập đến cách vẽ thực hành đáp ứng yêu cầu vẽ nhanh các biểu đồ nội lực trong những hệ gồm các thanh thẳng như dầm, khung.

Trong thực hành, khi vẽ biểu đồ nội lực trong những hệ thanh gồm các thanh thẳng, không cần thiết lập các phương trình nội lực (trừ trường hợp thật cần thiết) mà vẽ theo giá trị nội lực tại một số tiết diện đặc trưng cần thiết ở mức độ tối thiểu. Cách vẽ thực hành được xây dựng trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng và các liên hệ vi phân đã biết giữa ngoại lực và nội lực. Trước khi đi vào nghiên cứu cách vẽ biểu đồ ta cần nhớ lại các định nghĩa và quy ước về dấu của nội lực tại một tiết diện bất kỳ.

Giả sử cần xác định nội lực tại tiết diện  $k$  bất kỳ, ta thực hiện mặt cắt qua tiết diện  $k$ . Đặt người quan sát tại  $k$  đứng vuông góc với tiếp tuyến tại  $k$  của trục thanh. Như vậy, mặt cắt sẽ chia hệ thành hai phần: phần bên trái và phần bên phải người quan sát (hình 2.22).



Hình 2.22

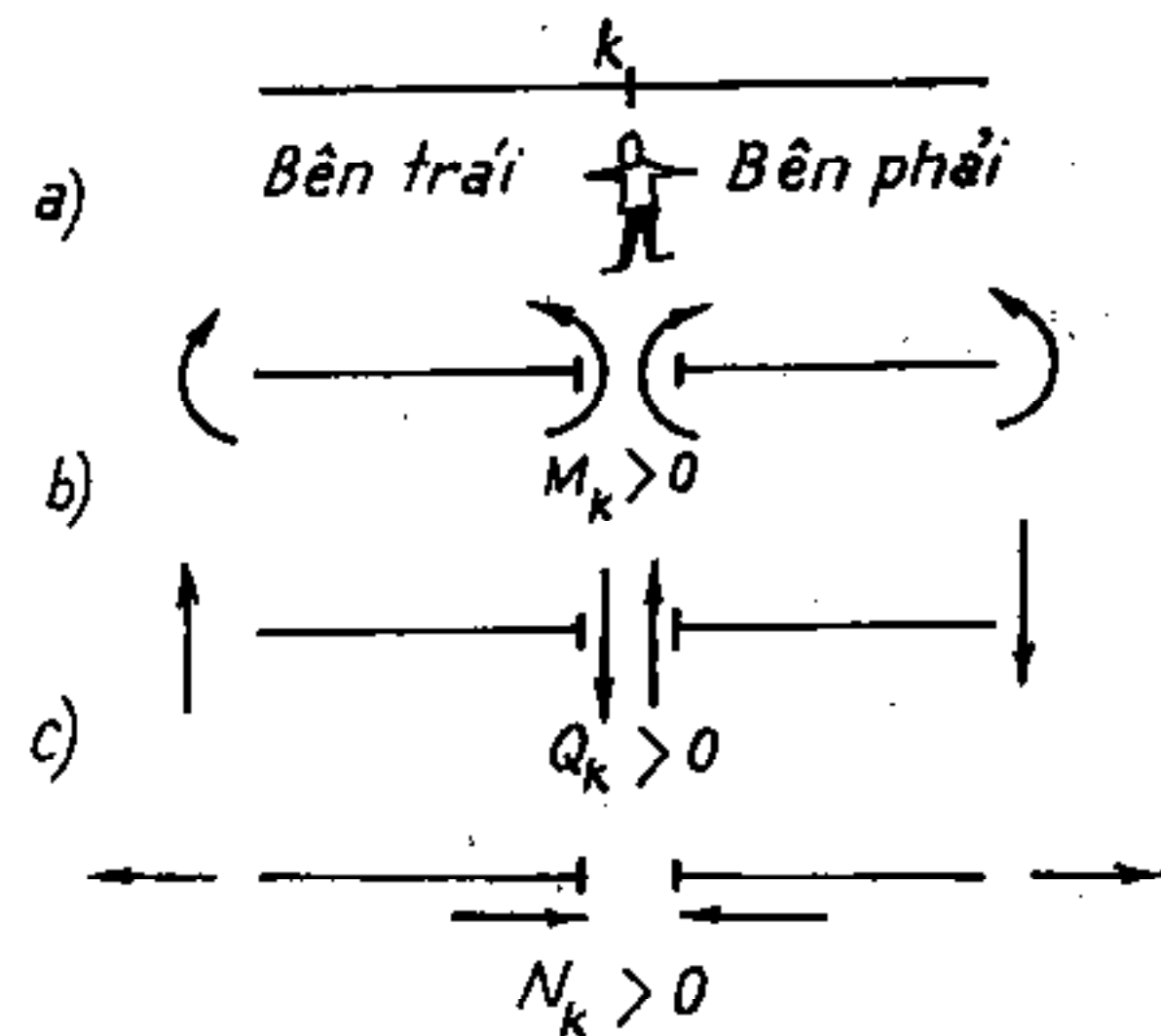
Tại  $k$  có các thành phần nội lực sau:

- \* Mômen uốn  $M$  tại tiết diện  $k$  có giá trị được xác định bằng tổng mômen của các lực tác dụng trên phần trái hay phần phải lấy đối với trọng tâm của tiết diện  $k$ .

Mômen uốn được xem là dương nếu chúng có khuynh hướng làm căng thớ bên dưới.

Do đó ta có thể căn cứ chiều của ngoại lực để suy ra dấu của nội lực (hình 2.23a) như sau:

- ❖ Nếu khảo sát phần bên trái, các ngoại lực quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tiết diện  $k$  sẽ gây ra mômen uốn dương
- ❖ Nếu khảo sát phần bên phải, các ngoại lực quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tiết diện  $k$  sẽ gây ra mômen uốn dương.



Hình 2.23

- \* Lực cắt  $Q$  tại tiết diện  $k$  có giá trị bằng tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần trái hay phần phải lên phương vuông góc với tiếp tuyến tại  $k$  của trục thanh.

Lực cắt được coi là dương nếu chúng có khuynh hướng làm cho phần hệ có đặt lực cắt đó quay thuận chiều kim đồng hồ.

Do đó ta có thể căn cứ vào chiều tác dụng của ngoại lực để suy ra dấu của nội lực (hình 2.23b):

- ❖ Nếu khảo sát phần bên trái, ngoại lực hướng lên phía trên người quan sát sẽ gây ra lực cắt dương.
- ❖ Nếu khảo sát phần bên phải, ngoại lực hướng xuống phía dưới người quan sát sẽ gây ra lực cắt dương.
- \* Lực dọc  $N$  tại tiết diện  $k$  có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần trái hay phần phải lên phương tiếp tuyến tại  $k$  của trục thanh.

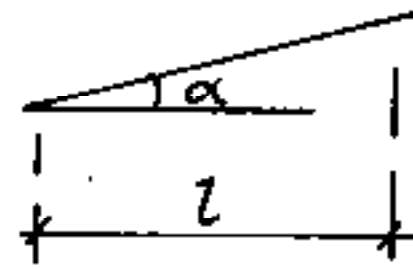
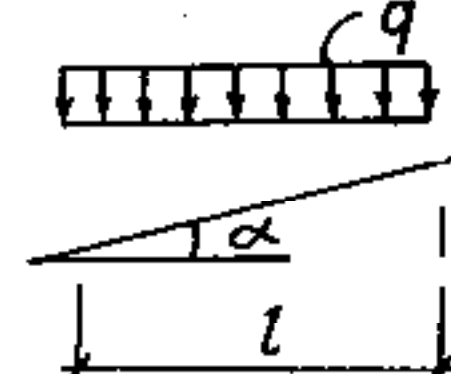
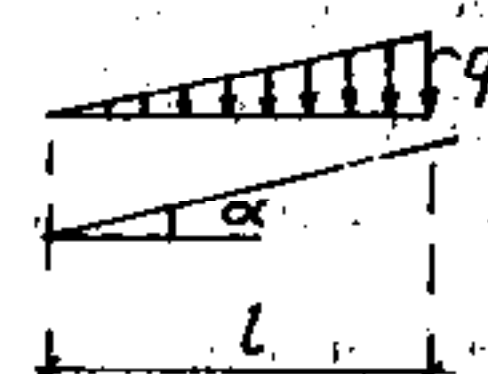

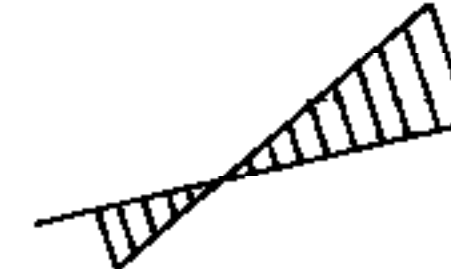
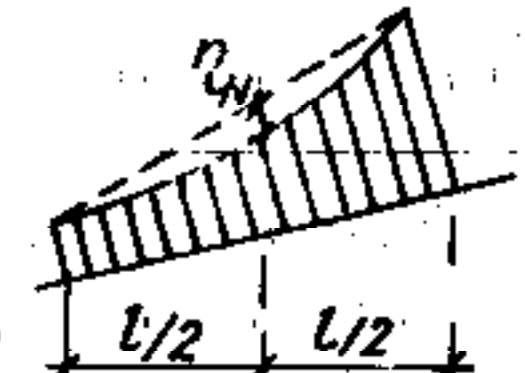

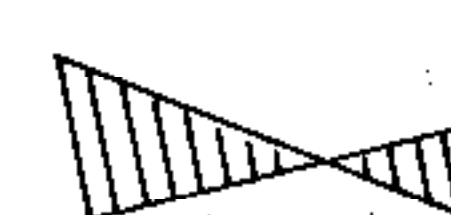
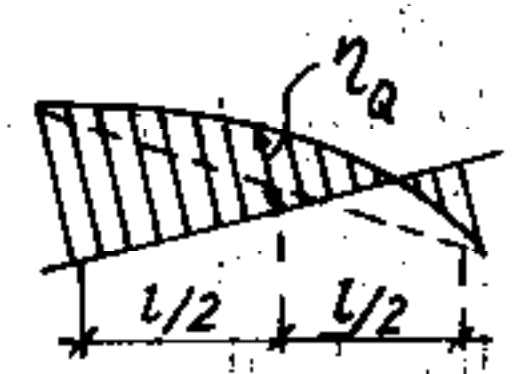

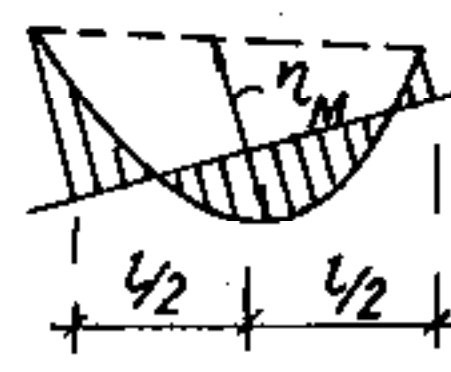
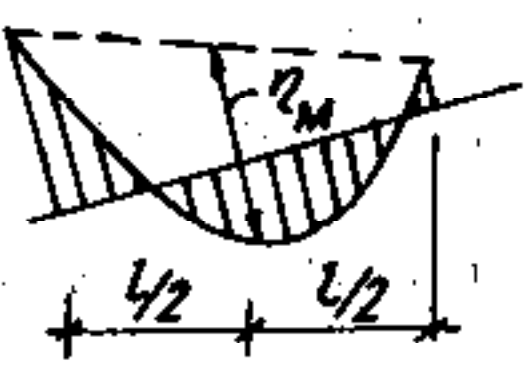
Lực dọc được xem là dương khi chúng có khuynh hướng gây tác dụng kéo.

Do đó, các ngoại lực gây tác dụng kéo đối với tiết diện  $k$  sẽ phát sinh lực dọc dương (hình 2-23c).

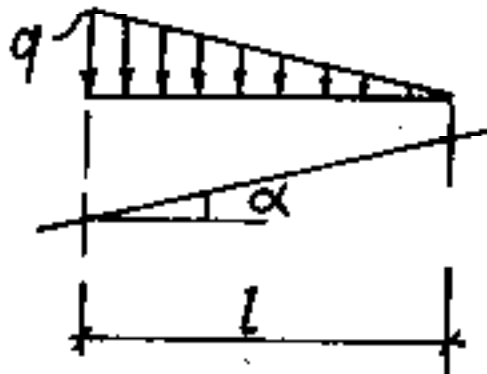
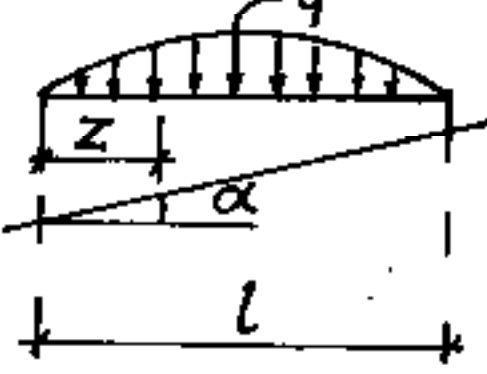
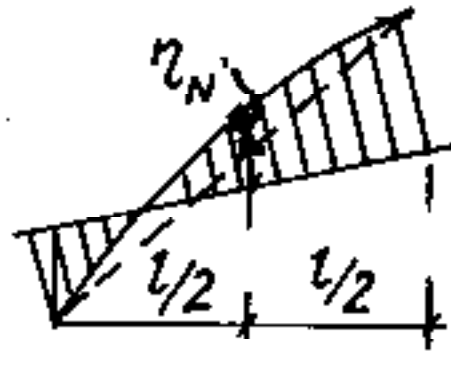
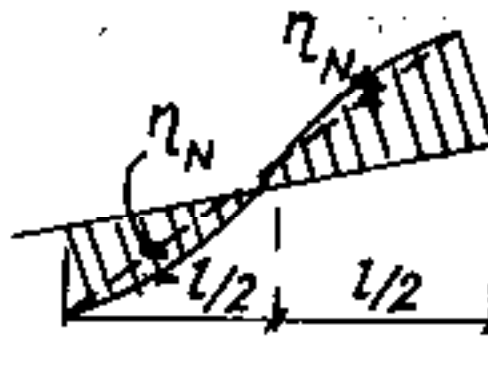
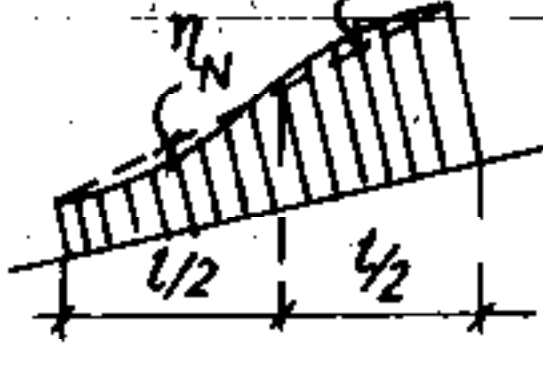
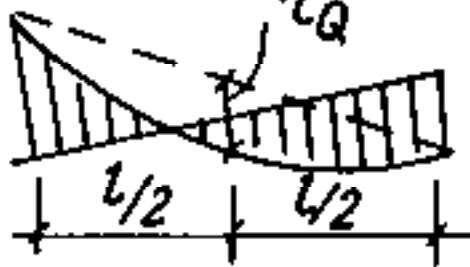

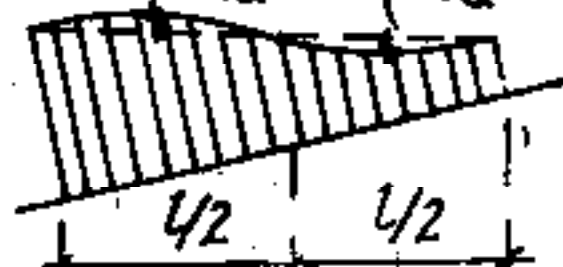
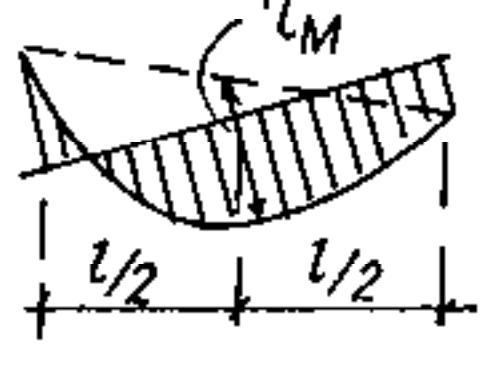
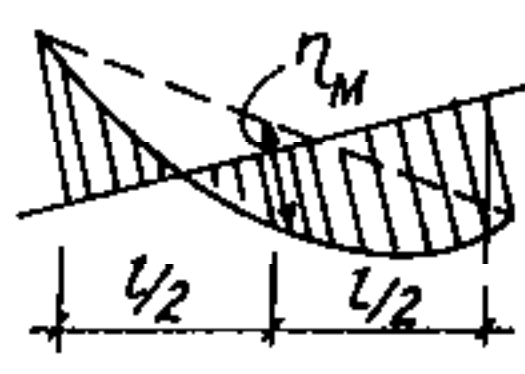
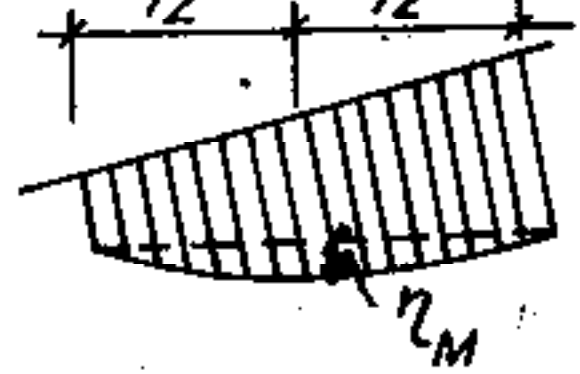
Sau khi biết cách xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ ta cần dựa vào các liên hệ vi phân quen biết giữa cường độ tải trọng phân bố tiếp tuyến với lực dọc  $N$ ; giữa cường độ tải trọng phân bố pháp tuyến với lực cắt  $Q$  và mômen uốn  $M$  để xác định dạng biểu đồ nội lực trên từng đoạn thanh trong đó tải trọng tác dụng là liên tục.



Bảng 2.1

		$q = 0$	$q = \text{const}$	$q$ - bậc nhất
Sơ đồ tải trọng				
<b>N</b>	Dạng biểu đồ			
	Số tiết diện cần tìm N	1	2	3
	$\eta_N$	0	0	$\frac{1}{8} q l \sin \alpha$
<b>Q</b>	Dạng biểu đồ			
	Số tiết diện cần tìm Q	1	2	3
	$\eta_Q$	0	0	$\frac{1}{8} q l \cos \alpha$
<b>M</b>	Dạng biểu đồ			
	Số tiết diện cần tìm M	2	3	3
	$\eta_M$	0	$\frac{1}{8} q l^2$	$\frac{1}{16} q l^2$
Hợp lực của tải trọng phân bố		0	$q l$	$\frac{1}{2} q l$

Bảng 2.1 (tiếp theo)

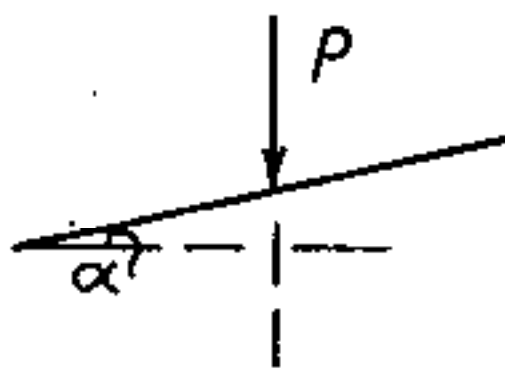

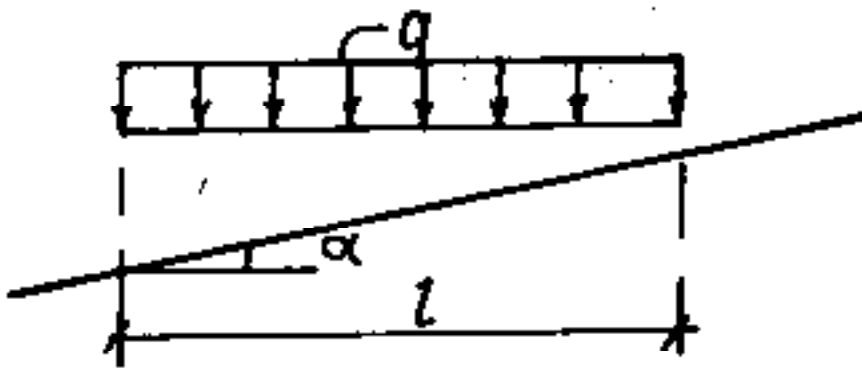
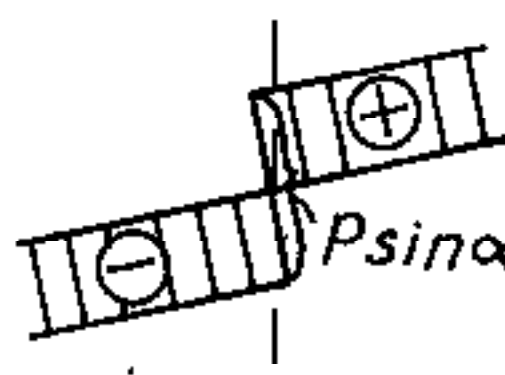
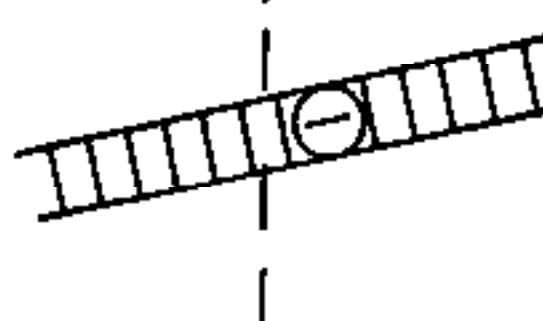
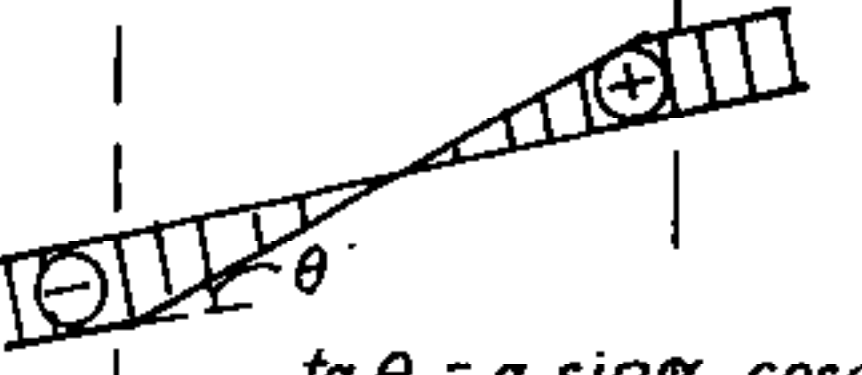
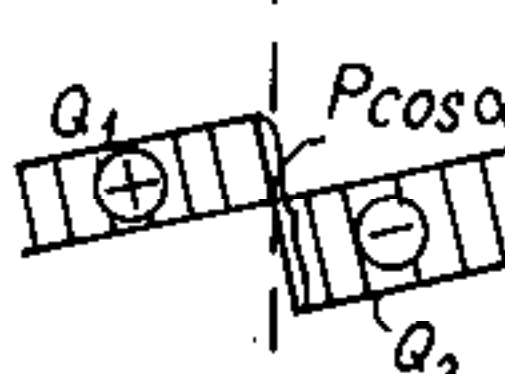
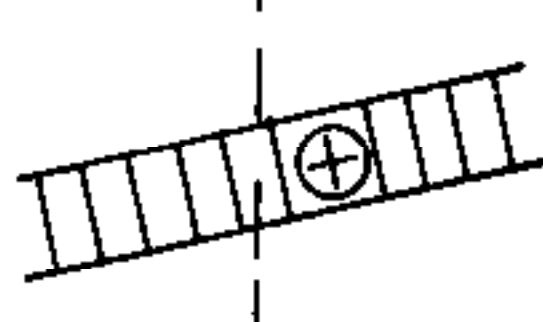
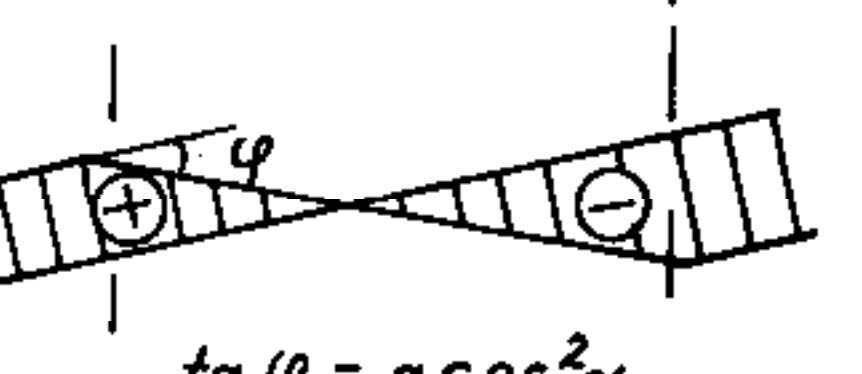
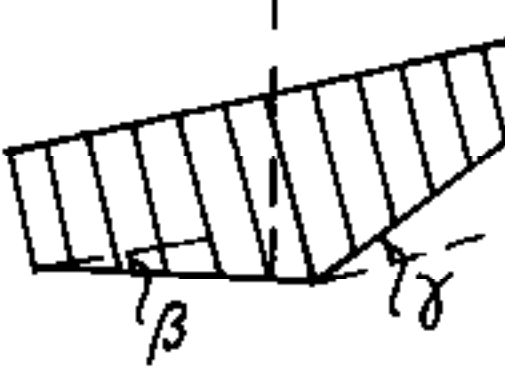
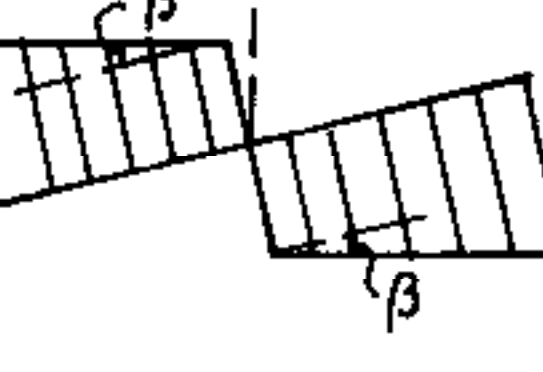
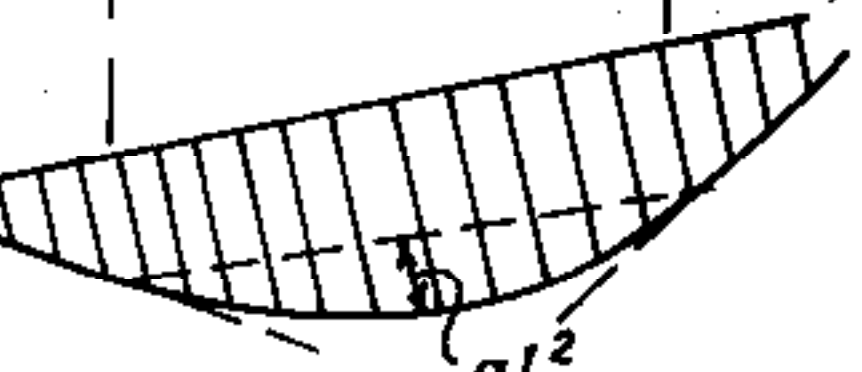
Sơ đồ tải trọng		q - bậc nhất	q - parabol bậc hai $q(z) = \frac{4}{l^2} qz(l-z)$	q - hình sin $q(z) = q \sin \frac{\pi z}{l}$
				
N	Dạng biểu đồ			
	Số tiết diện cần tìm N	3	5	5
	$\eta_N$	$\frac{1}{8} q l \sin \alpha$	$\frac{1}{16} q l \sin \alpha$	$\frac{1}{2\pi} (\sqrt{2} - 1) q l \sin \alpha$
Q	Dạng biểu đồ			
	Số tiết diện cần tìm Q	3	5	5
	$\eta_Q$	$\frac{1}{8} q l \cos \alpha$	$\frac{1}{16} q l \cos \alpha$	$\frac{1}{2\pi} (\sqrt{2} - 1) q l \cos \alpha$
M	Dạng biểu đồ			
	Số tiết diện cần tìm M	3	3	3
	$\eta_M$	$\frac{1}{16} q l^2$	$\frac{5}{48} q l^2$	$\frac{1}{\pi^2} q l^2$
Hợp lực của tải trọng phân bố		$\frac{1}{2} q l$	$\frac{2}{3} q l$	$\frac{2}{\pi} q l$

Bảng 2.1 giới thiệu dạng biểu đồ  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ , số tiết diện đặc trưng cần xác định nội lực và các số liệu cần thiết khác khi vẽ biểu đồ nội lực tương ứng với các dạng tải trọng cơ bản tác dụng trên một đoạn thanh bất kỳ. Các số liệu này tạo điều kiện thuận lợi để vẽ biểu đồ nội lực khi hệ chịu các tải trọng thường gặp trong thực tế. Trường hợp hệ chịu tải trọng phức tạp hơn thì thường ta có thể xem tải trọng đó như là tập hợp của các tải trọng đơn giản đã giới thiệu trong bảng 2.1 và áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để vẽ các biểu đồ nội lực.

Khi sử dụng bảng 2.1 cần chú ý:

- 1) Giá trị tung độ biểu đồ nội lực ở hai đầu mỗi đoạn thanh cần được xác định theo các định nghĩa và quy ước về dấu đã nêu ở trên. Ngoài ra ta có thể vận dụng các đặc điểm của biểu đồ nội lực tại vị trí chuyển đoạn (liên tục hoặc tồn tại bước nhảy) như trên bảng 2.2 để giảm bớt số lần xác định nội lực tại hai đầu mỗi đoạn thanh.

**Bảng 2-2**

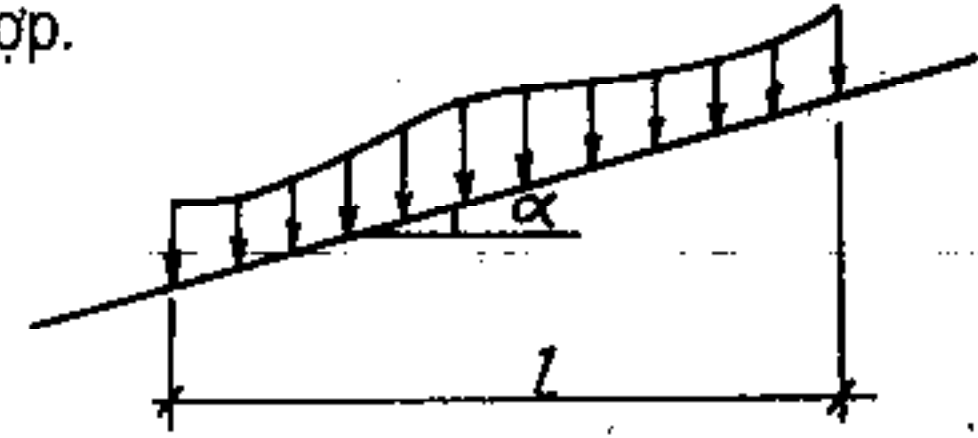
			
<b>N</b>	 $P \sin \alpha$		 $\text{tg } \theta = q \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
<b>Q</b>	 $Q_1$ , $P \cos \alpha$ , $Q_2$		 $\text{tg } \varphi = q \cos^2 \alpha$
<b>M</b>	 $\text{tg } \beta = Q_1$ ; $\text{tg } \gamma = Q_2$	 $\text{tg } \beta = Q$	 $\frac{ql^2}{8}$

- 2) Đối với các đoạn biểu đồ cần xác định bằng ba tung độ thì ta có thể xác định tung độ thứ ba ở giữa mỗi đoạn thanh như sau. Nối hai tung độ ở hai đầu đoạn thanh bằng đường đứt nét; từ chính giữa đường đứt nét dóng vuông góc với đường chuẩn một đoạn  $\eta$  có giá trị và chiều xác định theo bảng

2.1, ta sẽ được tung độ thứ ba. Nối ba tung độ tìm được bằng đường cong thích hợp sẽ vẽ được biểu đồ nội lực trong đoạn thanh đang xét.

3) Đối với các đoạn biểu đồ cần xác định bằng năm tung độ (chẳng hạn biểu đồ lực dọc và lực cắt khi tải trọng phân bố theo luật đường cong parabol hoặc hình sin) ta có thể tìm các tung độ bên trong đoạn như sau: Nối hai tung độ ở hai đầu đoạn bằng đường đứt nét. Tung độ biểu đồ ở giữa đoạn trùng với tung độ tương ứng của đường đứt nét. Tung độ biểu đồ tại 1/4 và 3/4 đoạn tìm được bằng cách đóng vuông góc với đường chuẩn những đoạn có giá trị và chiều xác định theo bảng 2.1. Cuối cùng nối năm tung độ tìm được bằng đường cong thích hợp.

4) Trường hợp tải trọng phân bố theo chiều dài xiên của trục thanh (hình 2.24) biểu đồ nội lực vẫn có dạng như trong bảng 2.1 nhưng tất cả các số liệu về  $\eta$  cần được chia cho  $\cos \alpha$ .



Hình 2.24

Việc kiểm tra kết quả vẽ biểu đồ cũng tiến hành tương tự như đã trình bày trong Sức bền vật liệu.

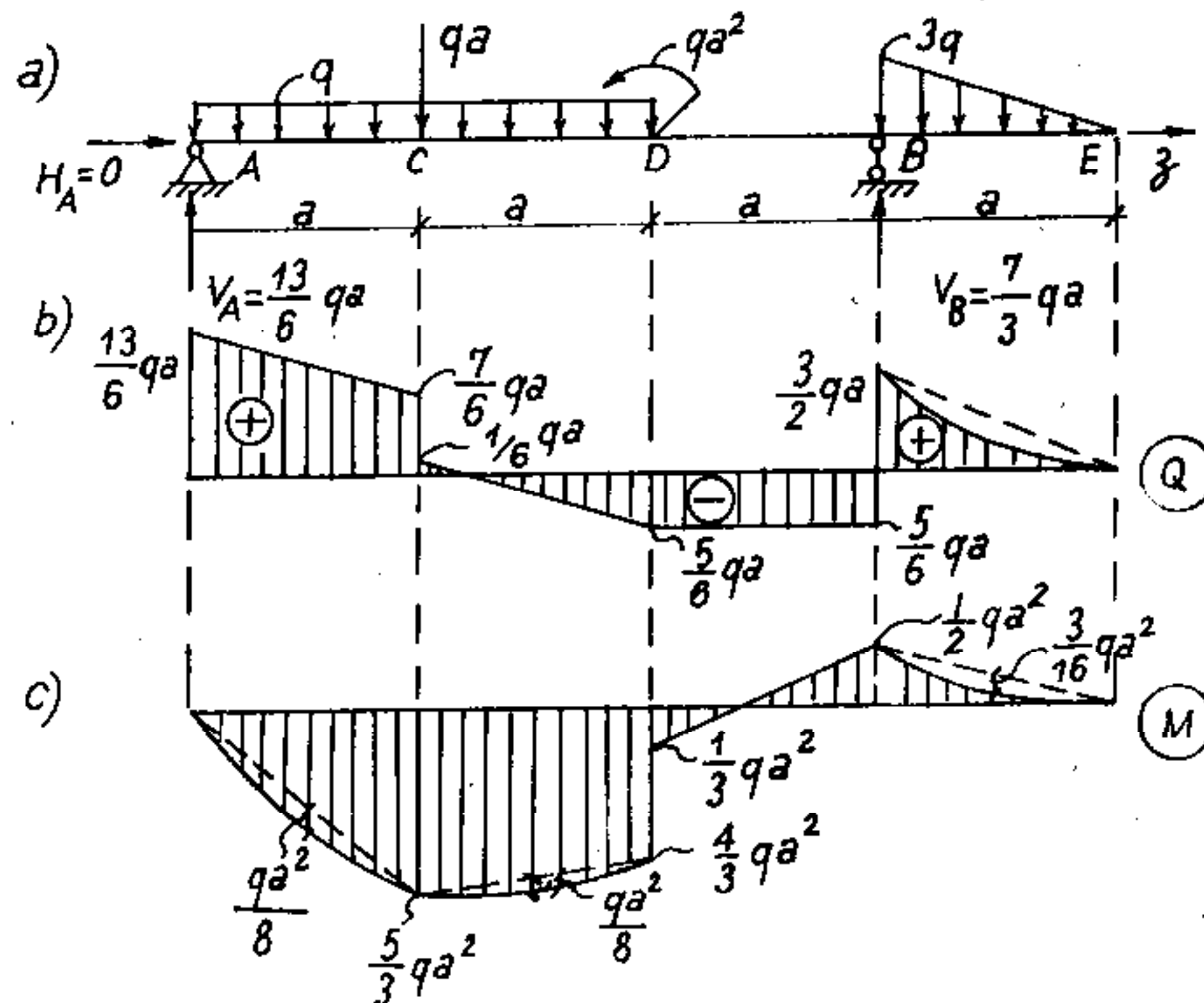
**Ví dụ 2.5.** Vẽ biểu đồ nội lực trong dầm cho trên hình 2.25a.

a) *Xác định phản lực* – Xét cân bằng toàn hệ

$$\sum Z = H_A = 0, \Rightarrow H_A = 0.$$

$$\sum M_A = V_B \cdot 3a - 2qa \cdot a - qa \cdot a + qa^2 - \frac{3qa}{2} \left( 3a + \frac{a}{3} \right) = 0, \Rightarrow V_B = \frac{7}{3} qa.$$

$$\sum M_B = V_A \cdot 3a - 2qa \cdot 2a - qa \cdot 2a - qa^2 + \frac{3qa}{2} \cdot \frac{a}{3} = 0, \Rightarrow V_A = \frac{13}{6} qa.$$



Hình 2.25

b) Vẽ các biểu đồ nội lực

Trong trường hợp này, tải trọng vuông góc với trục dầm nên lực dọc tại mọi tiết diện đều bằng không. Ta chỉ cần vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn.

❖ *Đoạn AC*- Trong đoạn này có tải trọng phân bố đều nên

- Biểu đồ  $Q$  có dạng đường thẳng xiên, xác định theo hai giá trị tại  $A$  và  $C$

$$Q_{AC} = V_A = \frac{13}{6} qa; \quad Q_{CA} = V_A - qa = \frac{7}{6} qa.$$

- Biểu đồ  $M$  có dạng đường cong parabol bậc hai, ta có

$$M_{AC} = 0; \quad M_{CA} = V_A \cdot a - \frac{1}{2} qa^2 = \frac{5}{3} qa^2; \quad \eta_M = \frac{1}{8} qa^2.$$

❖ *Đoạn CD*- Trong đoạn này có tải trọng phân bố đều nên

- Biểu đồ  $Q$  có dạng đường thẳng xiên

$$Q_{CD} = \frac{7}{6} qa - qa = \frac{1}{6} qa; \quad Q_{DC} = V_A - 2qa - qa = -\frac{5}{6} qa.$$

- Biểu đồ  $M$  có dạng đường cong parabol bậc hai, ta có

$$M_{CD} = \frac{5}{3} qa^2; \quad M_{DC} = V_A \cdot 2a - 2qa \cdot a - qa \cdot a = \frac{4}{3} qa^2; \quad \eta_M = \frac{1}{8} qa^2.$$

❖ *Đoạn DB*- Trong đoạn này không có tải trọng phân bố nên

- Biểu đồ  $Q$  có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn.  $Q_{DB} = -\frac{5}{6} qa$ .

- Biểu đồ  $M$  có dạng đường thẳng xiên

$$M_{DB} = \frac{4}{3} qa^2 - qa^2 = \frac{1}{3} qa^2; \quad M_{BD} = -3q \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{3} a = -\frac{1}{2} qa^2.$$

❖ *Đoạn BE*- Trong đoạn này có tải trọng phân bố theo luật bậc nhất nên

- Biểu đồ  $Q$  có dạng đường cong bậc hai

$$Q_{BE} = \frac{1}{2} 3q \cdot a = \frac{3}{2} qa; \quad Q_{EB} = 0; \quad \eta_Q = \frac{1}{8} 3qa = \frac{3}{8} qa \text{ (hướng xuống)}.$$

- Biểu đồ  $M$  có dạng đường cong bậc ba

$$M_{BE} = -\frac{1}{2} qa^2; \quad M_{EB} = 0; \quad \eta_M = \frac{1}{16} 3qa^2 = \frac{3}{16} qa^2.$$

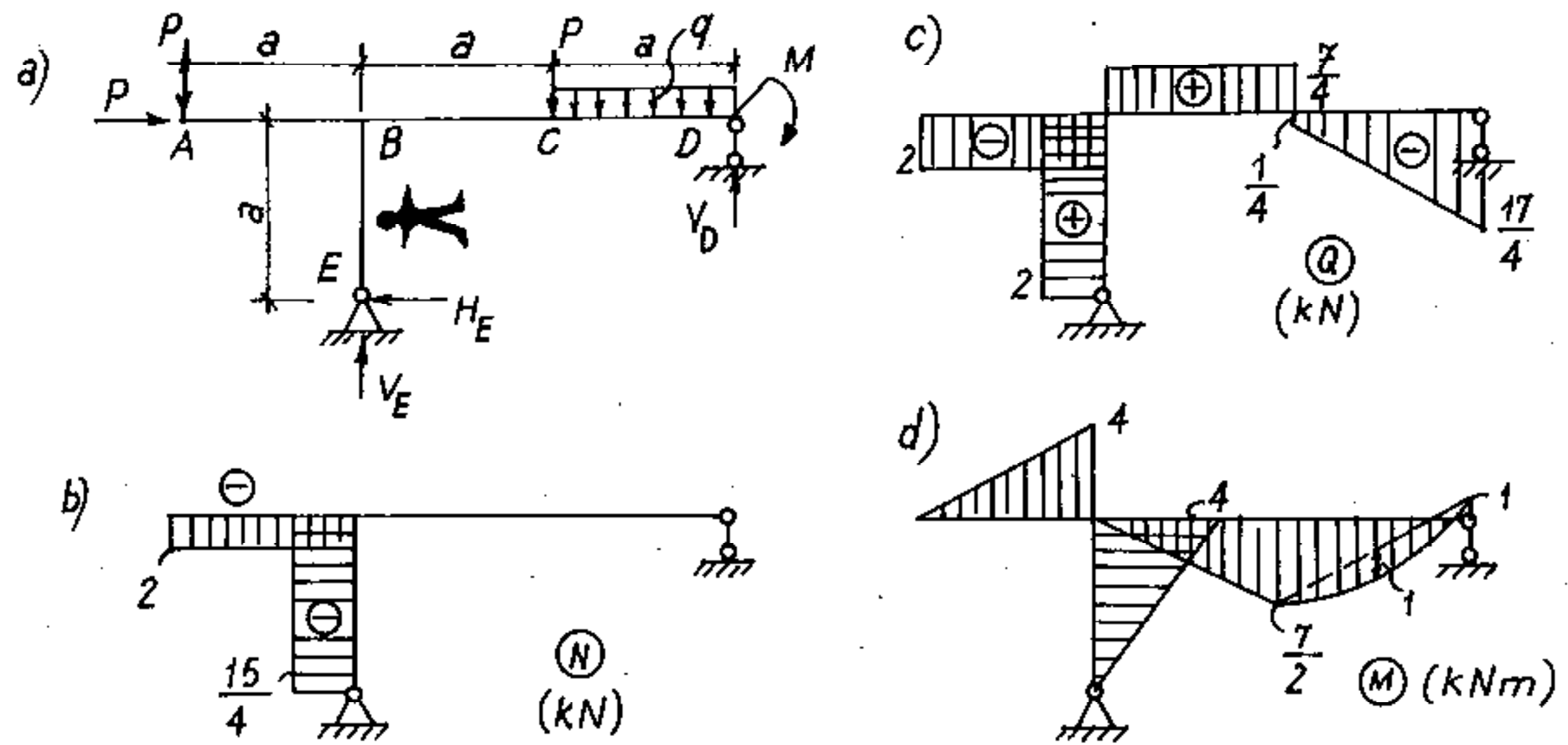
*Ví dụ 2.6.* Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ thanh trên hình 2.26a, cho biết  $q = 2 \text{ kN/m}$ ;  $P = 2 \text{ kN}$ ;  $M = 1 \text{ kNm}$ ;  $a = 2 \text{ m}$ .

a) *Xác định các phản lực* - Xét cân bằng toàn hệ

$$\sum X = H_E - P = 0, \Rightarrow H_E = P = 2 \text{ kN};$$

$$\sum M_E = Pa - Pa + M + Pa + qa \frac{3a}{2} - V_D \cdot 2a = 0, \quad \Rightarrow V_D = \frac{17}{4} \text{ kN};$$

$$\sum M_D = V_E \cdot 2a + H_E \cdot a - P \cdot 3a + M - Pa - \frac{1}{2} qa^2 = 0, \quad \Rightarrow V_E = \frac{15}{4} \text{ kN}.$$



Hình 2.26

b) Vẽ các biểu đồ nội lực (hình 2.26 b, c, d).

❖ **Đoạn AB:** Trong đoạn này không có lực phân bố nên biểu đồ lực dọc và lực cắt có dạng song song với đường chuẩn và được xác định theo giá trị nội lực tại một tiết diện; chẳng hạn tại tiết diện A:

$$N_A = -P = -2 \text{ kN}; \quad Q_A = -P = -2 \text{ kN}.$$

Biểu đồ mômen uốn có dạng đường thẳng xiên và được xác định theo giá trị của mômen uốn tại hai đầu đoạn

$$M_A = 0; \quad M_B = -Pa = -2 \cdot 2 = -4 \text{ kNm}.$$

❖ **Đoạn EB:** Đặt người quan sát như trên hình 2.26a. Cũng tương tự như trong đoạn AB, các biểu đồ nội lực xác định theo các giá trị sau:

$$N_E = -V_E = -\left(\frac{15}{4}\right) \text{ kN}; \quad Q_E = H_E = 2 \text{ kN}; \quad M_E = 0; \quad M_B = H_E \cdot a = 4 \text{ kNm}.$$

❖ **Đoạn BC:** Cũng tương tự như trong đoạn AB, biểu đồ nội lực được xác định theo các giá trị sau:

$$N_B = -P + H_E = 0; \quad Q_B = -P + V_E = \left(\frac{7}{4}\right) \text{ kN};$$

$$M_B = -Pa + H_E \cdot a = 0; \quad M_C = -P \cdot 2a + H_E \cdot a + V_E \cdot a = \left(\frac{7}{2}\right) \text{ kNm}.$$

❖ **Đoạn CD:** Trong đoạn này tải trọng phân bố đều, vuông góc với trục thanh.

Biểu đồ lực dọc có dạng song song với đường chuẩn và được xác định theo



giá trị lực dọc tại tiết diện  $D$ . Ta có:  $N_D = 0$ .

Biểu đồ lực cắt có dạng đường thẳng xiên và được xác định theo hai giá trị tại tiết diện  $C$  và  $D$ . Nếu dùng phần phải ta có:

$$Q_C = -V_D + q \cdot a = -(1/4) \text{ kN} \text{ (cũng có thể xác định theo giá trị lực cắt tại } C \text{ thuộc đoạn } BC \text{ nếu dựa vào tính chất của bước nhảy);}$$

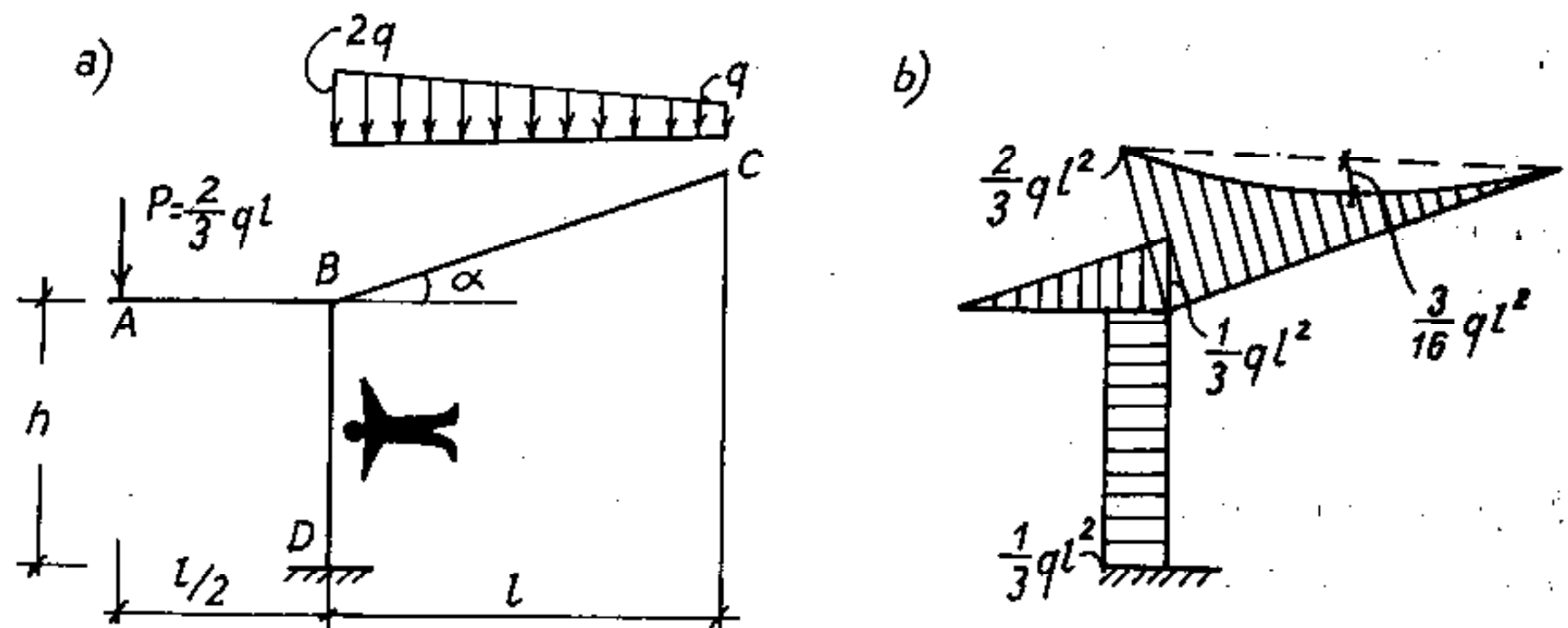
$$Q_D = -V_D = -(17/4) \text{ kN.}$$

Biểu đồ mômen uốn có dạng đường cong parabol bậc hai và được xác định theo các giá trị sau:

$$M_C = (7/2) \text{ kNm (vì tại } C \text{ không có bước nhảy); } M_D = -M = -1 \text{ kNm.}$$

Nối hai tung độ biểu đồ mômen uốn ở hai đầu đoạn  $CB$  bằng đường đứt nét. Từ giữa đường đứt nét, dóng vuông góc với đường chuẩn theo chiều của tải trọng  $q$  một đoạn  $\eta_M = q \cdot a^2 / 8 = 1 \text{ kNm}$ , ta được tung độ thứ ba. Nối ba tung độ đó với nhau bằng đường cong ta được biểu đồ mômen uốn trên đoạn  $CD$ .

**Ví dụ 2.7.** Vẽ biểu đồ mômen uốn cho hệ chịu tải trọng như trên hình 2.27a.



Hình 2.27

Trong bài toán này không cần xác định phản lực nếu khi xác định nội lực ta luôn luôn khảo sát cân bằng phần hệ không chứa liên kết ngầm.

❖ **Đoạn AB:** Trong đoạn này biểu đồ mômen uốn có dạng đường thẳng xiên và được xác định theo hai giá trị sau

$$M_A = 0; \quad M_B = -Pl/2 = -ql^2/3$$

❖ **Đoạn DB:** Đặt người quan sát như trên hình 2.27a và khảo sát phần phải. Biểu đồ mômen uốn có dạng đường thẳng xiên và được xác định theo giá trị mômen uốn tại  $B$  và  $D$ . Coi tải trọng phân bố theo luật hình thang như tập hợp của hai tải trọng: tải trọng phân bố đều với cường độ lớn nhất bằng  $q$  và

tải trọng phân bố theo luật tam giác với cường độ lớn nhất bằng  $q$ , ta có

$$M_B = M_D = Pl/2 - ql.l/2 - q(l/2).(l/3) = -(1/3)ql^2.$$

Trong trường hợp này biểu đồ có dạng song song với đường chuẩn;

❖ *Đoạn BC*: Biểu đồ mômen uốn có dạng đường cong bậc ba và được xác định theo các giá trị sau

$$M_B = -ql.l/2 - q(l/2).(l/3) = -(2/3)ql^2; \quad M_C = 0.$$

Dựng hai tung độ  $M_B$  và  $M_C$ , tiếp đó nối hai tung độ đó với nhau bằng đường đứt nét. Để xác định tung độ thứ ba, từ giữa đường đứt nét dóng vuông góc với đường chuẩn theo chiều của  $q$  một đoạn  $\eta_M = \eta_1 + \eta_2$ , trong đó:

$\eta_1 = q.l^2/8$  – đoạn tương ứng với tải trọng phân bố theo luật hình chữ nhật với cường độ  $q$ ;

$\eta_2 = q.l^2/16$  – đoạn tương ứng với tải trọng phân bố theo luật hình tam giác với cường độ lớn nhất là  $q$ .

Vậy:  $\eta_M = (q.l^2/8) + (q.l^2/16) = (3/16)q.l^2$ .

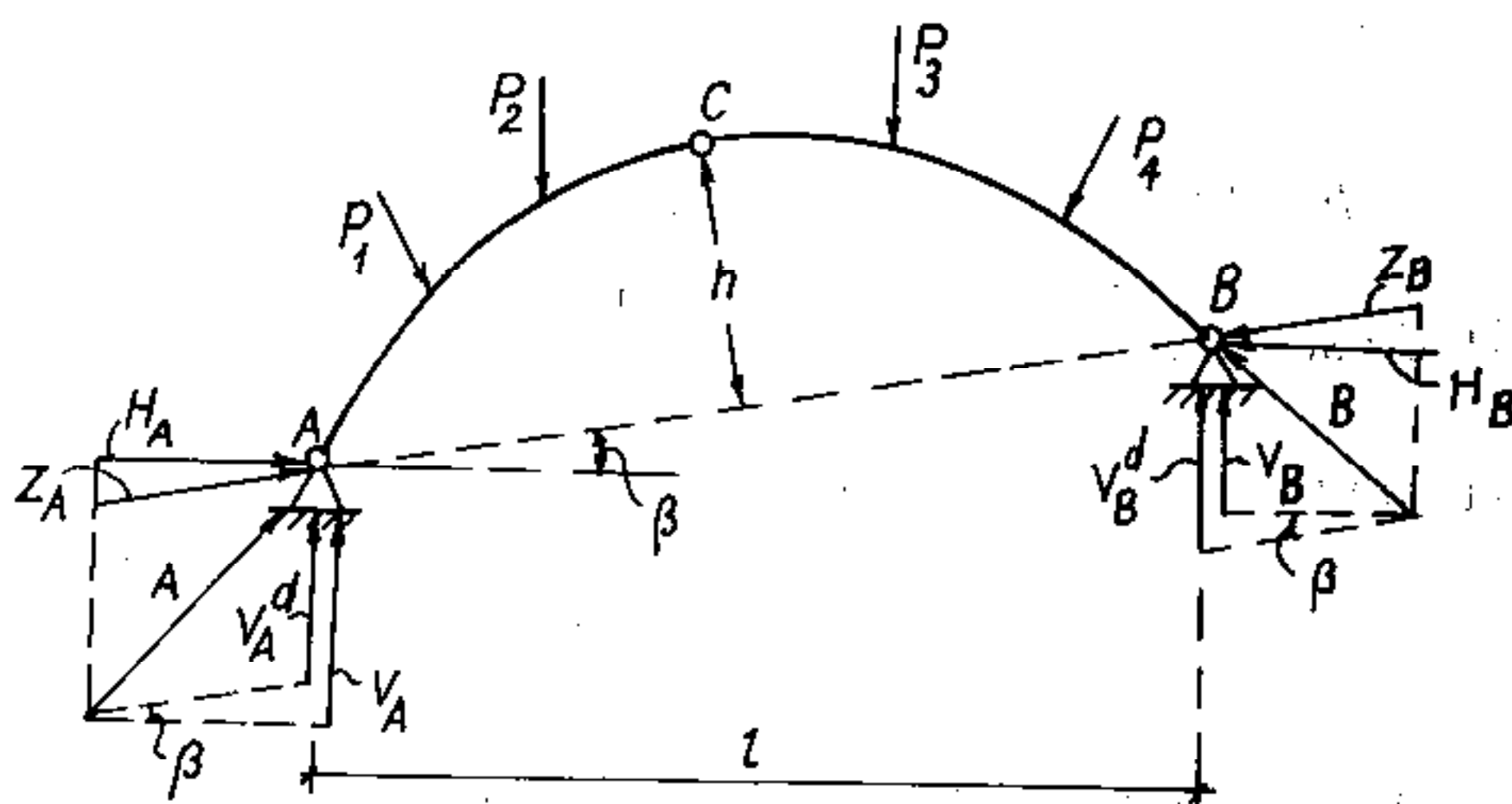
Nối ba tung độ vừa tìm được bằng đường cong ta sẽ được biểu đồ mômen uốn trong đoạn  $BC$ .

Toàn bộ biểu đồ mômen uốn của hệ thanh vẽ trên hình 2.27b.

## 2.5. Cách tính hệ ba khớp chịu tải trọng bất động

### A. Xác định phản lực

Hình 2.28



Xét hệ ba khớp với các kích thước đã biết và chịu tải trọng bất kỳ như trên hình 2.28. Gọi  $A$  và  $B$  là phản lực tại các gối tựa  $A, B$ . Các phản lực này có phương chưa biết nên có thể phân tích thành hai thành phần theo hai phương bất kỳ.

Nếu phân tích theo phương  $AB$  và phương đứng ta có:  $\vec{A} \begin{vmatrix} \bar{Z}_A \\ \bar{V}_A^d \end{vmatrix}; \vec{B} \begin{vmatrix} \bar{Z}_B \\ \bar{V}_B^d \end{vmatrix}$ .

Nếu phân tích theo phương ngang và phương đứng, ta có:  $\vec{A} \begin{vmatrix} \bar{H}_A \\ \bar{V}_A \end{vmatrix}; \vec{B} \begin{vmatrix} \bar{H}_B \\ \bar{V}_B \end{vmatrix}$ .

Như vậy, muốn xác định các phản lực  $A, B$  ta chỉ cần lần lượt xác định các thành phần của chúng.

### 1. Xác định các thành phần $V_A^d$ và $V_B^d$

Để xác định các phản lực  $V_A^d$  và  $V_B^d$  ta nên dùng các phương trình cân bằng mômen đối với các gối  $A$  và  $B$  vì lúc này các lực  $Z_A$  và  $Z_B$  không tham gia phương trình cân bằng.

Từ phương trình  $\sum M_B = 0$ , suy ra  $V_A^d$ .

Từ phương trình  $\sum M_A = 0$ , suy ra  $V_B^d$ .

Ta thấy cách tìm phản lực  $V_A^d$  và  $V_B^d$  trong hệ ba khớp giống như cách tìm phản lực trong dầm tĩnh định nên các phản lực này được gọi là *phản lực dầm* và đọc ký hiệu  $V_A^d$  là  $V_A^{dầm}$ .

### 2. Xác định các thành phần $Z_A$ và $Z_B$

Các lực này được xác định theo điều kiện mômen uốn tại khớp  $C$  bằng không.

Nếu khảo sát phần vòm bên trái ta có:  $M_C = -Z_A h + M_C^{tr} = 0$ ,

trong đó:

$M_C^{tr}$  – tổng mômen của các lực đặt trên phần vòm bên trái đối với điểm  $C$  (không kể lực  $Z_A$ );

$h$  – khoảng cách từ khớp  $C$  đến đường nối  $AB$ .

Từ đó suy ra:  $Z_A = \frac{M_C^{tr}}{h}$ . (2.1)

Tương tự, nếu khảo sát phần vòm bên phải, ta có:

$Z_B = \frac{M_C^{ph}}{h}$ , (2.2)

$M_C^{ph}$  – tổng mômen của các lực đặt trên phần vòm bên phải đối với điểm  $C$  (không kể lực  $Z_B$ ).

Các thành phần  $Z_A$  và  $Z_B$  thường chỉ tồn tại trong các hệ ba khớp nên được gọi là các *lực vòm*.

### 3. Xác định các thành phần $H_A$ và $H_B$

Từ hình 2.28 ta dễ dàng xác định được các thành phần  $H_A$  và  $H_B$  theo  $Z_A$  và  $Z_B$  như sau

$$H_A = Z_A \cos\beta, \quad H_B = Z_B \cos\beta. \quad (2.3)$$

Trong trường hợp hệ chỉ chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng, sau khi viết điều kiện cân bằng hình chiếu của tất cả các lực lên trục nằm ngang, ta có

$$H_A = H_B = H.$$

Từ (2.3) ta suy ra  $Z_A = Z_B = Z$ .

Như vậy, trong trường hợp hệ ba khớp chỉ chịu tải trọng thẳng đứng thì lực vòm và lực xô ở hai gối cũng bằng nhau về giá trị.

### 4. Xác định thành phần $V_A$ và $V_B$

Từ hình 2.28 ta dễ dàng xác định được

$$V_A = V_A^d + Z_A \sin\beta; \quad V_B = V_B^d - Z_B \sin\beta.$$

Chú ý đến (2.3) ta có

$$V_A = V_A^d + H_A \operatorname{tg}\beta; \quad V_B = V_B^d - H_B \operatorname{tg}\beta. \quad (2.4)$$

### 5. Xác định các phản lực toàn phần $A$ và $B$

Phản lực toàn phần  $A$  và  $B$  là tổng hình học của các thành phần phản lực tương ứng

$$\vec{A} = \vec{V}_A^d + \vec{Z}_A = \vec{V}_A + \vec{H}_A; \quad \vec{B} = \vec{V}_B^d + \vec{Z}_B = \vec{V}_B + \vec{H}_B.$$

Do đó, độ lớn của phản lực  $A$  và  $B$  được xác định theo công thức sau

$$A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2}; \quad B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2}.$$

## B. Xác định nội lực

Sau khi biết các thành phần phản lực ta có thể xác định nội lực trong hệ theo phương pháp đã trình bày trong 2.3 và 2.4 tùy theo hệ là dầm ba khớp hoặc vòm, khung ba khớp.

Trong trường hợp tải trọng tác dụng thẳng đứng hoặc song song với phương trục  $y$ , ta thiết lập được các biểu thức cụ thể, tiện lợi cho việc xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ trong hệ vòm hoặc khung ba khớp.

### 1. Biểu thức mômen uốn

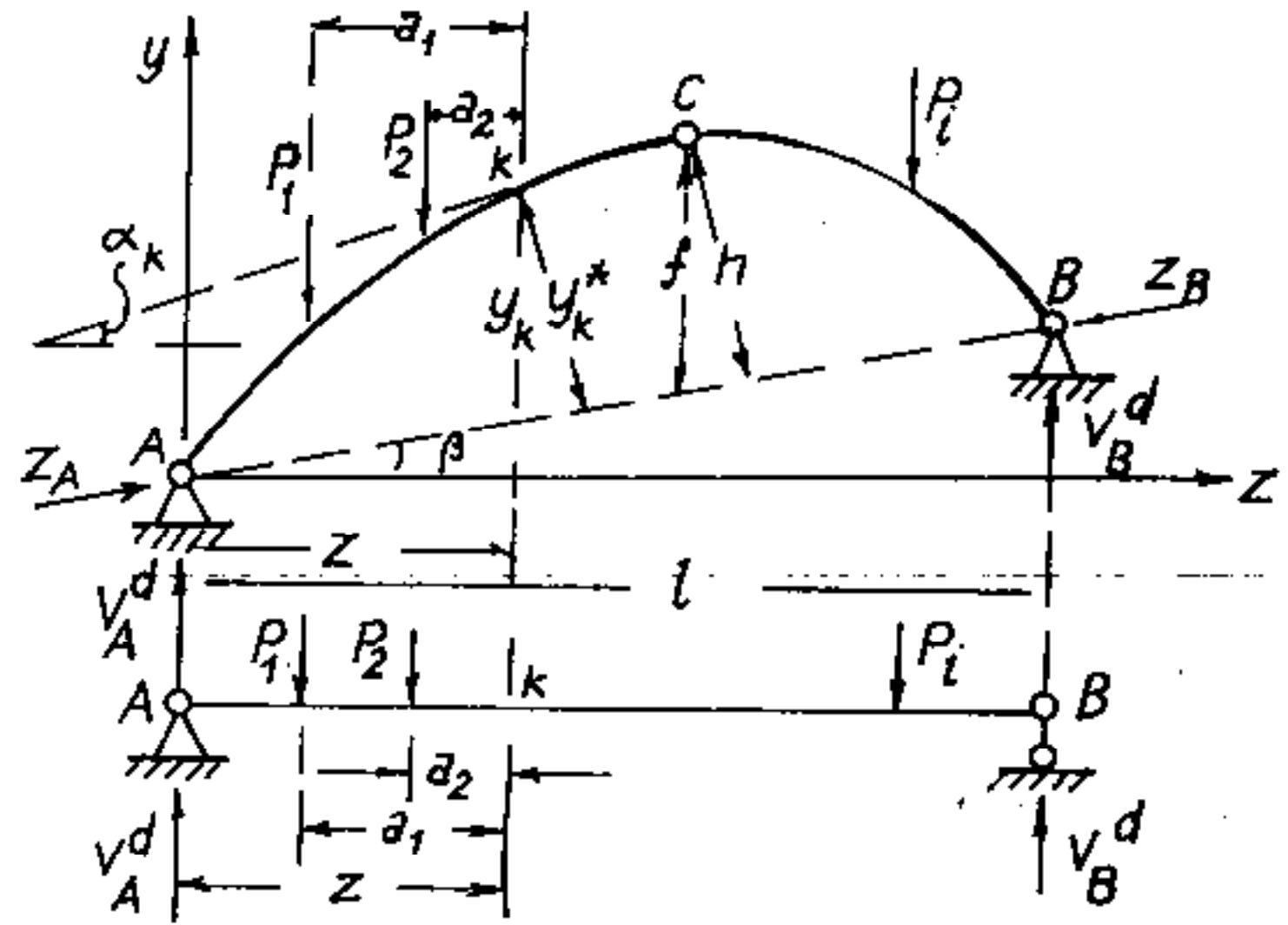
Giả sử cần thiết lập biểu thức mômen uốn  $M_k(z)$  tại tiết diện  $k$  có hoành độ  $z$  trên vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng như trên hình 2.29.

Tưởng tượng cắt vòm tiết diện  $k$  bằng một mặt cắt và xét cân bằng của một phần vòm, chẳng hạn phần bên trái, ta có:

$$M_k(z) = V_A^d \cdot z - P_1 a_1 - P_2 a_2 - Z_A y_k^*.$$

Đối chiếu với dầm đơn giản tương ứng nghĩa là dầm đơn giản có nhịp bằng nhịp của vòm và chịu tải trọng tác dụng như trên vòm ta thấy đại lượng:

$V_A^d \cdot z - P_1 a_1 - P_2 a_2$  chính là mômen uốn  $M_k^d(z)$  trong dầm tại tiết diện  $k$  tương ứng có hoành độ  $z$ .



Hình 2.29

Do đó có thể viết

$$M_k(z) = M_k^d(z) - Z_A y_k^*.$$

Từ hình 2.29 ta thấy  $y_k^* = y_k \cos \beta$ , đồng thời theo (2.3),  $H_A = Z_A \cos \beta$ , nên biểu thức trên có dạng

$$M_k(z) = M_k^d(z) - H_A y_k.$$

Vì tải trọng thẳng đứng, nên  $H_A = H_B = H$ , do đó ta có

$$M_k(z) = M_k^d(z) - H y_k. \quad (2.5)$$

trong đó:

$M_k(z)$  – mômen uốn tại tiết diện  $k$  bất kỳ có hoành độ  $z$  trên vòm chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng;

$M_k^d(z)$  – mômen uốn tại tiết diện  $k$  tương ứng trong dầm đơn giản có cùng nhịp và cùng chịu tải trọng tác dụng như trên vòm;

$H$  – lực xô của vòm;

$y_k$  – khoảng cách theo phương thẳng đứng từ tiết diện  $k$  đến đường thẳng  $AB$  nối hai gối của vòm.

Qua công thức (2.5) ta có thể giải thích được tính ưu việt của kết cấu vòm so với kết cấu dầm như sau: mômen uốn tại một tiết diện bất kỳ của vòm bằng mômen uốn tương ứng trong dầm có cùng nhịp và có cùng tải trọng trừ đi tích

số  $H_{y_k}$ . Tích số  $H_{y_k}$  làm cho mômen uốn trong vòm nhỏ hơn mômen uốn trong dầm. Nếu khéo chọn được hình dạng của vòm sao cho tích số  $H_{y_k}$  luôn luôn bằng đúng đại lượng  $M_k^d(z)$  thì mômen uốn tại mọi tiết diện của vòm đều bằng không, lúc đó vòm hoàn toàn không chịu uốn mà chỉ chịu nén. Như vậy không những sẽ tiết kiệm được vật liệu mà còn có thể sử dụng được những vật liệu chỉ chịu được nén như gạch, đá.

## 2. Biểu thức lực cắt

Giả sử cần thiết lập biểu thức lực cắt  $Q_k(z)$  tại tiết diện bất kỳ  $k$  có hoành độ  $z$  trên vòm ba khớp chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng (hình 2.29).

Từ định nghĩa về lực cắt, ta có:

$$Q_k(z) = V_A^d \cos \alpha_k - P_1 \cos \alpha_k - P_2 \cos \alpha_k + Z_A \sin \beta \cos \alpha_k - Z_A \cos \beta \sin \alpha_k.$$

Chú ý đến biểu thức (2.3):  $Z_A = \frac{H_A}{\cos \beta},$

ta có thể viết:

$$Q_k(z) = (V_A^d - P_1 - P_2) \cos \alpha_k + \frac{H_A}{\cos \beta} \sin \beta \cos \alpha_k - \frac{H_A}{\cos \beta} \cos \beta \sin \alpha_k.$$

$$Q_k(z) = (V_A^d - P_1 - P_2) \cos \alpha_k + H_A \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_k - H_A \sin \alpha_k.$$

Đối chiếu với dầm đơn giản có cùng nhịp và có cùng tải trọng ta thấy đại lượng  $V_A^d - P_1 - P_2$  trong biểu thức trên chính là lực cắt  $Q_k^d(z)$  trong dầm tại tiết diện  $k$  tương ứng có hoành độ  $z$ , cho nên:

$$Q_k(z) = Q_k^d(z) \cos \alpha_k - H_A (\sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_k).$$

Nhưng do tải trọng tác dụng thẳng đứng  $H_A = H_B = H$  nên:

$$Q_k(z) = Q_k^d(z) \cos \alpha_k - H (\sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_k). \quad (2.6)$$

trong đó:

$Q_k(z)$  – lực cắt tại tiết diện  $k$  bất kỳ có hoành độ  $z$  trong vòm chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng;

$Q_k^d(z)$  – lực cắt tại tiết diện  $k$  tương ứng trong dầm đơn giản có cùng nhịp và cùng chịu tải trọng thẳng đứng tác dụng như trong vòm;

$\alpha_k$  – góc hợp giữa phương tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện  $k$  và phương nằm ngang;

$\beta$  – góc hợp giữa phương nằm ngang với phương  $AB$  nối liền hai gối;

$H$  – lực xô của vòm.



### 3. Biểu thức lực dọc

Tương tự như trên, nếu vẫn quy ước *lực dọc kéo là dương* thì biểu thức lực dọc  $N_k(z)$  tại tiết diện  $k$  bất kỳ có hoành độ  $z$  của vòm ba khớp chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng có dạng:

$$N_k(z) = - Q_k^d(z) \sin \alpha_k - H (\cos \alpha_k + \operatorname{tg} \beta \sin \alpha_k). \quad (2.7)$$

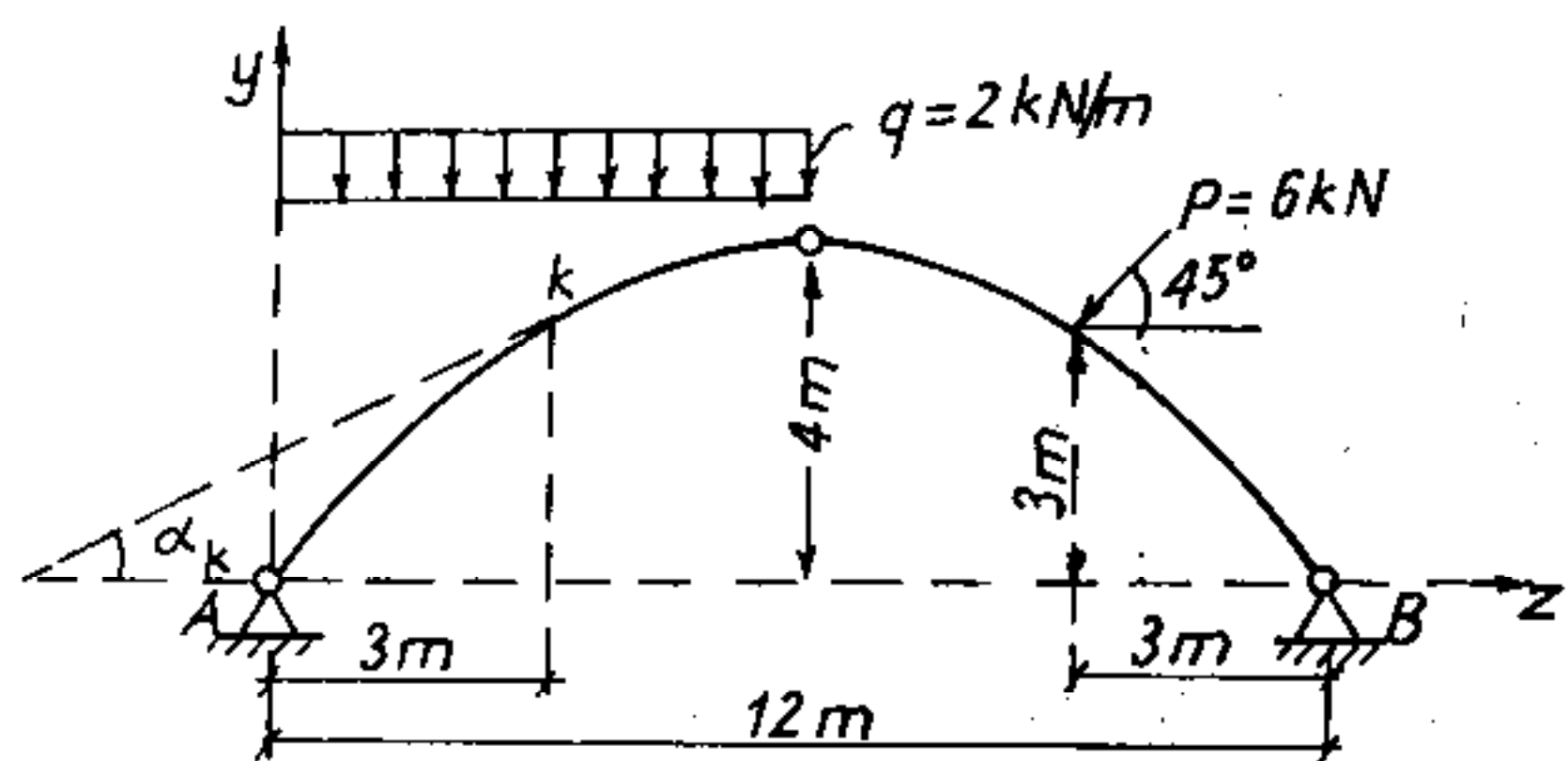
Trường hợp đặc biệt nếu hai gối cố định  $A, B$  có cùng cao độ (nghĩa là nếu góc  $\beta = 0$ ) thì các công thức (2.5), (2.6), (2.7) sẽ có dạng đơn giản hơn như sau:

$$\begin{aligned} M_k(z) &= M_k^d(z) - H y_k; \\ Q_k(z) &= Q_k^d(z) \cos \alpha_k - H \sin \alpha_k; \\ N_k(z) &= - Q_k^d(z) \sin \alpha_k - H \cos \alpha_k. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Ví dụ 2.8.** Cho vòm có trục biến thiên theo phương trình  $y = \frac{1}{9}(12-z)z$ .

Xác định nội lực tại tiết diện  $k$  có hoành độ  $z = 3$  m (hình 2.30).

Hình 2.30



Đây là bài toán hệ ba khớp chịu tải trọng không thẳng đứng.

Các số liệu của bài toán:

Tương ứng với hoành độ  $z_k = 3$  m, ta xác định được tung độ theo công thức:

$$y_k = \frac{1}{9}(12 - z_k)z_k = \frac{(12 - 3)3}{9} = 3 \text{ m.}$$

Góc nghiêng của tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện  $k$  so với đường nằm ngang được xác định như sau:

$$\operatorname{tg} \alpha_k = y'_k = \frac{1}{9}(12 - z_k) = \frac{1}{9}(12 - 2.3) = \frac{2}{3}.$$

Từ đó suy ra

$$\sin \alpha_k = \frac{\operatorname{tg} \alpha_k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_k}} = \frac{2}{3\sqrt{1 + (2/3)^2}} = 0,555 ;$$

$$\cos \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2/3)^2}} = 0,832 .$$

Trong trường hợp này hai gối A, B có cùng cao độ nên góc  $\beta = 0$ , do đó ta có

$$V_A^d = V_A; \quad V_B^d = V_B; \quad Z_A = H_A; \quad Z_B = H_B.$$

Từ các phương trình cân bằng

$$\sum M_B = V_A^d \cdot 12 - 2 \cdot 6 \cdot 9 - P \cos 45^\circ \cdot 3 - P \sin 45^\circ \cdot 3 = 0, \text{ suy ra } V_A^d = V_A = 11,12 \text{ kN.}$$

$$\sum M_A = -V_B^d \cdot 12 + 2 \cdot 6 \cdot 3 - P \cos 45^\circ \cdot 3 + P \sin 45^\circ \cdot 9 = 0, \text{ suy ra } V_B^d = V_B = 5,12 \text{ kN}$$

Theo công thức (2.1) và (2.2) ta tính được các lực vòm:

$$Z_A = H_A = M_C^{jr} / h = (V_A^d \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3) / 4 = 7,68 \text{ kN};$$

$$Z_B = H_B = M_C^{ph} / h = (V_B^d \cdot 6 - P \cos 45^\circ \cdot 1 - P \sin 45^\circ \cdot 3) / 4 = 3,44 \text{ kN.}$$

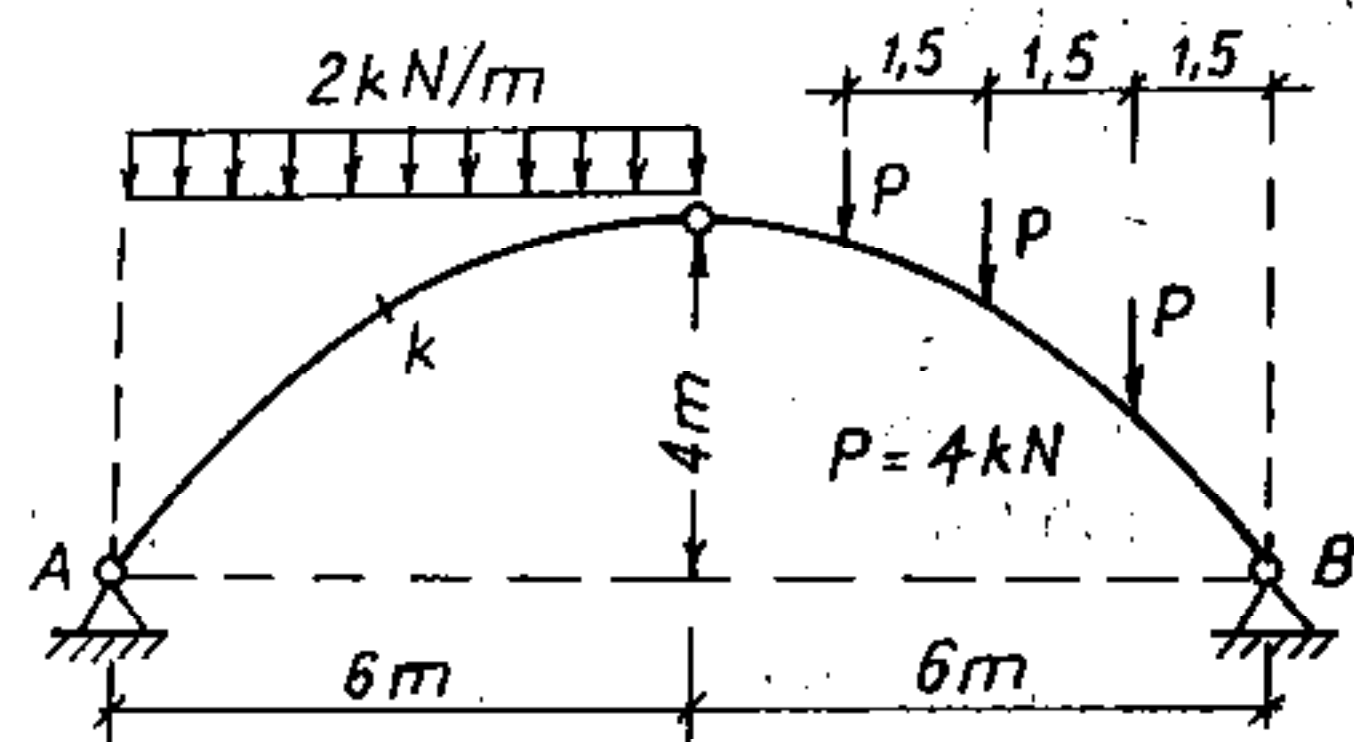
Sau khi xác định được các phản lực tựa ta tìm nội lực tại một tiết diện bất kỳ bằng cách thực hiện mặt cắt đi qua tiết diện đó và xét cân bằng của một phần vòm bị cắt. Ví dụ, xét cân bằng của phần bên trái ta có

$$M_k = V_A \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot (3/2) - H_A \cdot 3 = 11,12 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot (3/2) - 7,68 \cdot 3 = 1,32 \text{ kNm};$$

$$Q_k = V_A \cos \alpha_k - H_A \sin \alpha_k - 2 \cdot 3 \cos \alpha_k = 11,12 \cdot 0,832 - 7,68 \cdot 0,555 - 2 \cdot 3 \cdot 0,832 = 0;$$

$$N_k = -V_A \sin \alpha_k - H_A \cos \alpha_k + 2 \cdot 3 \sin \alpha_k = -11,12 \cdot 0,555 - 7,68 \cdot 0,832 + 2 \cdot 3 \cdot 0,555 = -9,23 \text{ kN (lực nén).}$$

**Ví dụ 2.9.** Cũng cho vòm như trong ví dụ 2.8 nhưng chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng (hình 2.31). Xác định nội lực tại tiết diện k.



Hình 2.31

Xác định các phản lực:

Từ phương trình  $\sum M_B = 0$ , suy ra  $V_A^d = V_A = 12 \text{ kN.}$

Từ phương trình  $\sum M_A = 0$ , suy ra  $V_B^d = V_B = 12 \text{ kN.}$

$$Z_A = Z_B = Z = H_A = H_B = H = M_C^{jr} / h = (12 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3) / 4 = 9 \text{ kN.}$$

Vì tải trọng tác dụng thẳng đứng và hai gối cố định có cùng cao độ ( $\beta = 0$ ) nên ta có thể dùng công thức (2.8) để tính các nội lực

$$M_k = M_k^d - H y_k = 12.3 - 2(3^2/2) - 9.3 = 0;$$

$$Q_k = Q_k^d \cos \alpha_k - H \sin \alpha_k = (12 - 2.3)0.832 - 9.0,555 = 0;$$

$$N_k = -Q_k^d \sin \alpha_k - H \cos \alpha_k = -(12 - 2.3)0,555 - 9.0,832 = -10,81 \text{ kN.}$$

#### Chú thích

Trong trường hợp hệ là dàn vòm ba khớp, cách tính được thực hiện như sau:

- Xác định các phản lực tựa theo nguyên tắc trình bày ở điểm A.
- Xác định lực dọc trong các thanh của dàn vòm theo các phương pháp đã trình bày ở mục 2.3.

### C. Khái niệm về trục hợp lý của vòm ba khớp

Ở trên ta đã nhận xét, nếu khéo chọn hình dạng của trục vòm thì có thể làm cho mômen uốn trong vòm ba khớp nhỏ đi thậm chí hoàn toàn bằng không tại mọi tiết diện, như thế sẽ tiết kiệm được vật liệu. Do đó nảy sinh vấn đề: *nên chọn trục vòm sao cho hợp lý và trục vòm thế nào là hợp lý?*

#### 1. Định nghĩa trục hợp lý của vòm

Về mặt kết cấu, ta gọi *trục hợp lý của vòm* là trục chọn sao cho thể tích vòm có giá trị nhỏ nhất mà vẫn đảm bảo được điều kiện bền.

Nói chung, dọc theo trục vòm diện tích tiết diện  $A$  của vòm là hàm của các nội lực  $M, N, Q$  và khả năng chịu lực  $[\sigma]$  của vật liệu dùng làm vòm

$$A = A(M, N, Q, [\sigma]),$$

do đó, thể tích  $V$  của vòm có chiều dài  $S$  sẽ là

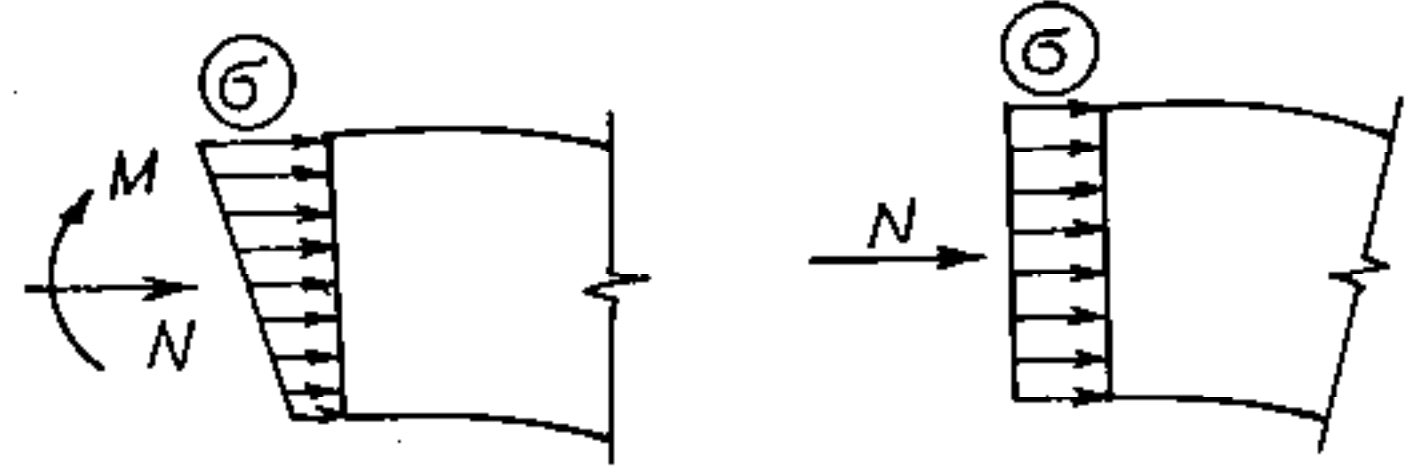
$$V = \int_0^S A(M, N, Q, [\sigma]) ds. \quad (2.9)$$

Thường thì các nội lực  $M, N, Q$  thay đổi khi trục vòm biến đổi cho nên bài toán xác định trục vòm hợp lý ứng với điều kiện  $V_{min}$  là một bài toán phức tạp.

Ta có thể dựa vào những nhận xét trong thực tế thiết kế dưới đây để đơn giản hóa bài toán: với những vòm có kích thước thông thường, khi biến đổi trục mà vẫn giữ nguyên nhịp và mũi tên vông thì chiều dài trục vòm và lực dọc biến đổi ít, còn mômen uốn và lực cắt biến đổi nhiều. Với những nhận xét đó, ta có thể xem gần đúng là thể tích vòm do mômen uốn và lực cắt quyết định. Do đó, nói một cách gần đúng, thể tích của vòm nhỏ nhất khi mômen uốn trong vòm bằng không và lực cắt là đạo hàm của mômen uốn cũng bằng không.

Có thể minh họa nhận xét gần đúng đó bằng cách so sánh biểu đồ ứng suất pháp trên một tiết diện vòm trong trường hợp  $M$  và  $Q$  khác không, với biểu đồ ứng suất pháp trong trường hợp  $M$  và  $Q$  bằng không (hình 2.32)

Khi  $M$  và  $Q$  bằng không, ứng suất pháp phân bố đều, vật liệu ở mọi điểm trên tiết diện đều được sử dụng như nhau, nên có thể phát huy hết khả năng của vật liệu.



Hình 2.32

Dựa vào lý luận gần đúng như trên ta có thể đi đến định nghĩa về trục hợp lý của vòm như sau:

*Trục hợp lý của vòm là trục chọn sao cho mômen uốn tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không (do đó lực cắt cũng bằng không).*

Trong trường hợp vòm chịu tải trọng di động thì trục hợp lý cũng thay đổi tùy theo vị trí của tải trọng. Nếu tải trọng bất động lớn hơn rất nhiều so với tải trọng di động thì khi chọn trục hợp lý có thể chỉ kể tới ảnh hưởng của tải trọng bất động mà bỏ qua ảnh hưởng của tải trọng di động.

Khi xác định trục hợp lý của vòm ba khớp ta phải xét đến tải trọng tác dụng trên vòm trong đó có trọng lượng bản thân vòm. Thông thường thì khi trục vòm thay đổi, trọng lượng bản thân của vòm và các tải trọng tác dụng trên vòm cũng thay đổi theo. Lúc đó ta gặp trường hợp *tải trọng thay đổi phụ thuộc dạng của vòm*. Đôi khi trục vòm thay đổi, trọng lượng bản thân của vòm và các tải trọng tác dụng trên vòm thay đổi không đáng kể, lúc đó ta gặp trường hợp *tải trọng không phụ thuộc dạng của vòm*. Thực ra trọng lượng bản thân của vòm là một đại lượng phụ thuộc vào hình dạng của vòm. Tuy nhiên, khi tính gần đúng ta có thể ước đoán trọng lượng bản thân vòm, lúc đó tải trọng tác dụng trên vòm (gồm cả trọng lượng bản thân vòm) được xem là độc lập với hình dạng vòm.

Bây giờ ta tìm trục hợp lý của vòm ba khớp trong một vài trường hợp thường gặp trong thực tế.

## 2. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng không phụ thuộc dạng vòm

Trong trường hợp tải trọng tác dụng thẳng đứng không phụ thuộc dạng vòm, biểu thức mômen uốn trong dầm tương ứng cũng không phụ thuộc dạng vòm, do đó ta có thể dùng công thức (2.5) để xác định trục hợp lý của vòm:

$$y(z) = \frac{M^d(z)}{H} \quad (2.10)$$

Ta thấy lực xô  $H$  không phụ thuộc  $z$  nên *trục hợp lý của vòm có dạng biểu đồ mômen uốn trong dầm tương ứng (có nhịp và tải trọng như của vòm) với tỷ lệ các tung độ nhỏ hơn  $H$  lần.*

**Ví dụ 2.10.** Tìm trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo chiều dài nhịp với cường độ  $q$ , cho biết vòm có chiều dài là  $l$ , mũi tên  $f$ , khớp  $C$  ở chính giữa nhịp.

Biểu thức mômen uốn trong dầm chịu tải trọng phân bố đều:

$$M^d(z) = \frac{q}{2} z(l-z).$$

Tương tự như ở ví dụ 2.9, ta xác định được:  $H = \frac{M_C^u}{f} = \frac{ql^2}{8f}$ .

Do đó, theo (2.10) ta có:  $y(z) = \frac{q}{2} z(l-z) \frac{8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2} z(l-z)$ .

Như vậy, trong trường hợp này trục hợp lý có dạng đường parabol bậc hai.

### 3. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng vòm

Trong trường hợp này, không thể xuất phát từ biểu thức (2.10) để xác định trục hợp lý được vì bản thân hàm  $M^d(z)$  cũng phụ thuộc tải trọng. Nếu lấy vi phân hai lần biểu thức (2.10) ta sẽ được phương trình vi phân trục hợp lý biểu thị trực tiếp theo hàm tải trọng  $q$ .

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q}{H} \quad (2.11)$$

trong đó hàm tải trọng  $q$  không những phụ thuộc biến số  $z$  mà còn phụ thuộc hàm  $y$  cần tìm.

Trong một số trường hợp ta có thể tìm nghiệm của phương trình vi phân (2.11) bằng phương pháp giải tích chính xác, còn nói chung thì cách giải sẽ gặp nhiều khó khăn và chỉ có thể giải quyết bằng các phương pháp đúng đắn.

Dưới đây là một ví dụ có thể giải được bằng phương pháp giải tích.

**Ví dụ 2.11.** Tìm trục hợp lý của vòm ba khớp đối xứng cong tròn trụ, chịu tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng vòm (chẳng hạn trọng lượng vật liệu xây

hoặc đất đắp bên trên vòm) theo quy luật sau (hình 2.33):

$$q(z) = q_0 + \gamma y,$$

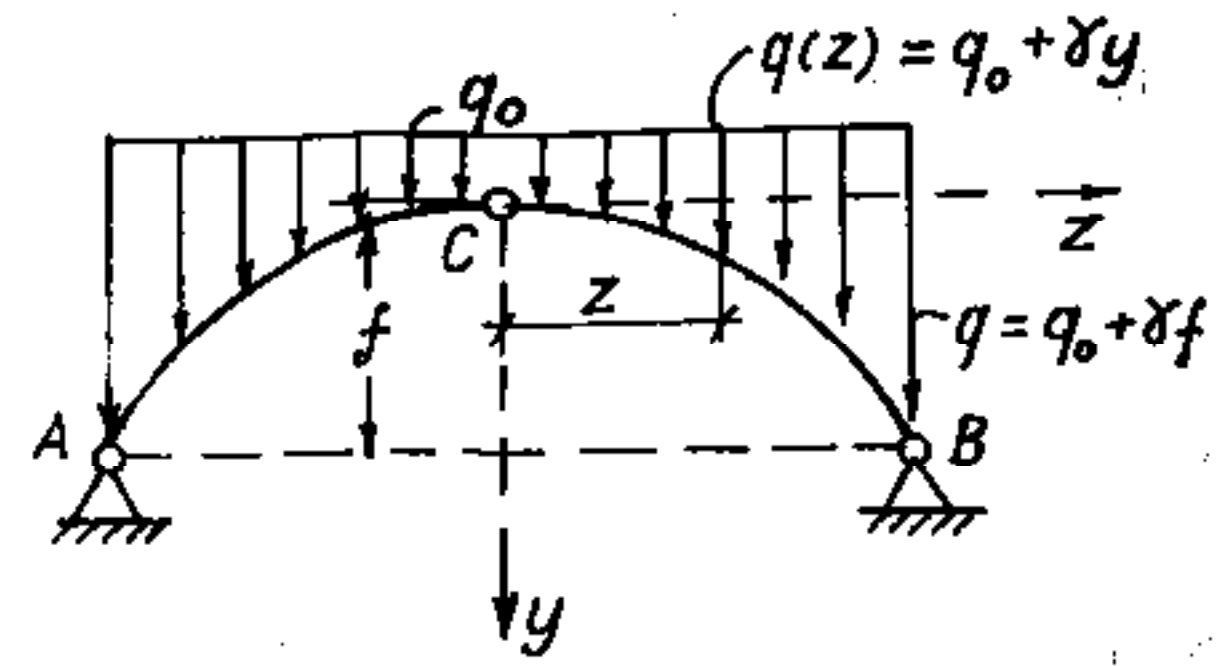
trong đó:

$q(z)$  – cường độ của tải trọng phân bố tại tiết diện bất kỳ;

$q_0$  – cường độ của tải trọng tại đỉnh  $C$  của vòm;

$\gamma$  – hệ số tỷ lệ;

$y$  – tung độ của tiết diện bất kỳ trong vòm ứng với hệ trục tọa độ đã chọn;



Hình 2.33

Phương trình vi phân của trục hợp lý trong trường hợp này có dạng:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q_0 + \gamma y}{H}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng quen biết như sau:

$$y = A \operatorname{sh} kz + B \operatorname{ch} kz - \frac{q_0}{\gamma}, \quad \text{với } k = \sqrt{\frac{\gamma}{H}}$$

$A, B$  là các hằng số tích phân được xác định theo các điều kiện biên của bài toán:

- Tại đỉnh  $C$  của vòm đối xứng cong tròn tru, góc nghiêng của tiếp tuyến bằng không, nghĩa là khi  $z = 0$  thì  $dy/dz = 0$ .
- Đỉnh  $C$  là gốc tọa độ cho nên tại đó tung độ  $y$  của vòm bằng không, nghĩa là khi  $z = 0$  thì  $y = 0$ .

Từ các điều kiện biên này ta được:

$$\text{Khi } z = 0: \quad dy/dz = kA \operatorname{ch} kz + kB \operatorname{sh} kz = kA \operatorname{ch} 0 + kB \operatorname{sh} 0 = 0, \quad \text{nên } kA = 0, \quad \text{suy ra } A = 0.$$

$$\text{Khi } z = 0: \quad y = A \operatorname{sh} kz + B \operatorname{ch} kz - \frac{q_0}{\gamma} = B - \frac{q_0}{\gamma} = 0, \quad \text{suy ra } B = \frac{q_0}{\gamma}.$$

Như vậy phương trình trục hợp lý của vòm có dạng  $y = \frac{q_0}{\gamma} (\operatorname{ch} kz - 1)$ .

Đường cong của phương trình này chính là đường dây xích catenôit.

Để xác định hệ số  $k$ , ta dùng điều kiện:

$$\text{Khi } z = \pm \frac{l}{2}: \quad y = f = \frac{q_0}{\gamma} \left( \operatorname{ch} k \frac{l}{2} - 1 \right), \quad \text{suy ra } k = \frac{2}{l} \operatorname{argch} \left( \frac{f \cdot \gamma}{q_0} + 1 \right).$$



Để cho tiện, ta gọi:  $m = \frac{q_0 + \gamma f}{q_0}$ , suy ra  $\frac{q_0}{\gamma} = \frac{f}{m-1}$ .

Như vậy phương trình trục hợp lý của vòm có thể biểu diễn dưới dạng sau

$$y = \frac{f}{m-1} (ch kz - 1).$$

Còn hệ số  $k$  được xác định theo công thức sau:  $k = \frac{2}{l} \operatorname{argch} m$ .

Nếu chú ý rằng  $\operatorname{argch} m = \ln\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$  thì ta có thể xác định  $k$  theo công

thức:  $k = \frac{2}{l} \ln\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$ .

Nếu cho biết trị số  $m$  thì ta có thể xác định được hệ số  $k$  và tiếp đó tìm được trục hợp lý của vòm ba khớp.

#### 4. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng vuông góc với trục vòm

Các công trình làm việc trong môi trường chất lỏng hoặc chất khí thường chịu áp lực vuông góc với trục. Để tìm trục hợp lý của vòm trước tiên ta cần khảo sát cân bằng của một đoạn vô cùng bé của trục hợp lý của vòm (hình 2.34).

Lấy tổng mômen của các lực đối với tâm cong  $O$  của phân tố

$$\sum M_o = N\rho - (N+dN)\rho = 0.$$

Từ đó ta có  $dN = 0$  như vậy  $N = \text{const}$ .

Viết phương trình hình chiếu theo phương  $u$ :

$$\sum u = N \sin \frac{d\alpha}{2} + N \sin \frac{d\alpha}{2} - q ds = 0.$$

Góc  $d\alpha$  vô cùng bé nên có thể xem  $\sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$ .

Ta được:  $N d\alpha - q ds = 0$ .

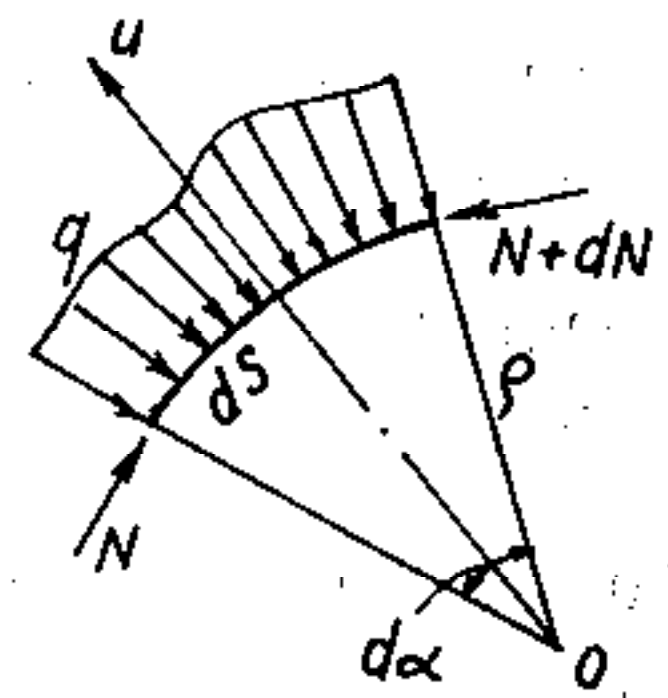
Nhưng  $ds = \rho d\alpha$  nên sau khi thay vào điều kiện này, ta được:

$$\rho = \frac{N}{q}. \quad (2.12)$$

Vì  $N = \text{const}$  nên bán kính cong  $\rho$  của vòm tỷ lệ nghịch với cường độ của tải trọng phân bố  $q$ .

Biểu thức (2.12) là phương trình vi phân của trục hợp lý của vòm chịu tải trọng vuông góc với trục vòm. Giải phương trình này cho trường hợp tải trọng  $q$  phân bố bất kỳ rất phức tạp.

Trường hợp đặc biệt, khi  $q = \text{const}$  (tải trọng phân bố đều) ta có  $\rho = \text{const}$ .

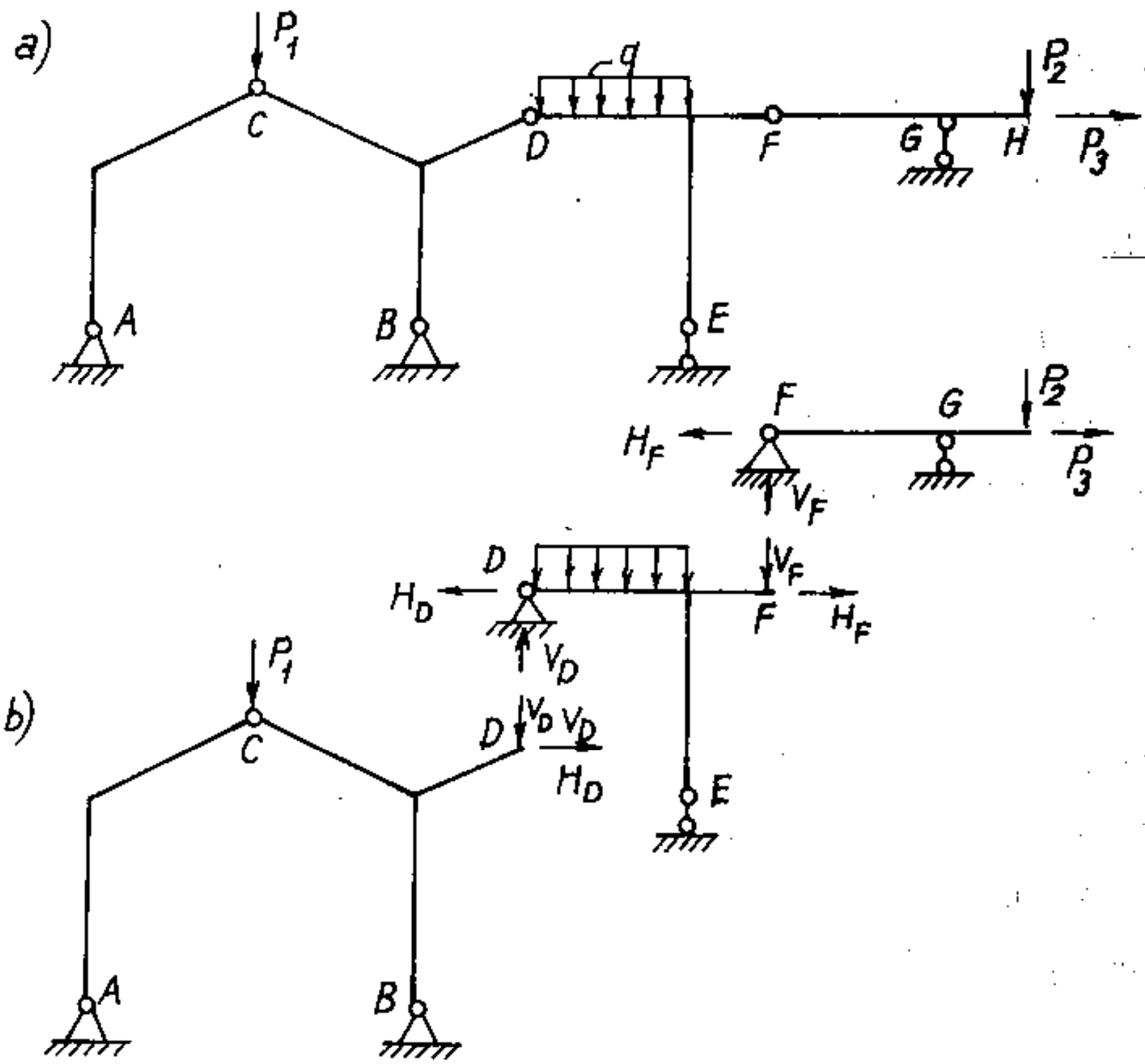


Hình 2.34

Như vậy, trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với trục vòm là đường tròn.

## 2.6. Cách tính hệ ghép tĩnh định chịu tải trọng bất động

Ta sẽ tìm hiểu cách tính hệ ghép tĩnh định chịu tải trọng bất động thông qua hệ vẽ trên hình 2.35.



Hình 2.35

Thứ tự thực hiện:

- ◆ Phân tích cấu tạo của hệ ghép, tức là *phân biệt hệ chính và hệ phụ* theo quy cách đã nêu trong 2.1.B. Ta thấy  $ACBD$  là hệ chính;  $DEF$  là hệ phụ của  $ACBD$  và là hệ chính của  $FGH$ ;  $FGH$  là hệ phụ.
- ◆ Căn cứ vào tính chất chịu lực của hệ chính và hệ phụ đã nêu trong 2.1.B, đưa hệ ghép về sơ đồ tính tách biệt từng hệ đơn giản như trên hình 2.35b.
- ◆ Thực hiện tính toán riêng biệt từng hệ đơn giản theo thứ tự: tính hệ phụ trước rồi chuyển sang tính hệ chính.

Đối với hệ trên hình 2.35 trước hết cần tính hệ phụ  $FGH$  chịu tác dụng của các lực  $P_2, P_3$  và xác định phản lực  $V_F, H_F$ . Tiếp đó xét hệ  $DEF$  chịu tải trọng tác dụng trên hệ đó (tải trọng phân bố  $q$ ) và các áp lực truyền từ hệ phụ  $FGH$ . Những áp lực này có giá trị bằng  $V_F$  và  $H_F$  đã biết khi tính hệ phụ  $FGH$  nhưng đặt tại  $F$  với chiều ngược lại. Thực hiện tính toán hệ  $DEF$  với các lực đã biết và xác định được các phản lực  $V_D, H_D$  tại khớp  $D$ . Sau cùng tính hệ chính

$ACBD$  chịu tải trọng tác dụng trên hệ đỡ (lực  $P_1$ ) và các áp lực đặt tại  $D$  truyền từ  $DEF$  tới. Những áp lực này có giá trị bằng  $V_D$  và  $H_D$  như đã biết nhưng với chiều ngược lại.

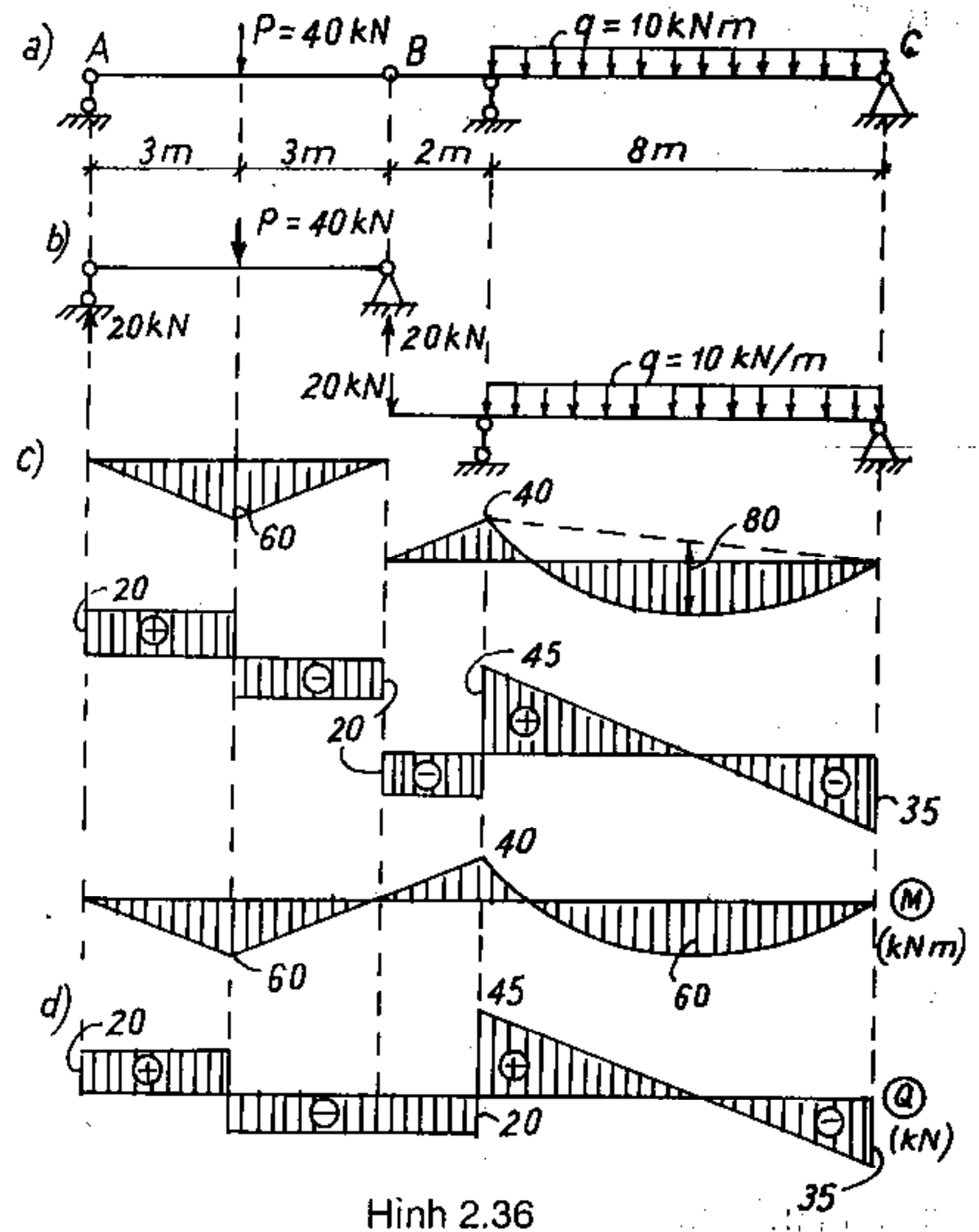
**Ví dụ 2.2.** Vẽ biểu đồ nội lực trong hệ dầm ghép cho trên hình 2.36.

Quá trình phân tích bài toán và kết quả cần tìm được trình bày trên hình 2.36.

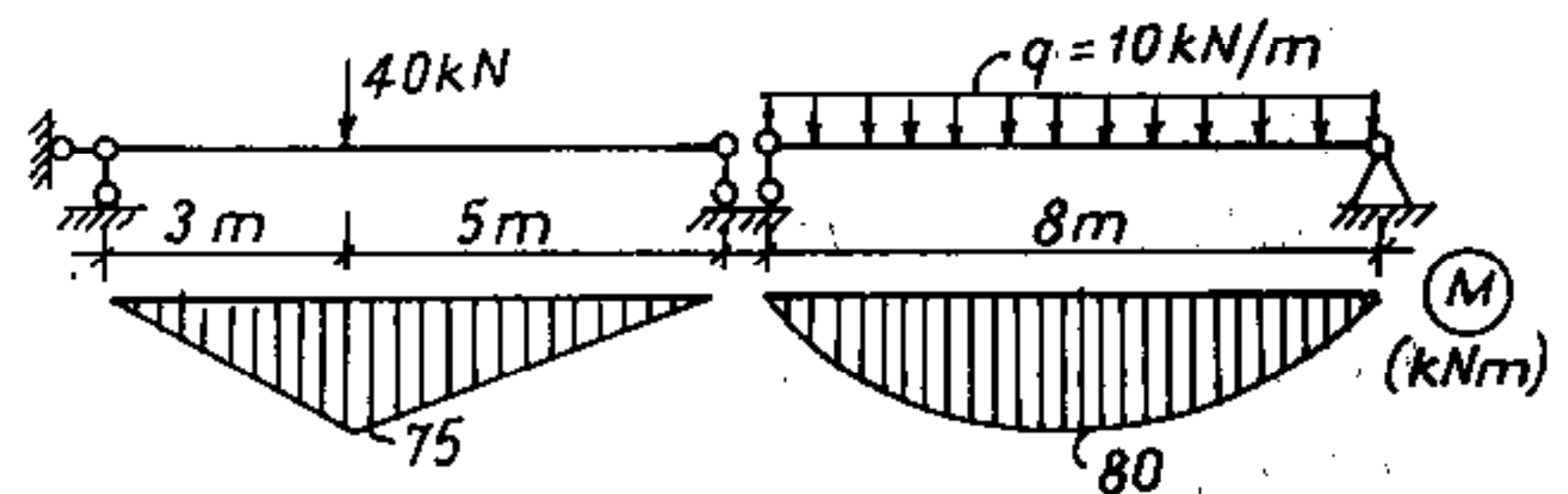
**Chú thích**

So sánh biểu đồ mômen uốn vẽ trên hình 2.36d của dầm ghép hai nhịp với biểu đồ mômen uốn trên hình 2.37 của hai dầm đơn giản có cùng nhịp và chịu tải trọng tương đương ta thấy mômen uốn lớn nhất trong dầm ghép là 60 kNm còn mômen uốn lớn nhất trong dầm đơn giản là 80 kNm.

Điều đó cho ta thấy: dùng dầm ghép có khả năng tiết kiệm vật liệu hơn so với dùng dầm đơn giản có điều kiện làm việc tương đương.



Hình 2.36



Hình 2.37

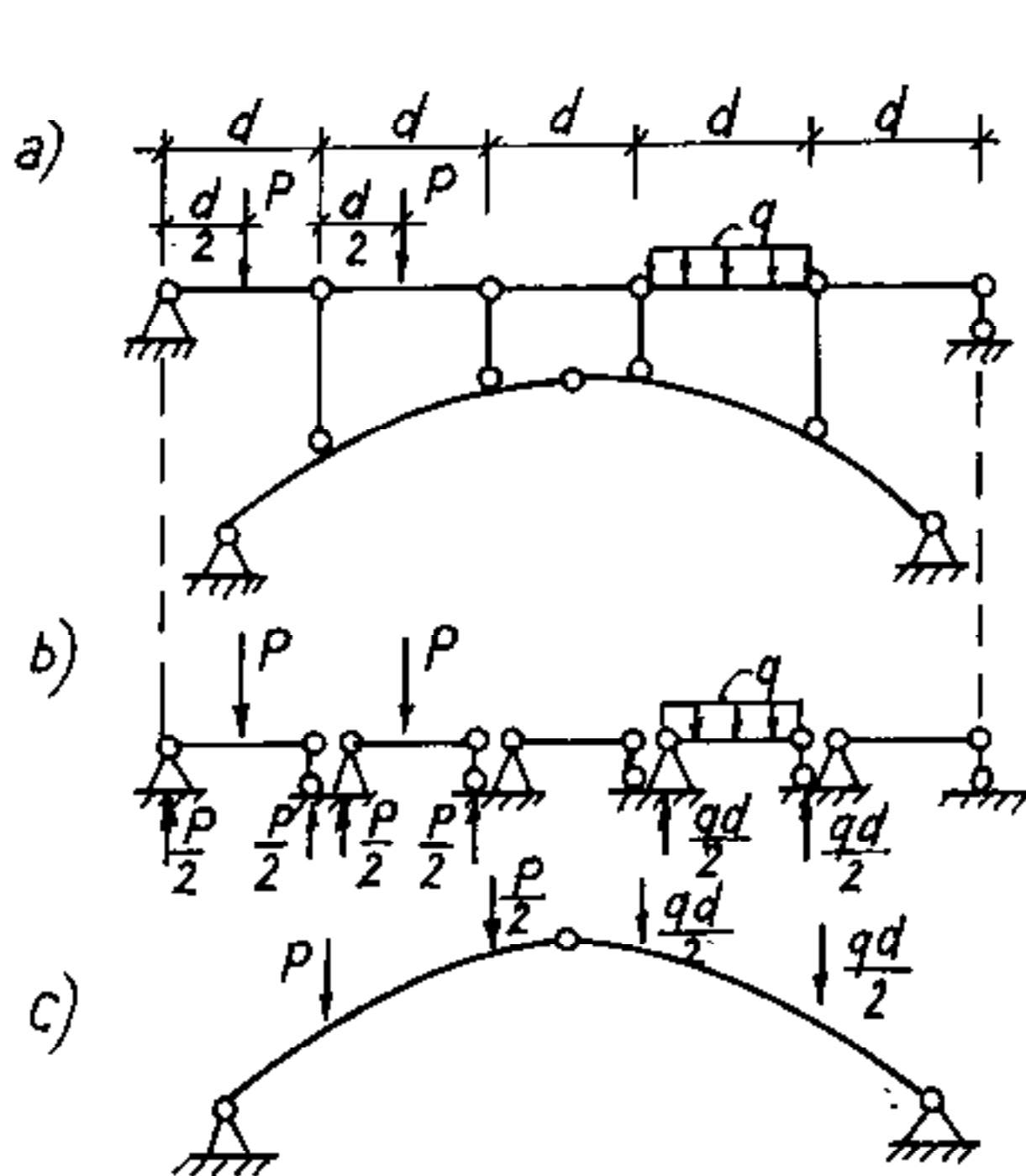
## 2.7. Cách tính hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng bất động

Nhiệm vụ chủ yếu của việc tính các hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng bất động là xác định nội lực hoặc vẽ các biểu đồ nội lực trong kết cấu chịu lực chính. Thực chất của vấn đề là phải giải quyết cách truyền lực từ dầm dọc phụ xuống kết cấu chịu lực chính.

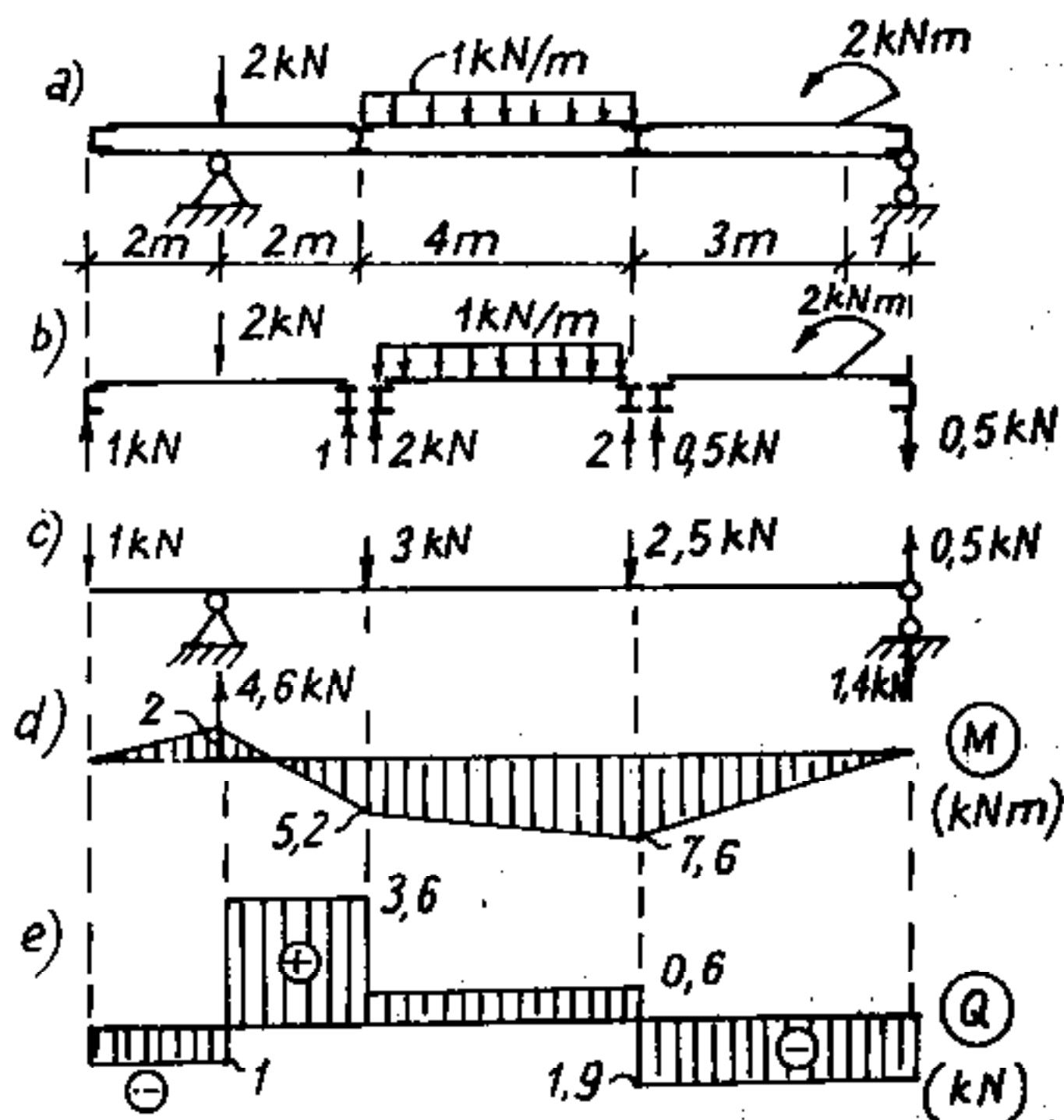
Xét hệ có hệ thống truyền lực như trên hình 2.38a. Ta thấy các dầm dọc phụ làm

việc như những dầm đơn giản kê trên các gối tựa đặt tại vị trí các mắt truyền lực (hình 2.38b). Dưới tác dụng của tải trọng, trong dầm dọc phụ sẽ phát sinh các phản lực và nội lực xác định theo quy tắc đã trình bày trong 2.4. Để tính kết cấu chính ta cần thay thế tác dụng của tải trọng trên dầm dọc phụ bằng những áp lực đặt tại vị trí các mắt truyền lực. Theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng, những áp lực này có giá trị bằng các phản lực tương ứng đã được xác định khi tính dầm dọc phụ nhưng có chiều ngược lại. Sơ đồ tính kết cấu chính như trên hình 2.38c. Như vậy các lực đặt trên kết cấu chính đều đã biết và ta có thể xác định nội lực trong kết cấu chính theo quy tắc chung đã biết.

Ta nhận thấy các lực trên kết cấu chính của hệ có hệ thống truyền lực là những lực tập trung có vị trí cố định đặt tại các mắt truyền lực. Do đó nếu kết cấu chính là hệ gồm các thanh thẳng thì biểu đồ lực dọc và lực cắt luôn luôn có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn còn biểu đồ mômen uốn có dạng hình đa giác.



Hình 2.38



Hình 2.39

**Ví dụ 2.13.** Vẽ biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực cắt trong dầm chính của hệ có hệ thống truyền lực cho trên hình 2.39a.

Quá trình phân tích bài toán và kết quả cần tìm được trình bày trên hình 2.39:

## 2.8. Phương pháp tải trọng bằng không để khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ thanh phẳng có đủ số liên kết

Ở chương 1 ta đã nghiên cứu sự cấu tạo hình học của các hệ thanh phẳng. Trong mục này giới thiệu thêm một phương pháp khác là phương pháp tải trọng bằng không. Cần chú ý là có thể áp dụng phương pháp tải trọng bằng không cho hệ

thanh phẳng bất kỳ có sơ liên kết vừa đủ (điều kiện cần được thỏa mãn với  $n \equiv 0$ ). Phương pháp này thường có hiệu quả đối với những hệ dàn.

Tiêu chí của sự bất biến hình và không bất biến hình theo phương pháp tải trọng bằng không như sau:

*Khi không có tải trọng tác dụng trên hệ,*

- \* nếu phản lực và nội lực trong tất cả các thanh đều duy nhất bằng không thì hệ bất biến hình;
- \* nếu phản lực và nội lực trong tất cả hoặc một số thanh là vô định thì hệ không bất biến hình.

Thật vậy, ta hãy khảo sát nội lực  $N_3$  trong hệ trên hình 2.40. Từ phương trình cân bằng:

$$\sum M_K^{ph} = -N_3\rho + Ph = 0,$$

suy ra: 
$$N_3 = \frac{Ph}{\rho}.$$

Khi  $P = 0$ :

- ❖ nếu  $\rho \neq 0$  tức là hệ bất biến hình (ba thanh không đồng quy) thì  $N_3 = \frac{0}{\rho} = 0$ ;
- ❖ nếu  $\rho = 0$  tức là hệ biến hình tức thời (ba thanh đồng quy) thì  $N_3 = \frac{0}{0}$  (vô định).

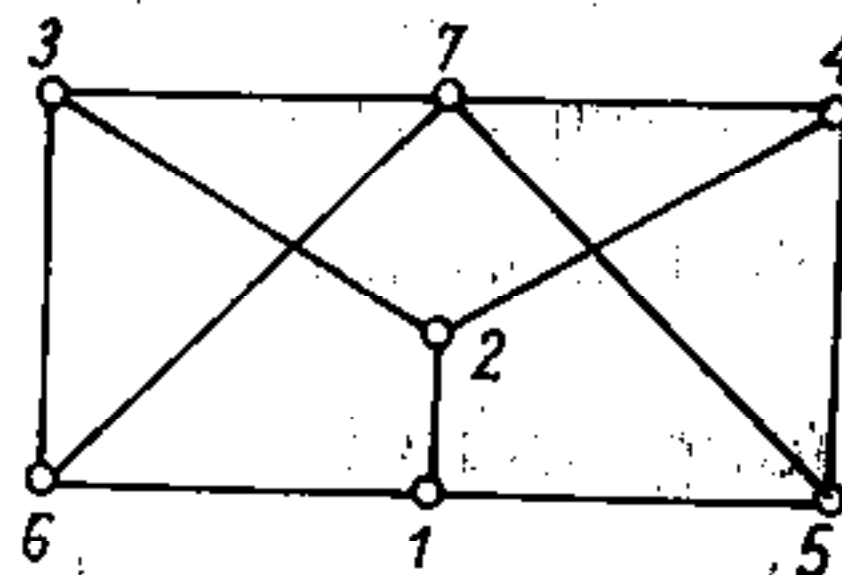
Lực  $N_3$  có dạng vô định tức là có thể tồn tại nhiều giá trị khác nhau.

Cũng thực hiện như vậy đối với các lực  $N_1$  và  $N_2$  ta sẽ đi đến kết luận tương tự.

**Ví dụ 2.14.** Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ cho trên hình 2.41.

Vận dụng hệ thức đã biết trong chương 1 ta thấy hệ đủ liên kết.

Khi không có tải trọng tác dụng trên hệ, lần lượt tách các mắt 1, 2, 3, 4, 5 và 6 đồng thời chú ý đến các nhận xét trong phương pháp tách mắt, ta dễ dàng thấy lực dọc trong tất cả các thanh đều duy nhất bằng không. Vậy hệ bất biến hình.



Hình 2.41

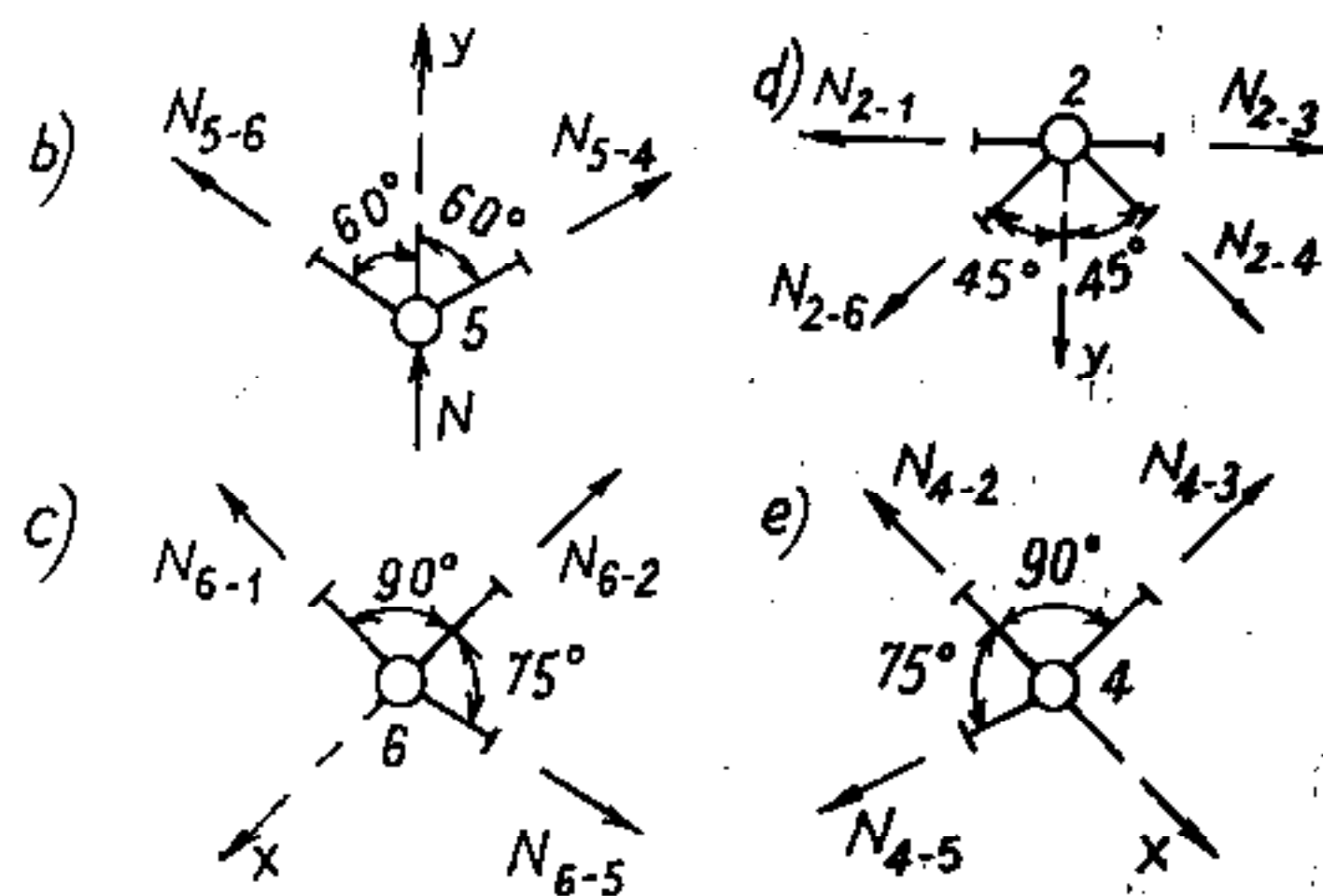
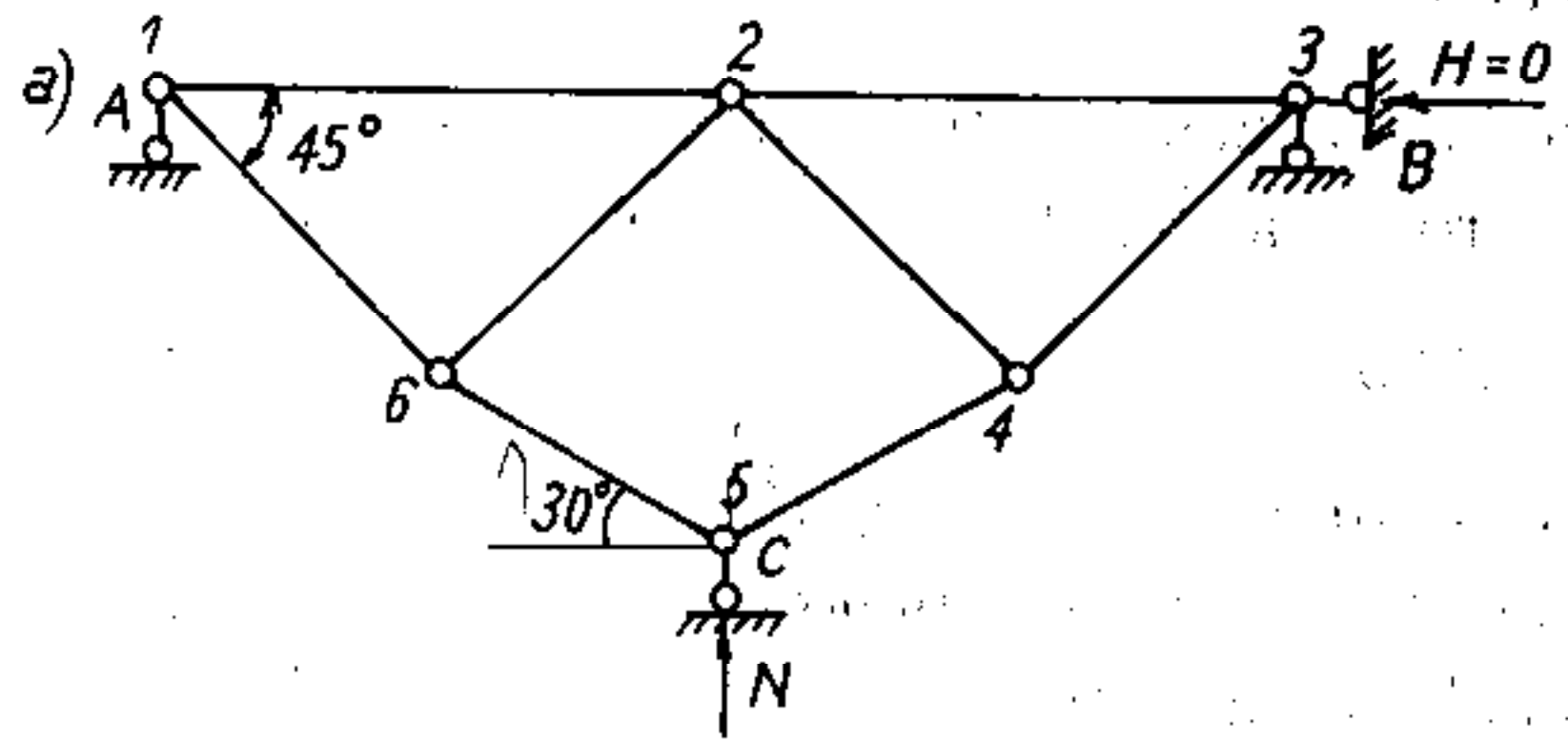
**Ví dụ 2.15.** Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 2.42a.

Giả sử hệ không chịu tải trọng. Viết phương trình cân bằng hình chiếu theo

phương ngang  $\sum X = 0$ , ta sẽ được  $H = 0$ . Cần tiếp tục xác định nội lực trong các thanh còn lại.

Trong trường hợp này chưa thể tìm ngay được các thành phần phản lực đứng cũng như không thể tách mắt nào chỉ có hai thanh chưa biết nội lực hoặc thực hiện mặt cắt qua ba thanh chưa biết nội lực, do đó chưa xác định ngay được nội lực trong một thanh nào đó của dàn.

Để giải quyết khó khăn này ta giả thiết coi phản lực tại gối C bằng  $N$  và xác định lực dọc trong các thanh khác theo  $N$ .



Hình 2.42

- Tách mắt 5 (hình 2.42b):

$$\sum Y = N_{5-6} \cos 60^\circ + N_{5-4} \cos 60^\circ + N = 0.$$

Theo tính chất đối xứng:  $N_{5-6} = N_{5-4}$ , do đó:  $N_{5-6} = N_{5-4} = -N$ .

- Tách mắt 6 (hình 2.42c):

$$\sum X = -N_{6-2} - N_{6-5} \cos 75^\circ = 0,$$

suy ra:  $N_{6-2} = -N_{6-5} \cos 75^\circ = N \cos 75^\circ.$

- Tách mắt 2 (hình 2.42d):

$$\sum Y = N_{2-4} \cos 45^\circ + N_{2-6} \cos 45^\circ = 0,$$

suy ra:  $N_{2-4} = -N_{2-6} = -N \cos 75^\circ. \quad (a)$

- Mặt khác, tách mắt 4 (hình 2.42e) và xác định lại giá trị  $N_{4-2}$ , ta có:

$$\sum X = -N_{4-2} - N_{4-5} \cos 75^\circ = 0,$$

suy ra:  $N_{4-2} = -N_{4-5} \cos 75^\circ = N \cos 75^\circ. \quad (b)$

So sánh (a) và (b) ta thấy hai kết quả tính được cho một thanh mâu thuẫn với



nhau. Điều đó không thể tồn tại được. Chỉ có thể giải quyết mâu thuẫn này khi phản lực  $N = 0$ .

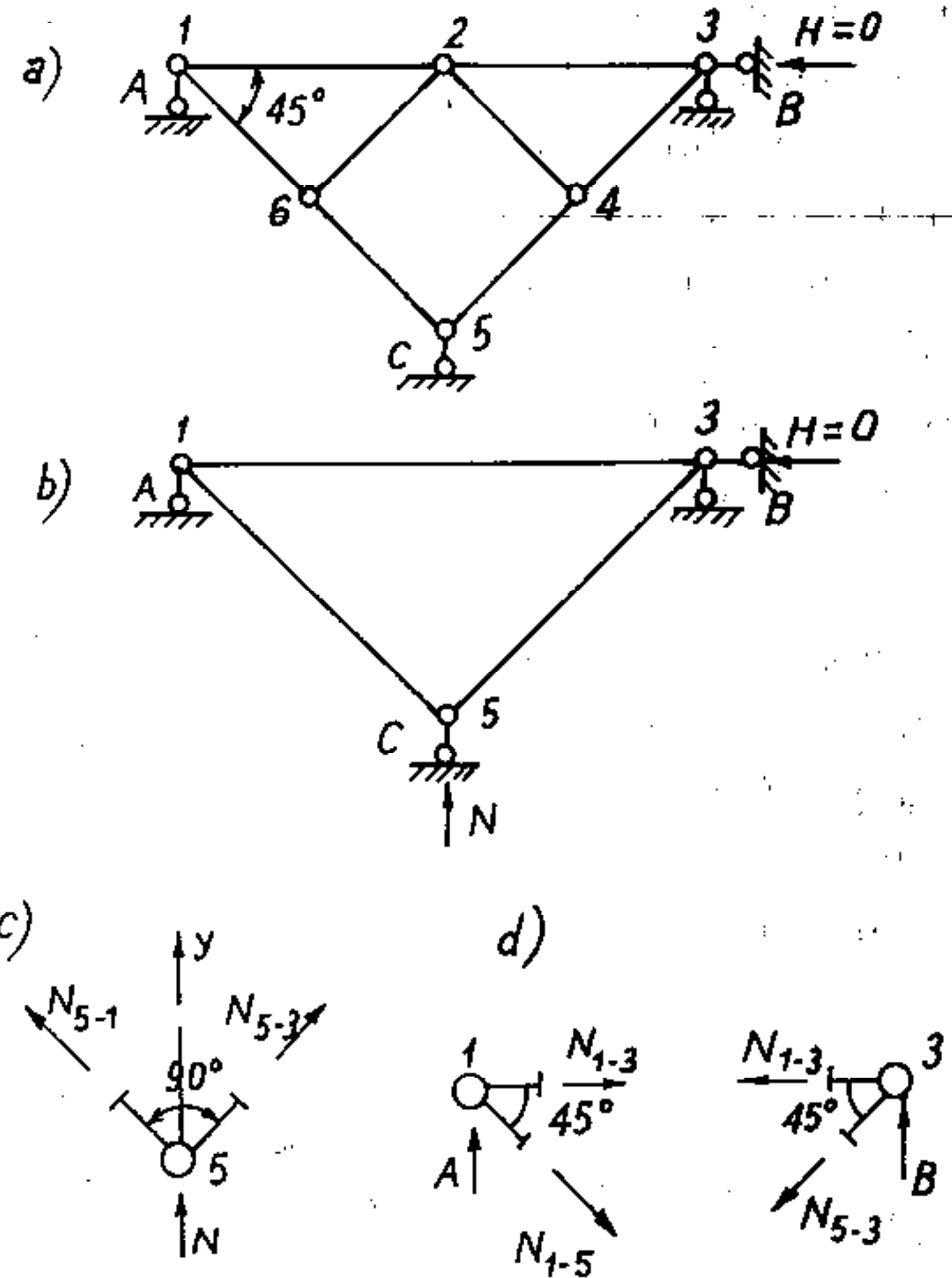
Sau khi lý luận  $N = 0$ , lần lượt tách mắt 5, 6, 4, 1 và 3 ta dễ dàng nhận thấy lực dọc trong các thanh còn lại đều bằng không. Kết luận: hệ bất biến hình.

**Ví dụ 2.16.** Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 2.43a

Giả sử không có tải trọng tác dụng trên hệ. Từ phương trình hình chiếu theo phương ngang  $\sum X = 0$ , ta sẽ tìm được  $H = 0$ . Tách mắt 6 và 4 ta dễ dàng thấy  $N_{6-2} = 0$  và  $N_{4-2} = 0$ .

Chỉ biết các lực này bằng không, ta chưa thể kết luận được là hệ bất biến hình, cần phải tiếp tục xác định nội lực trong các thanh biên và ba thành phần phản lực đứng.

Hệ đã loại bỏ những thanh không làm việc vẽ trên hình 2.43b. Cũng tương tự như ở ví dụ trên ta giả thiết phản lực tại gối C có giá trị bằng  $N$  và xác định lực dọc trong các thanh khác theo  $N$ .



Hình 2.43

- Tách mắt 5 (hình 2.43c):

$$\sum Y = N_{5-1} \cos 45^\circ + N_{5-3} \cos 45^\circ + N = 0.$$

Theo tính chất đối xứng:  $N_{5-1} = N_{5-3}$ , do đó:  $N_{5-1} = N_{5-3} = -N \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- Tách mắt 1 (hình 2.43d):

$$\sum X = N_{1-3} + N_{5-1} \cos 45^\circ = 0, \text{ suy ra: } N_{1-3} = -N_{5-1} \cos 45^\circ = +N/2. \quad (\text{a})$$

- Tách mắt 3 (hình 2.43e):

$$\sum X = N_{1-3} + N_{5-3} \cos 45^\circ = 0, \text{ suy ra: } N_{1-3} = -N_{5-3} \cos 45^\circ = +N/2. \quad (\text{b})$$

Trong hai lần tính, hai kết quả (a) và (b) của lực dọc  $N_{1-3}$  thống nhất với nhau.

Như vậy các nội lực trong hệ 2.43b đều có thể biểu diễn theo  $N$ .

Nếu cho  $N$  nhiều giá trị tùy ý khác nhau ta sẽ tìm được nhiều đáp số khác nhau cho nội lực trong các thanh của hệ mà không gặp mâu thuẫn gì cả.

Điều đó chứng tỏ nội lực trong các thanh biên và ba thành phần lực thẳng đứng là vô định.

Kết luận: hệ không bất biến hình.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 2.1. Nêu đặc điểm chịu lực của các dạng hệ tĩnh định.
- 2.2. Nêu các dạng phương trình cân bằng và các điều cần lưu ý khi mô tả sự cân bằng của các hệ lực phẳng: đồng quy, song song, bất kỳ.
- 2.3. Vì sao có thể phát biểu hệ bất biến hình đủ liên kết là hệ tĩnh định?
- 2.4. Phát biểu các giả thiết thường được áp dụng khi tính dàn. Phân tích về các thành phần nội lực trong các thanh của dàn.
- 2.5. Cách tính dàn theo phương pháp tách mắt:
  - Trình bày nội dung phương pháp, phạm vi áp dụng và ưu khuyết điểm của phương pháp.
  - Cần thực hiện như thế nào để cho mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa một ẩn lực?
  - Nêu cách phát hiện các thanh không chịu lực trong dàn.
- 2.6. Cách tính dàn theo phương pháp mặt cắt đơn giản:
  - Nêu phạm vi áp dụng và nội dung phương pháp.
  - Cần thực hiện như thế nào để trong mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa một ẩn lực?
- 2.7. Cách tính dàn theo phương pháp mặt cắt phối hợp:
  - Khi nào cần phải phối hợp các mặt cắt?
  - Điều kiện phối hợp?
- 2.8. Trình bày cách vẽ giản đồ nội lực Maxwell - Cremona.

- 2.9. Trình bày các định nghĩa và quy ước về dấu khi xác định nội lực tại một tiết diện.
- 2.10. Nêu và giải thích về dạng biểu đồ nội lực trong các đoạn thanh thẳng không chịu tải trọng và chịu tải trọng phân bố tương ứng với các quy luật cơ bản khác nhau.
- 2.11. Nhận xét về đặc điểm của biểu đồ nội lực ở lân cận tiết diện chịu lực tập trung, tiết diện chịu mômen tập trung và tiết diện có sự thay đổi về cường độ của lực phân bố.
- 2.12. Hệ ba khớp:
- Định nghĩa, tính chất, ưu khuyết điểm?
  - Trình bày cách xác định các thành phần phản lực và nội lực.
- 2.13. Thiết lập các biểu thức nội lực tại một tiết diện bất kỳ trong vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng.
- 2.14. Hệ ghép tĩnh định:
- Định nghĩa.
  - Phân biệt kết cấu chính, kết cấu phụ và tính chất chịu lực của chúng.
  - Nêu thứ tự tiến hành khi tính hệ ghép.
- 2.15. Hệ có hệ thống truyền lực:
- Định nghĩa, ý nghĩa của việc sử dụng hệ thống truyền lực?
  - Nêu thứ tự tiến hành khi tính hệ có hệ thống truyền lực.
- 2.16. Phương pháp tải trọng bằng không để khảo sát sự cấu tạo hình học:
- Điều kiện áp dụng?
  - Chứng minh các tiêu chí về bất biến hình và không bất biến hình của phương pháp.

# 3

## Cách xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động

### 3.1. Phương pháp nghiên cứu hệ chịu tải trọng di động

Tải trọng di động là tải trọng có vị trí thay đổi trên công trình, ví dụ như đoàn xe lửa, đoàn xe ô tô, đoàn người đi trên cầu...

Khác với trường hợp hệ chịu tải trọng bất động, nội lực trong hệ chịu tải trọng di động thay đổi theo vị trí của tải trọng. Do đó khi nghiên cứu cách tính công trình chịu tải trọng di động ta phải giải quyết hai nhiệm vụ sau:

- ✱ *Xác định vị trí để tính của tải trọng di động trên công trình, nghĩa là tìm vị trí của tải trọng để sao cho tương ứng với vị trí đó thì đại lượng nghiên cứu (chẳng hạn như mômen uốn, lực cắt, phản lực, chuyển vị...) sẽ có giá trị lớn nhất. Vị trí để tính còn gọi là vị trí bất lợi nhất.*
- ✱ *Xác định trị số để tính của đại lượng nghiên cứu tương ứng với vị trí để tính của tải trọng. Trị số để tính của đại lượng nghiên cứu là trị số lớn nhất về giá trị tuyệt đối khi tải trọng di động trên công trình.*

Nói chung, về nguyên tắc, muốn tìm vị trí bất lợi nhất và giá trị để tính ta có thể tiến hành theo các bước sau:

- ◆ Giả thiết coi khoảng cách giữa các tải trọng di động trên công trình là không đổi (điều này phù hợp với các quy định trong quy trình thiết kế) và xác định vị trí của chúng theo một tọa độ chạy  $z$ .
- ◆ Thiết lập biểu thức của đại lượng nghiên cứu  $S$  (nội lực, phản lực hoặc chuyển vị) theo tọa độ chạy  $z$ .
- ◆ Tìm các cực trị của hàm  $S(z)$ . Giá trị cực trị lớn nhất là giá trị để tính còn vị trí tương ứng của đoàn tải trọng là vị trí bất lợi nhất.

Về nguyên tắc, cách giải bài toán cũng tương đối đơn giản nhưng trên thực tế khi vận dụng ta thường gặp nhiều khó khăn vì các hàm  $S(z)$  thường không phải là hàm liên tục về giá trị cũng như về đạo hàm của chúng. Vì vậy, cách giải quyết này thường không được áp dụng.

Đối với những hệ thanh được phép áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể giải quyết vấn đề một cách đơn giản bằng *phương pháp đường ảnh hưởng* (nếu hệ thanh là hệ phẳng) hoặc mặt *ảnh hưởng* (nếu hệ thanh là hệ không gian). Dưới đây ta sẽ nghiên cứu kỹ nội dung phương pháp đường ảnh hưởng.

### A. Định nghĩa đường ảnh hưởng

*Đường ảnh hưởng  $S$  là đồ thị biểu diễn luật biến thiên của đại lượng nghiên cứu  $S$  xuất hiện tại một vị trí xác định trên công trình (chẳng hạn phản lực tại liên kết, mômen uốn, lực dọc, chuyển vị tại một tiết diện trên công trình) theo vị trí của một tải trọng tập trung bằng đơn vị lực không thứ nguyên có phương và chiều không đổi di động trên công trình.*

Để cho gọn, ta sẽ ký hiệu đường ảnh hưởng  $S$  là *d.a.h.  $S$* .

Ngoài định nghĩa trên, trong thực tế còn tồn tại các định nghĩa về đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  khi tải trọng là mômen tập trung di động, khi tải trọng là lực tập trung quay xung quanh một điểm (để tính cần trục) v.v... Trong giáo trình này chỉ đề cập đến các nội dung về đường ảnh hưởng tương ứng với định nghĩa đã nêu ở trên. Trên cơ sở đó, người đọc dễ dàng suy luận cho các trường hợp khác.

### B. Nguyên tắc vẽ đường ảnh hưởng

Theo định nghĩa trên, khi vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  ta thực hiện theo thứ tự như sau:

- 1) Giả thiết trên công trình chỉ có một lực tập trung  $P$  bằng đơn vị đặt cách gốc tọa độ chọn tùy ý một khoảng là  $z$ .
- 2) Xác định đại lượng nghiên cứu  $S$  tương ứng với vị trí của lực  $P$  có tọa độ  $z$  theo các phương pháp tính với tải trọng bất động đã quen biết. Như vậy ta sẽ được biểu thức giải tích  $S(z)$  của đại lượng nghiên cứu. Biểu thức này là phương trình đường ảnh hưởng  $S$ .
- 3) Cho tọa độ  $z$  biến thiên, tức là tải trọng  $P$  di động trên công trình, căn cứ vào phương trình vừa tìm được, vẽ đồ thị của hàm  $S(z)$ , tức là vẽ được đường ảnh hưởng  $S$ .

Khi vẽ đường ảnh hưởng cần thống nhất quy ước:

- ❖ Chọn đường chuẩn vuông góc với phương của lực di động (hoặc chọn song song với trục của các thanh).
- ❖ Các tung độ dựng vuông góc với đường chuẩn.
- ❖ Các tung độ dương dựng theo chiều của lực di động.

**Chú ý:** Nếu đại lượng nghiên cứu  $S$  không phải là một hàm duy nhất liên tục theo tọa độ  $z$  trên toàn bộ công trình thì đường ảnh hưởng  $S$  bao gồm nhiều đoạn với các quy luật biến thiên khác nhau. Trong trường hợp này ta cần lần lượt đặt tải trọng  $P$  trên từng đoạn một để xác định hàm  $S(z)$  tương ứng.

**Ví dụ 3.1.** Vẽ các đường ảnh hưởng phản lực  $A$ , phản lực  $B$ , mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $k$  cho dầm trên hình 3.1a khi lực  $P$  hướng từ trên xuống đi động vuông góc với trục dầm.

a) Đường ảnh hưởng phản lực  $A$  và phản lực  $B$

Chọn gốc tọa độ tại gối tựa  $A$  và đặt lực  $P$  cách gốc một khoảng  $z$ .

Xác định các phản lực từ các điều kiện cân bằng

$$\sum M_B = Al - P(l-z) = 0;$$

$$\sum M_A = Bl - Pz = 0.$$

Suy ra  $A = P \frac{l-z}{l}; \quad B = P \frac{z}{l}.$

Nếu cho  $P = 1$  ta có:

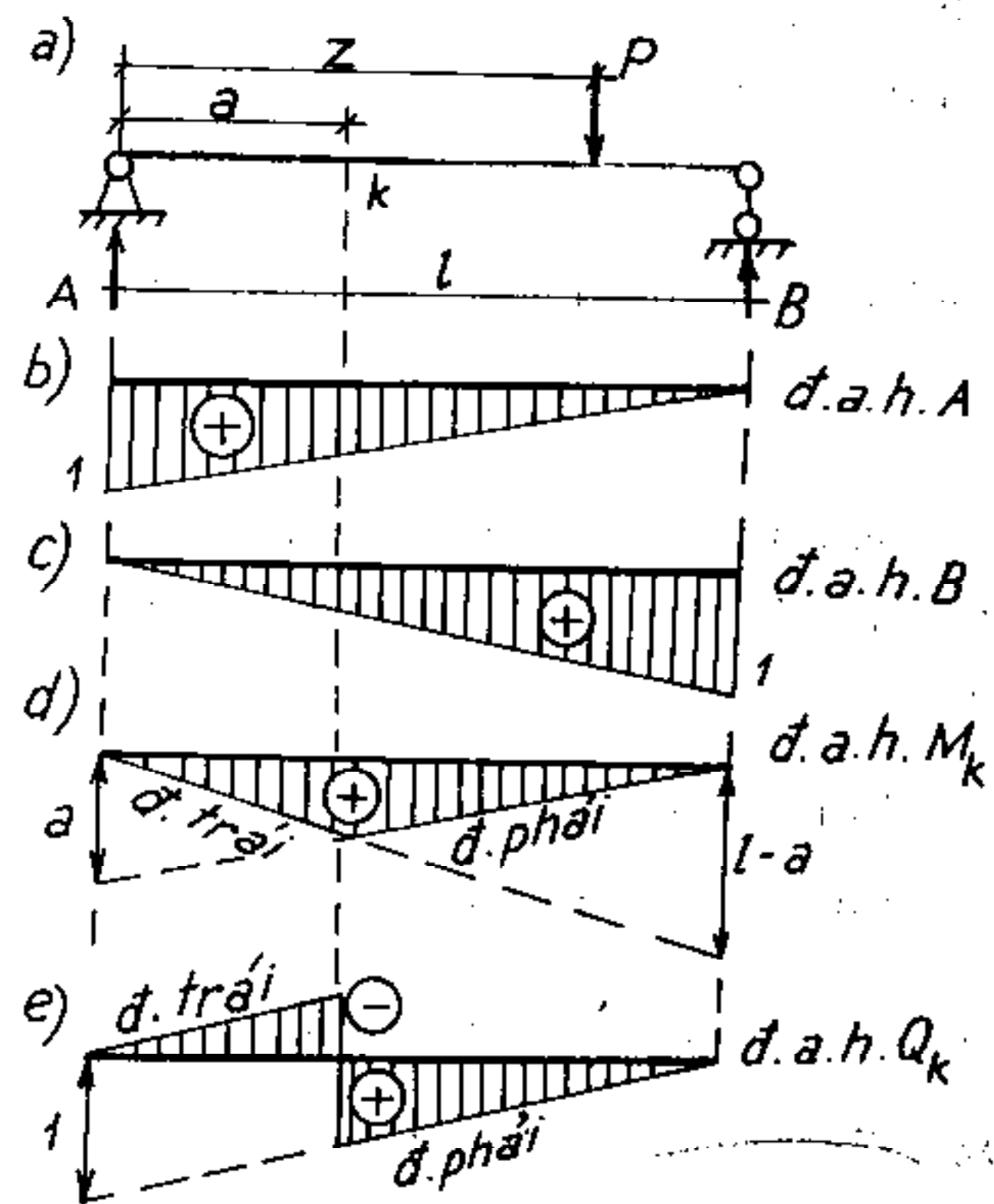
$$d.a.h. A = \frac{l-z}{l}; \quad d.a.h. B = \frac{z}{l}.$$

Cho  $z$  biến thiên ta sẽ vẽ được đường ảnh hưởng. Các đ.a.h. có dạng đường thẳng.

Khi  $z = 0$  ta có  $A = 1; B = 0.$

Khi  $z = l$  ta có  $A = 0; B = 1.$

Đ.a.h.  $A$  và đ.a.h.  $B$  như trên hình 3.1b và c.



Hình 3.1

b) Đường ảnh hưởng của mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $k$

Trong trường hợp này ta phải lần lượt đặt tải trọng trong từng đoạn: đoạn bên trái tiết diện  $k$  (từ gối  $A$  đến tiết diện  $k$ ) và đoạn bên phải tiết diện  $k$  (từ tiết diện  $k$  đến gối  $B$ ) vì ứng với mỗi đoạn đó ta sẽ tìm được những biểu thức khác nhau của đ.a.h.  $M_k$  và đ.a.h.  $Q_k$ .

- Khi tải trọng  $P$  đặt ở bên trái tiết diện  $k$  ( $0 \leq z \leq a$ ): thực hiện mặt cắt qua tiết diện  $k$  và khảo sát cân bằng phần bên phải, ta có:

$$M_k = B(l-a);$$

$$Q_k = -B.$$



Thay  $B$  bằng hàm ảnh hưởng tìm được ở trên, ta có

$$\text{đ.a.h. } M_k = \frac{z}{l}(l-a); \quad \text{đ.a.h. } Q_k = -\frac{z}{l}.$$

Các phương trình chỉ thích hợp khi lực  $P$  di động ở bên trái tiết diện  $k$  tức là khi  $0 \leq z \leq a$  nên gọi là phương trình *đường trái*. Ta vẽ các đường trái theo hai tung độ:

$$\begin{aligned} - \text{ khi } z = 0 \quad \text{ta có} \quad & M_k = 0; \quad Q_k = 0; \\ - \text{ khi } z = l \quad \text{ta có} \quad & M_k = l-a; \quad Q_k = -1. \end{aligned}$$

Các đường trái của *đ.a.h.  $M_k$*  và *đ.a.h.  $Q_k$*  vẽ trên hình 3.1d và e.

Phần thích dụng của các đường này là các đoạn thẳng liền nét trên hình vẽ.

- Khi tải trọng  $P$  đặt ở bên phải tiết diện  $k$ , khảo sát cân bằng của phần bên trái tiết diện  $k$ , ta có

$$M_k = A \cdot a; \quad Q_k = A.$$

Thay  $A$  bằng hàm ảnh hưởng tìm được ở trên, ta có

$$\text{đ.a.h. } M_k = \frac{l-z}{l} a; \quad \text{đ.a.h. } Q_k = \frac{l-z}{l}.$$

Các phương trình này chỉ thích hợp khi  $P$  di động ở bên phải tiết diện  $k$  ( $a \leq x \leq l$ ) nên gọi là phương trình *đường phải*. Ta vẽ đường phải theo hai tung độ:

$$\begin{aligned} - \text{ khi } z = 0 \quad \text{ta có} \quad & M_k = +a; \quad Q_k = 1; \\ - \text{ khi } z = l \quad \text{ta có} \quad & M_k = 0; \quad Q_k = 0. \end{aligned}$$

Trên các hình 3.1d và e, phần thích dụng của đường phải được vẽ liền nét.

*Nhận xét:* Ta có thể dễ dàng kiểm nghiệm những đặc điểm sau:

1. Đường trái và đường phải của *đ.a.h.  $M_k$*  cắt nhau tại điểm ứng dưới tiết diện  $k$ . Thật vậy, nếu cho  $z = a$  trong các phương trình đường trái và đường phải của *đ.a.h.  $M_k$*  ta sẽ tìm được hai tung độ có giá trị bằng nhau và bằng  $a(l-a)/l$ .
2. Đường trái và đường phải của *đ.a.h.  $Q_k$*  song song với nhau. Thật vậy, so sánh hai hệ số góc ta thấy chúng bằng nhau và bằng  $-1/l$ .

### C. Ý nghĩa và thứ nguyên của tung độ đường ảnh hưởng

#### 1. Ý nghĩa của tung độ *đ.a.h. $S$*

Theo định nghĩa và cách vẽ đường ảnh hưởng nêu ở trên, ta suy ra ý nghĩa của một tung độ đường ảnh hưởng.

*Tung độ của đường ảnh hưởng S tại một tiết diện nào đó biểu thị đại lượng S do lực tập trung P bằng đơn vị đặt ngay tại tiết diện đó gây ra.*

Để phân biệt rõ khái niệm về đường ảnh hưởng với khái niệm biểu đồ, ta nhớ lại ý nghĩa của một tung độ biểu đồ.

*Tung độ biểu đồ S tại một tiết diện nào đó biểu thị giá trị của đại lượng S tại tiết diện đó do các tải trọng bất động đã biết có vị trí không đổi gây ra.*

Như vậy, biểu đồ cho ta thấy được sự phân bố của đại lượng nghiên cứu trên tất cả các tiết diện của công trình trong điều kiện tải trọng bất động. Nếu thay đổi vị trí của tải trọng thì biểu đồ cũng thay đổi theo, lúc đó ta phải vẽ lại biểu đồ khác.

Đường ảnh hưởng cho ta thấy sự biến thiên của đại lượng cần nghiên cứu tại một vị trí xác định nào đó trên công trình tương ứng với tất cả các vị trí của một tải trọng tập trung P bằng đơn vị. Đường ảnh hưởng không nói lên được sự biến thiên của đại lượng nghiên cứu từ tiết diện này qua tiết diện khác, khi thay đổi vị trí của tiết diện thì cần phải vẽ đường ảnh hưởng khác.

## **2. Thứ nguyên của tung độ đ.a.h. S**

Qua ví dụ trên khi vẽ đ.a.h. S ta đã thiết lập phương trình đ.a.h. S theo tải trọng tập trung  $P = 1$  là một lực không thứ nguyên. Trong thực tế, tải trọng là đại lượng có thứ nguyên (TN), do đó ta có

$$TN \text{ của tung độ đ.a.h. } S = \frac{TN \text{ của đại lượng } S}{TN \text{ của lực } P}$$

Từ đó ta có thể dễ dàng suy ra đơn vị đo của tung độ đ.a.h. S.

Chẳng hạn, nếu lực được đo bằng kN, chiều dài được đo bằng m thì đơn vị của tung độ đ.a.h. phản lực sẽ là kN/kN tức là hư số còn tung độ đ.a.h. mômen uốn là kNm/kN = m v.v...

## **D. Dạng của đường ảnh hưởng**

Nói chung, đ.a.h. S có thể là đường thẳng hoặc cong. Riêng trong trường hợp đại lượng S là phản lực hoặc nội lực trong hệ tĩnh định, đ.a.h. S bao gồm những đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng tương ứng với một phần xác định của hệ.

Các phần xác định này được giới hạn trong phạm vi mỗi miếng cứng thành phần của hệ nếu miếng cứng đó không chứa đại lượng S. Trong trường hợp miếng cứng thành phần của hệ có chứa đại lượng S thì phạm vi miếng cứng này sẽ được chia thành hai phần xác định bởi mặt cắt qua tiết diện hoặc qua liên kết có chứa đại lượng S.

### 3.2. Đường ảnh hưởng trong dầm tĩnh định đơn giản

Dưới đây ta sẽ xây dựng các mẫu đường ảnh hưởng cho trường hợp dầm đơn giản có đầu thừa (hình 3.2a), khi lực  $P$  hướng từ trên xuống dưới và di động vuông góc với trục dầm. Trên cơ sở những kết quả này có thể dễ dàng suy ra các đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản và dầm công xôn.

#### A. Đường ảnh hưởng phản lực A và B

Theo định nghĩa, đường ảnh hưởng phản lực A trong dầm đơn giản AB là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của phản lực A khi lực  $P=1$  di động trên dầm, hay nói cách khác là khi hoành độ  $z$  của lực đó biến thiên trong khoảng  $(-l_1 \leq z \leq l+l_2)$  nếu chọn gốc tọa độ ở gối A.

Muốn vậy, ta xác định giá trị của phản lực A với giả thiết lực  $P=1$  đặt tại hoành độ  $z$  bằng cách viết phương trình cân bằng tĩnh học của dầm dưới dạng tổng mômen đối với điểm B.

$$\sum M_B = -A l + 1(l-z) = 0,$$

$$\text{hay } d.a.h. A = \frac{l-z}{l}.$$

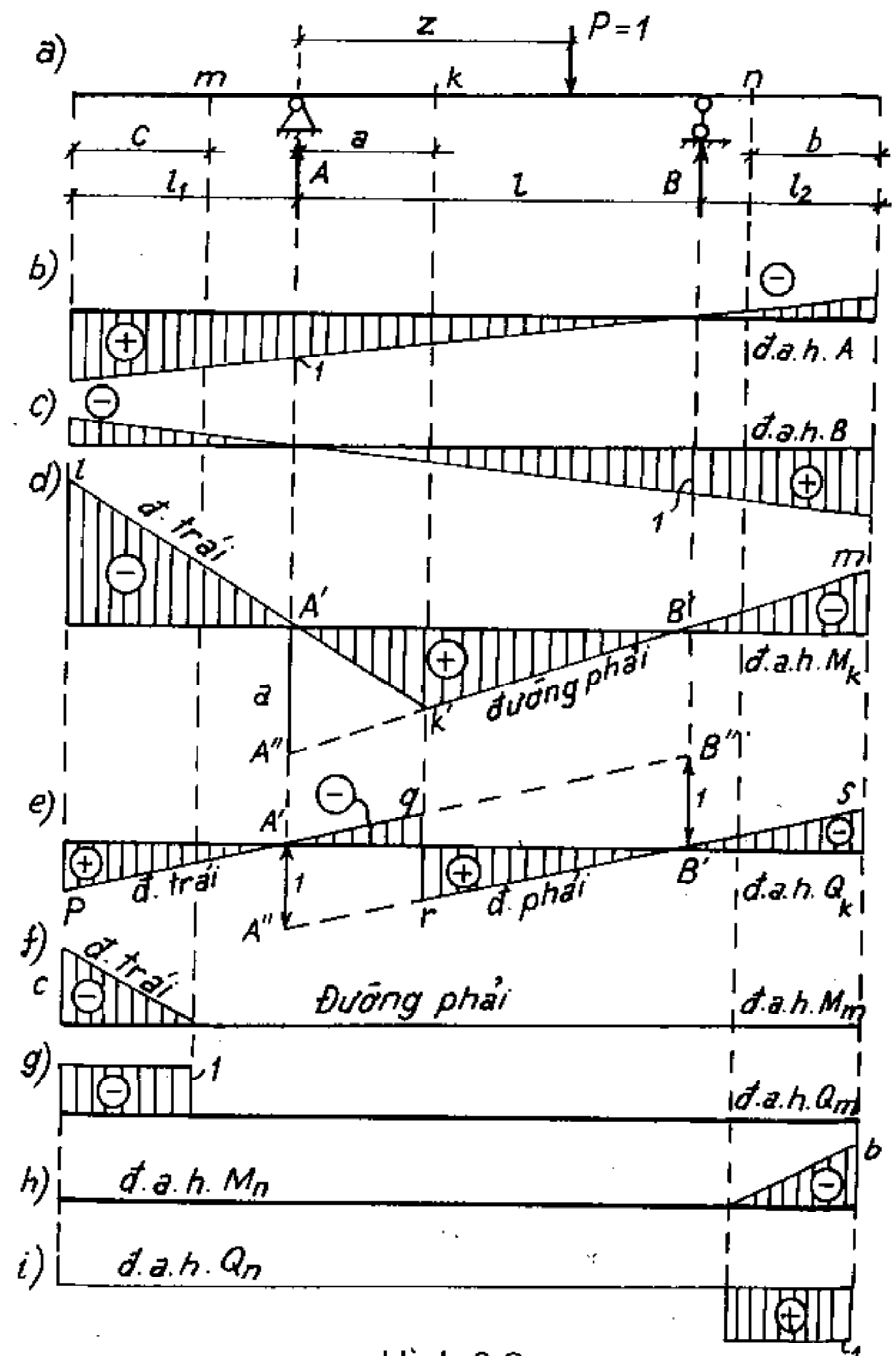
Biểu thức đó chứng tỏ rằng phản lực A là hàm bậc nhất của biến số  $z$ .

Khi  $z$  thay đổi trong khoảng  $(l_1, l+l_2)$  thì đường ảnh hưởng A có dạng đường thẳng xác định bởi hai điểm:

$$\text{khi } z = 0; A = +1,$$

$$\text{khi } z = l; A = 0.$$

Tương tự, để vẽ đường ảnh hưởng B ta viết điều kiện cân bằng tĩnh học dưới dạng tổng mômen đối với điểm A.



Hình 3.2

$$\sum M_A = Bl - l.z = 0, \text{ suy ra } d.a.h. B = \frac{z}{l}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi } z = 0; & \quad B = 0. \\ \text{Khi } z = l; & \quad B = +1. \end{aligned}$$

Các đường ảnh hưởng của phản lực vẽ trên hình 3.2b và c.

### B. Đường ảnh hưởng nội lực tại một tiết diện bất kỳ trên dầm

Tiết diện trong dầm bao gồm hai loại:

- \* Tiết diện nằm trong khoảng giữa hai gối tựa (tiết diện trong nhịp).
- \* Tiết diện nằm ở đầu thừa của dầm.

Tương ứng với từng loại tiết diện kể trên, cách vẽ đường ảnh hưởng có khác nhau đôi chút.

Khi tải trọng tác dụng vuông góc với trục dầm, trong dầm không phát sinh lực dọc  $N$  cho nên ta chỉ cần vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn  $M$  và lực cắt  $Q$ .

#### 1. Tiết diện trong nhịp

Ta vẽ  $d.a.h. M_k$  và  $d.a.h. Q_k$  tại tiết diện  $k$  nằm trong khoảng giữa hai gối tựa (trong nhịp).

Khi di động trên dầm tải trọng  $P=1$  có thể ở bên trái tiết diện  $k$ , hoặc ở bên phải tiết diện  $k$ . Ứng với mỗi trường hợp đó, phương trình  $d.a.h.$  sẽ khác nhau.

- Khi  $P=1$  di động trên phần bên trái tiết diện  $k$  tức là  $-l_1 \leq z \leq a$ , ta tính mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $k$  bằng cách tưởng tượng cắt dầm tại tiết diện  $k$  thành hai phần và xét điều kiện cân bằng của phần dầm chứa ít lực hơn để cho phương trình được đơn giản (phần bên phải), kết quả:

$$d.a.h. M_k = \frac{z}{l}(l-a); \quad d.a.h. Q_k = -\frac{z}{l}.$$

Hai biểu thức trên chỉ đúng khi lực  $P=1$  ở phần bên trái tiết diện  $k$ , tức là khi  $-l_1 \leq z \leq a$ . Trên hình 3.2d, e ta vẽ được hai đường thẳng biểu thị hai phương trình trên ứng với vị trí của  $P=1$  ở bên trái tiết diện, gọi là những *đường trái*. Mỗi đường thẳng đó xác định bằng hai điểm.

$$\begin{aligned} \text{Khi } z = 0; & \quad M_k = 0; \quad Q_k = 0. \\ \text{Khi } z = l; & \quad M_k = l-a; \quad Q_k = -1. \end{aligned}$$

- Khi  $P=1$  di động trên phần bên phải tiết diện  $k$  tức là  $a \leq z \leq (l+l_2)$ , khảo sát sự cân bằng của phần bên trái tiết diện  $k$ , ta tính được mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $k$  như sau

$$\text{đ.a.h. } M_k = \frac{l-z}{l} a; \quad \text{đ.a.h. } Q_k = \frac{l-z}{l}.$$

$$\text{Khi } z = 0; \quad M_k = +a; \quad Q_k = +1.$$

$$\text{Khi } z = l; \quad M_k = 0; \quad Q_k = 0.$$

Trên hình 3.2d và e ta vẽ được hai đường thẳng biểu thị hai phương trình tương ứng với các vị trí của tải trọng  $P=l$  ở bên phải tiết diện  $k$ , gọi là những đường phải.

Hai đường gãy khúc  $lk'm$  và  $pqrs$  vẽ trên hình 3.2d và e lần lượt là  $\text{đ.a.h. } M_k$  và  $\text{đ.a.h. } Q_k$  cần tìm.

**Nhận xét:**

1) Từ  $\text{đ.a.h. } M_k$  ta nhận thấy đường trái và đường phải giao nhau tại điểm  $k'$  ứng dưới tiết diện  $k$  và đường kéo dài của đường phải cắt đường dóng thẳng đứng ứng dưới gối  $A$  tại điểm  $A''$  với tung độ  $A'A'' = a$  là khoảng cách từ gối tựa trái đến tiết diện  $k$ .

Từ nhận xét đó ta suy ra cách vẽ thực hành  $\text{đ.a.h. } M_k$  của tiết diện bất kỳ  $k$  trong nhịp như sau

- Trước tiên vẽ đường phải, được xác định bởi  $A''$  là điểm ứng dưới gối tựa  $A$  với tung độ  $A'A'' = a$  và  $B'$  là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối tựa  $B$ . Nối  $A''$  với  $B'$  bằng đường thẳng. Từ tiết diện  $k$  kẻ đường dóng thẳng đứng cắt đường phải  $A''B'$  ở  $k'$ . Đoạn  $k'B'm$  là phần thích dụng của đường phải.
- Sau đó vẽ đường trái bằng cách nối  $k'$  với  $A'$  là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối tựa  $A$ . Phần thích dụng của đường trái là đoạn  $k'A'l$ .

2) Từ  $\text{đ.a.h. } Q_k$  ta nhận thấy đường trái và đường phải song song với nhau, đồng thời tại các gối tựa  $\text{đ.a.h. } Q_k$  có tung độ bằng không.

Từ nhận xét đó ta suy ra cách vẽ thực hành  $\text{đ.a.h. } Q_k$  cho tiết diện bất kỳ  $k$  trong nhịp như sau

- Trước tiên vẽ đường phải, xác định bởi  $A''$  là điểm ứng dưới gối  $A$  với  $A'A'' = 1$  và  $B'$  là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối  $B$ . Nối  $A''$  với  $B'$  bằng đường thẳng. Từ tiết diện  $k$  kẻ đường dóng thẳng đứng cắt đường phải  $A''B'$  ở  $r$ . Đoạn  $rB's$  là phần thích dụng của đường phải.
- Sau đó vẽ đường trái bằng cách kẻ từ  $A'$  là điểm có tung độ bằng không ứng dưới gối  $A$ , đường thẳng song song với đường phải. Phần thích dụng của đường trái là đoạn  $pA'q$ .

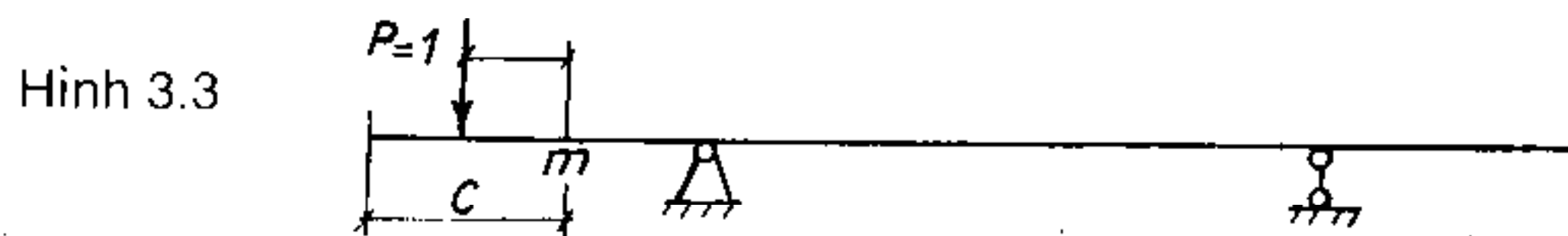
## 2. Tiết diện ở đầu thừa

Ví dụ, vẽ  $\text{đ.a.h. } M_m$  và  $\text{đ.a.h. } Q_m$  tại tiết diện  $m$  ở đầu thừa của dầm.

- Khi  $P=l$  di động ở phần bên trái tiết diện  $m$ , để cho tiện lợi ta chọn gốc tọa

độ  $z$  tại tiết diện  $m$  như trên hình 3.3 và xét sự cân bằng của phần dầm có ít lực (phần đầu thừa), ta được:

$$\text{đ.a.h. } M_m = -1 \cdot z = -z; \quad \text{đ.a.h. } Q_m = -1; \quad \text{với } (0 \leq z \leq c).$$



Từ hai biểu thức đó ta có

khi  $z=0$ ;  $M_m = 0$ ;  $Q_m = -1$ ;  
 khi  $z=c$ ;  $M_m = -c$ ;  $Q_m = -1$ .

Trên hình 3.2f, g ta vẽ các đường trái của đ.a.h.  $M_m$  và đ.a.h.  $Q_m$  ứng với khi  $0 \leq z \leq c$ .

- Khi  $P=1$  di động trên phần bên phải tiết diện  $m$ , vẫn xét cân bằng của phần đầu thừa ta có

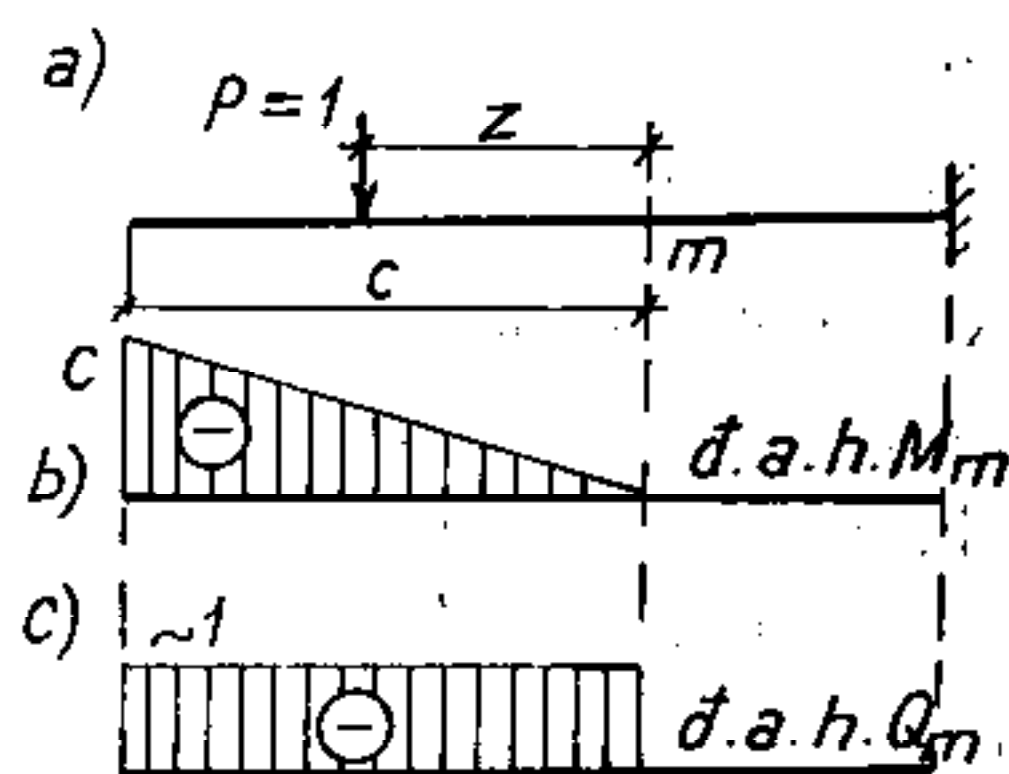
$$\text{đ.a.h. } M_m = 0; \quad \text{đ.a.h. } Q_m = 0.$$

Như vậy những đường phải của đ.a.h.  $M_m$  và đ.a.h.  $Q_m$  hoàn toàn trùng với đường chuẩn.

Cách vẽ đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện  $n$  ở đầu thừa bên phải của dầm cũng tương tự như khi vẽ cho tiết diện  $m$ . Kết quả như trên hình 3.2h, i, lúc này đ.a.h. lực cắt mang dấu dương (ngược dấu so với trường hợp đ.a.h.  $Q_m$ ).

**Nhận xét:**

- 1) Đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện thuộc đầu thừa trái hoặc phải có dạng hình tam giác trong khoảng từ nút thừa đến tiết diện. Những đường này luôn luôn mang dấu âm và có tung độ lớn nhất tại nút thừa với giá trị bằng khoảng cách từ nút thừa đến tiết diện.
- 2) Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện thuộc đầu thừa có dạng hình chữ nhật với tung độ bằng 1. Nếu tiết diện ở đầu thừa trái thì đ.a.h. mang dấu âm còn nếu tiết diện ở đầu thừa phải thì đ.a.h. mang dấu dương.
- 3) Đường ảnh hưởng của phản lực và nội lực trong dầm đơn giản không có đầu thừa chính là những phần đường ảnh hưởng ở khoảng giữa hai gối tựa của dầm đơn giản có đầu thừa.
- 4) Đường ảnh hưởng nội lực trong dầm công xôn vẽ tương tự như đ.a.h. nội lực tại tiết diện ở đầu thừa (xem hình 3.4). Đường ảnh hưởng của thành phần phản lực mômen và thành phần phản lực đứng tại ngàm trong dầm công xôn có dạng đ.a.h. mômen uốn và lực cắt tại tiết diện ở ngàm.



Hình 3.4



### 3.3. Đường ảnh hưởng trong hệ có hệ thống truyền lực

Cách vẽ đường ảnh hưởng phản lực và nội lực trong hệ có hệ thống truyền lực được xây dựng trên nguyên tắc so sánh sự làm việc giữa hệ không có hệ thống truyền lực với hệ có hệ thống truyền lực khi chịu tải trọng  $P=1$  di động.

Để vẽ *d.a.h.*  $S$  khi đại lượng  $S$  thuộc hệ chịu lực chính là một kết cấu bất kỳ (có thể là dầm, khung, dàn, hệ ba khớp, hệ ghép...) ta tiến hành theo thứ tự như sau:

- 1) Vẽ *d.a.h.*  $S$  với giả thiết hệ không có hệ thống truyền lực tức là coi tải trọng  $P=1$  di động trực tiếp trên hệ chịu lực chính.

Song thực ra hệ có hệ thống truyền lực cho nên ta cần phải sửa lại kết quả vừa tìm được. Cách sửa lại sẽ được đề cập đến trong các bước tiếp sau.

- 2) Giữ lại các tung độ *d.a.h.*  $S$  (vừa tìm được ở bước 1) ứng dưới các mắt truyền lực, các tung độ này chính là các tung độ *d.a.h.*  $S$  khi có hệ thống truyền lực.

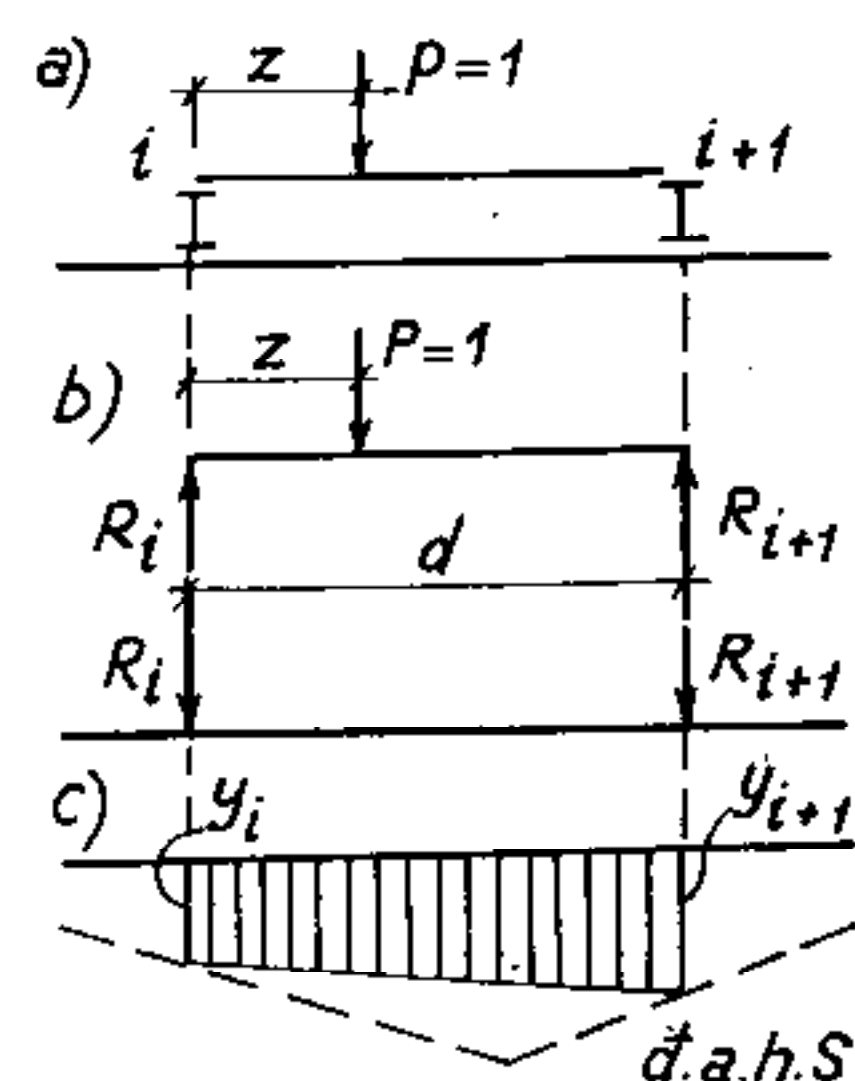
Thật vậy, theo ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng, các tung độ này biểu thị đại lượng  $S$  khi tải trọng  $P=1$  đặt ngay tại mắt truyền lực tương ứng. Nhưng khi  $P=1$  đặt đúng tại mắt truyền lực thì thực chất là nó đặt trực tiếp vào kết cấu chính nên các tung độ này đồng thời cũng là các tung độ *d.a.h.*  $S$  khi có hệ thống truyền lực.

Đặc biệt khi tải trọng  $P=1$  ở tại mắt đặt trên trái đất thì lực  $P=1$  sẽ truyền trực tiếp vào đất, không gây ảnh hưởng xuống hệ chịu lực chính cho nên ứng với các vị trí này tung độ đường ảnh hưởng có giá trị bằng không.

- 3) Lần lượt nối các tung độ vừa giữ lại ở trên với nhau bằng các đoạn thẳng nối trong phạm vi từng đốt.

Để xác nhận điều sửa đổi này là đúng ta cần chứng minh là khi  $P=1$  di động trong phạm vi một đốt, *d.a.h.*  $S$  sẽ có quy luật bậc nhất và đi qua hai tung độ ứng dưới mắt trái và mắt phải của đốt đang xét.

Xét một đốt bất kỳ nằm giữa mắt  $i$  và  $i+1$  trong hệ có hệ thống truyền lực (hình 3.5a). Giả sử *d.a.h.*  $S$  ứng với trường hợp hệ không có hệ thống truyền lực là đường đứt nét trên hình 3.5c các tung độ  $y_i$  và  $y_{i+1}$  là các tung độ được giữ lại ứng dưới mắt truyền lực  $i$  và  $(i+1)$ .



Hình 3.5

Lực  $P=1$  di động trên dốt sẽ truyền xuống hệ chịu lực chính qua hai áp lực  $R_i$  và  $R_{i+1}$  được xác định như sau (hình 3.5b):

$$R_i = \frac{d-z}{d}; \quad R_{i+1} = \frac{z}{d}.$$

Hai áp lực  $R_i$  và  $R_{i+1}$  thay thế cho tác dụng của lực  $P=1$  sẽ gây ảnh hưởng đến đại lượng  $S$  trong hệ chịu lực chính. Xuất phát từ ý nghĩa của tung độ *d.a.h.*  $S$  và áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể biểu thị ảnh hưởng của  $R_i$  và  $R_{i+1}$  đến đại lượng  $S$  như sau

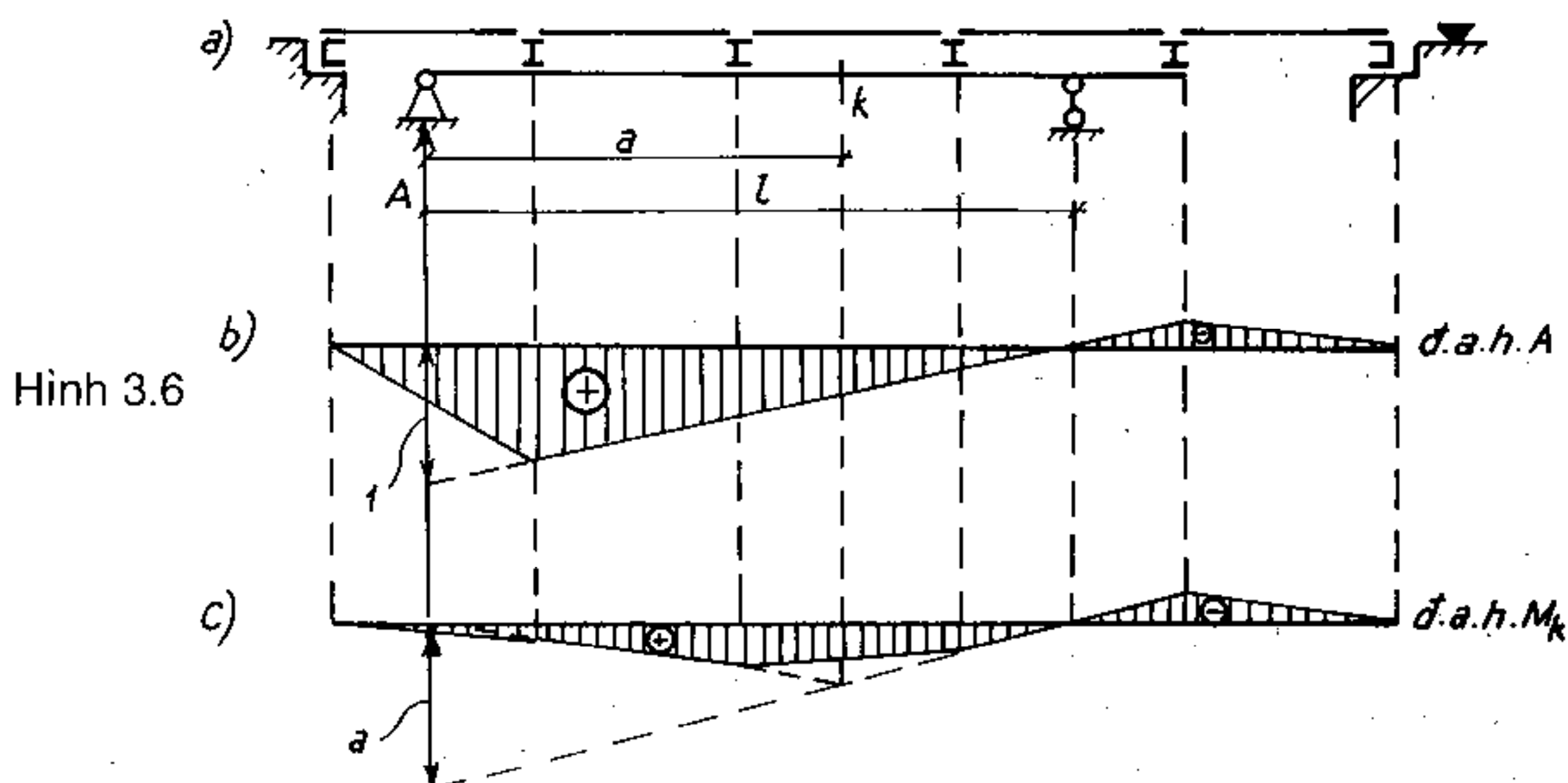
$$S = R_i y_i + R_{i+1} y_{i+1} \quad \text{hay} \quad S = \frac{d-z}{d} y_i + \frac{z}{d} y_{i+1}.$$

Đó là phương trình *d.a.h.*  $S$  khi  $P=1$  di động trên dốt  $i, (i+1)$ . Phương trình này có dạng bậc nhất nên *d.a.h.*  $S$  có dạng đường thẳng và đi qua hai tung độ  $y_i, y_{i+1}$ .

Thật vậy, khi  $z = 0$  ta có  $S = y_i$ ; khi  $z = d$  ta có  $S = y_{i+1}$ .

Đó là điều cần chứng minh.

**Ví dụ 3.2.** Cho hệ như trên hình 3.6a, vẽ các đường ảnh hưởng phản lực  $A$  và mômen uốn tại  $k$  khi lực di động thẳng đứng  $P=1$  hướng từ trên xuống dưới. Sau khi thực hiện theo thứ tự nêu trên, ta được kết quả như trên hình 3.6b, c.



Hình 3.6

### 3.4. Đường ảnh hưởng trong hệ ghép tĩnh định

Cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ ghép tĩnh định dựa trên nguyên tắc phân tích hệ thành những hệ đơn giản, hệ phụ tựa trên hệ chính. Đồng thời cần nắm vững tính chất sau:

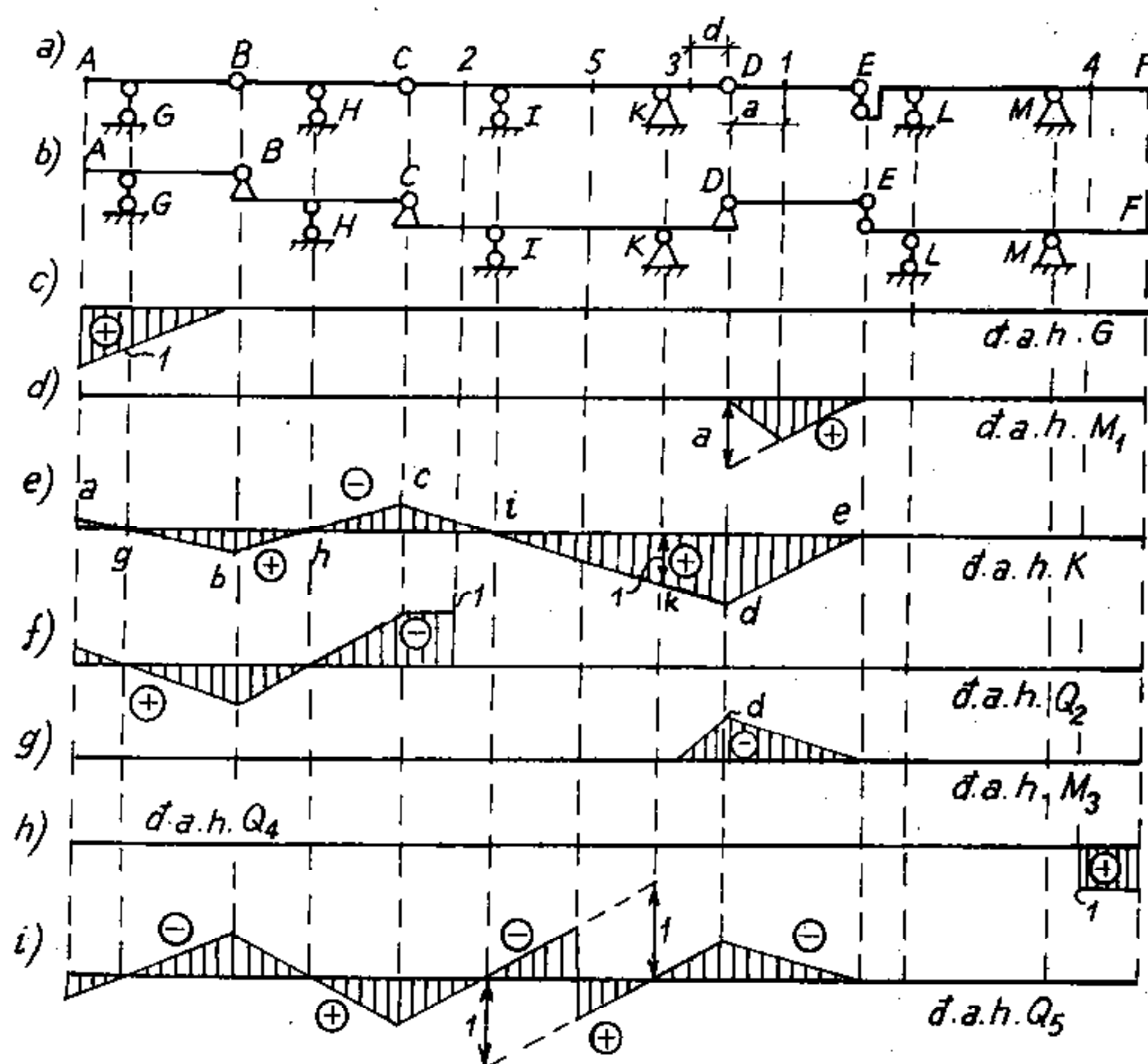
*Khi  $P=1$  di động trên hệ chính không gây ra nội lực và phản lực trong hệ phụ; khi  $P=1$  di động trên hệ phụ sẽ gây ra nội lực và phản lực trong cả hệ phụ lẫn hệ chính.*

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ đường ảnh hưởng thông qua trường hợp hệ dầm ghép trên hình 3.7a. Sơ đồ phân tích các dầm phụ và dầm chính vẽ trên hình 3.7b.

Có thể xảy ra hai trường hợp: đại lượng cần vẽ đ.a.h. thuộc hệ phụ và đại lượng cần vẽ đ.a.h. thuộc hệ chính hoặc vừa chính vừa phụ.

### A. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ phụ

Ví dụ, cần vẽ đ.a.h. phản lực  $G$  thuộc hệ phụ  $AB$  và đ.a.h.  $M_1$  thuộc hệ phụ  $DE$  trên hình 3.7.



Hình 3.7

#### ❖ Đường ảnh hưởng $G$

Trước tiên xét trường hợp tải trọng  $P=1$  di động trên  $AB$  (hình 3.7b). Khi đó ta có thể xem  $AB$  như một dầm đơn giản độc lập và dễ dàng vẽ được đ.a.h.  $G$  trong dầm đơn giản theo quy tắc đã trình bày trong 3.2 (hình 3.7c). Tiếp đó, khi lực  $P=1$  di động trên những phần còn lại (hình 3.7b) ta thấy: vì dầm  $AB$  là hệ phụ cho nên khi  $P=1$  di động trên các hệ khác từ  $B$  đến  $F$  sẽ không gây ảnh hưởng đến phản lực  $G$  thuộc hệ  $AB$ . Vậy đ.a.h.  $G$  tương ứng với phần này trùng với đường chuẩn.

#### ❖ Đường ảnh hưởng $M_1$

Trước tiên ta cũng xét trường hợp tải trọng  $P=1$  di động trên  $DE$ . Lúc này có

thể xem  $DE$  như dầm đơn giản độc lập và dễ dàng vẽ được đ.a.h.  $M_I$ . Tiếp đó, khi  $P=1$  di động trên các phần còn lại sẽ không ảnh hưởng đến  $M_I$  vì  $DE$  là hệ phụ, đ.a.h.  $M_I$  trong những đoạn này trùng với đường chuẩn. Kết quả như trên hình 3.7d.

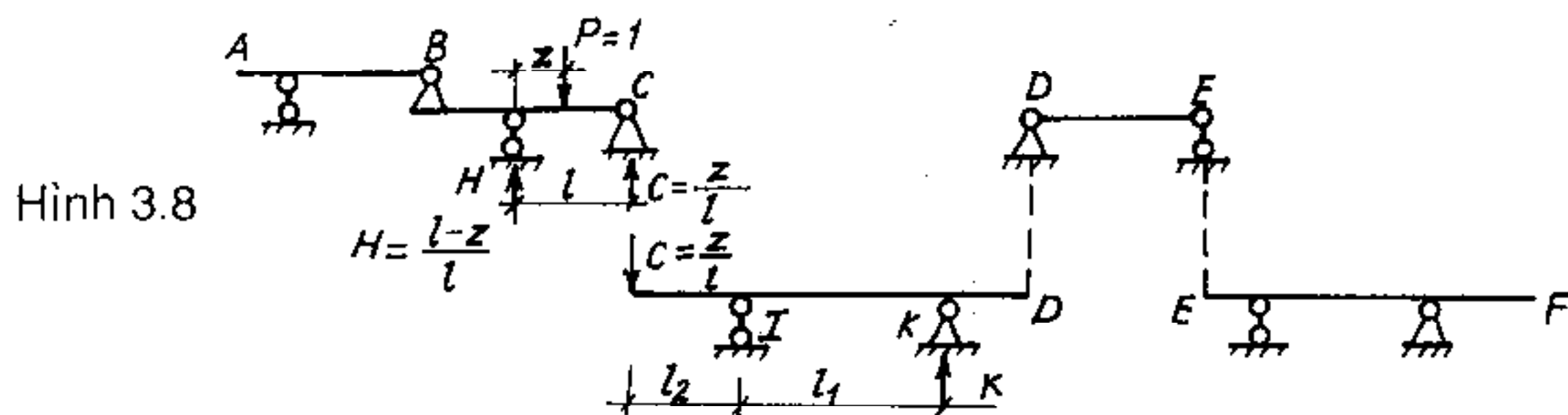
Như vậy ta có thể đề ra quy tắc vẽ đường ảnh hưởng của các đại lượng thuộc hệ phụ như sau:

- ◆ Khi  $P$  di động trên hệ phụ có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng: cô lập hệ phụ đó khỏi toàn hệ (liên kết nối với các hệ chính được xem như nối với đất) ta sẽ được một hệ đơn giản tĩnh định và vẽ được các đường ảnh hưởng theo quy tắc đã quen biết.
- ◆ Khi  $P$  di động trên hệ chính của nó và trên các hệ khác không liên quan: đường ảnh hưởng trùng với đường chuẩn.

### B. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ chính hoặc vừa chính vừa phụ

Ví dụ, vẽ đ.a.h. phản lực  $K$  thuộc hệ chính  $CD$ .

- Khi  $P=1$  di động trên hệ chính có chứa đại lượng đang xét, tức là trên  $CD$ , lực  $P$  chỉ gây ra phản lực và nội lực trong hệ chính  $CD$ , các hệ phụ của  $CD$  không chịu lực. Do đó, trong giai đoạn này có thể tạm thời loại bỏ các hệ phụ, hệ  $CD$  trở thành dầm đơn giản độc lập và dễ dàng vẽ ngay được đ.a.h.  $K$  (đoạn  $cd$  trên hình 3.7e).
- Khi  $P=1$  di động trên hệ phụ của  $CD$  tức là trên đoạn  $BC$  kế tiếp đoạn  $CD$ . Lúc này tải trọng  $P$  sẽ gây ảnh hưởng xuống hệ chính  $CD$ . Ta sẽ chứng minh rằng đoạn đường ảnh hưởng này là một đoạn thẳng đi qua tung độ ứng dưới khớp nối hệ phụ với hệ chính có giá trị bằng tung độ đ.a.h. thuộc hệ chính và tung độ bằng không ứng dưới gối tựa nối với đất của hệ phụ.



Thật vậy, khi lực  $P=1$  di động trên đoạn  $BC$  sẽ truyền áp lực  $C$  xuống hệ  $CD$  (hình 3.8). Nếu chọn gốc tọa độ như trên hình 3.8, ta sẽ có  $C = z/l$ . Viết điều kiện  $\sum M_I = 0$  cho hệ  $CD$  ta sẽ được:

$$K = -Cl_2/l_1 = -z l_2/l l_1, \quad \text{khi } z = l; \text{ ta có } K = -l_2/l_1;$$

$$\text{khi } z = 0; \text{ ta có } K = 0.$$

Biểu thức đó chứng tỏ rằng khi  $P$  di động trên đoạn  $BC$  thì phản lực  $K$  là hàm bậc nhất của tọa độ  $z$ . Như vậy, *d.a.h.*  $K$  tương ứng với đoạn  $BC$  là một đoạn thẳng đi qua hai điểm  $c$  và  $h$  (hình 3.7e). Đó là điều cần chứng minh.

- Khi  $P$  di động trên đoạn  $AB$  kế tiếp đoạn  $BC$  vừa xét, nó sẽ truyền ảnh hưởng xuống hệ  $BC$ , rồi lại truyền ảnh hưởng xuống hệ  $CD$ . Cũng lý luận như trên ta thấy *d.a.h.*  $K$  là đoạn thẳng đi qua điểm  $b$  đã biết và điểm  $g$  là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối tựa  $G$  nối với đất của hệ  $AB$  (hình 3.7e).
- Khi  $P=1$  di động trên đoạn  $DE$ , nó sẽ truyền tác dụng xuống hệ  $CD$ . Cũng lý luận như trên ta chứng minh được rằng đường ảnh hưởng là đoạn thẳng  $de$  (hình 3.7e). Sở dĩ đoạn thẳng này phải đi qua  $e$  vì khi lực  $P=1$  đặt tại điểm  $E$  ta có thể xem hoặc là nó đặt vào hệ  $DE$  hoặc là nó thuộc hệ  $EF$ . Nếu xem nó đặt vào  $EF$  thì rõ ràng là không ảnh hưởng đến hệ  $CD$  được vì  $EF$  là hệ chính. Vậy tung độ *d.a.h.*  $K$  ứng với điểm  $E$  phải là điểm nằm trên đường chuẩn.
- Khi  $P=1$  di động trên hệ  $EF$  ta cũng nhận thấy nó không gây ảnh hưởng đến hệ  $CD$ . Vậy *d.a.h.*  $K$  ứng với đoạn này trùng với đường chuẩn.

Trên hình 3.7e là kết quả vẽ đường ảnh hưởng phản lực  $K$ .

Từ đó ta suy ra quy tắc vẽ đường ảnh hưởng cho những đại lượng thuộc hệ chính hoặc thuộc hệ vừa là chính vừa là phụ như sau

- ◆ Khi  $P=1$  di động trên hệ có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng, cô lập hệ đó sẽ được một hệ đơn giản, vẽ đường ảnh hưởng ứng với đoạn này theo quy tắc đã quen biết.
- ◆ Lần lượt cho  $P=1$  di động trên các hệ kế tiếp hệ vừa xét:
  - ◇ nếu chúng là những hệ chính của hệ đang xét thì đoạn đường ảnh hưởng tương ứng trùng với đường chuẩn;
  - ◇ nếu chúng là những hệ phụ của hệ đang xét thì đường ảnh hưởng tương ứng là những đoạn thẳng kế tiếp lần lượt đi qua những điểm có tung độ bằng không. Những tung độ bằng không này là tung độ ứng dưới các gối tựa kế tiếp thuộc hệ phụ của hệ đang xét hoặc ứng dưới khớp gập đầu tiên thuộc một hệ chính khác.

Áp dụng các quy tắc nêu ở trên ta dễ dàng vẽ được các *d.a.h.* của phản lực và nội lực trong hệ ghép. Trên hình 3.7f, g, h, i lần lượt là kết quả vẽ các *d.a.h.*  $Q_2$ ; *d.a.h.*  $M_3$ ; *d.a.h.*  $Q_4$ ; *d.a.h.*  $Q_5$ .

*Chú ý:* Nguyên tắc vẽ đ.a.h. trình bày ở trên cũng áp dụng cho hệ ghép được hình thành từ các hệ đơn giản bất kỳ khác như hệ khung, hệ ba khớp, hệ dàn.

### 3.5. Đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp

#### A. Đường ảnh hưởng phản lực

Ở đây chỉ trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực trong hệ ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng  $P=1$  di động mà không trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng của các phản lực toàn phần  $A$  và  $B$  vì vẽ các đường ảnh hưởng đó vừa khó khăn vừa không cần thiết.

#### 1. Đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực $V_A^d$ và $V_B^d$

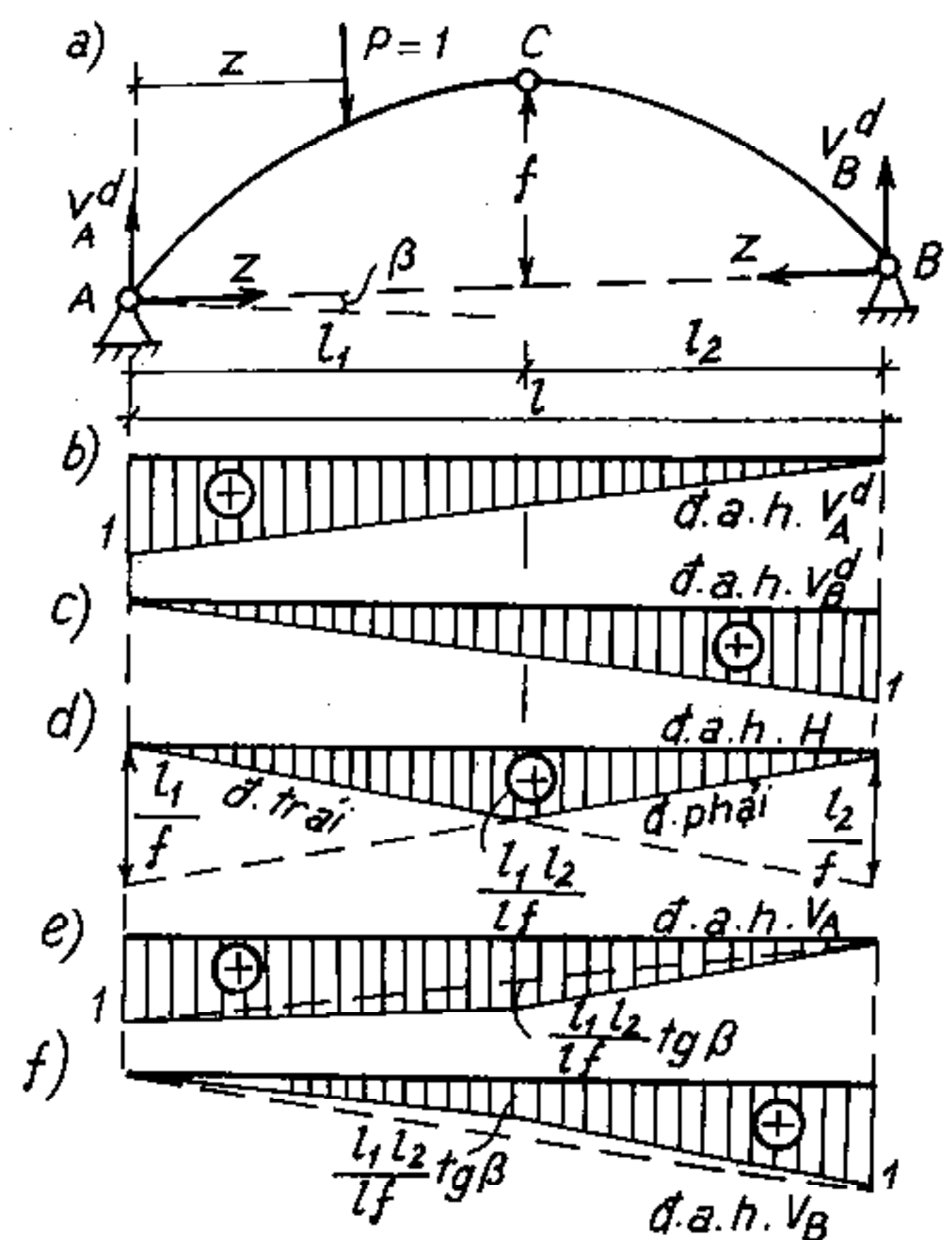
Khi trên hệ ba khớp có tải trọng thẳng đứng  $P=1$  di động với vị trí được xác định bằng hoành độ  $z$ , ta tìm được biểu thức giải tích của đường ảnh hưởng  $V_A^d$  và  $V_B^d$  từ các điều kiện cân bằng

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \text{đ.a.h. } V_A^d = (l-z)/l.$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \text{đ.a.h. } V_B^d = z/l.$$

Lần lượt cho hoành độ  $z$  hai giá trị khác nhau ta sẽ vẽ được đường ảnh hưởng các thành phần phản lực này như trên hình 3.9b và c.

Ta thấy các đ.a.h.  $V_A^d$  và  $V_B^d$  hoàn toàn giống như các đ.a.h phản lực trong dầm.



Hình 3.9

#### 2. Đường ảnh hưởng lực xô $H$

Ta đã biết biểu thức giải tích của mômen uốn tại một tiết diện bất kỳ trong vòm khi chịu tải trọng thẳng đứng là

$$M_k(z) = M_k^d(z) - H y_k.$$

Áp dụng công thức này cho tiết diện ở khớp  $C$  của vòm, ta có:

$$M_C = M_C^d - H y_C, \text{ vì } y_C = f \text{ nên } H = M_C^d / f$$

Khi lực  $P=1$  di động trên vòm, tung độ  $f$  là hằng lượng còn đại lượng  $M_C^d$  và  $H$  biến đổi nên ta có thể viết



$$\text{đ.a.h. } H = \frac{\text{đ.a.h. } M_C^d}{f} \quad (3.1)$$

Như vậy, ta vẽ đường ảnh hưởng của lực xô  $H$  bằng cách vẽ đường ảnh hưởng của mômen uốn trong dầm tương ứng tại vị trí khớp  $C$ , rồi chia cho hằng lượng  $f$ .

Đường ảnh hưởng  $H$  vẽ trên hình 3.9d.

### 3. Đường ảnh hưởng lực vòm $Z$

Khi lực thẳng đứng  $P=1$  di động trên hệ ba khớp ta có đẳng thức:

$$H = Z \cos\beta$$

Do đó 
$$\text{đ.a.h. } Z = \frac{\text{đ.a.h. } H}{\cos\beta} \quad (3.2)$$

Như vậy, ta vẽ được đường ảnh hưởng  $Z$  bằng cách lấy đường ảnh hưởng  $H$  chia cho hằng lượng  $\cos\beta$ .

### 4. Đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực đứng $V_A$ và $V_B$

Các công thức (2.4) vẫn đúng khi tải trọng thẳng đứng  $P=1$  ở bất kỳ vị trí nào trên hệ ba khớp:

$$V_A = V_A^d + H \operatorname{tg}\beta; \quad V_B = V_B^d - H \operatorname{tg}\beta.$$

Khi  $P=1$  di động, đại lượng  $\operatorname{tg}\beta$  không thay đổi, còn các đại lượng khác đều thay đổi cho nên ta có thể viết

$$\begin{aligned} \text{đ.a.h. } V_A &= \text{đ.a.h. } V_A^d + (\text{đ.a.h. } H) \operatorname{tg}\beta; \\ \text{đ.a.h. } V_B &= \text{đ.a.h. } V_B^d - (\text{đ.a.h. } H) \operatorname{tg}\beta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Như vậy, để vẽ đường ảnh hưởng  $V_A$  (hoặc  $V_B$ ) ta lấy đường ảnh hưởng  $V_A^d$  (hoặc  $V_B^d$ ) cộng (hoặc trừ) với đường ảnh hưởng  $H$  đã nhân với  $\operatorname{tg}\beta$ .

Các đ.a.h.  $V_A$  và đ.a.h.  $V_B$  vẽ trên hình 3.9e, f.

### B. Đường ảnh hưởng nội lực

Cũng lý luận như trên, ta vẽ được các đường ảnh hưởng nội lực theo những công thức sau đây suy ra từ các công thức (2.5), (2.6) và (2.7):

$$\begin{aligned} \text{đ.a.h. } M_k &= \text{đ.a.h. } M_k^d - (\text{đ.a.h. } H) y_k; \\ \text{đ.a.h. } Q_k &= (\text{đ.a.h. } Q_k^d) \cos\alpha_k - (\text{đ.a.h. } H) (\sin\alpha_k - \operatorname{tg}\beta \cos\alpha_k); \\ \text{đ.a.h. } N_k &= -(\text{đ.a.h. } Q_k^d) \sin\alpha_k - (\text{đ.a.h. } H) (\cos\alpha_k + \operatorname{tg}\beta \sin\alpha_k). \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 1. Đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện $k$

Từ công thức (3.4)

$$\text{đ.a.h. } M_k = \text{đ.a.h. } M_k^d - (\text{đ.a.h. } H) y_k$$

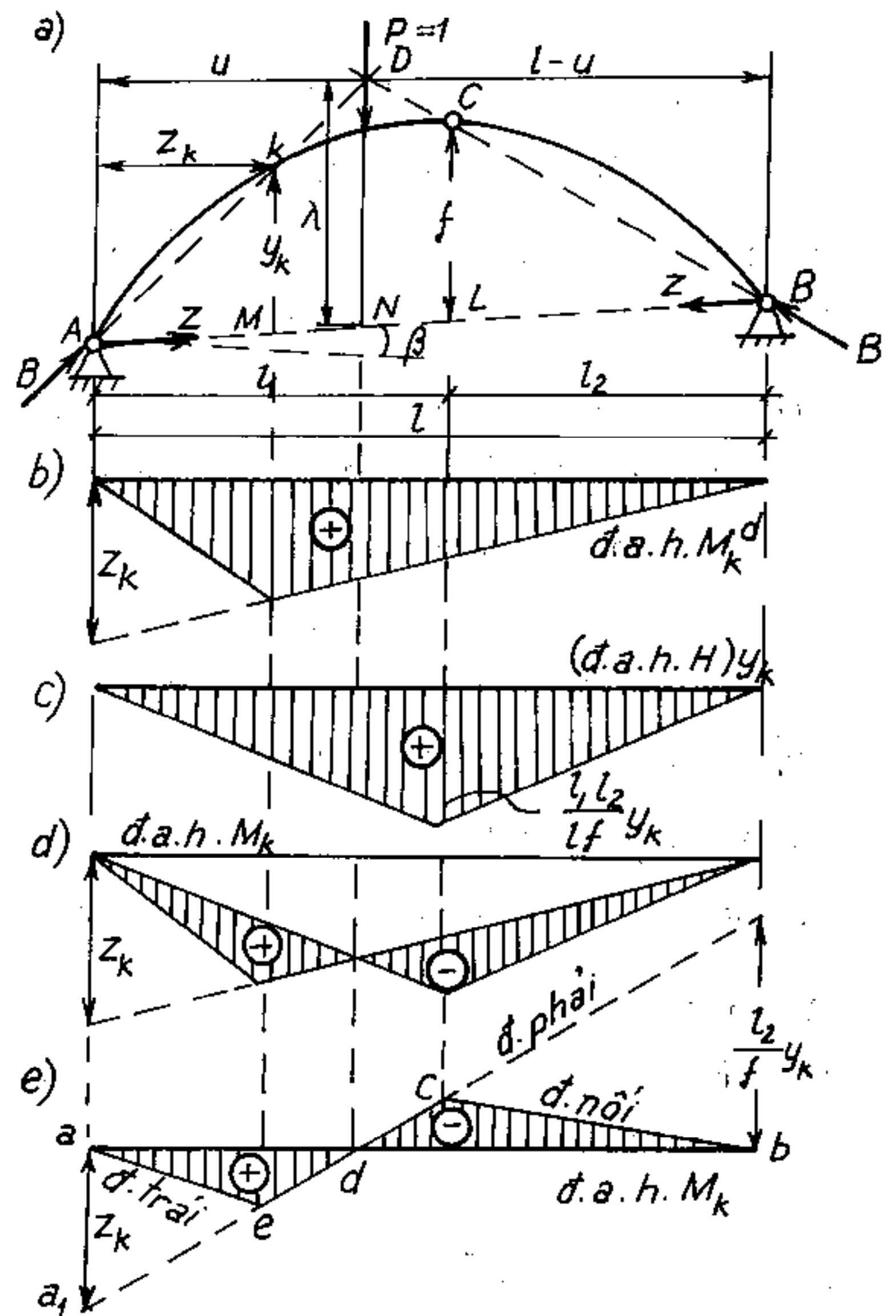
ta thấy: Để vẽ đ.a.h.  $M_k$  trong hệ ba khớp (hình 3.10a) ta cần lấy đ.a.h.  $M_k^d$  (hình 3.10b) của dầm đơn giản tương ứng trừ đi đ.a.h.  $H$  đã được nhân với hằng lượng  $y_k$  (hình 3.10c).

Thực hiện phép trừ bằng cách đặt chồng hai đ.a.h. đó lên nhau, phân gạch gạch trên hình 3.10d chính là kết quả cần tìm. Đem các tung độ kết quả đặt lên đường chuẩn ta có đ.a.h.  $M_k$  như trên hình 3.10e.

Cách làm như vậy thường tốn khá nhiều thời gian cho nên ở đây ta đặt vấn đề tìm một cách vẽ thực hành nhanh chóng.

Từ kết quả vẽ trên hình 3.10 ta có các nhận xét được dùng để làm cơ sở cho cách vẽ thực hành.

- 1) Phần  $ae$  của đ.a.h.  $M_k$  gọi là đường trái ứng với trường hợp  $P$  di động trên phần bên trái tiết diện  $k$ . Phần  $ec$  của đ.a.h.  $M_k$  gọi là đường phải ứng với trường hợp lực  $P$  di động trên phần bên phải tiết diện  $k$ , từ  $k$  đến khớp  $C$ . Phần  $cb$  của đ.a.h.  $M_k$  gọi là đường nối ứng với khi  $P$  di động trên phần  $CB$ .



Hình 3.10

Ta nhận thấy nếu vẽ được đường phải thì sẽ tìm được toàn bộ đ.a.h.  $M_k$ , bởi vì đường trái  $ae$  bao giờ cũng đi qua điểm  $a$  có tung độ bằng không ứng dưới gối  $A$  và đi qua điểm  $e$  nằm trên đường phải ứng dưới tiết diện  $k$ ; đường nối bao giờ cũng đi qua điểm  $b$  có tung độ bằng không ứng dưới gối  $B$  và đi qua

điểm  $c$  nằm trên đường phải ứng dưới khớp  $C$ .

Đường phải được xác định bằng hai điểm: điểm  $a_1$  với tung độ  $aa_1 = z_k$  và điểm không  $d$  nằm trên đường chuẩn. Điểm  $a_1$  tìm được dễ dàng, chỉ cần phải tìm điểm không  $d$ .

2) Điểm không  $d$  của đường phải là điểm ứng dưới vị trí tải trọng  $P=I$  sao cho mômen uốn  $M_k = 0$ . Nó chính là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm  $D$  của đường  $Ak$  và đường  $BC$ .

Thật vậy, khi  $P=I$  đặt tại điểm  $D$  thì phản lực  $B$  có phương  $BCD$ , còn phản lực  $A$  có phương  $AD$  đi qua trọng tâm của tiết diện  $k$ . Do đó, khi  $P=I$  đặt tại điểm  $D$  thì mômen uốn tại tiết diện  $k$  được xác định theo phản lực  $A$  đi qua  $k$  nên có giá trị bằng không. Như vậy điểm không  $d$  nằm trên đường chuẩn của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm  $D$  của đường  $BC$  và đường  $Ak$ .

Đó là điều phải chứng minh.

Hai nhận xét trên cho phép ta suy ra cách vẽ thực hành đường ảnh hưởng mômen uốn tại một tiết diện  $k$  nằm ở phần bên trái vòm như sau:

1) Xác định điểm không  $d$  của đường phải là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm của đường  $BC$  và đường  $Ak$ .

2) Ứng dưới gối trái  $A$ , dựng đoạn  $aa_1 = z_k$ . Nối điểm  $a_1$  với điểm không  $d$  sẽ được đường phải  $ec$  ( $e$  là điểm nằm trên đường phải ứng dưới tiết diện  $k$  còn  $c$  là điểm nằm trên đường phải ứng dưới khớp  $C$ ).

3) Nối  $a$  với  $e$ , được đường trái  $ae$ .

4) Nối  $c$  với điểm  $b$  nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối  $B$ , được đường nối  $cb$ .

Đường gãy khúc  $aecb$  là đ.a.h.  $M_k$  cần tìm.

**Chú thích:**

❖ Từ hình 3.10 ta thấy tam giác  $ADN$  đồng dạng với tam giác  $AKM$ ; tam giác  $BDN$  đồng dạng với tam giác  $BCL$ , ta tính được

$$\lambda = \frac{y_k}{z_k} u \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{f}{l_2} (1-u), \quad \text{do đó} \quad \lambda = \frac{y_k}{z_k} u = \frac{f}{l_2} (1-u)$$

với  $u$  là khoảng cách theo phương nằm ngang từ gối tựa trái đến điểm không  $d$ .

Suy ra: 
$$u = \frac{fl}{l_2(y_k/z_k) + f} \quad (3.5)$$

Dùng công thức này ta xác định được dễ dàng vị trí của điểm không  $d$  bằng giải tích.

- ❖ Trường hợp tiết diện  $k$  ở phần miêng cứng bên phải, nguyên tắc thực hiện cũng tương tự. Khi vẽ đ.a.h.  $M_k$  cũng có thể quan sát hệ từ phía sau để chuyển tiết diện  $k$  về phần bên trái.

## 2. Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện $k$

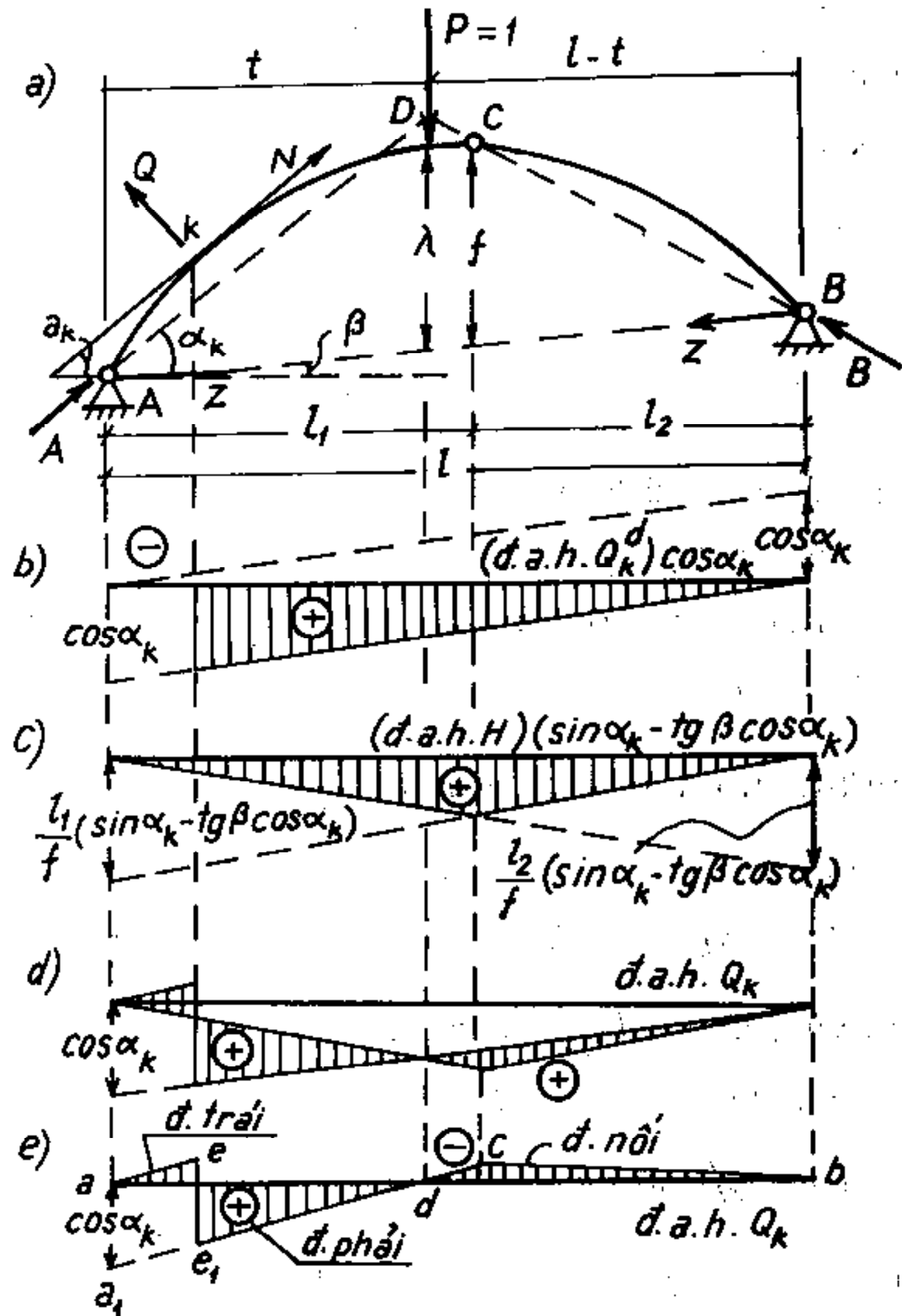
Theo (3.4)

$$\text{đ.a.h. } Q_k = (\text{đ.a.h. } Q_k^d) \cos \alpha_k - (\text{đ.a.h. } H) (\sin \alpha_k - \text{tg} \beta \cos \alpha_k).$$

Như vậy, để vẽ đ.a.h.  $Q_k$  trong hệ ba khớp (hình 3.11a) ta cần đem đ.a.h.  $Q_k^d$  của dầm đơn giản tương ứng nhân với hằng lượng  $\cos \alpha_k$  (hình 3.11b) rồi trừ đi đ.a.h.  $H$  đã được nhân với hằng lượng  $(\sin \alpha_k - \text{tg} \beta \cos \alpha_k)$  (hình 3.11c).

Quá trình thực hiện được trình bày trên hình 3.11.

Từ hình 3.11 ta thấy đ.a.h.  $Q_k$  gồm ba đoạn thẳng: đoạn  $ae$  ở bên trái tiết diện  $k$ , đoạn  $e_1c$  ở bên phải tiết diện  $k$  và đoạn nối  $bc$ . Đoạn thẳng  $e_1c$  đi qua điểm  $a_1$  với  $aa_1 = \cos \alpha_k$  và qua điểm không  $d$ . Điểm không  $d$  chính là điểm ứng dưới vị trí của tải trọng  $P=1$  di động từ  $k$  đến  $C$  để sao cho lực cắt  $Q_k$  bằng không, nghĩa là sao cho hợp lực bên trái tiết diện  $k$  (phần lực  $A$ ) song song với tiếp tuyến của trục vòm tại tiết diện  $k$ . Vị trí đó của tải trọng  $P=1$  chính là giao điểm của đường  $AD$  song song với tiếp tuyến của trục vòm tại tiết diện  $k$  và đường  $BC$  đi qua hai khớp  $B$  và  $C$ .



Hình 3.11

Do đó ta suy ra cách vẽ thực hành đ.a.h.  $Q_k$  đối với tiết diện thuộc phần bên trái của vòm theo thứ tự như sau

- 1) Xác định điểm không  $d$  của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm  $D$  của hai đường  $BC$  và  $AD$ . Đường  $AD$  là đường kẻ từ  $A$  song song với tiếp tuyến của trục vòm tại  $k$ .
- 2) Ứng dưới gối trái  $A$  dựng tung độ  $aa_1 = \cos\alpha_k$ . Nối  $a_1$  với  $d$  sẽ được đoạn phải  $e_1c$  của đ.a.h. $Q_k$ , đoạn này tương ứng với trường hợp  $P=1$  di động trên phần  $kC$ .
- 3) Từ điểm  $a$  kẻ đường thẳng song song với  $a_1d$ . Đường dóng thẳng đứng kẻ từ tiết diện  $k$  cắt đường vừa vẽ tại điểm  $e$ . Đoạn  $ae$  là đường trái của đ.a.h. $Q_k$ . Ứng dưới tiết diện  $k$ , đ.a.h. $Q_k$  bao giờ cũng có bước nhảy bằng  $\cos\alpha_k$ .
- 4) Từ khớp  $C$  kẻ đường dóng thẳng đứng, đường này cắt đường phải tại  $c$ . Nối  $c$  với điểm  $b$  nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối  $B$ , được đoạn nối  $cb$ . Đường  $ae_1cb$  là đ.a.h. $Q_k$ .

Chú thích:

- ❖ Cũng có thể xác định vị trí của điểm không  $d$  bằng công thức giải tích. Từ hình (3.11) ta có:

$$\lambda = t(\operatorname{tg}\alpha_k - \operatorname{tg}\beta) \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{f}{l_2}(l-t), \quad \text{do đó} \quad t(\operatorname{tg}\alpha_k - \operatorname{tg}\beta) = \frac{f}{l_2}(l-t).$$

Suy ra 
$$t = \frac{fl}{l_2(\operatorname{tg}\alpha_k - \operatorname{tg}\beta) + f} \quad (3.6)$$

$t$  là khoảng cách theo phương ngang từ điểm không  $d$  đến gối trái  $A$  của hệ ba khớp.

- ❖ Trường hợp tiết diện  $k$  ở phần miếng cứng bên phải, nguyên tắc thực hiện cũng tương tự. Khi vẽ đ.a.h. $Q_k$  cũng có thể quan sát hệ từ phía sau để chuyển tiết diện  $k$  về phần miếng cứng bên trái song cần đổi dấu.

### 3. Đường ảnh hưởng lực dọc tại tiết diện $k$

Theo (3.4)

$$\text{đ.a.h.}N_k = -(\text{đ.a.h.}Q_k^d) \sin\alpha_k - (\text{đ.a.h.}H)(\cos\alpha_k + \operatorname{tg}\beta \sin\alpha_k).$$

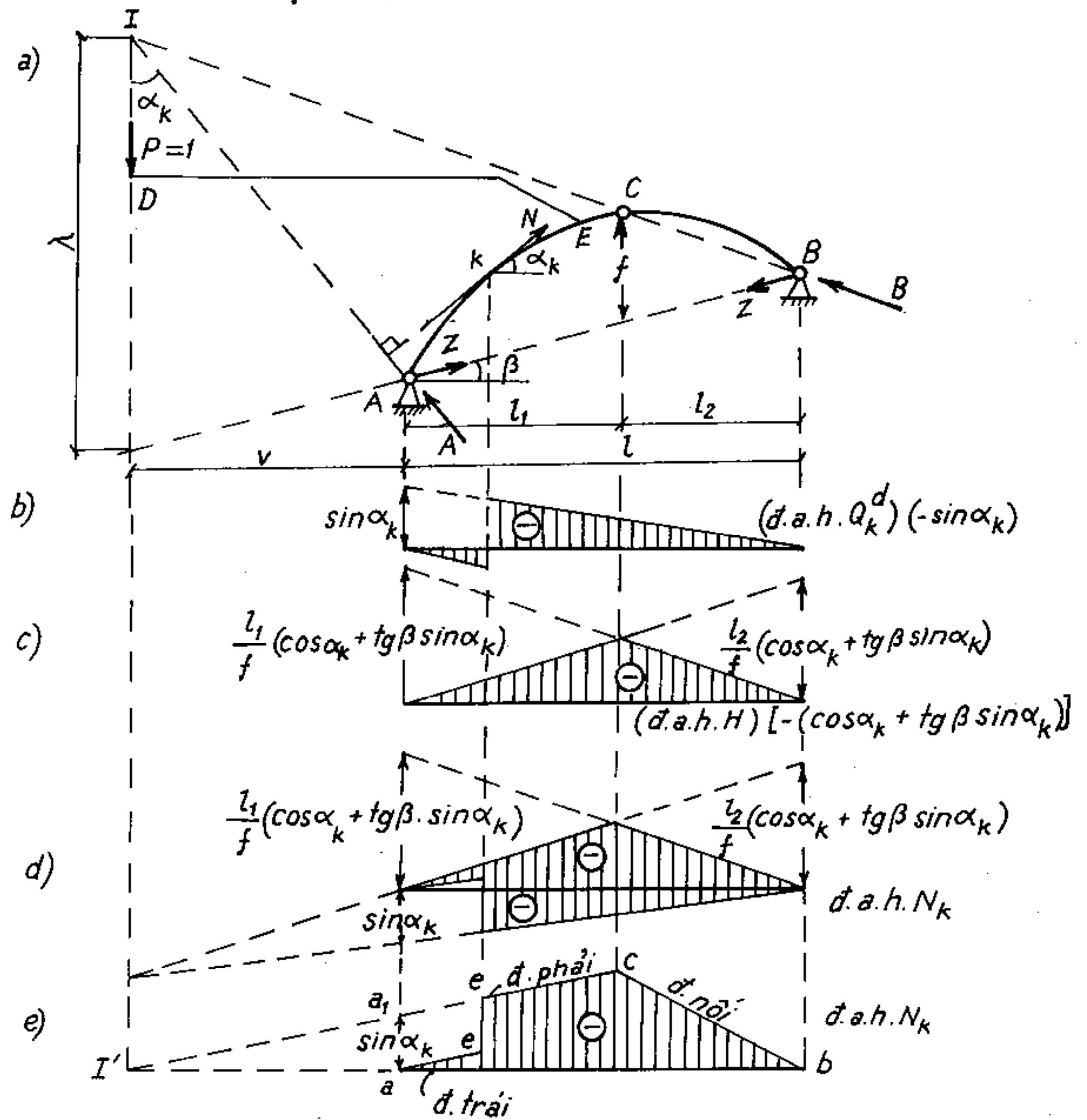
Như vậy, để vẽ đ.a.h.  $N_k$  ta cần đem đ.a.h.  $Q_k^d$  của dầm đơn giản tương ứng nhân với hằng lượng  $-\sin\alpha_k$  (hình 3.12b) rồi cộng với đ.a.h. $H$  đã nhân với hằng lượng  $-(\cos\alpha_k + \operatorname{tg}\beta \sin\alpha_k)$  (hình 3.12c).

Phép cộng này được thực hiện trên hình 3.12d và được kết quả như trên hình 3.12e.

Từ hình vẽ ta thấy đ.a.h. $N_k$  gồm ba đoạn thẳng: đường trái  $ae$ , đường phải  $e_1c$  và đường nối  $cb$ .

Vị trí của đường phải được xác định bằng điểm  $a_1$  và điểm không  $I'$ . Để tìm

điểm  $a_1$ , từ điểm không  $a$  ứng dưới gối trái ta dựng tung độ  $aa_1 = \sin\alpha_k$ . Điểm  $I'$  của đường phải là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm  $I$  của đường  $BC$  và đường  $AI$  kẻ từ  $A$  vuông góc với tiếp tuyến tại  $k$  của vòm.



Hình 3.12

Thật vậy, điểm không  $I'$  là điểm ứng dưới một vị trí của điểm đặt lực  $P=1$  khi lực này di động trên đoạn  $kC$  để sao cho lực dọc  $N_k$  tại tiết diện  $k$  bằng không. Khi  $P=1$  di động trên đoạn  $kC$  thì phản lực  $B$  có phương  $BC$ , lúc đó thực hiện mặt cắt qua tiết diện  $k$  ta sẽ thấy hợp lực bên trái tiết diện chỉ là phản lực  $A$ ; chính phản lực này gây ra lực dọc  $N_k$  bằng thành phần chiếu của lực  $A$  lên phương tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện  $k$ . Muốn cho lực dọc  $N_k$  bằng không thì tải trọng  $P=1$  ở trên đoạn vòm  $kC$  phải có vị trí sao cho phản lực  $A$  vuông góc với tiếp tuyến của trục vòm tại  $k$ , nghĩa là phải có phương  $AI$ . Vì hệ nằm trong trạng thái cân bằng nên ba lực  $P=1, A, B$  phải đồng quy, do đó lực



$P=I$  có vị trí trên đoạn  $kC$  sao cho nó đi qua giao điểm  $I$  của phản lực  $B$  và phản lực  $A$ . Nhưng điểm đặt  $I$  của tải trọng  $P=I$  như trên hình vẽ có thể nằm ngoài phần  $kC$ . Nếu tưởng tượng điểm  $I$  được gắn với phần  $kC$  của hệ bằng thanh  $DE$  thì có thể xem như lực  $P=I$  trực tiếp tác dụng lên đoạn  $kC$  và giá trị của lực dọc  $N_k$  tương ứng tại tiết diện  $k$  sẽ phải bằng không. Lúc đó, ứng dưới điểm  $I$  sẽ là điểm không  $I'$  của đường phải  $e_1c$ .

Từ nhận xét trên ta suy ra cách vẽ thực hành  $d.a.h.N_k$  theo thứ tự như sau:

- 1) Xác định điểm không  $I'$  của đường phải. Điểm này là điểm ứng dưới giao điểm  $I$  của đường  $BC$  và đường  $AI$  đi qua  $A$  vuông góc với tiếp tuyến của trục vòm tại  $k$ .
- 2) Từ  $a$  đặt tung độ  $aa_1 = \sin\alpha_k$ , nối  $a_1$  với  $I'$  sẽ được đường phải  $e_1c$  của  $d.a.h.N_k$  ứng với trường hợp  $P=1$  di động trên đoạn  $kC$ .
- 3) Từ  $a$  kẻ đường trái  $ae$  song song với  $e_1c$ . Dưới tiết diện  $k$  bao giờ  $d.a.h.N_k$  cũng có bước nhảy bằng  $\sin\alpha_k$ .
- 4) Nối  $c$  với điểm  $b$  nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối  $B$ , được đường nối  $cb$ . Đường gãy khúc  $ae e_1 cb$  là  $d.a.h.N_k$  của hệ ba khớp.

**Chú thích:**

❖ Từ hình 3.12a ta có

$$\lambda = v(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha_k) \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{f}{l_2}(l + v), \quad \text{do đó} \quad v(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha_k) = \frac{f}{l_2}(l + v).$$

$v$  là khoảng cách theo phương nằm ngang từ điểm không  $I'$  đến gối trái  $A$ .

Từ đó ta suy ra công thức giải tích để xác định vị trí điểm  $I'$  như sau

$$v = \frac{fl}{l_2(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha_k) - f} \quad (3.7)$$

❖ Trường hợp tiết diện  $k$  ở phần miếng cứng bên phải, nguyên tắc thực hiện cũng tương tự. Khi vẽ  $d.a.h.N_k$  cũng có thể quan sát hệ từ phía sau để chuyển tiết diện  $k$  về miếng cứng bên trái.

### C. Đường ảnh hưởng trong hệ có cấu tạo tương tự hệ ba khớp

Ở trên, ta đã nghiên cứu cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp khi ba khớp  $A, B, C$  đều là các khớp thực. Có thể mở rộng cách vẽ cho những hệ có cấu tạo tương tự hệ ba khớp trong đó các khớp  $A, B, C$  có thể là khớp thực hoặc khớp giả.

Giả sử xét hệ cho trên hình 3.13a. Hệ gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng hai thanh 3 và 4 cắt nhau tại  $C$  tạo thành khớp giả  $C$ . Miếng cứng bên trái nối với đất bằng hai thanh 1 và 2 cắt nhau tại  $A$  tạo thành khớp giả  $A$ . Miếng cứng

bên phải nối với đất bằng hai thanh 5 và 6 song song với nhau tạo thành khớp giả  $B$  ở xa vô cùng theo phương song song với các thanh 5, 6. Như vậy, hệ đã cho làm việc tương tự như hệ ba khớp với các khớp  $A, B, C$  có vị trí đã xác định ở trên.

Để tính hệ này ta có thể áp dụng cách tính hệ ba khớp đã biết song cần thực hiện tương ứng với ba khớp giả.

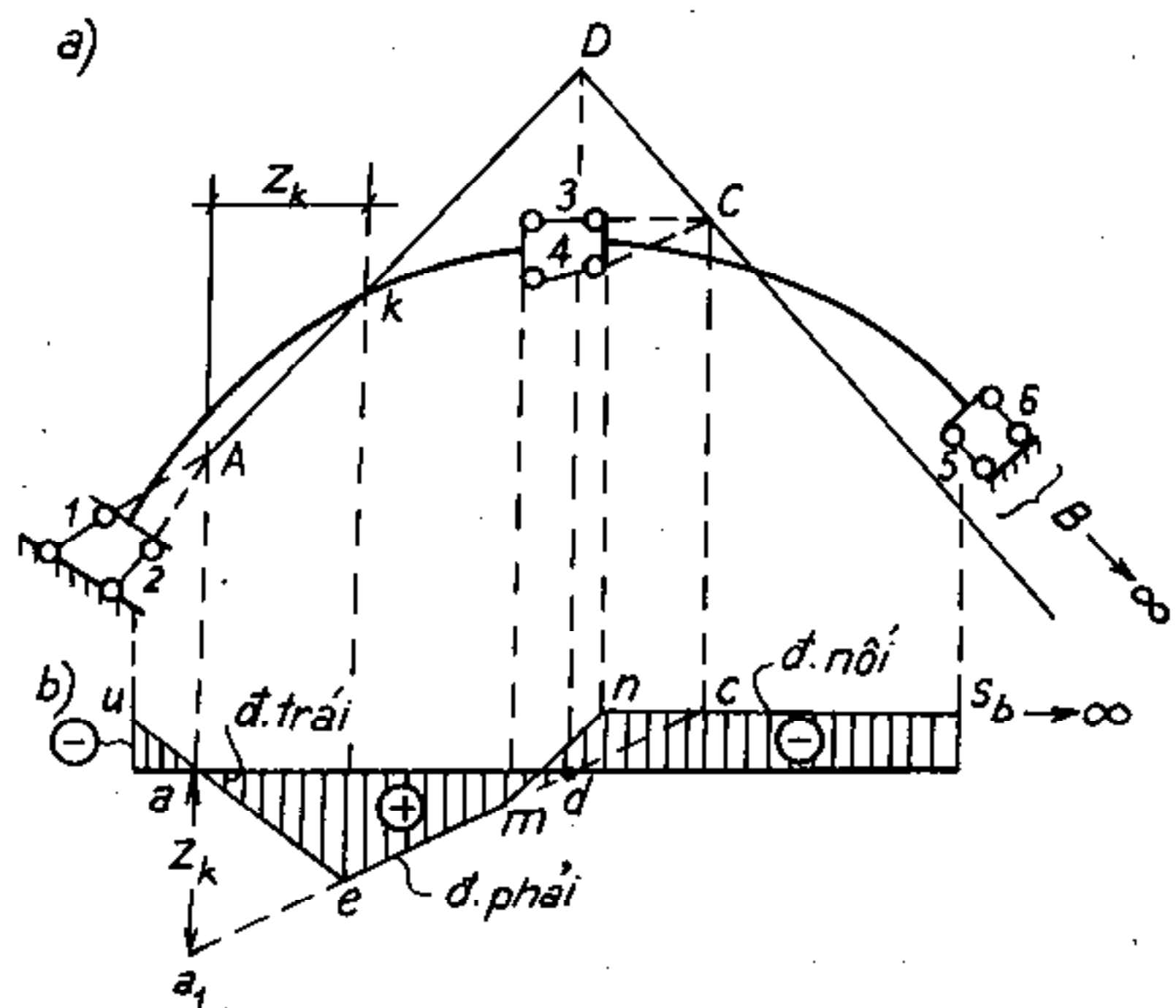
Để làm ví dụ, ta vẽ đ.a.h mômen uốn tại tiết diện  $k$ .

Áp dụng cách vẽ thực hành đã nêu ở trên cho trường hợp này, ta cần thực hiện các bước sau (hình 3.13a và b):

1) Xác định điểm không  $d$  của đường phải là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm  $D$  của đường  $Ak$  và  $BC$ . Trong trường hợp này khớp  $B$  nằm ở xa vô cùng theo phương song song với các thanh 5 và 6 nên đường  $BC$  chính là đường kẻ từ  $C$  song song với các thanh 5 và 6.

2) Ứng dưới gối trái  $A$ , đặt đoạn  $aa_1 = z_k$ . Nối  $a_1$  với điểm không  $d$  ta được đường phải. Trong trường hợp này phần thích dụng của đường phải là đoạn  $em$  với  $e$  là điểm ứng dưới tiết diện  $k$ ; còn  $m$  là điểm ứng dưới đầu phải của miếng cứng bên trái.

3) Nối  $a$  với  $e$  ta được đường trái.



Hình 3.13

Trong trường hợp này phần thích dụng của đường trái là đoạn thẳng  $uae$  với  $u$  là điểm ứng dưới đầu trái của miếng cứng bên trái.

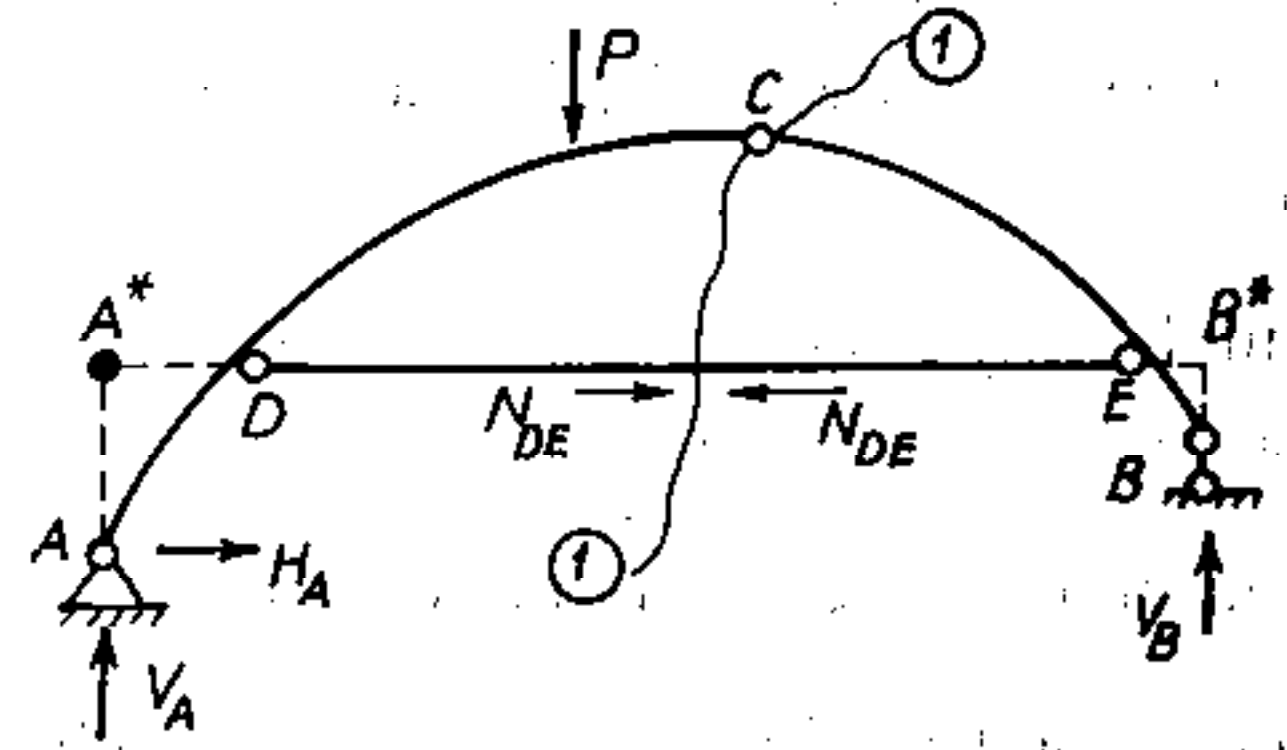
4) Nối điểm  $c$  với điểm  $b$ ,  $c$  là điểm nằm trên đường phải ứng dưới khớp  $C$  còn  $b$  là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối  $B$ , ta sẽ được đường nối. Trong trường hợp này gối  $B$  ở xa vô cùng nên đường nối chính là đường kẻ từ  $c$  song song với đường chuẩn. Đoạn nối tương ứng với khi  $P=1$  di động trên miếng cứng bên phải nên phần thích dụng của đường này là đoạn  $ns$ .

5) Khi  $P=1$  di động trên thanh 3, theo nguyên tắc hệ thống truyền lực, đường ảnh hưởng là đoạn  $mn$ .

Như vậy, đường gãy khúc  $uemns$  là đ.a.h.  $M_k$  cần tìm (hình 3.13b).

Ta khảo sát thêm một trường hợp khác hay gặp trong thực tế là bài toán hệ ba khớp có thanh căng như trên hình 3.14.

Đối với trường hợp này ta có thể xác định hoặc vẽ các đ.a.h. phản lực và nội lực như sau



Hình 3.14

- ◆ Các phản lực hoặc đ.a.h. phản lực  $V_A, V_B, H_A$  được xác định giống như các phản lực trong dầm.
- ◆ Lực căng  $N_{DE}$  trong thanh căng được xác định bằng cách thực hiện mặt cắt 1-1 qua khớp  $C$  và thanh  $DE$  rồi khảo sát cân bằng của một phần hệ. Đ.a.h. lực dọc trong thanh căng được vẽ như đ.a.h. lực xô trong hệ ba khớp  $A^*CB^*$ .
- ◆ Nội lực hoặc đ.a.h. nội lực tại các tiết diện trên đoạn  $AD$  và  $EB$  được xác định như trong dầm vì lúc này lực căng  $N_{DE}$  không tham gia trong các phương trình dùng để xác định các đại lượng đó.
- ◆ Nội lực hoặc đ.a.h. nội lực tại các tiết diện trên đoạn  $DCE$  được xác định như trong hệ ba khớp với các khớp tương ứng là  $A^*CB^*$ .

Trên cơ sở những khái niệm mở rộng vừa trình bày ở trên ta có thể vận dụng linh hoạt để giải các bài toán khác thuộc loại hệ ba khớp.

### 3.6. Đường ảnh hưởng trong hệ dàn dầm

#### A. Đường ảnh hưởng phản lực

Ta nghiên cứu cách vẽ đ.a.h. phản lực trong hệ dàn dầm qua trường hợp hệ dàn có đầu thừa trên hình 3.15a. Cũng tương tự như trong dầm, ta xác định vị trí của tải trọng di động  $P=l$  theo tọa độ chạy  $z$  từ gối tựa trái, tiếp đó tìm phản lực  $A$  và  $B$  tương ứng với vị trí tải trọng đó, ta có:

$$\sum M_B = Al - P(l-z) = 0; \quad \sum M_A = Bl - Pz = 0.$$

Suy ra 
$$\text{đ.a.h. } A = \frac{l-z}{l}; \quad \text{đ.a.h. } B = \frac{z}{l}.$$

Vẽ đồ thị biến thiên của hai đại lượng trên theo  $z$ , ta sẽ được đ.a.h.  $A$  và đ.a.h.  $B$  như trên hình 3.15b và c. Những đ.a.h. này có dạng giống như đ.a.h. phản lực trong hệ dầm.

## B. Đường ảnh hưởng nội lực trong các thanh.

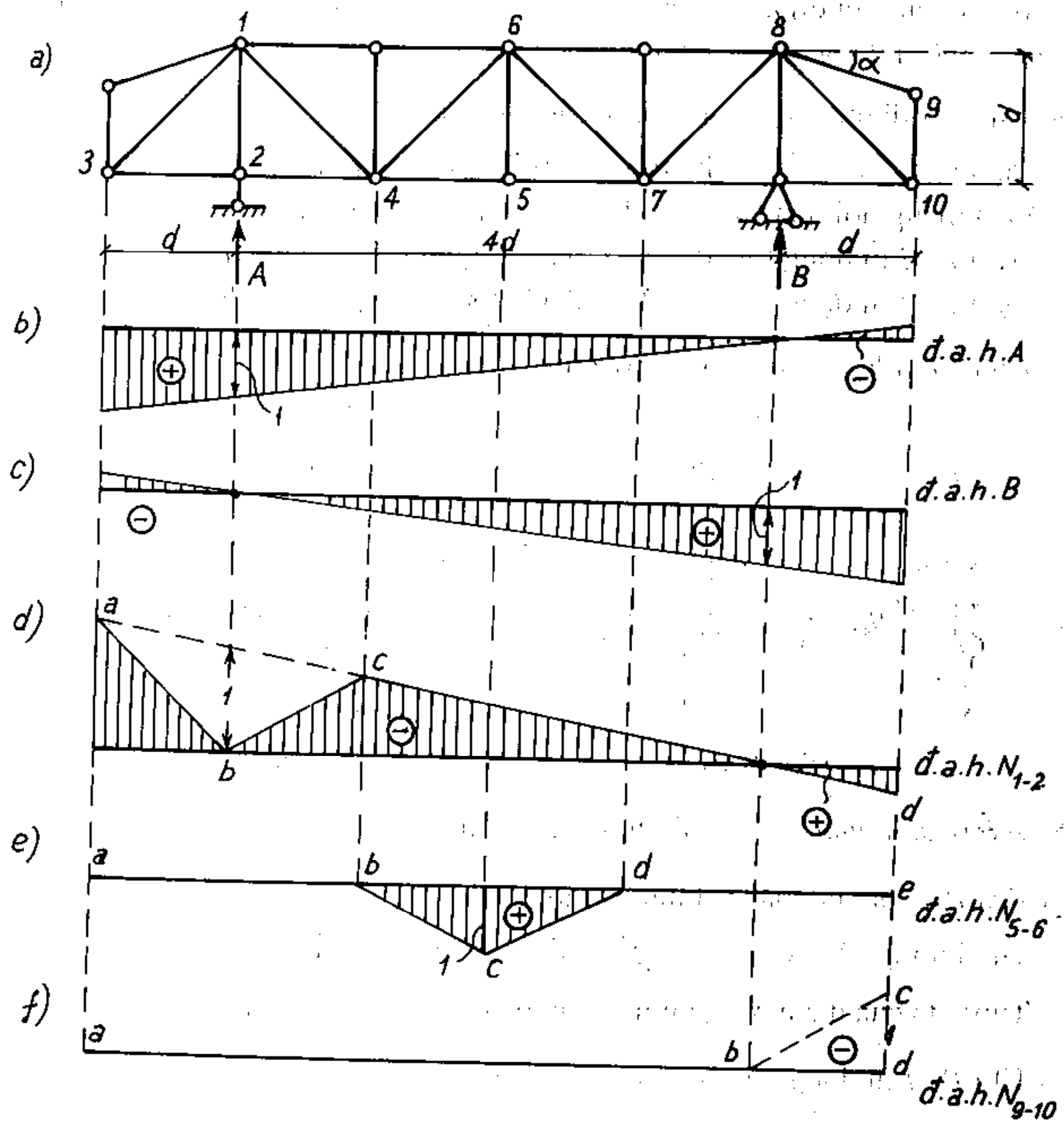
Có thể sử dụng các phương pháp đã trình bày trong 2.3 để vẽ đ.a.h. nội lực trong các thanh dầm.

### 1. Phương pháp tách mắt

Khi sử dụng phương pháp tách mắt để vẽ đ.a.h. ta lần lượt xét các vị trí của tải trọng như sau:

- Khi  $P=1$  đặt ngay tại mắt bị tách.
- Khi  $P=1$  di động ngoài các chốt bị cắt.
- Khi  $P=1$  di động trên các chốt bị cắt.

Để thấy rõ cách vận dụng phương pháp, ta xét một số ví dụ cụ thể đối với dầm trên hình 3.15a.



Hình 3.15

◆ Đường ảnh hưởng  $N_{1-2}$ . Tách mắt 2 (hình 3.15a)

- Khi  $P=1$  đặt ngay tại mắt 2 (hình 3.16a)

Từ phương trình hình chiếu theo phương 1-2 ta có  $\sum Y = N_{1-2} - 1 + A = 0$ .

Suy ra  $N_{1-2} = -A + 1$ . Nhưng tại điểm này phản lực  $A = +1$ , nên  $N_{1-2} = 0$ .

Tung độ của đ.a.h.  $N_{1-2}$  tại điểm này bằng không (điểm b trên hình 3.15d).

- Khi  $P=1$  di động ở ngoài các đốt bị cắt 3-2 và 2-4

Mắt 2 chịu tác dụng của các lực như trên hình 3.16b. Từ phương trình hình chiếu  $\sum Y = N_{1-2} + A = 0$  ta được  $N_{1-2} = -A = -(l-z)/l$ .

Đường biểu diễn của phương trình này là đường  $acd$  trên hình 3.15d. Phân tích dụng của đường này bao gồm điểm  $a$  là điểm ứng dưới mắt 3 và đoạn  $cd$  là đoạn ứng dưới các mắt 4 ÷ 10 vì phương trình này chỉ thích nghi khi lực  $P=1$  di động ở ngoài hai đốt 3-2 và 2-4.

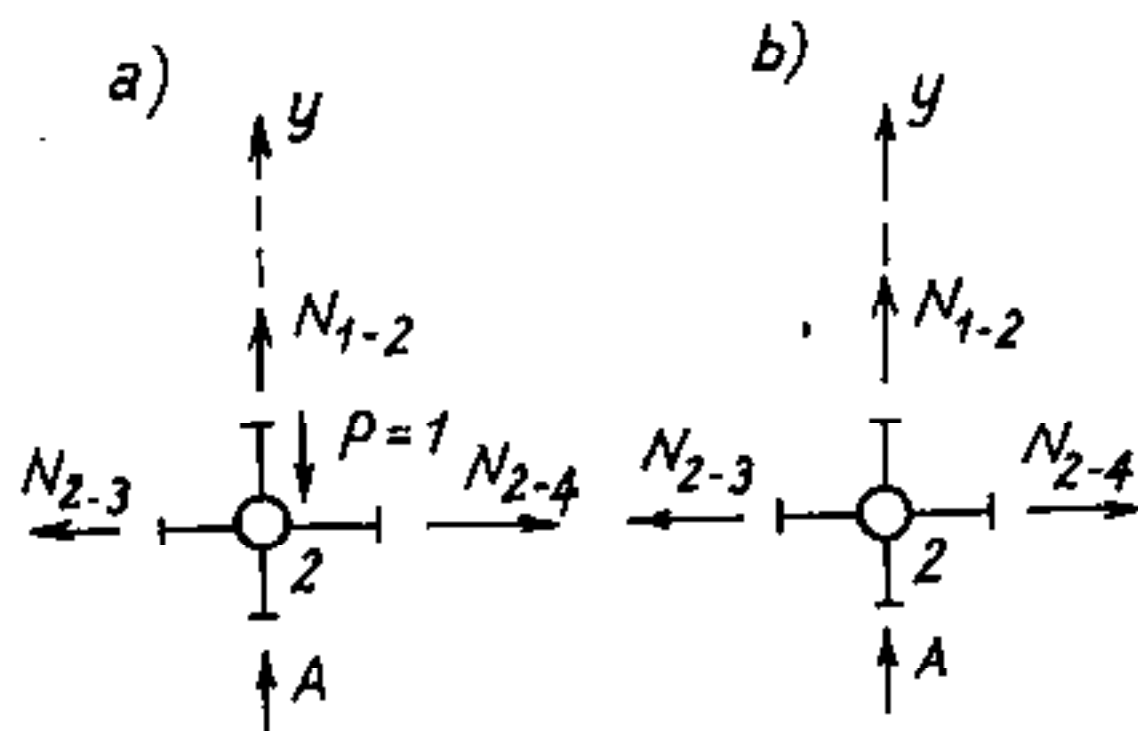
- Khi  $P=1$  di động trên các đốt bị cắt 3-2 và 2-4

Theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. trong những đoạn này là đoạn thẳng nối liền các tung độ đ.a.h. ứng dưới các mắt.

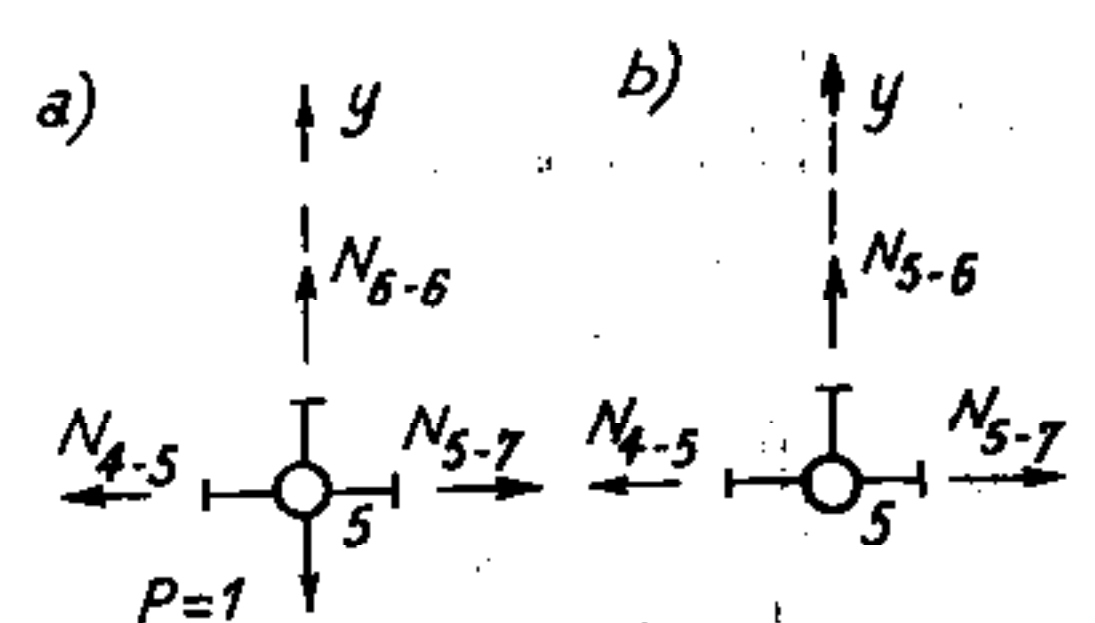
- Khi  $P=1$  di động trên đốt 3-2, đ.a.h. tương ứng là đoạn  $ab$ .

- Khi  $P=1$  di động trên đốt 2-4, đ.a.h. tương ứng là đoạn  $bc$ .

Toàn bộ đ.a.h.  $N_{1-2}$  là đường gãy khúc  $abcd$  trên hình 3.15d.



Hình 3.16



Hình 3.17

◆ Đường ảnh hưởng  $N_{5-6}$ . Tách mắt 5 (hình 3.15a)

- Khi  $P=1$  đặt tại mắt 5 (hình 3.17a)

Từ phương trình cân bằng:  $\sum Y = N_{5-6} - 1 = 0$ , ta được  $N_{5-6} = 1$ .

Tung độ của đ.a.h.  $N_{5-6}$  tại mắt này bằng +1 (điểm c trên hình 3.15e).

- Khi  $P=1$  di động ở ngoài các đốt bị cắt 4-5 và 5-7 (hình 3.17b)

Từ phương trình hình chiếu  $\sum Y = N_{5-6} = 0$  ta được  $N_{5-6} = 0$ .

Đường biểu diễn của phương trình này là đường thẳng trùng với đường chuẩn. Phần thích dụng của đường này bao gồm hai đoạn  $ab$  và  $de$  (hình 3.15e)

- Khi  $P=1$  di động trên các đốt 4-5 và 5-7, theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. trong những đoạn này là đoạn thẳng nối liền tung độ ứng dưới các mắt của mỗi đốt.

- Khi  $P=1$  di động trên đốt 4-5, đ.a.h. tương ứng là đoạn  $bc$ .

- Khi  $P=1$  di động trên đốt 5-7, đ.a.h. tương ứng là đoạn  $cd$ .

Toàn bộ đường ảnh hưởng  $N_{5-6}$  là đường gãy khúc  $abcde$  trên hình 3.15e.

◆ Đường ảnh hưởng  $N_{9-10}$ . Tách mắt 9 (hình 3.15a)

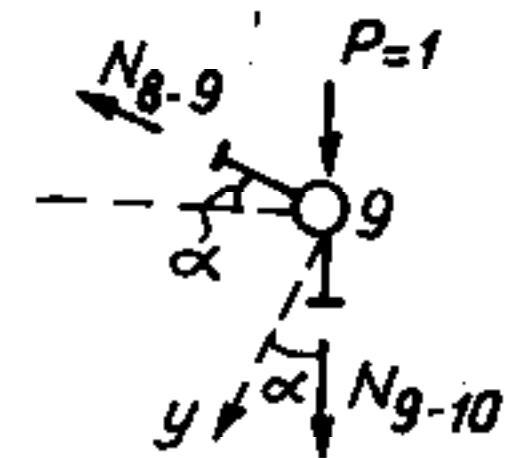
Trong trường hợp này tải trọng truyền vào dàn qua đường biên dưới (đường xe chạy dưới) nên lực  $P=1$  không tác dụng tại mắt 9. Do đó, sau khi tách mắt 9, ta dễ dàng thấy rằng  $N_{9-10}$  luôn luôn bằng không với bất kỳ vị trí nào của tải trọng trên đường biên dưới. Vậy đ.a.h.  $N_{9-10}$  trùng với đường chuẩn (đường  $abd$  trên hình 3.15f).

Nếu giả thiết tải trọng  $P=1$  di động trên đường biên trên (đường xe chạy trên) thì đ.a.h.  $N_{9-10}$  sẽ có dạng khác đi.

- Khi  $P=1$  đặt tại mắt 9, khảo sát sự cân bằng của mắt 9 dưới tác dụng của các lực vẽ trên hình 3.18 ta có:  $\sum Y = N_{9-10} \cos \alpha + 1 \cos \alpha = 0$ .

Suy ra  $N_{9-10} = -1$ .

Tung độ của đ.a.h.  $N_{9-10}$  tại mắt 9 là đoạn  $cd$  trên hình 3.15f.



Hình 3.18

- Khi  $P=1$  di động ngoài đốt 8-9 bị cắt. Tách mắt 9, ta thấy  $N_{9-10} = 0$ , đường biểu diễn trùng với đường chuẩn. Phần thích dụng là đoạn  $ab$ .
- Khi  $P=1$  di động trên đốt 8-9. Theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. là đoạn  $bc$ .

Vậy khi tải trọng di động trên đường biên trên, toàn bộ đ.a.h.  $N_{9-10}$  là đường gãy khúc  $abcd$  (hình 3.15f).

## 2. Phương pháp mặt cắt đơn giản

Khi sử dụng phương pháp này, cần phân biệt hai loại mặt cắt:

- \* Mặt cắt ở trong nhịp, khi mặt cắt này chia dàn thành hai phần, mỗi phần đều có phản lực tựa. Ví dụ mặt cắt 1-1 trên hình 3.19a.



\* Mặt cắt ở đầu thừa, khi mặt cắt này chia dần thành hai phần, trong đó một phần không có phản lực tựa. Ví dụ mặt cắt 3-3 trên hình 3.19a.

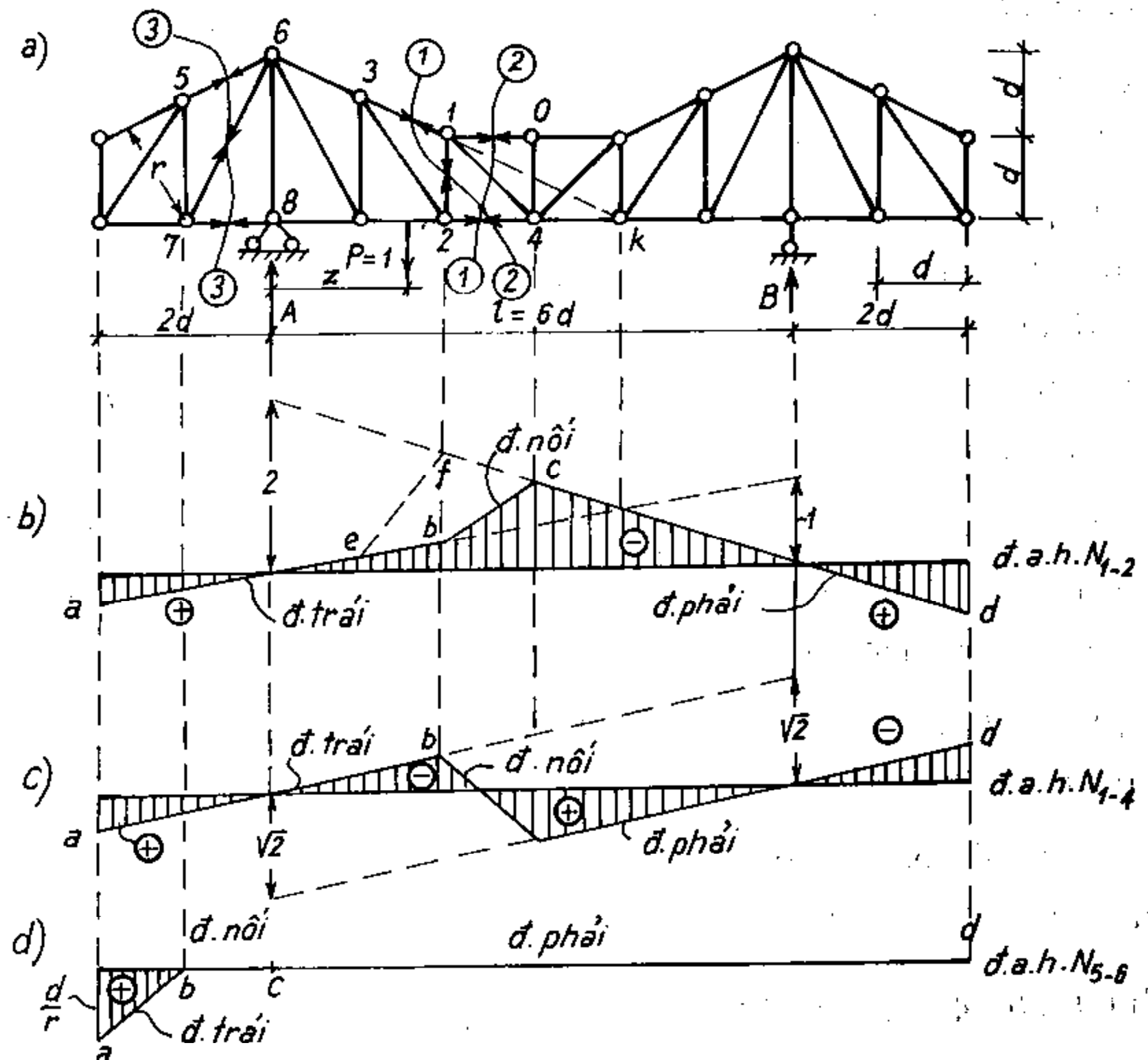
a) Mặt cắt ở trong nhịp. Giả sử cần vẽ đ.a.h. lực dọc trong các thanh 1-2 và 1-4 khi đường xe chạy dưới.

◆ Đường ảnh hưởng  $N_{1-2}$ . Thực hiện mặt cắt 1-1 qua thanh 1-2 và hai thanh khác là 3-1 và 2-4. Để xác định  $N_{1-2}$  ta dùng phương trình cân bằng tổng mômen của các lực đối với điểm  $k$  là giao điểm của hai thanh 3-1 và 2-4. Gọi điểm  $k$  là tâm mômen. Xét ba trường hợp:

- Khi  $P=1$  di động ở bên trái mặt cắt:  $(-2d \leq z \leq +2d)$ , khảo sát sự cân bằng của phần phải, ta có:

$$\sum M_k = N_{1-2} \cdot 2d + B \cdot 2d = 0; \text{ suy ra } N_{1-2} = -B = -z/l = -z/6d. \quad (a)$$

Đó là phương trình của đường trái khi  $P$  di động ở phần bên trái mặt cắt. Phương trình này có dạng bậc nhất. Để vẽ đường trái, ta tìm giá trị ở hai điểm: khi  $z = 0$  ta có  $N_{1-2} = 0$ ; khi  $z = l = 6d$  ta có  $N_{1-2} = -1$ .



Hình 3.19

Phân thích dụng của đường trái vẽ bằng đường liền nét trên hình 3.19b.

Phần này bắt đầu từ mút bên trái của dàn tới mắt số 2 là mắt cuối cùng của phần bên trái mặt cắt khi đường xe chạy dưới (đoạn  $ab$ ).

- Khi  $P=1$  di động ở bên phải mặt cắt, tức là mắt 4 đến đầu mút bên phải của dàn ( $3d \leq z \leq 8d$ ). Khảo sát sự cân bằng của phần trái, ta có:

$$\sum M_k = N_{1-2} \cdot 2d + A \cdot 4d = 0; \text{ suy ra } N_{1-2} = -2A = -(6d - z) / 3d. \quad (b)$$

Đó là phương trình *đường phải*, có dạng bậc nhất. Để vẽ đường phải ta cần tìm hai giá trị: khi  $z = 0$  ta có  $N_{1-2} = -2$ ; khi  $z = l = 6d$  ta có  $N_{1-2} = 0$ .

*Phần thích dụng của đường phải* bắt đầu từ mắt số 4 tức là mắt đầu tiên của phần bên phải khi đường xe chạy dưới cho đến hết đầu mút bên phải của dàn. Trên hình 3.19b ta vẽ đoạn này bằng đường liền nét  $cd$ .

- Khi  $P=1$  di động trên dốt 2-4 bị cắt.

Trong thực tế tải trọng không đặt vào các thanh của dàn mà thường đặt vào các mắt thông qua hệ thống truyền lực ở phía trên. Bởi vậy khi  $P=1$  di động trong khoảng này thì theo nguyên tắc của hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. là đoạn thẳng  $bc$  nối liền tung độ ứng dưới mắt 2 của đường trái và tung độ ứng dưới mắt 4 của đường phải.

Toàn bộ đường gãy khúc  $abcd$  trên hình 3.19b là đ.a.h.  $N_{1-2}$ .

**Nhận xét:**

- ❖ Ta dễ dàng nghiệm thấy: *đường trái và đường phải cắt nhau dưới tâm mômen  $k$* . Thật vậy, trong phương trình của đường trái và đường phải, cho  $z = 4d$ , ta đều tìm được  $N_{1-2} = 2/3$ . Điều đó chứng tỏ đường trái và đường phải cắt nhau ở dưới điểm  $k$ .
- ❖ Nếu đường xe chạy ở đường biên trên thì dạng ảnh hưởng  $N_{1-2}$  sẽ khác đi. Lúc này phần thích dụng của đường trái là đoạn  $ae$  (hình 3.19b) tức là bắt đầu từ đầu mút bên trái của dàn và kết thúc dưới mắt 3 là mắt cuối cùng của phần bên trái khi lực  $P=1$  di động ở đường biên trên. Phần thích dụng của đường phải bắt đầu từ mắt 1 cho tới đầu mút phải của dàn (đường  $fd$ ).

Đường nối là đoạn  $ef$  tương ứng dưới dốt 3-1. Toàn bộ đ.a.h.  $N_{1-2}$  khi đường xe chạy trên là đường gãy khúc  $acfd$  (hình 3.19b).

- ◆ *Đường ảnh hưởng  $N_{1-4}$* . Thực hiện mặt cắt 2-2 qua thanh 1-4 và hai thanh song song 1-0, 2-4. Để xác định  $N_{1-4}$  ta dùng phương trình cân bằng hình chiếu lên phương  $Y$  vuông góc với hai thanh song song

- Khi  $P=1$  di động ở bên trái mặt cắt 2-2 ( $-2d \leq z \leq +2d$ ), khảo sát sự cân bằng của phần dàn bên phải, ta có

$$\sum Y = N_{1-4} \cdot \cos 45^\circ + B = 0, \text{ suy ra } N_{1-4} = -\frac{B}{\cos 45^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{6d} z. \quad (c)$$

Đó là phương trình *đường trái*, có dạng bậc nhất.

Khi  $z = 0$  ta có  $N_{1-4} = 0$ ; khi  $z = l = 6d$  ta có  $N_{1-4} = -\sqrt{2}$ .

*Phân tích dụng của đường trái* là đoạn  $ab$  trên hình 3.19c.

- Khi  $P=I$  di động ở bên phải mặt cắt 2-2 ( $3d \leq z \leq 8d$ ), khảo sát sự cân bằng của phần dầm bên trái, ta có

$$\sum Y = -N_{1-4} \cdot \cos 45^\circ + A = 0,$$

suy ra 
$$N_{1-4} = \frac{A}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}(6d - z)}{6d} \quad (d)$$

Đó là phương trình *đường phải*, có dạng bậc nhất.

Khi  $z = 0$  ta có  $N_{1-4} = \sqrt{2}$ ; khi  $z = l = 6d$  ta có  $N_{1-4} = 0$ .

*Phân tích dụng của đường phải* là đoạn  $cd$  trên hình 3.19c.

- Khi  $P=I$  di động trên chốt bị cắt 2-4: áp dụng quy tắc của hệ có hệ thống truyền lực, ta có đường nối  $bc$  như trên hình 3.19c.

Toàn bộ đường gãy khúc  $abcd$  trên hình 3.19c là  $d.a.h.N_{1-4}$ .

*Nhận xét:* Khi mặt cắt đi qua ba thanh trong đó có hai thanh song song,  $d.a.h.$  nội lực trong thanh không song song có *đường trái* và *đường phải* song song với nhau. Thật vậy, ta dễ dàng nhận thấy các phương trình của đường trái và đường phải có cùng một hệ số góc.

b) *Mặt cắt ở đầu thừa.* Giả sử cần vẽ  $d.a.h.$  lực dọc trong thanh 5-6 khi đường xe chạy dưới.

Thực hiện mặt cắt 3-3 qua thanh 5-6 và các thanh 6-7, 7-8. Mặt cắt này chia dầm thành hai phần, trong đó phần bên trái không có phản lực tựa. Với loại mặt cắt này ta chỉ nên khảo sát sự cân bằng của phần không có phản lực, dù tải trọng di động ở phần bên trái hoặc bên phải mặt cắt vì làm như vậy thì số lượng lực tham gia phương trình cân bằng sẽ ít nhất.

- Khi  $P=I$  di động ở bên trái mặt cắt, tức là di động từ mút trái của dầm đến mút 7. Nếu chọn gốc tọa độ tại gối A và chiều dương của trục  $z$  hướng về bên trái thì ta tìm được phương trình  $d.a.h.N_{5-6}$  trong khoảng ( $d \leq z \leq 2d$ ):

$$\sum M_7^W = N_{5-6} \cdot r - I(z-d) = 0; \text{ suy ra } N_{5-6} = (z-d)/r.$$

Đó là phương trình *đường trái*.

Khi  $z = 2d$ , ta có  $N_{5-6} = d/r$ ; khi  $z = d$ , ta có  $N_{5-6} = 0$ .

Phần thích dụng của đường trái là đoạn  $ab$  (hình 3.19d) ứng dưới đầu mút trái của dàn và mắt 7.

- Khi  $P=I$  di động ở phần bên phải mặt cắt tức là từ mắt 8 đến đầu mút bên phải của dàn. Lúc này trên phần bên trái chỉ có các nội lực  $N_{5-6}$ ,  $N_{7-6}$  và  $N_{7-8}$ ; phương trình cân bằng có dạng

$$\sum M_{7^r} = N_{5-6} \cdot r = 0; \text{ suy ra } N_{5-6} = 0.$$

Đó là phương trình *đường phải*. Đường phải trùng với đường chuẩn. Phần thích dụng là đoạn  $cd$  (hình 3.19d) ứng dưới mắt 8 và đầu mút phải của dàn.

- Khi  $P=I$  di động trên đôt bị cắt (đôt 7-8), cũng tương tự như trên, theo nguyên tắc của hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. trong đoạn này là đoạn thẳng nối liền tung độ ứng dưới mắt 7 của đường trái và tung độ ứng dưới mắt 8 của đường phải. Trong trường hợp này đường nối là đoạn  $bc$  trùng với đường chuẩn.

Đường gãy khúc  $abcd$  trên hình 3.19d là đ.a.h.  $N_{5-6}$ .

**Chú thích:**

1. Từ kết quả vẽ đ.a.h. lực dọc trong dàn dầm theo phương pháp mặt cắt đơn giản ta thấy chúng có nhiều nét tương đồng với đ.a.h.  $M_k$  và đ.a.h.  $Q_k$  trong dầm đơn giản. Do đó có thể đề xuất cách vẽ nhanh đ.a.h. lực dọc trong dàn dầm theo đ.a.h. nội lực trong dầm đã quen biết khi áp dụng được phương pháp mặt cắt đơn giản. Ta lần lượt xét hai trường hợp sau

- ❖ Sau khi thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm đường ảnh hưởng lực dọc nếu *giao điểm k của hai thanh còn lại không ở xa vô cùng* thì từ (a) và (b) ta có thể suy ra công thức liên hệ giữa đ.a.h. lực dọc  $N$  trên dàn và đ.a.h. mômen uốn trong dầm đơn giản tương ứng như sau

$$\text{đ.a.h. } N = \pm \frac{1}{r} \text{ đ.a.h. } M_k^d, \quad (3.8)$$

trong đó:

đ.a.h.  $M_k^d$  - đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện  $k$  trong dầm đơn giản tương ứng;

$r$  - khoảng cách từ tâm mômen  $k$  đến phương của lực  $N$  cần tìm đ.a.h.

Ta chọn dấu + nếu lực dọc  $N$  dương tác dụng vào phần bên trái quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm mômen  $k$ .

Từ (3.8) ta có thể đề ra quy tắc vẽ đ.a.h. lực dọc trong dàn dầm như sau

- Thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần tìm đ.a.h. lực dọc, lấy giao điểm của hai thanh còn lại làm tâm mômen  $k$ .
- Vẽ đ.a.h. của mômen uốn  $M_k^d$  tại tiết diện  $k$  trong dầm đơn giản tương ứng theo phương pháp đã quen biết.

- Xác định phạm vi thích dụng của các đường trái, đường phải và đường nối cho phù hợp với đường xe chạy trên dàn. Trong phạm vi mặt cắt, dùng đường nối.
  - Nhân các tung độ của đ.a.h.  $M_k^d$  với thừa số  $\pm 1/r$  (cách chọn dấu đã nói ở trên) sẽ được đ.a.h. cần tìm.
- ❖ Sau khi thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần vẽ đ.a.h. lực dọc, nếu giao điểm  $k$  của hai thanh còn lại ở xa vô cùng thì từ các biểu thức (c) và (d) ta có thể suy ra công thức liên hệ giữa đ.a.h. lực dọc  $N$  trong dàn và đ.a.h. lực cắt trong dầm đơn giản tương ứng như sau:

$$\text{đ.a.h. } N = \pm \frac{1}{\sin \gamma} \text{ đ.a.h. } Q^d, \quad (3.9)$$

trong đó:

$\text{đ.a.h. } Q^d$  - đ.a.h. lực cắt tại tiết diện có vị trí trong phạm vi đốt bị cắt trên đường xe chạy trong dầm đơn giản tương ứng;

$\gamma$  - góc hợp giữa thanh cần vẽ đường ảnh hưởng  $N$  với phương của hai thanh song song.

Ta chọn dấu + nếu lực  $N$  dương đặt ở phần bên trái mặt cắt hướng xuống phía dưới.

Từ (3.9) ta có thể đề ra quy tắc vẽ đ.a.h.  $N$  cho trường hợp này như sau:

- Thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần vẽ đ.a.h.  $N$  và hai thanh song song.
- Vẽ đ.a.h.  $Q^d$  trong dầm đơn giản tương ứng tại tiết diện nằm trong phạm vi đốt bị cắt.
- Xác định phần thích dụng của các đoạn đ.a.h. phù hợp với đường xe chạy trên dàn. Trong phạm vi mặt cắt, dùng đường nối.
- Nhân các tung độ đ.a.h.  $N$  vừa tìm được với thừa số  $\pm 1/\sin \gamma$  sẽ được đ.a.h.  $N$  cần tìm (cách chọn dấu đã nêu ở trên).

Đề nghị bạn đọc tự áp dụng cách vẽ này để kiểm nghiệm lại các đ.a.h. đã vẽ trên hình 3.19.

2. Về nguyên tắc có thể dùng một trong hai phương pháp kể trên để vẽ đ.a.h. lực dọc trong tất cả các thanh của dàn dầm tĩnh định. Trong những bài toán cụ thể, nên chọn phương pháp nào cho phép thiết lập được phương trình đ.a.h. từ một phương trình cân bằng tĩnh học.
3. Trường hợp không thể thiết lập được phương trình đ.a.h. từ một phương trình cân bằng, có thể dùng phương pháp mặt cắt phối hợp hoặc vẽ trước một số đường ảnh hưởng có liên quan. Ví dụ muốn vẽ đ.a.h.  $N_{k-d}$  của dàn trên hình 2.16 (chương 2) ta cần vẽ trước đ.a.h.  $N_{k-e}$  bằng mặt cắt qua ba thanh  $d-e$ ,  $k-e$  và  $g-f$ , sau đó dùng mặt cắt qua các thanh  $c-d$ ,  $k-d$ ,  $k-e$  và  $h-g$  để vẽ đ.a.h.  $N_{k-d}$ .
4. Trong thực hành, khi gặp những dàn phức tạp như dàn trên hình 2.17 (chương 2), ta có thể vẽ đ.a.h. bằng cách: cho  $P = 1$  lần lượt đặt tại từng mắt, xác định lực dọc trong thanh cần vẽ đ.a.h., dưới mỗi mắt đóng một tung độ bằng giá trị lực dọc tương ứng với khi  $P = 1$  đặt tại mắt đó, nối các tung độ lại với nhau bằng những đoạn thẳng (theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực) đường gãy khúc đó chính là đ.a.h. cần tìm.

### 3.7. Đường ảnh hưởng trong hệ dàn vòm ba khớp

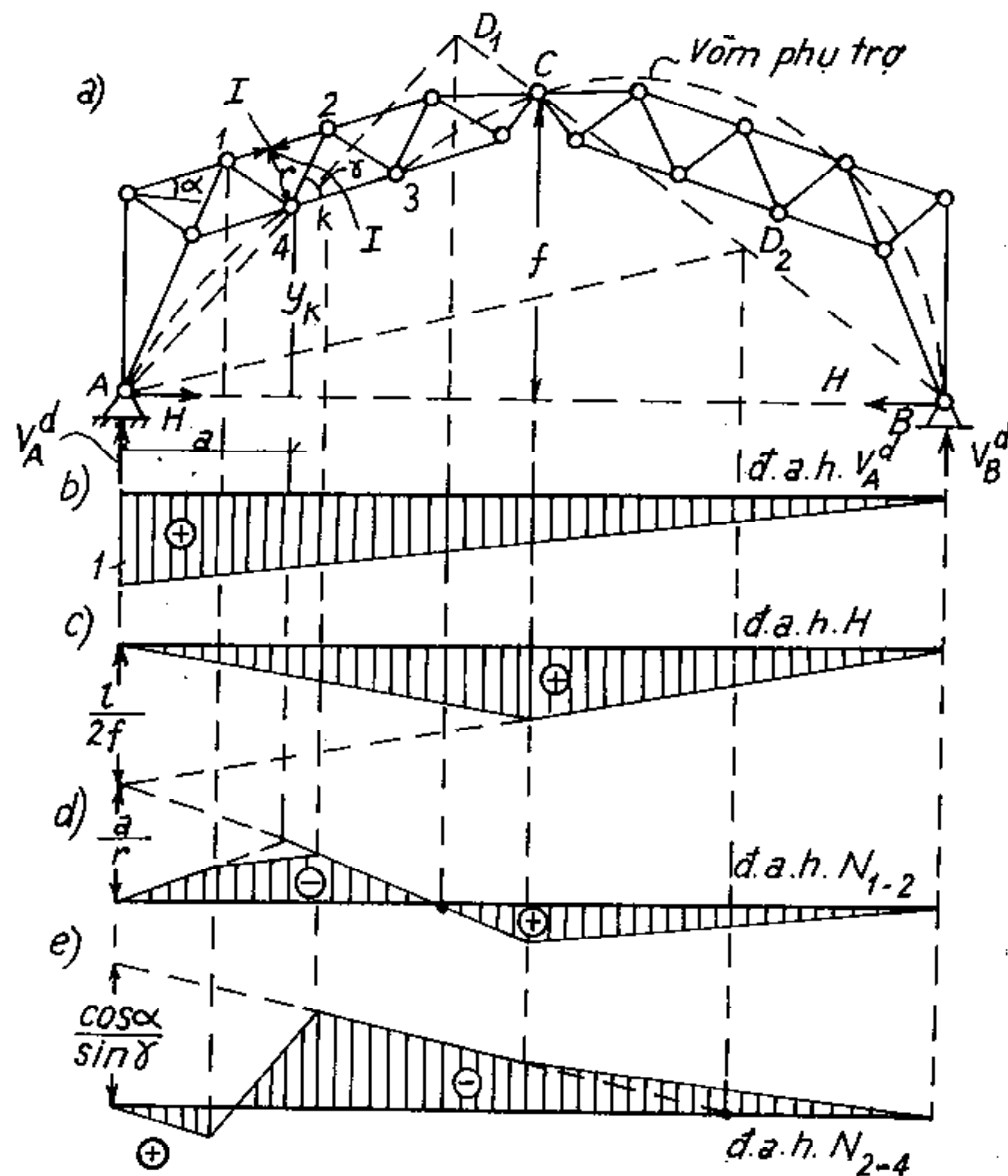
Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ dàn vòm ba khớp thông qua hệ dàn vẽ trên hình 3.20. Giả sử cần vẽ đ.a.h. các thành phần phản lực và đ.a.h. nội lực trong các thanh 1-2 và 2-4 khi đường xe chạy trên.

#### A. Đường ảnh hưởng phản lực

Cách vẽ đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực trong dàn vòm ba khớp giống như cách vẽ đ.a.h. phản lực trong hệ ba khớp.

Trên hình 3.20b,c cho kết quả đ.a.h.  $V_A^d$  và đ.a.h.  $H$ .

Hình 3.20



#### B. Đường ảnh hưởng nội lực trong các thanh

◆ Đường ảnh hưởng  $N_{1-2}$ . Thực hiện mặt cắt I-I qua thanh 1-2 và hai thanh 2-4, 3-4, viết điều kiện cân bằng dưới dạng tổng mômen đối với điểm k:

• Khi  $P=I$  di động ở bên trái mặt cắt, khảo sát sự cân bằng của phần phải:

$$\sum M_k^{ph} = N_{1-2} \cdot r + V_B^d(l-a) - H y_k = 0;$$

$$\text{suy ra} \quad \text{đ.a.h. } N_{1-2} = -\frac{l}{r} [V_B^d(l-a) - H y_k]. \quad (a)$$

Đó là phương trình của đường trái khi  $P$  di động ở phần bên trái mặt cắt.



- Khi  $P=I$  di động ở bên phải mặt cắt, khảo sát sự cân bằng của phần trái.

$$\sum M_k^P = N_{1-2} \cdot r + V_A^d a - H v_k = 0;$$

$$\text{suy ra đ.a.h. } N_{1-2} = -\frac{I}{r} [V_A^d a - H v_k]. \quad (b)$$

Đó là phương trình của *đường phải* khi  $P$  di động ở phần bên phải mặt cắt.

Từ hai biểu thức trên ta sẽ vẽ được *đ.a.h.*  $N_{1-2}$  (hình 3.20d) khi  $P$  di động bên ngoài chốt bị cắt.

- Khi  $P$  di động trên chốt bị cắt  $1-2$ , ta dùng đường nối theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực.

♦ *Đường ảnh hưởng*  $N_{2-4}$ . Ta cũng dùng mặt cắt I-I và viết điều kiện cân bằng dưới dạng hình chiếu xuống phương  $Y$  vuông góc với hai thanh song song  $1-2$  và  $3-4$ .

- Khi  $P=I$  di động ở bên trái mặt cắt, khảo sát sự cân bằng của phần phải:

$$\sum Y^{\text{ph}} = N_{2-4} \cdot \sin \gamma - V_B^d \cos \alpha - H \sin \alpha = 0;$$

$$\text{suy ra đ.a.h. } N_{2-4} = -\frac{I}{\sin \gamma} [V_B^d \cos \alpha + H \sin \alpha]. \quad (c)$$

- Khi  $P=I$  di động ở bên phải mặt cắt; khảo sát sự cân bằng của phần trái:

$$\sum Y^{\text{tr}} = N_{2-4} \cdot \sin \gamma + V_A^d \cos \alpha - H \sin \alpha = 0;$$

$$\text{suy ra đ.a.h. } N_{2-4} = -\frac{I}{\sin \gamma} [V_A^d \cos \alpha - H \sin \alpha]. \quad (d)$$

Từ hai biểu thức trên, ta sẽ vẽ được *đ.a.h.*  $N_{2-4}$  (hình 3.20e) khi  $P$  di động bên ngoài chốt bị cắt.

- Khi  $P$  di động trên chốt bị cắt  $1-2$ , ta dùng đường nối theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực.

#### Chú thích:

Từ kết quả vẽ *đ.a.h.* lực dọc trong dàn vòm ba khớp theo phương pháp mặt cắt đơn giản ta thấy chúng có nhiều nét tương đồng với *đ.a.h.*  $M_k$  và *đ.a.h.*  $Q_k$  trong vòm ba khớp. Do đó có thể đề xuất cách vẽ nhanh *đ.a.h.* lực dọc trong dàn vòm ba khớp theo *đ.a.h.* nội lực trong vòm ba khớp đã quen biết khi áp dụng được phương pháp mặt cắt đơn giản. Ta lần lượt xét hai trường hợp sau

❖ Sau khi thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm đường ảnh hưởng lực dọc nếu *giao điểm k của hai thanh còn lại không ở xa vô cùng* thì từ (a) và (b) ta có thể suy ra công thức liên hệ giữa *đ.a.h.* lực dọc  $N$  trên dàn vòm ba khớp và *đ.a.h.* mômen uốn trong vòm ba khớp tương ứng như sau:

$$\text{đ.a.h. } N = \pm \frac{1}{r} \text{ đ.a.h. } M_k^V, \quad (3.10)$$

trong đó:

$\text{đ.a.h. } M_k^V$  - đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện  $k$  trong vòm ba khớp phụ trợ đi qua  $A, C, B$  và  $k$ ;

$r$  - khoảng cách từ tâm mômen  $k$  đến phương của lực  $N$  cần tìm đ.a.h.

Ta chọn dấu + nếu lực dọc  $N$  dương tác dụng vào phần bên trái quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm mômen  $k$ .

Từ (3.10) ta có thể đề ra quy tắc vẽ đ.a.h. lực dọc trong dàn vòm ba khớp như sau:

- Thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần tìm đ.a.h. lực dọc, lấy giao điểm của hai thanh còn lại làm tâm mômen  $k$ .
- Vẽ vòm phụ trợ tưởng tượng đi qua ba khớp  $A, B, C$  và qua tâm mômen  $k$ . Vẽ đ.a.h. mômen uốn  $M_k^V$  tại tiết diện  $k$  trong vòm phụ trợ theo phương pháp đã quen biết.
- Xác định phạm vi thích dụng của các đường trái, đường phải và đường nối cho phù hợp với đường xe chạy trên dàn vòm. Trong phạm vi mặt cắt, dùng đường nối.
- Nhân các tung độ của đ.a.h.  $M_k^V$  với thừa số  $\pm 1/r$  (cách chọn dấu đã nói ở trên) sẽ được đ.a.h. cần tìm.

Chi tiết cách vẽ đ.a.h.  $N_{1,2}$  theo cách này được trình bày trên hình 3.20a và d.

- ❖ Sau khi thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần vẽ đường ảnh hưởng lực dọc, nếu giao điểm  $k$  của hai thanh còn lại ở xa vô cùng thì từ các biểu thức (c) và (d) ta suy ra công thức liên hệ giữa đ.a.h. lực dọc  $N$  trong dàn vòm ba khớp và đ.a.h. lực cắt trong vòm ba khớp như sau:

$$\text{đ.a.h. } N = \pm \frac{1}{\sin \gamma} \text{ đ.a.h. } Q^V, \quad (3.11)$$

trong đó:

$\text{đ.a.h. } Q^V$  - đ.a.h. lực cắt tại tiết diện tương ứng với vị trí mặt cắt trong vòm ba khớp phụ trợ đi qua các điểm  $A, C, B$  và có đoạn song song với hai thanh song song tại vị trí mặt cắt;

$\gamma$  - góc hợp giữa thanh cần vẽ đường ảnh hưởng  $N$  với phương của hai thanh song song.

Ta chọn dấu + nếu lực  $N$  dương đặt ở phần bên trái mặt cắt hướng xuống phía dưới.

Từ (3.11) ta có thể đề ra quy tắc vẽ đ.a.h.  $N$  cho trường hợp này như sau:

- Thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần vẽ đ.a.h.  $N$  và hai thanh song song.
- Vẽ vòm phụ trợ đi qua ba khớp  $A, C, B$  và có đoạn song song với hai thanh song song tại đốt dàn bị cắt. Vẽ đ.a.h.  $Q^V$  trong vòm phụ trợ tại tiết diện nằm trong phạm vi đốt bị cắt.
- Xác định phần thích dụng của các đoạn đ.a.h. cho phù hợp với đường xe chạy trên dàn vòm. Trong phạm vi mặt cắt, dùng đường nối.
- Nhân các tung độ đ.a.h.  $N$  vừa tìm được với thừa số  $\pm 1/\sin \gamma$  (cách chọn dấu đã nêu ở trên) sẽ được đ.a.h.  $N$  cần tìm.

Để nghị bạn đọc tự áp dụng cách vẽ này để kiểm nghiệm lại các đ.a.h. nội lực đã vẽ cho dàn trên hình 3.20.

### 3.8. Cách xác định các đại lượng nghiên cứu tương ứng với các dạng tải trọng khác nhau theo đường ảnh hưởng

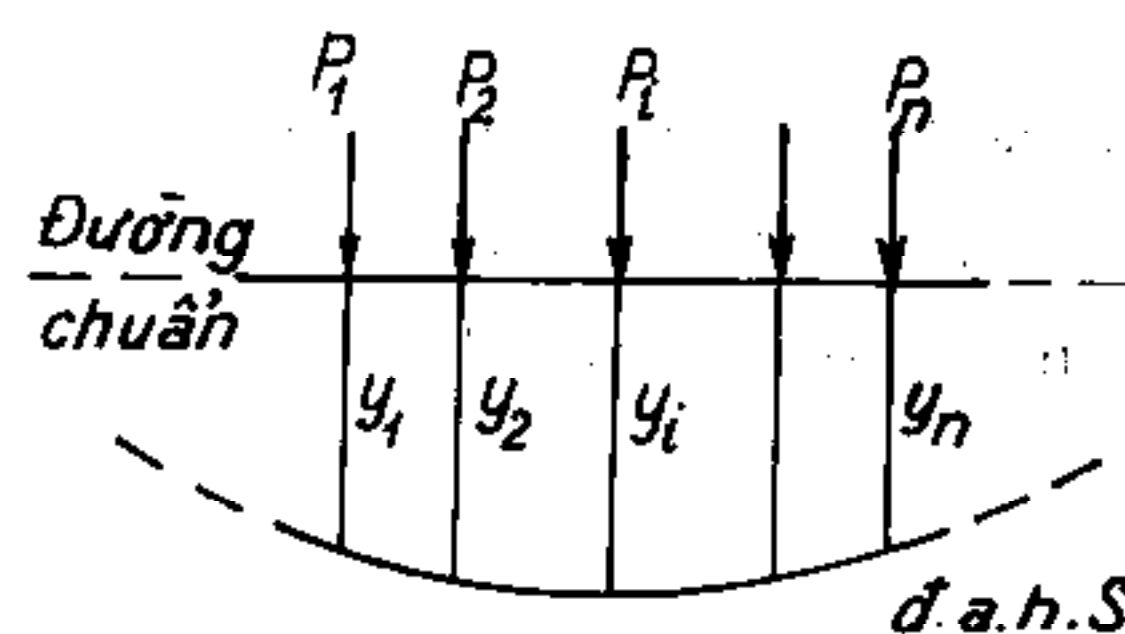
Trong 3.1 đã nêu hai yêu cầu cần thực hiện khi tính toán công trình với tải trọng di động. Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách thực hiện yêu cầu thứ hai, còn yêu cầu thứ nhất sẽ được đề cập trong 3.10. Để trình bày được tổng quát, ta giả thiết đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu  $S$  là đường cong bất kỳ được mô tả bởi phương trình  $y = f(z)$ .

Có ba dạng tải trọng cần nghiên cứu: *tải trọng tập trung*, *tải trọng phân bố* và *mômen tập trung*. Dưới đây sẽ lần lượt nghiên cứu cách sử dụng đường ảnh hưởng để tính ảnh hưởng của các dạng tải trọng đó đối với đại lượng  $S$ .

#### A. Tải trọng tập trung

Giả sử trên công trình có  $n$  tải trọng tập trung  $P_1, P_2, \dots, P_n$  cùng phương tác dụng tại những vị trí xác định (hình 3.21).

Yêu cầu xác định ảnh hưởng của các tải trọng đó đối với đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng đã vẽ được theo lực  $P=1$ , tác dụng cùng phương với các lực trên.



Hình 3.21

Theo định nghĩa đường ảnh hưởng, nếu trên hệ chỉ có một lực  $P_i = 1$  tác dụng thì ảnh hưởng của nó đến đại lượng  $S$  bằng tung độ  $y_i$  của đ.a.h.  $S$  tại tiết diện đặt lực. Theo nguyên lý cộng tác dụng, nếu lực đó có giá trị  $P_i$  thì ảnh hưởng của nó đến đại lượng  $S$  sẽ gấp  $P_i$  lần và được biểu thị bằng tích số  $P_i y_i$ . Lại vận dụng nguyên lý cộng tác dụng một lần nữa ta có thể biểu thị ảnh hưởng của tất cả các lực đối với đại lượng  $S$  theo đa thức sau:

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_i y_i + \dots + P_n y_n = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (3.12)$$

Như vậy, giá trị của đại lượng  $S$  do các lực tập trung gây ra bằng tổng đại số các tích số giữa giá trị của lực tập trung với tung độ đường ảnh hưởng tại các điểm đặt lực tương ứng.

- ◆ Các lực  $P_i$  hướng theo chiều  $P=1$  dùng để vẽ đ.a.h. được xem là dương (thường hướng xuống dưới).
- ◆ Dấu của tung độ  $y_i$  lấy theo dấu của đường ảnh hưởng  $S$ .

### B. Tải trọng phân bố

Giả sử công trình chịu tải trọng phân bố có phương không đổi tác dụng theo luật bất kỳ với cường độ  $q(z)$  (hình 3.22), yêu cầu xác định ảnh hưởng của tải trọng phân bố đối với đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng đã vẽ được với lực  $P=1$  tác dụng cùng phương với  $q$ .

Trước tiên ta xét ảnh hưởng của một phân tố tải trọng trên chiều dài  $dz$  (phần gạch chéo trên hình 3.23). Có thể xem phân tố tải trọng này như lực tập trung với giá trị là  $q(z).dz$  và xác định ảnh hưởng  $dS$  của nó đối với đại lượng  $S$  theo (3.12)

$$dS = q(z).dz.y.$$

Ảnh hưởng tổng cộng của tất cả các phân tố tải trọng

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b q(z).y.dz. \quad (3.13)$$

Trường hợp tải trọng phân bố đều ( $q = \text{const}$ ), ta có:

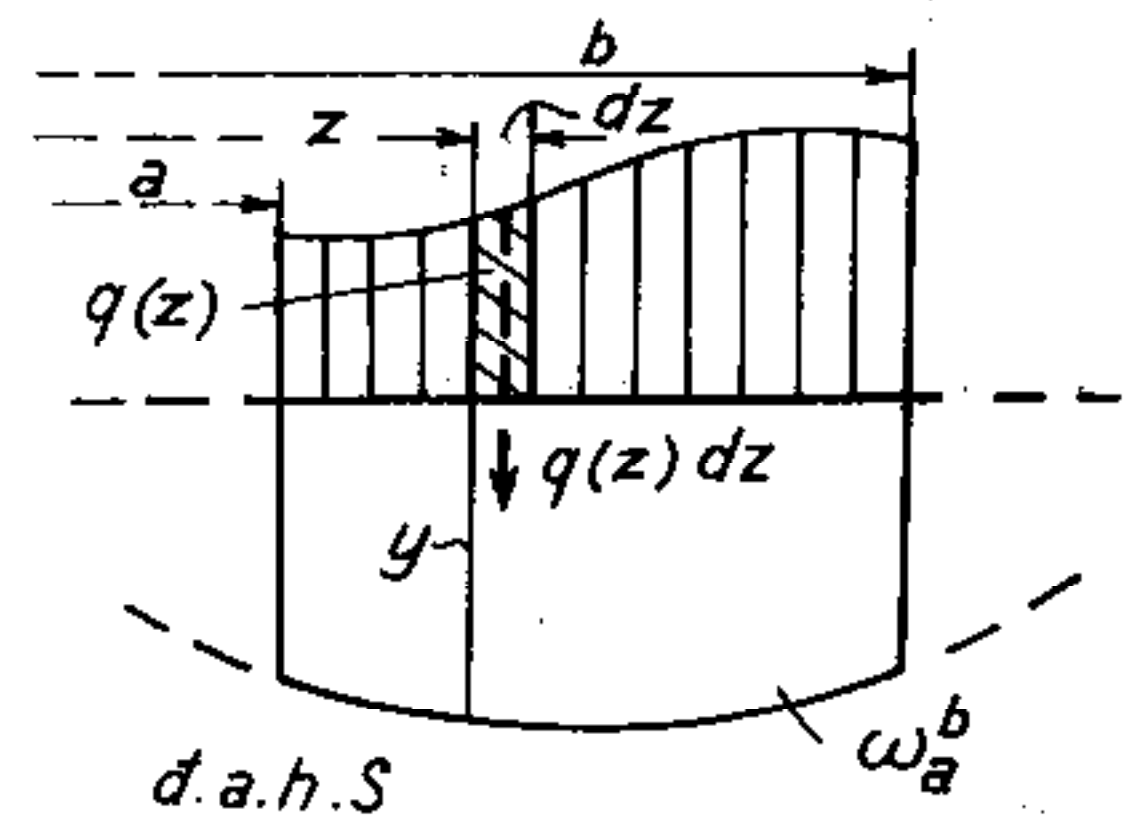
$$S = q \int_a^b y.dz = q\omega_a^b. \quad (3.14)$$

trong đó  $\omega_a^b$  là diện tích của phần đ.a.h. tương ứng với đoạn tải trọng phân bố đều  $q$ .

Như vậy, giá trị của đại lượng  $S$  do tải trọng phân bố đều gây ra bằng tích của cường độ tải trọng  $q$  với diện tích của phần đường ảnh hưởng nằm dưới đoạn tải trọng.

- ◆ Cường độ  $q$  được xem là dương nếu tải trọng phân bố hướng theo chiều lực  $P=1$  dùng để vẽ đ.a.h.  $S$ .
- ◆ Dấu của diện tích lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.

Trường hợp phần đường ảnh hưởng ở phía dưới tải trọng gồm nhiều đoạn có dấu khác nhau ta cần hiểu là tổng đại số của các diện tích.

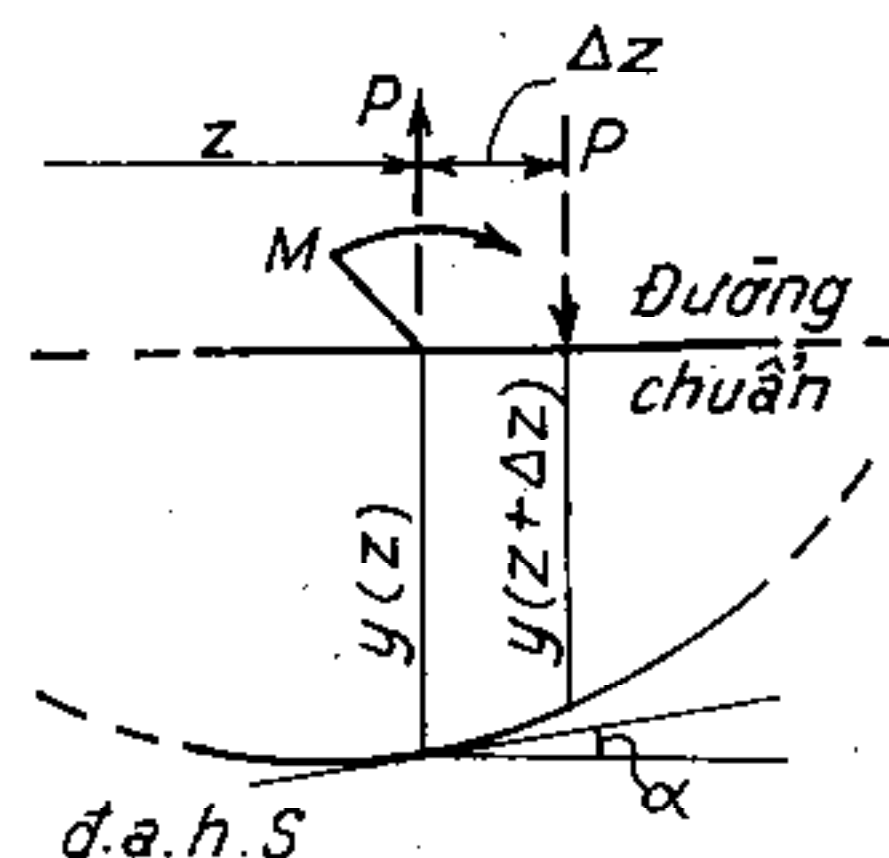


Hình 3.22

### C. Mômen tập trung

Giả sử trên công trình có tác dụng mômen tập trung  $M$ , yêu cầu xác định ảnh hưởng của nó đối với đại lượng  $S$  đã biết đường ảnh hưởng (hình 3.23).

Thay thế tác dụng của mômen tập trung  $M$  đặt tại hoành độ  $z$  bằng một ngẫu lực gồm hai lực tập trung  $P$  có cánh tay đòn bằng  $\Delta z$  với  $\Delta z$  tiến tới 0. Theo (3.12), ta xác định được đại lượng  $S$  do ảnh hưởng của hai lực này như sau



Hình 3.23

Nhưng  $P = M / \Delta z$ , nên:

$$S = M \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{y(z + \Delta z) - y(z)}{\Delta z} \right] = M \cdot y'(z),$$

hay

$$S = M \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.15)$$

Như vậy, ảnh hưởng của mômen tập trung đến đại lượng  $S$  bằng giá trị của mômen tập trung nhân với giá trị đạo hàm của đường ảnh hưởng tại điểm đặt mômen hay nhân với tang của góc hợp giữa tiếp tuyến của đường ảnh hưởng tại điểm đặt mômen với phương của đường chuẩn.

Trường hợp trên kết cấu có nhiều mômen tập trung  $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$  tác dụng, theo nguyên lý cộng tác dụng ta có

$$S = M_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + M_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + M_i \operatorname{tg} \alpha_i + \dots + M_n \operatorname{tg} \alpha_n,$$

hay

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (3.16)$$

- ◆ Công thức trên được thiết lập với chiều mômen vẽ trên hình 3.23 nên khi sử dụng công thức này ta phải xem mômen  $M_i$  là dương nếu quay thuận chiều kim đồng hồ.
- ◆  $\operatorname{tg} \alpha_i$  được xem là dương khi đường ảnh hưởng đồng biến.

**Ví dụ 3.3.** Sử dụng đường ảnh hưởng để xác định mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $k$  (hình 3.24) do tải trọng có vị trí cố định gây ra.

Các đ.a.h.  $Q_k$  và đ.a.h.  $M_k$  vẽ trên hình 3.24b và c. Tại tiết diện  $k$  có mômen và lực tập trung nên ta cần xác định hai giá trị của mômen uốn và lực cắt ứng với

hai tiết diện ở bên trái và bên phải điểm đặt mômen và lực tập trung.

❖ Nội lực tại tiết diện bên trái điểm

đặt mômen và lực tập trung:

lúc này lực tập trung và mômen tập trung ở bên phải  $k$  (bên phải bước nhảy của  $\text{đ.a.h.} Q_k$  và điểm gãy của  $\text{đ.a.h.} M_k$ ).

$$Q_k^{tr} = -1.0.5.4/2 + 3.0.5 + (-2)(-0.5/4) = 3/4 \text{ kN};$$

$$M_k^{tr} = 1.2.4/2 + 3.2 + (-2)(-2/4) = 11 \text{ kNm}.$$

❖ Nội lực tại tiết diện bên phải điểm

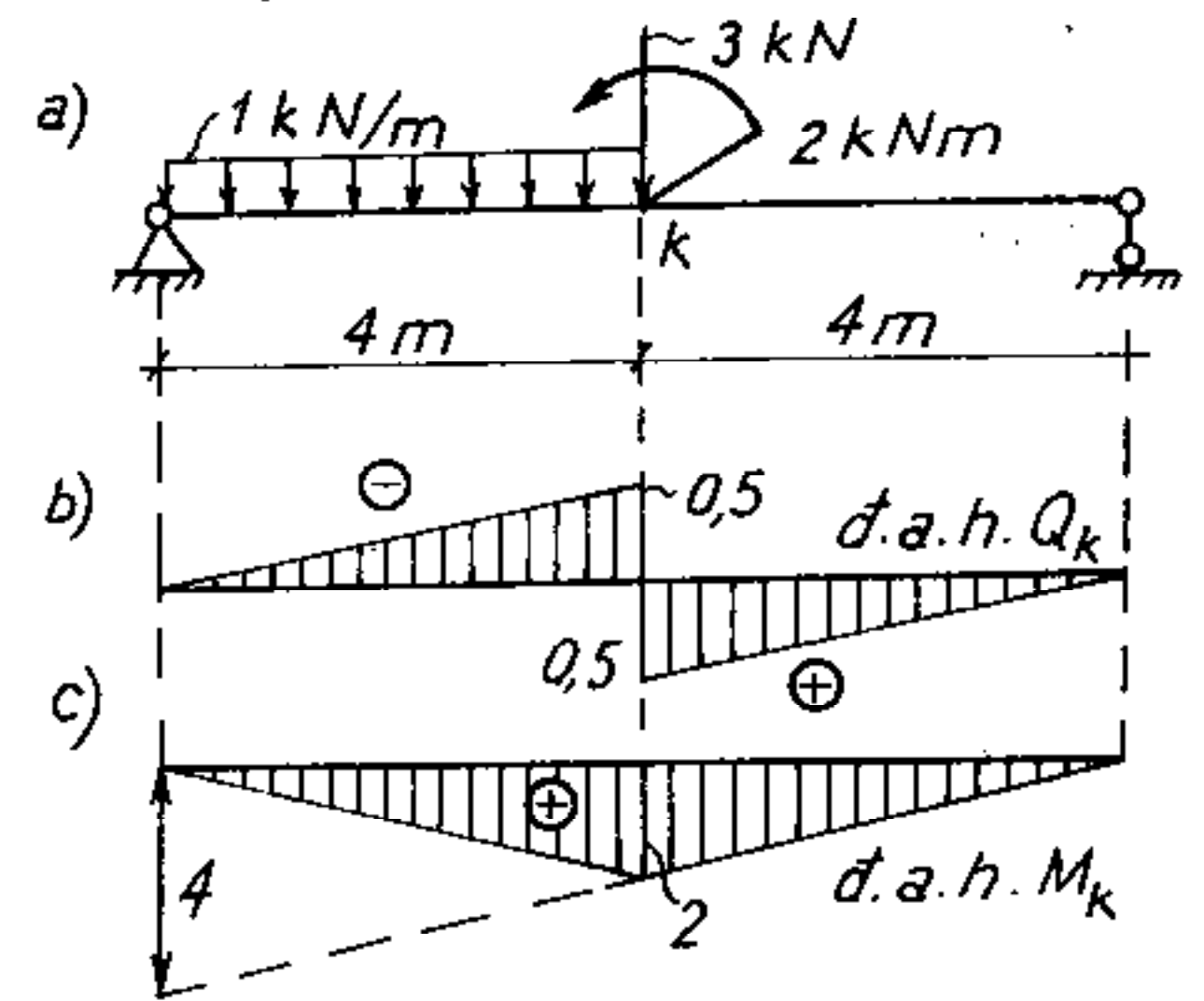
đặt mômen và lực tập trung:

lúc này lực tập trung và mômen tập trung tác dụng ở bên trái  $k$  (bên trái bước nhảy của  $\text{đ.a.h.} Q_k$  và điểm gãy của  $\text{đ.a.h.} M_k$ ).

$$Q_k^{ph} = -(1.0.5.4/2) + 3(-0.5) + (-2)(-0.5/4) = 9/4 \text{ kN};$$

$$M_k^{ph} = 1.2.4/2 + 3.2 + (-2)(2/4) = 9 \text{ kNm}.$$

Bạn đọc có thể vẽ các biểu đồ lực cắt và mômen uốn để đối chiếu với những kết quả vừa tìm được.



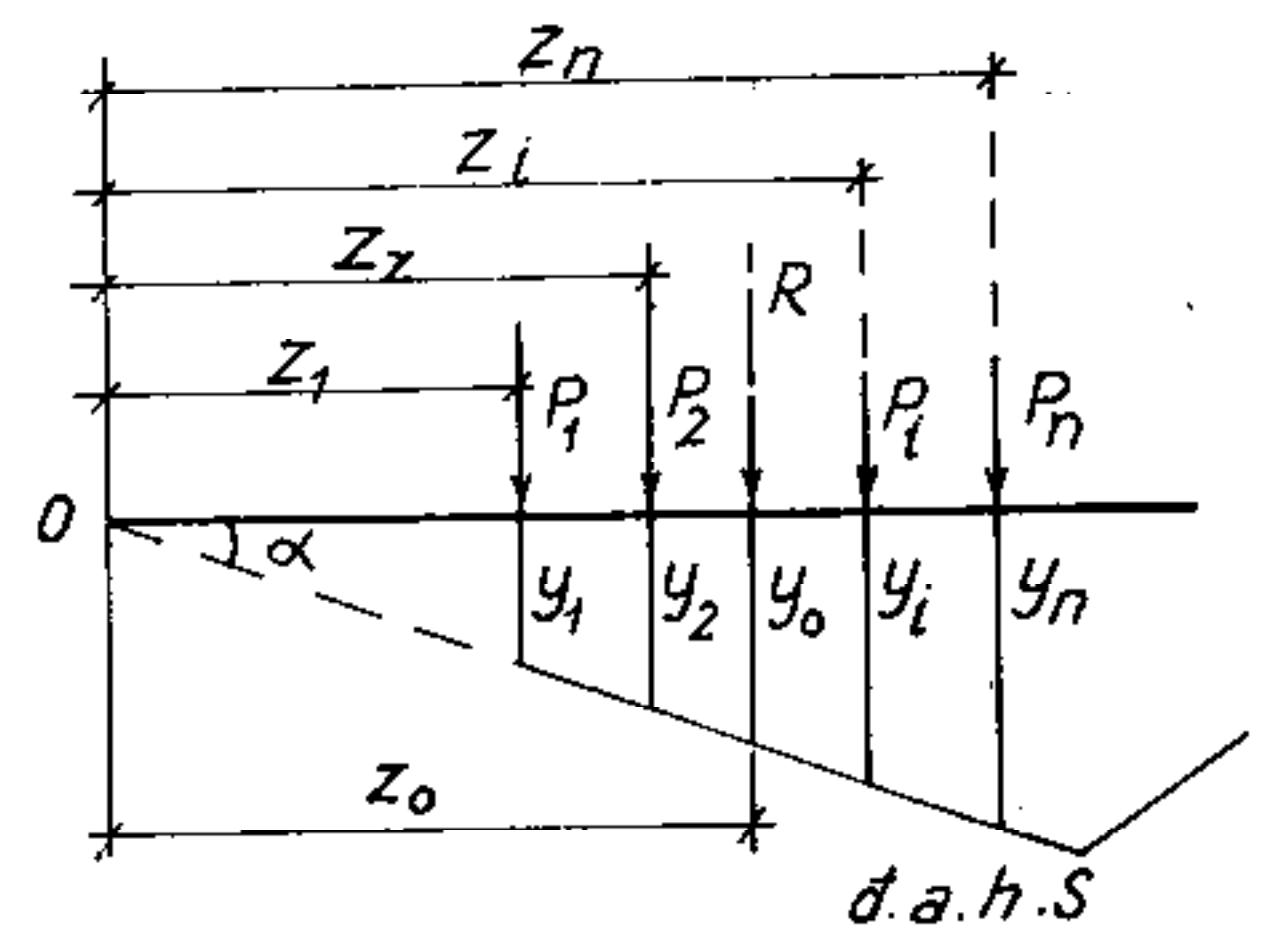
Hình 3.24

### 3.9. Tính chất của đường ảnh hưởng có dạng đường thẳng

Trong 3.8 ta đã nghiên cứu cách sử dụng các đường ảnh hưởng có dạng bất kỳ: cong hoặc thẳng. Riêng trong trường hợp đường ảnh hưởng có dạng đường thẳng hoặc gồm nhiều đoạn thẳng, ta có thể chứng minh được tính chất sau:

*Khi xác định đại lượng nghiên cứu  $S$  do tải trọng bất kỳ có vị trí xác định gây ra, ta có thể thay thế các tải trọng tác dụng trên từng phần thẳng của đường ảnh hưởng bằng hợp lực của chúng.*

Ta sẽ chứng minh tính chất này trong trường hợp tải trọng tập trung (hình 3.25). Giả thiết trên phần thẳng của đường ảnh hưởng có các lực tập trung  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tác dụng. Kéo dài phần đường thẳng tới khi cắt đường chuẩn tại điểm  $O$  và xem  $O$  là gốc tọa độ.



Hình 3.25



Theo (3.12) ta có

$$S = \sum_{i=1}^n P_i y_i = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_i y_i + \dots + P_n y_n.$$

Vì phần đường ảnh hưởng là đường thẳng liên tục nên từ hình 3.25 ta có:

$$y_i = z_i \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{với} \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$$

nên

$$S = \operatorname{tg} \alpha (P_1 z_1 + P_2 z_2 + \dots + P_i z_i + \dots + P_n z_n),$$

hay

$$S = \operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^n P_i z_i. \quad (3.17)$$

Ta thấy  $P_i z_i$  là mômen của lực  $P_i$  đối với điểm  $O$ .

Theo định lý Varignon (xem Cơ học cơ sở): tổng mômen của các lực  $P_i$  đối với điểm  $O$  bằng mômen của hợp lực các lực  $P_i$  đối với điểm đó, nên

$$\sum_{i=1}^n P_i z_i = R z_o,$$

trong đó:  $R$  - hợp lực của các lực  $P_i$ ;

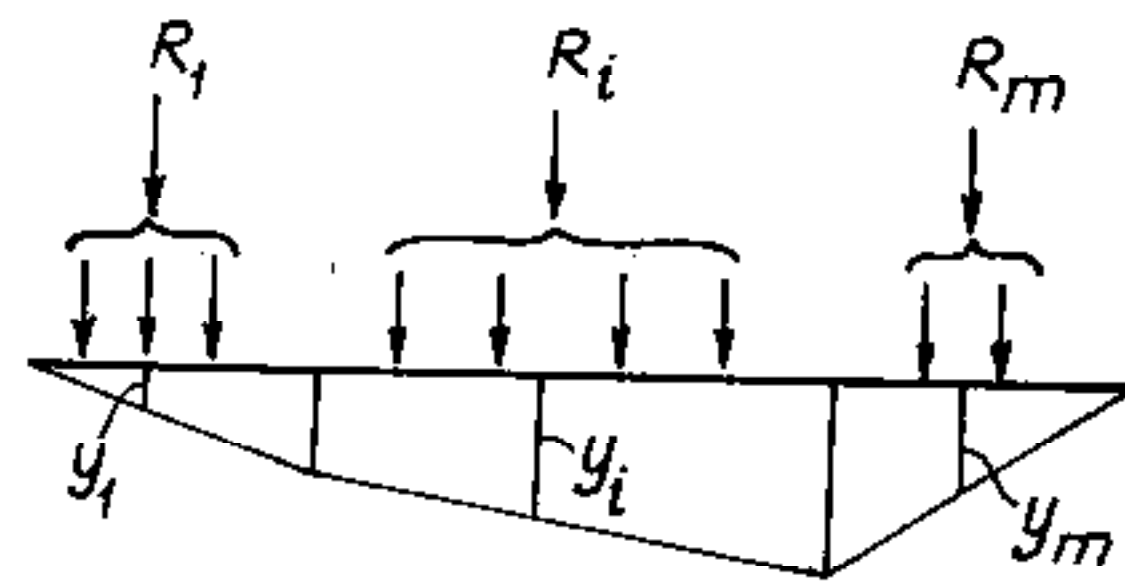
$z_o$  - hoành độ của hợp lực  $R$  kể từ góc  $O$ .

Do đó, ta có thể viết (3.17) dưới dạng sau:

$$S = R z_o \operatorname{tg} \alpha.$$

Nhưng  $z_o \operatorname{tg} \alpha = y_o$  nên

$$S = R y_o.$$



Hình 3.26

Đó là điều phải chứng minh.

Trong trường hợp đ.a.h. gồm nhiều đoạn thẳng, muốn áp dụng tính chất trên để tính đại lượng  $S$  ta cần lấy hợp lực từng nhóm tải trọng tác dụng trong từng đoạn thẳng một, rồi cộng các kết quả (xem hình 3.26).

hay

$$S = \sum_{i=1}^m R_i y_i. \quad (3.18)$$

trong đó  $m$  là số đoạn thẳng của đường ảnh hưởng.

**Chú thích:** Trên phần thẳng của đ.a.h. ta có thể dùng công thức (3.17) thay thế cho công thức (3.12).

Trong một số trường hợp, dùng (3.17) tiện lợi hơn (3.12), ví dụ như khi xác định đại lượng  $S$  do nhiều tải trọng tập trung có khoảng cách đã biết tác dụng trên đường ảnh hưởng thẳng thì tìm các hoành độ  $z_i$  nhanh hơn tìm các tung độ  $y_i$  của đ.a.h.

### 3.10. Cách dùng đường ảnh hưởng để xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng

Tải trọng di động thường gặp trong thực tế là: đoàn xe lửa, đoàn xe ô tô, xe xích... gọi chung là *đoàn tải trọng*. Khi di động trên công trình, đoàn tải trọng phải tuân theo một luật lệ nhất định về trọng tải, về khoảng cách... (xem các quy trình về cầu). Những đoàn tải trọng bố trí đúng theo quy định gọi là *đoàn tải trọng tiêu chuẩn*. Mỗi công trình đều được tính toán với một đoàn tải trọng tiêu chuẩn nhất định tùy theo mục đích sử dụng.

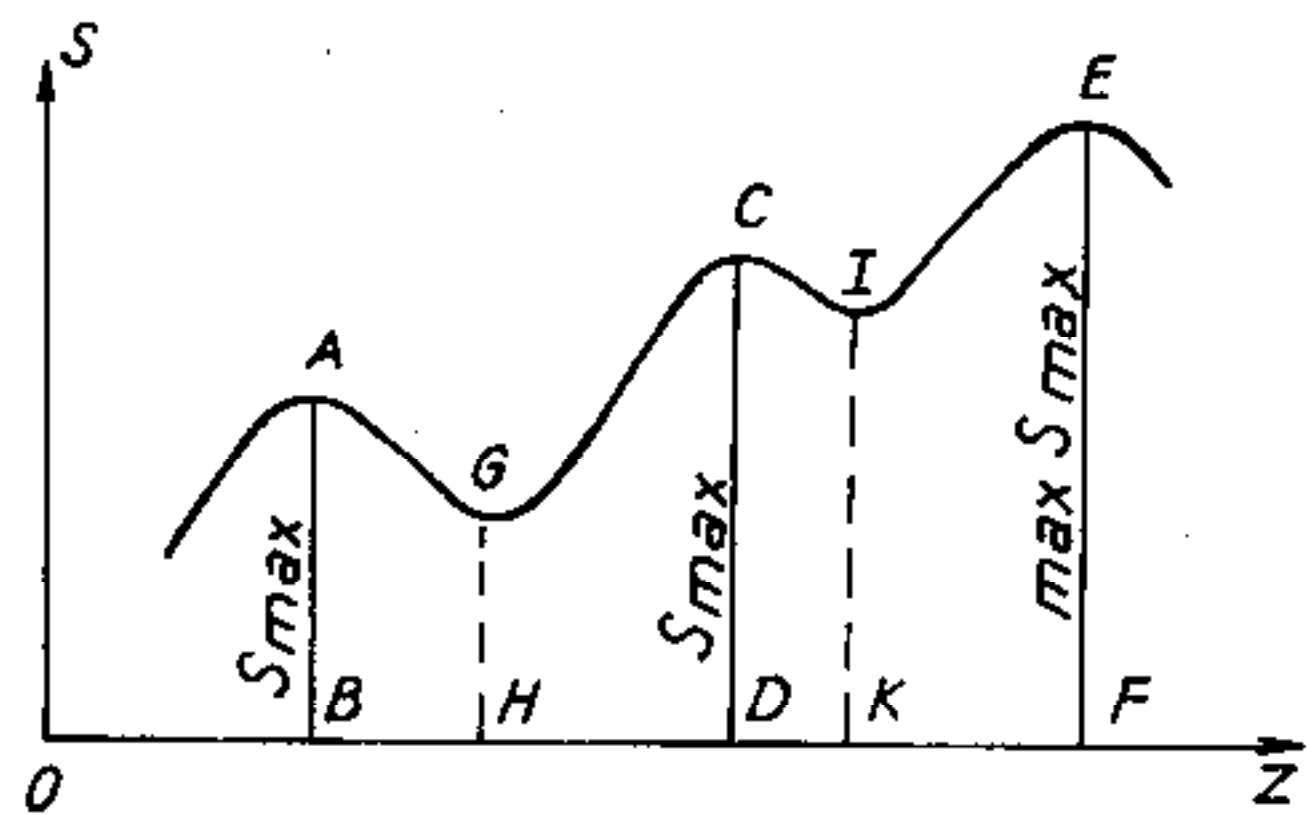
Giả sử cần xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng tiêu chuẩn đối với đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng đã biết.

Khi đoàn tải trọng di động trên *d.a.h.*  $S$  (trên công trình), ta có thể xác định vị trí của nó theo hoành độ  $z$  của một tải trọng nào đó và biểu thị đại lượng  $S$  dưới dạng hàm của  $z$

$$S = f(z). \quad (3.19)$$

Như trên đã biết, *vị trí bất lợi (vị trí để tính) của đoàn tải trọng trên d.a.h.  $S$*  là vị trí gây ảnh hưởng lớn nhất đến đại lượng nghiên cứu  $S$ .

Do đó việc xác định vị trí bất lợi của tải trọng có liên quan đến việc tìm các cực trị của hàm  $S = f(z)$ . Nói chung, khi vẽ đồ thị biểu diễn sự biến thiên của đại lượng  $S = f(z)$  (hình 3.27), ta thấy có một số cực trị cục bộ tương ứng với một số vị trí nào đó của đoàn tải trọng.



Hình 3.27

Trong số những cực trị đó có cực trị lớn nhất về trị số tương ứng với từng dấu khác nhau (đoạn  $EF$  trên hình 3.27), ta ký hiệu là  $\max S_{\max}$  (hay  $\min S_{\min}$ ). Vị trí của đoàn tải trọng tương ứng với vị trí có  $\max S_{\max}$  (hay  $\min S_{\min}$ ) là vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng đối với đại lượng  $S$ .

Như vậy, nguyên tắc chung khi tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng đối với đại lượng  $S$  là: phát hiện tất cả các vị trí của đoàn tải trọng cho  $S_{\max}$  (hay  $S_{\min}$ ) tức là cho cực trị cục bộ, so sánh các  $S_{\max}$  (hay  $S_{\min}$ ) với nhau để tìm ra  $\max S_{\max}$  (hay  $\min S_{\min}$ ), vị trí có  $\max S_{\max}$  (hay  $\min S_{\min}$ ) là vị trí bất lợi cần tìm.

Để phát hiện cực trị, ta nhớ lại những biểu hiện toán học của cực trị như sau:

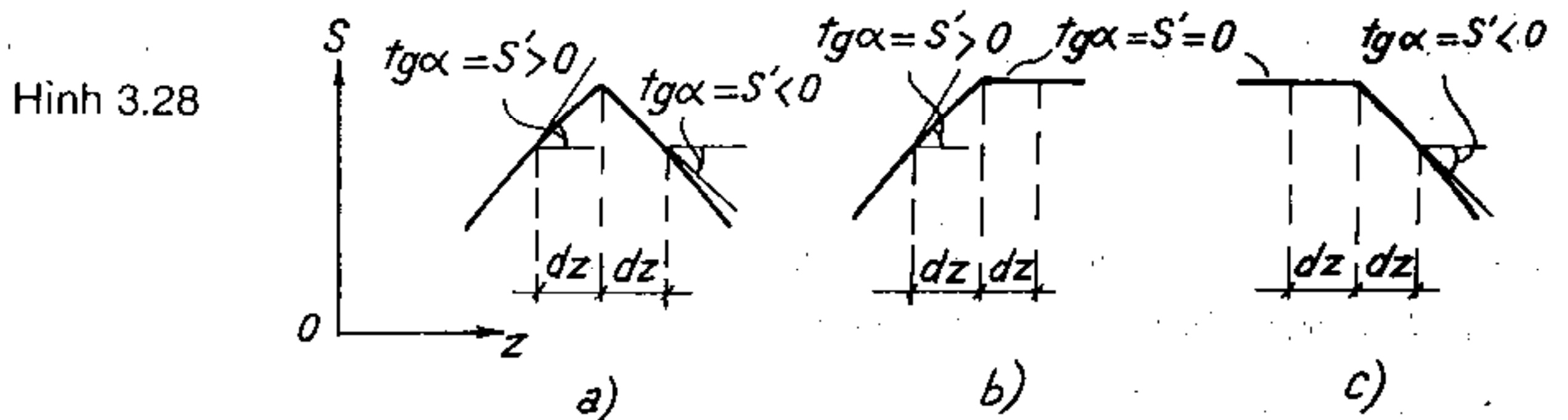
\* Nếu  $S = f(z)$  liên tục và đạo hàm cấp một  $S' = f'(z)$  cũng liên tục thì khi điều kiện

$$\frac{dS}{dz} = 0 \quad (3.20)$$

được thỏa mãn, hàm  $S$  sẽ có một cực đại hoặc một cực tiểu tùy theo đạo hàm cấp hai của nó âm hoặc dương.

Trong thực hành ta ít gặp trường hợp này vì đạo hàm  $S' = f'(z)$  thường không liên tục.

\* Nếu  $S = f(z)$  liên tục nhưng đạo hàm cấp một của nó không liên tục (hình 3.28) thì những biểu hiện cực trị sẽ như sau



❖ **Biểu hiện cực đại** - Gọi  $z_0$  là hoành độ có cực đại. Điều kiện xảy ra cực đại được biểu diễn dưới ba dạng sau:

◇ Hình 3.28a: Trước khi qua cực đại  $S' > 0$ . Sau khi qua cực đại  $S' < 0$ .

◇ Hình 3.28b: Trước khi qua cực đại  $S' > 0$ . Sau khi qua cực đại  $S' = 0$ .

◇ Hình 3.28c: Trước khi qua cực đại  $S' = 0$ . Sau khi qua cực đại  $S' < 0$ .

Tóm lại:

Điều kiện cực đại xảy ra tại $z_0$ nếu đạo hàm:		
chuyển từ $\frac{dS}{dz} > 0$	sang $\frac{dS}{dz} < 0$	(3.21)
$(\text{khi } z = z_0 - dz)$	$(\text{khi } z = z_0 + dz)$	

❖ **Biểu hiện cực tiểu** - Cũng lập luận tương tự, ta có

Điều kiện cực tiểu xảy ra tại $z_0$ nếu đạo hàm:		
chuyển từ $\frac{dS}{dz} < 0$	sang $\frac{dS}{dz} > 0$	(3.22)
$(\text{khi } z = z_0 - dz)$	$(\text{khi } z = z_0 + dz)$	

Vì tải trọng và đường ảnh hưởng có nhiều dạng khác nhau nên ta không thể đưa ra những quy tắc chung để xác định vị trí bất lợi một cách cụ thể hơn so với những điều nêu ở trên. Dưới đây ta sẽ thiết lập một vài quy tắc cụ thể hơn cho một số dạng tải trọng và một số dạng đ.a.h. thường gặp.

### A. Đường ảnh hưởng có dạng đường cong trơn tru một dấu

Khi phương trình đường ảnh hưởng  $S$  liên tục và đạo hàm của nó cũng liên tục thì đ.a.h.  $S$  cong trơn tru. Khi đó, hàm  $S = f(z)$  biểu thị sự biến thiên của đại lượng  $S$  theo vị trí của tải trọng di động sẽ liên tục, đạo hàm  $S' = f'(z)$  cũng liên tục. Bài toán tìm vị trí bất lợi của tải trọng sẽ đưa về bài toán tìm cực trị của hàm  $S = f(z)$ . Đối với những bài toán thường gặp ta chỉ cần thực hiện các bước sau:

- 1) Thiết lập biểu thức giải tích của  $S$  theo tọa độ chạy  $z$  là hoành độ của một tải trọng nào đó di động trên đường ảnh hưởng.
- 2) Lấy đạo hàm cấp một và xác định các hoành độ  $z_0$  tương ứng với khi đạo hàm này bằng không.
- 3) Tìm đạo hàm cấp hai của  $S$  và dựa vào dấu của nó khi  $z = z_0$  để phán đoán về cực đại hay cực tiểu.
- 4) Tính các  $S_{max}$  (hay  $S_{min}$ ) tương ứng với các  $z_0$ . So sánh các  $S_{max}$  (hay  $S_{min}$ ) để tìm ra  $\max S_{max}$  (hay  $\min S_{min}$ ), vị trí tương ứng của tải trọng là vị trí bất lợi nhất.

**Chú thích:** Do ý nghĩa thực tế của bài toán, ta cần chọn hoành độ  $z_0$  nằm trong phạm vi đ.a.h.

Ngoài ra cần kiểm tra lại xem khi  $z = z_0$  thì tất cả các tải trọng dùng để thiết lập biểu thức  $S$  còn nằm trong phạm vi đ.a.h. nữa hay không. Nếu có tải trọng nào đã chạy ra ngoài đ.a.h. thì biểu thức  $S$  tìm được ở bước thứ nhất không đúng nữa. Trong trường hợp này ta cần thiết lập lại biểu thức  $S$  tương ứng với tình huống có tải trọng chạy ra ngoài đ.a.h. và so sánh các tung độ trong tất cả các tình huống có thể xảy ra để tìm ra tung độ lớn nhất.

**Ví dụ 3.4.** Xác định vị trí để tính và giá trị để tính cho đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng cong trơn tru chịu tải trọng như trên hình 3.29.

Phương trình đ.a.h.  $y = z - \frac{z^3}{36}$ .

Biểu thức giải tích của  $S$

$$S = f(z) = 10 \left[ z - \frac{z^3}{36} \right] + 20 \left[ (z-2) - \frac{(z-2)^3}{36} \right].$$

Sau khi lấy đạo hàm và cho bằng không

$$\frac{dS}{dz} = \frac{1}{6}[-15z_o^2 + 40z_o + 140] = 0$$

ta được  $z_o = 14/3$  m (các tải trọng nằm trong phạm vi đường ảnh hưởng).

Đạo hàm cấp hai  $\frac{d^2S}{dz^2} = -5z + \frac{20}{3}$ .

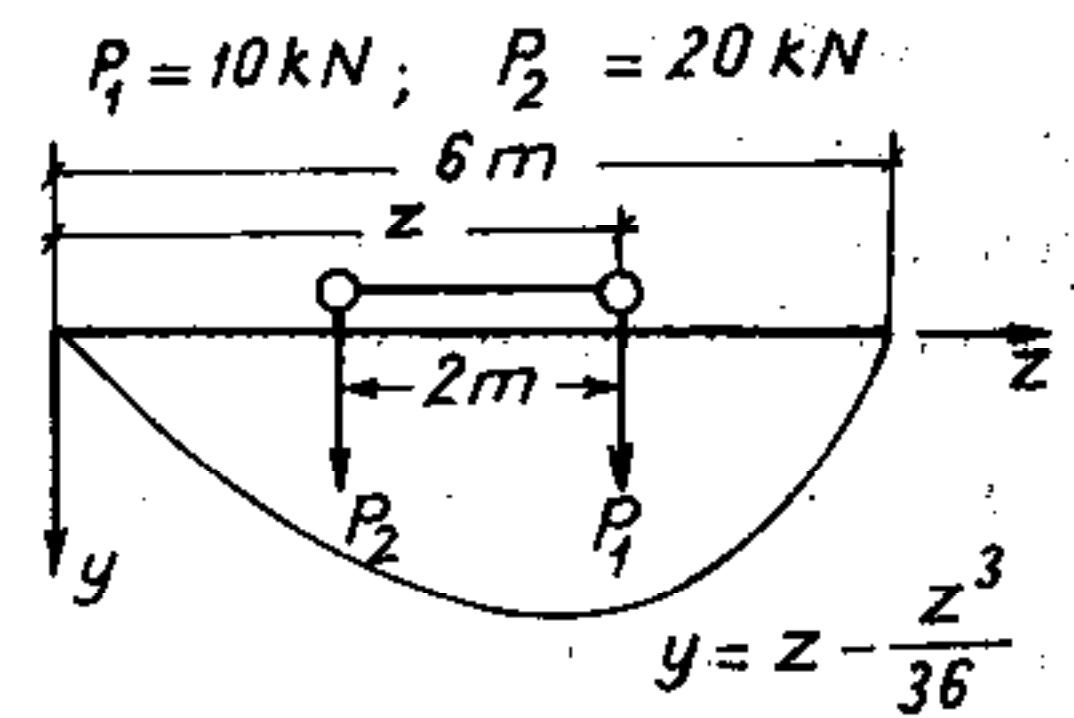
Khi  $z_o = \frac{14}{3}$  m thì  $\frac{d^2S}{dz^2} = -\frac{50}{3}$ .

Dấu trừ biểu thị  $z_o$  cho vị trí cực đại.

Thay  $z = z_o = 14/3$  m vào biểu thức giải tích của  $S$ , ta được

$$S_{\text{tinh}} = 10[14/3 - (1/36)(14/3)^3] + 20[(14/3 - 2) - (14/3 - 2)^3/36] = 4960/81.$$

Đơn vị của kết quả bằng đơn vị của lực nhân với đơn vị của tung độ đường ảnh hưởng.

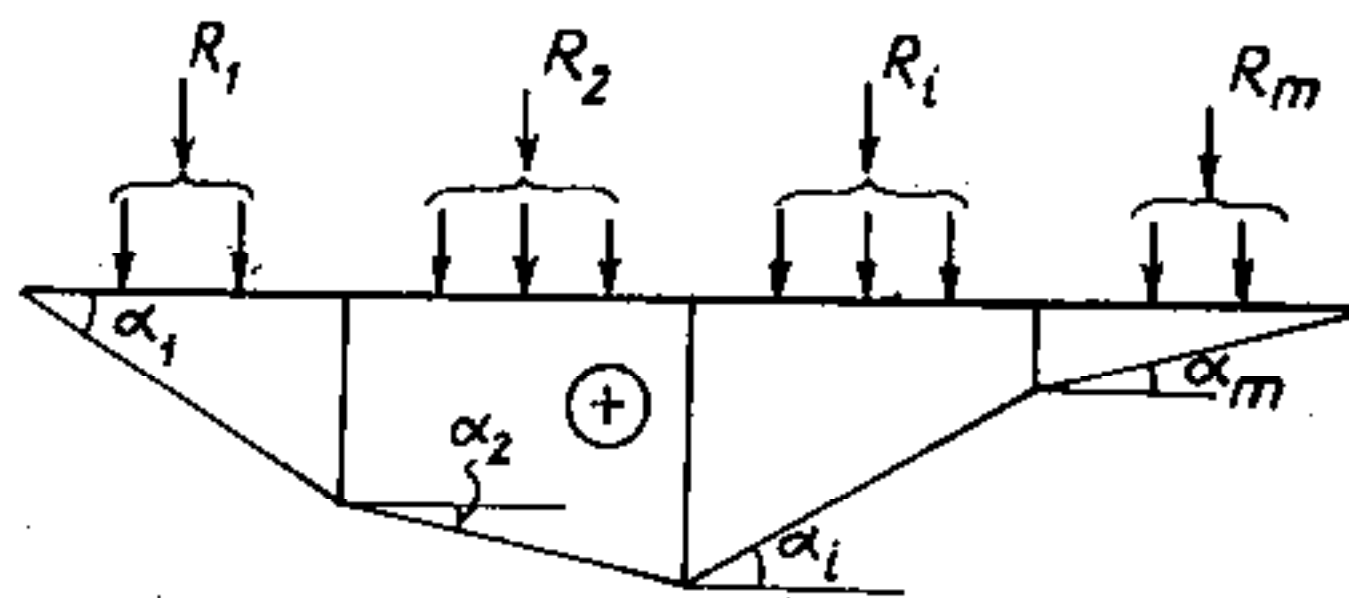


Hình 3.29

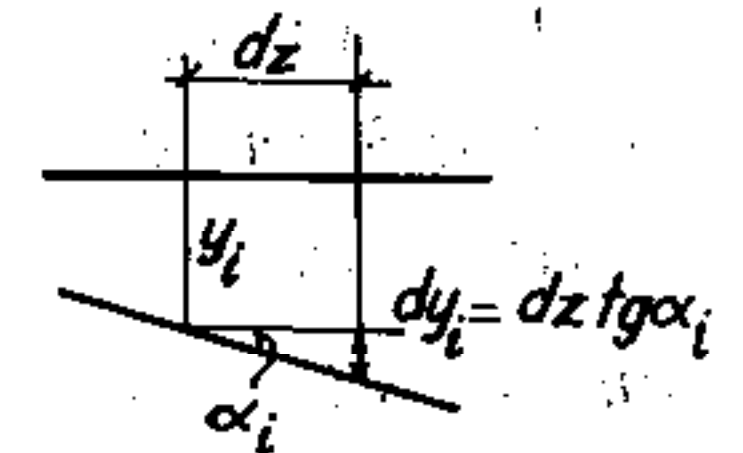
### B. Đường ảnh hưởng đa giác có một dấu

Trong trường hợp này tiện nhất là dùng phương pháp thử dần để tìm vị trí bất lợi của tải trọng. Để giảm nhẹ khối lượng tính toán, ta cần chứng minh những tính chất sau đây của đ.a.h. có dạng đa giác.

1. Vị trí bất lợi của đoàn tải trọng chỉ có thể xảy ra khi một trong số các tải trọng tập trung di động trên đường ảnh hưởng, trùng với một đỉnh nào đó của đường ảnh hưởng.



Hình 3.30



Hình 3.31

Giả sử có đ.a.h. đa giác mang dấu dương như trên hình 3.30. Các cạnh của đa giác nghiêng với phương đường chuẩn theo những góc  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$ . Dưới tác dụng của các tải trọng  $P$ , ta có thể xác định đại lượng  $S$  theo công thức (3.18)

$$S = \sum_{i=1}^m R_i y_i.$$

trong đó:  $R_i$  – hợp lực của các lực  $P$  đặt trên đoạn thứ  $i$ ;

$y_i$  – tung độ đường ảnh hưởng có vị trí tương ứng với hợp lực  $R_i$ .

Nếu giả thiết rằng toàn bộ hệ lực dịch chuyển sang bên phải (hoặc bên trái) một đoạn bằng  $dz$  thì các tung độ  $y_i$  sẽ biến thiên một lượng bằng  $dz \operatorname{tg} \alpha_i$  (xem hình 3.31), do đó đại lượng  $S$  cũng biến thiên bằng

$$dS = \sum_{i=1}^m R_i \operatorname{tg} \alpha_i dz$$

Suy ra

$$\frac{dS}{dz} = \sum_{i=1}^m R_i \operatorname{tg} \alpha_i \quad (3.23)$$

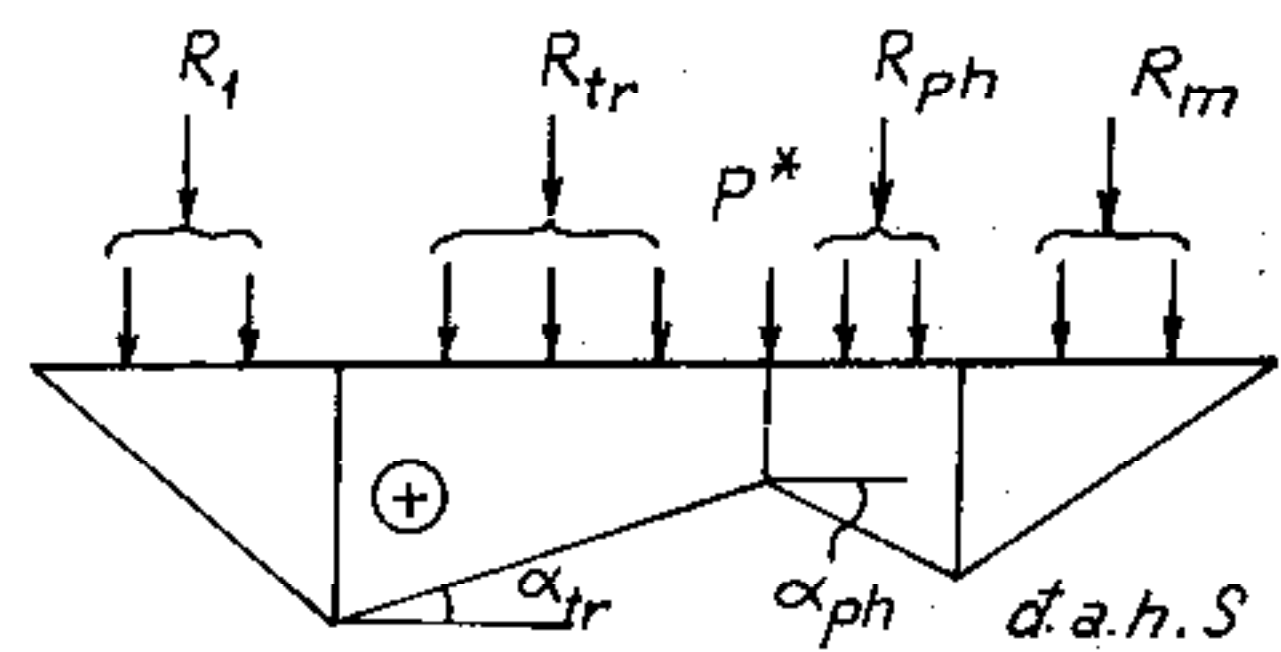
Như đã biết, điều kiện để xảy ra cực trị là  $dS/dz$  đổi dấu. Vì các góc nghiêng  $\alpha_i$  không thay đổi về giá trị cũng như về dấu khi ta dịch chuyển đoàn tải trọng nên biểu thức (3.23) chỉ có thể thay đổi dấu khi các hợp lực  $R_i$  thay đổi. Điều kiện để cho các hợp lực  $R_i$  thay đổi khi đoàn tải trọng dịch chuyển là tối thiểu có một lực  $P$  nào đó chuyển dời từ đoạn thẳng này sang đoạn thẳng khác tức là đi qua một đỉnh nào đó của đ.a.h. Đó là điều phải chứng minh.

Tính chất trên chỉ là *điều kiện cần*, chưa phải là *điều kiện đủ*, nghĩa là khi có một tải trọng  $P$  nào đó đặt ở đỉnh của đ.a.h. thì chưa chắc vị trí đó cho cực trị.

Ký hiệu tải trọng đặt ở đỉnh của đường ảnh hưởng để cho  $dS/dz$  đổi dấu là  $P^*$ .

2. Nếu tải trọng  $P^*$  đi qua một đỉnh lõm của đường ảnh hưởng thì đại lượng  $S$  có thể có giá trị tuyệt đối cực đại còn đi qua đỉnh lồi thì  $S$  có thể có giá trị tuyệt đối cực tiểu.

Để chứng minh tính chất này ta đặt một lực  $P^*$  ở một đỉnh nào đó của đ.a.h. giả thiết là mang dấu dương (hình 3.32) và xác định số gia của đạo hàm  $dS/dz$  khi số gia  $\Delta z > 0$  tức là khi  $P^*$  di chuyển từ bên trái sang bên phải đỉnh đang xét.



Hình 3.32

Như đã biết, khi số gia  $\Delta z > 0$ , nếu số gia  $\Delta(dS/dz) < 0$  thì hàm  $S$  cực đại còn  $\Delta(dS/dz) > 0$  thì hàm  $S$  cực tiểu. Trong trường hợp này, ta sẽ vận dụng công thức (3.23) để tính  $\Delta(dS/dz)$  đồng thời tách riêng lực  $P^*$  không cho nó tham gia vào các hợp lực  $R_i$ .



Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên phải một đoạn  $\Delta z$ , ta có

$$\frac{dS}{dz} = \sum_{i=1}^m R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P^* \operatorname{tg} \alpha_{ph}.$$

Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên trái một đoạn  $\Delta z$ , ta có

$$\frac{dS}{dz} = \sum_{i=1}^m R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P^* \operatorname{tg} \alpha_{tr}.$$

Vì chỉ có lực  $P^*$  đặt ở đỉnh nên trong hai lần dịch chuyển các hợp lực  $R_i$  không thay đổi. Do đó số gia

$$\Delta(dS/dz) = P^*(\operatorname{tg} \alpha_{ph} - \operatorname{tg} \alpha_{tr}) = P^* \Delta \operatorname{tg} \alpha.$$

Từ hình 3.32 ta dễ dàng nhận thấy rằng: nếu đ.a.h. mang dấu dương và đỉnh lồi thì  $\Delta \operatorname{tg} \alpha < 0$  ( $\operatorname{tg} \alpha_{ph} < \operatorname{tg} \alpha_{tr}$  về trị số đại số), còn khi đỉnh lõm thì  $\Delta \operatorname{tg} \alpha > 0$  ( $\operatorname{tg} \alpha_{ph} > \operatorname{tg} \alpha_{tr}$  về trị số đại số).

Vậy khi  $P^*$  đặt ở đỉnh lồi:  $\Delta(dS/dz) = P^* \Delta \operatorname{tg} \alpha < 0$ ;  $S$  có giá trị cực đại.

Còn khi  $P^*$  đặt ở đỉnh lõm:  $\Delta(dS/dz) = P^* \Delta \operatorname{tg} \alpha > 0$ ;  $S$  có giá trị cực tiểu.

Đó là điều cần chứng minh.

Nếu khảo sát đường ảnh hưởng mang dấu âm ta cũng đi đến kết quả tương tự.

*Tóm lại: Vị trí bất lợi của đoàn tải trọng di động trên đường ảnh hưởng đa giác một dấu có thể xảy ra khi một trong số các tải trọng đó đặt tại một đỉnh lồi nào đó của đường ảnh hưởng.*

Dựa vào những nhận xét trên, ta có thể tìm vị trí bất lợi và  $S_{tính}$  bằng phương pháp thử dần như sau:

1- Phát hiện tất cả các vị trí cho  $S_{max}$  nếu đ.a.h. là dương hoặc  $S_{min}$  nếu đ.a.h. là âm. Tính các  $S_{max}$  hoặc  $S_{min}$ . Muốn vậy, lần lượt đặt từng tải trọng vào từng đỉnh lồi của đường ảnh hưởng. Mỗi lần đặt như vậy ta phải thực hiện các bước sau:

- ❖ Cho đoàn tải trọng dịch sang trái một đoạn  $dz$ . Tính  $dS/dz$  theo (3.23).
- ❖ Cho đoàn tải trọng dịch sang phải một đoạn  $dz$ . Tính  $dS/dz$  theo (3.23).
- ❖ So sánh các giá trị  $dS/dz$  trong hai lần tính.
  - Nếu những giá trị này thỏa mãn các điều kiện (3.21) hoặc (3.22) thì vị trí này cho ta một  $S_{max}$  hoặc  $S_{min}$ . Tính  $S_{max}$  hoặc  $S_{min}$ .
  - Nếu không thỏa mãn thì cần dịch chuyển đoàn tải trọng tới vị trí khác để sao cho có một tải trọng nào đó đặt ở đỉnh lồi của đ.a.h. Muốn đạt được cực đại,

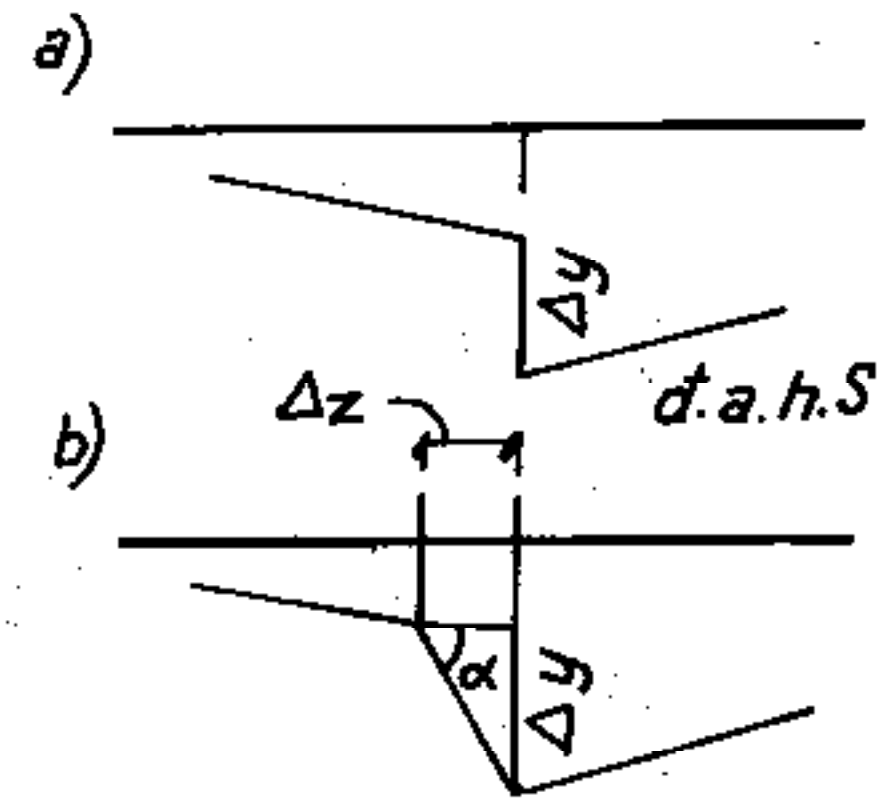
nên dịch chuyển sang bên phải nếu  $dS/dz$  trong cả hai lần tính là dương, còn sang bên trái nếu  $dS/dz$  trong cả hai lần tính là âm. Muốn đạt cực tiểu thì làm ngược lại.

Về nguyên tắc, nếu có  $p$  lực và  $q$  đỉnh lồi thì cần thực hiện các bước tính trên  $p.q$  lần, tuy nhiên ta cần nhận xét trị số của các tải trọng và hình dạng của đ.a.h. để loại trừ bớt những trường hợp vô ích. Thường nên bố trí các tải trọng lớn trên phần đ.a.h. có tung độ lớn và càng nhiều tải trọng nằm trong phạm vi đ.a.h. càng tốt.

2- So sánh các  $S_{max}$  (hoặc các  $S_{min}$ ) với nhau để tìm giá trị max  $S_{max}$  (hoặc min  $S_{min}$ ). Đó là giá trị  $S$  tính cần tìm.

Chú thích:

- ❖ Trường hợp ngoài tải trọng tập trung còn có tải trọng phân bố thì ta vẫn có thể tiến hành tìm vị trí bất lợi theo quy tắc trên nếu thay tải trọng phân bố bằng nhiều tải trọng tập trung.
- ❖ Trong trường hợp đ.a.h. có bước nhảy (hình 3.33a) ta thay bước nhảy bằng đoạn thẳng nghiêng với góc  $\alpha$  có  $tg\alpha = \Delta y/\Delta z$  (hình 3.33b), tiếp đó áp dụng các quy tắc trên để phát hiện vị trí bất lợi. Sau khi tính  $dS/dz$  cần cho  $\Delta z$  tiến tới không.



Hình 3.33

- ❖ Khi đ.a.h. có hai dấu, nếu tải trọng di động gồm những tải trọng độc lập với nhau và khoảng cách cực tiểu giữa các tải trọng đó đã biết thì ta có thể cắt rời chúng thành từng nhóm để bố trí riêng biệt trên từng phần đ.a.h. dương hoặc âm. Khi bố trí trên phần đ.a.h. dương ta sẽ được  $maxS_{max}$  còn khi bố trí trên phần đ.a.h. âm ta được  $minS_{min}$ . Trường hợp tải trọng không thể cắt rời ra được, khi bố trí nếu có phần tải trọng nào nằm trên đ.a.h. có dấu khác với dấu đang xét thì ta phải kể đến chúng. Tất nhiên khi đó những tải trọng này sẽ làm cho giá trị của đại lượng nghiên cứu giảm xuống.

**Ví dụ 3.5.** Tìm giá trị để tính của đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng như trên hình 3.34b. Sơ đồ tải trọng di động cho trên hình 3.34a.

Trước tiên ta tính *tang* của các góc nghiêng:

$$tg\alpha_1 = 3/4; \quad tg\alpha_2 = (4-3)/4 = 1/4; \quad tg\alpha_3 = -4/8 = -1/2;$$

- ◆ **Tính thử lần thứ nhất**– Chọn tải trọng  $P_1$  thứ hai làm lực  $P^*$  đặt tại đỉnh có tung độ bằng 3. Tải trọng này được đánh dấu x như trên hình 3.34c.

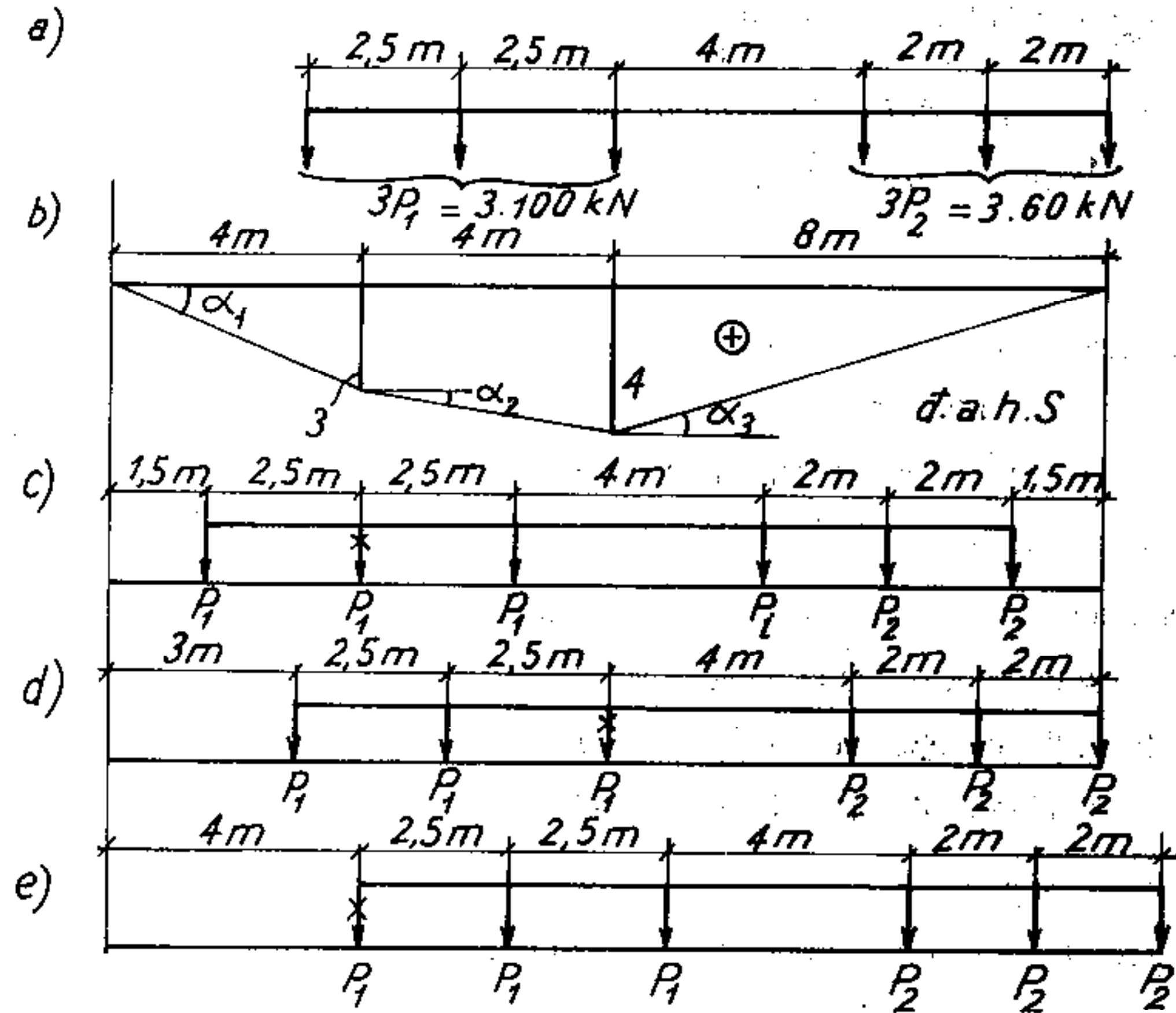
- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn  $dz$ , tính

$$dS/dz = (100+100)3/4 + 100(1/4) + 3.60(-1/2) = 175-90 > 0.$$

- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn  $dz$ , tính

$$dS/dz = 100(3/4) + (100+100)1/4 + 3.60(-1/2) = 125-90 > 0.$$

Ta thấy các điều kiện (3.21) không thỏa mãn, tức là vị trí này không cho cực đại. Vì trong cả hai lần dịch chuyển  $dS/dz$  đều dương nên ta chuyển dời đoàn tải trọng về phía bên phải.



Hình 3.34

- ◆ **Tính thứ lần thứ hai**– Khi chuyển đoàn tải trọng về bên phải, lực đầu tiên gặp đỉnh đ.a.h. là lực  $P_1$  thứ ba, do đó ta chọn lực này là lực  $P^*$  và đặt tại đỉnh có tung độ bằng 4 (hình 3.34d).

- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn  $dz$ , tính

$$dS/dz = 100.3/4 + (100+100).1/4 + 3.60(-1/2) = 125-90 > 0.$$

- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn  $dz$ , tính

$$dS/dz = 100.3/4 + 100.1/4 + (100+60+60)(-1/2) = 100-110 < 0$$

Điều kiện (3.21) thỏa mãn. Vị trí này cho ta một cực đại. Tính  $S_{max}$ :

$$S_{max} = \sum_{i=1}^n P_i y_i = 100.3\text{tg}\alpha_1 + 100(3+1,5\text{tg}\alpha_2) - 100.4 + 60.4\text{tg}\alpha_3 + 60.2\text{tg}\alpha_3 = 1142,5.$$

Chưa kết luận được giá trị 1142,5 là giá trị để tính sau hai lần thử. Vì có thể tồn tại  $S_{max}$  khác lớn hơn. Do đó cần tiếp tục phát hiện thêm các vị trí khác.

◆ *Tính thử lần thứ ba*– Chọn tải trọng  $P_1$  thứ nhất làm lực  $P^*$  và đặt tại đỉnh có tung độ bằng 3 (hình 3.34e).

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn  $dz$ , tính

$$dS/dz = 100.3/4 + 100.1/4 + (100+60+60)(-1/2) = 100-110 < 0.$$

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn  $dz$ , tính

$$dS/dz = (100+100).1/4 + (100+60+60)(-1/2) = 50-110 < 0.$$

Ta thấy vị trí này không cho  $S_{max}$ .

Về nguyên tắc, trong trường hợp này có 6 lực và 2 đỉnh lồi nên phải thử 12 lần. Nhưng có thể dựa vào những nhận xét sau để loại trừ bớt, những lần thử không cần thiết:

◇ Nếu tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trọng về bên phải vị trí trên hình 3.34d thì sẽ có một số tải trọng vượt ra khỏi phạm vi đường ảnh hưởng. Hơn nữa sau lần thử thứ ba ta thấy trong cả hai lần dịch chuyển  $dS/dz$  đều âm, điều đó có nghĩa là nếu dịch chuyển sang bên phải một chút thì cũng không có cực trị mà cần dịch chuyển về bên trái.

◇ Nếu tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trọng về bên trái vị trí trên hình 3.34c thì sẽ có một tải trọng  $P_1$  vượt ra ngoài đ.a.h., các tải trọng lớn không đặt vào phạm vi đường ảnh hưởng có tung độ lớn, do đó ảnh hưởng sẽ giảm xuống.

Bởi vậy sau ba lần thử như trên ta có thể kết luận được rằng giá trị  $max S_{max} = 1142,5$  và vị trí bất lợi như trên hình 3.34d.

### C. Đường ảnh hưởng tam giác

Trong thực tế ta thường gặp đ.a.h. có dạng hình tam giác (ví dụ đường ảnh hưởng của mômen uốn trong dầm đơn giản hay của nội lực trong một số thanh dàn). Bởi vậy việc nghiên cứu vị trí bất lợi của đoàn tải trọng tương ứng với đ.a.h. tam giác để đề ra các tiêu chí đơn giản và cụ thể là có ý nghĩa thực tiễn.

Giả sử trên đ.a.h. tam giác có đoàn tải trọng di chuyển như trên hình 3.35. Như trên đã nói, vị trí bất lợi của đoàn tải trọng chỉ xảy ra khi có một lực tập trung nào đó đặt ở một đỉnh lồi. Gọi lực tập trung đặt ở đỉnh tam giác là lực  $P^*$ ; ký hiệu hợp lực các lực đặt ở bên trái lực  $P^*$  là  $R_{tr}$  còn hợp lực của các lực đặt ở bên phải lực  $P^*$  là  $R_{ph}$ .

Lần lượt cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái và bên phải mỗi đoạn bằng  $dz$ , căn cứ vào điều kiện cực đại (3.21) ta có thể thiết lập điều kiện xảy ra vị trí

bất lợi của đoàn tải trọng trong trường hợp này như sau:

$$(R_{tr} + P^*) \operatorname{tg} \alpha_1 + R_{ph} \operatorname{tg} \alpha_2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \quad \text{và} \quad R_{tr} \operatorname{tg} \alpha_1 + (R_{ph} + P^*) \operatorname{tg} \alpha_2 \begin{matrix} < \\ = \\ < \end{matrix} 0.$$

Nhưng  $\operatorname{tg} \alpha_1 = c/a$ ;  $\operatorname{tg} \alpha_2 = -c/b$ , nên:

• Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên trái  $\frac{R_{tr} + P^*}{a} \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} \frac{R_{ph}}{b}$ , (3.24a)

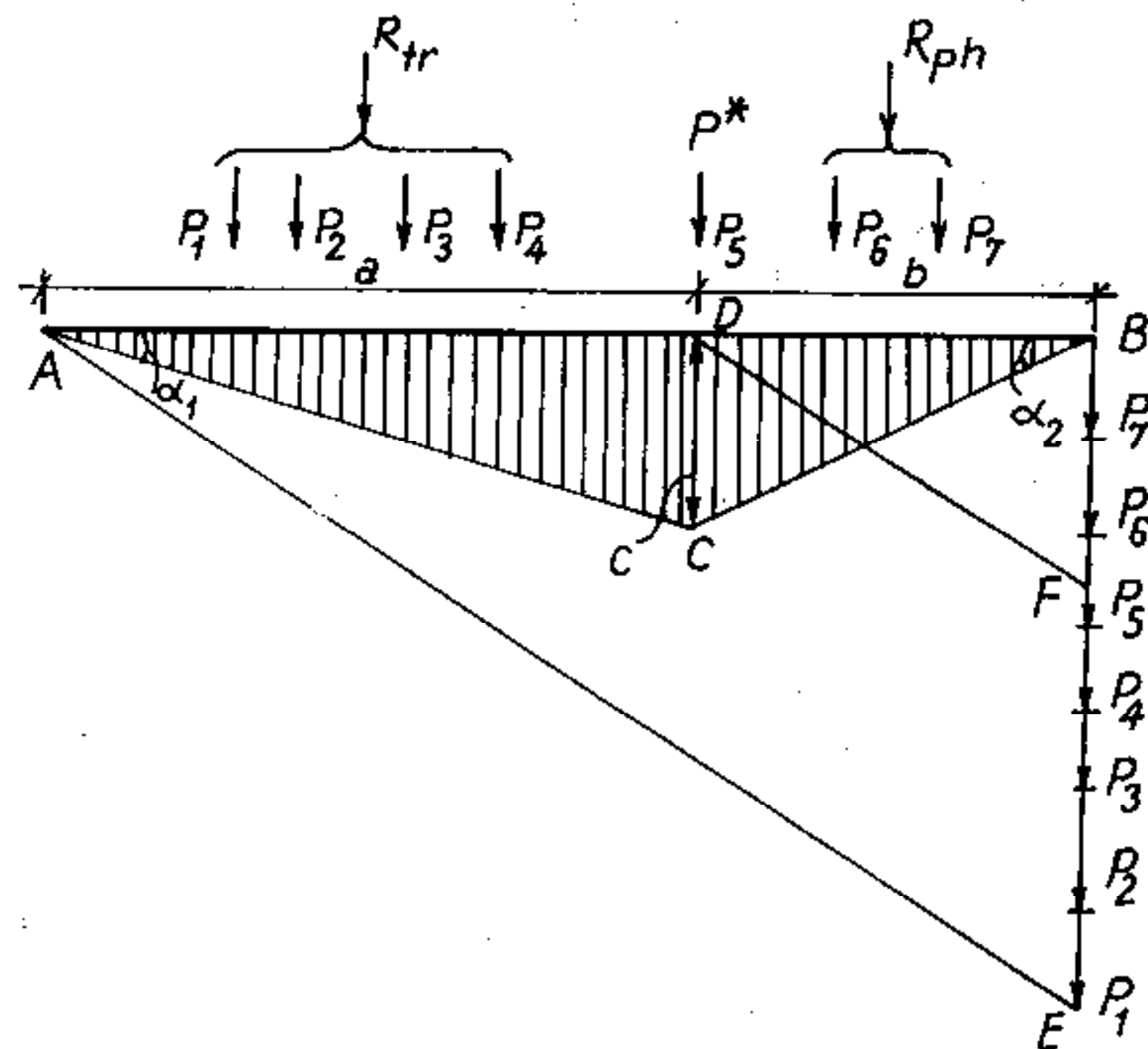
• Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên phải  $\frac{R_{tr}}{a} \begin{matrix} < \\ = \\ < \end{matrix} \frac{R_{ph} + P^*}{b}$ . (3.24b)

Điều kiện (3.24) là điều kiện cần và đủ dưới dạng giải tích để xảy ra vị trí bất lợi của đoàn tải trọng đặt trên đ.a.h. tam giác.

Có thể tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng một cách đơn giản bằng đồ thị như sau:

Tại điểm B (hình 3.35) lần lượt vẽ các vectơ biểu thị các lực  $P_7, P_6, \dots, P_1$  theo thứ tự từ B đến A trên một đường thẳng bất kỳ không trùng với đường chuẩn. Gọi E là điểm mút của vectơ cuối cùng. Nối AE và từ D kẻ đường thẳng song song với AE cắt BE tại F. Điểm F nằm trên vectơ biểu thị lực nào thì lực đó là lực  $P^*$  cần đặt ở đỉnh tam giác để có vị trí bất lợi.

Hình 3.35



Thật vậy, từ quan hệ tỷ lệ giữa các đoạn bị chắn bởi các đường song song, ta có:

$$\frac{FE}{a} = \frac{BF}{b}$$

Nếu thay  $FE \leq R_{tr} + P^*$  và  $BF \geq R_{ph}$  vào đẳng thức trên ta sẽ được điều kiện (3.24a).

Nếu thay  $FE \geq R_{tr}$  và  $BF \leq R_{ph} + P^*$  vào đẳng thức trên ta sẽ được điều kiện (3.24b).

Như vậy là cách dựng hình nói trên thỏa mãn điều kiện cân và đủ để tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng.

*Chú thích:*

- ❖ Cách tìm vị trí bất lợi nói trên chỉ đúng trong trường hợp không có một tải trọng nào vượt ra ngoài phạm vi đ.a.h. Nếu có tải trọng nào vượt ra ngoài thì khi khảo sát điều kiện (3.24) ta chỉ xét các lực nằm trong phạm vi đ.a.h.
- ❖ Nếu chiều dài của đoàn tải trọng lớn hơn chiều dài của đường ảnh hưởng thì ta phải thử nhiều lần với các lực khác nhau chọn làm  $P^*$ . Lúc này có thể có nhiều vị trí tải trọng thỏa mãn điều kiện (3.24) do đó sẽ có nhiều giá trị  $S_{max}$ . Ta chọn giá trị nào lớn nhất để tính toán.
- ❖ Trong cách giải quyết bằng họa đồ, nếu điểm  $F$  nằm ở ranh giới giữa hai lực  $P_{i-1}$  và  $P_i$  thì cả hai lực đó đều có thể là lực  $P^*$ .
- ❖ Trường hợp khi đoàn tải trọng phân bố, ta có  $P^* = 0$  và điều kiện xảy ra vị trí bất lợi (3.24) sẽ có dạng đơn giản như sau:

$$\frac{R_{tr}}{a} = \frac{R_{ph}}{b} \quad (3.25)$$

#### D. Tải trọng phân bố đều trên đường ảnh hưởng đơn trị bất kỳ

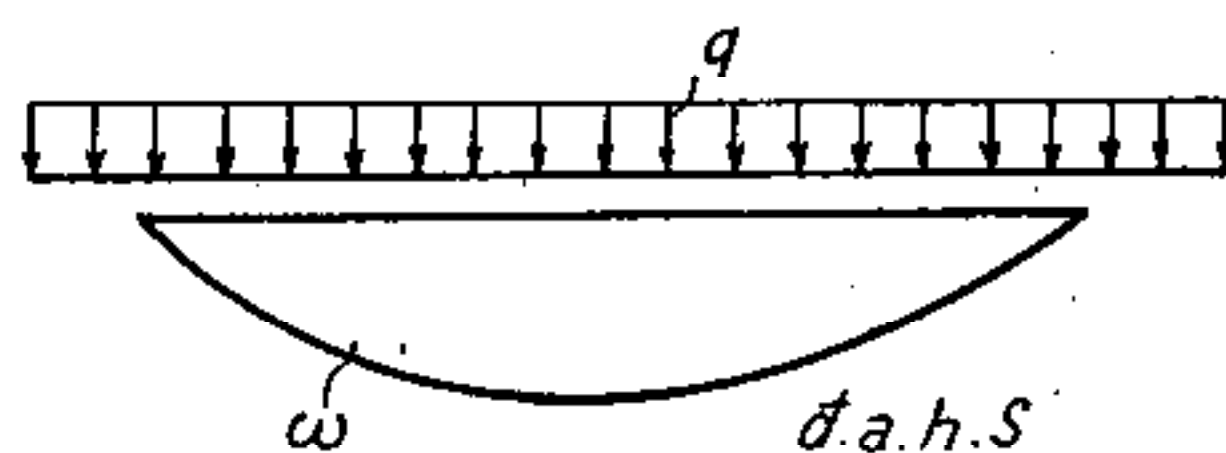
Ta xét ba trường hợp:

##### 1. Chiều dài tải trọng lớn hơn chiều dài của đường ảnh hưởng (hình 3.36)

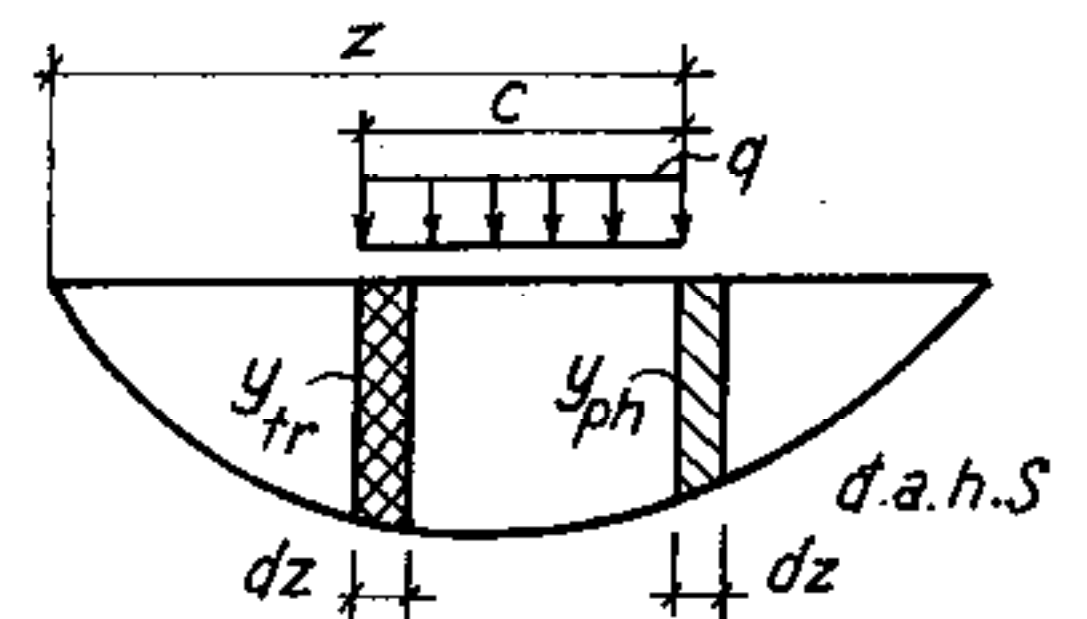
Trong trường hợp này, cần chất tải trọng trên toàn bộ đường ảnh hưởng và tìm  $S_{tính}$  theo công thức

$$S_{tính} = q \cdot \omega, \quad (3.26)$$

trong đó  $\omega$  – diện tích của toàn bộ đ.a.h.



Hình 3.36



Hình 3.37

##### 2. Chiều dài của tải trọng nhỏ hơn chiều dài của đường ảnh hưởng (hình 3.37)

Ta sẽ chứng minh: Vị trí bất lợi của đoàn tải trọng phân bố đều sẽ xảy ra khi tung độ đường ảnh hưởng tại đầu trái và đầu phải của đoàn tải trọng bằng nhau.



Thật vậy, đại lượng  $S$  tương ứng với một vị trí bất kỳ của tải trọng bằng

$$S = q \cdot \omega_{z-c}^z,$$

trong đó:  $\omega_{z-c}^z$  – diện tích của phần đ.a.h.  $S$  ứng dưới đoạn tải trọng.

Hàm này liên tục và đạo hàm cấp một của nó cũng liên tục, ta có điều kiện cực trị:

$$\frac{dS}{dz} = q \frac{d\omega}{dz} = 0.$$

Vị trí bất lợi sẽ xảy ra khi  $d\omega/dz = 0$ .

Khi tải trọng di chuyển với giá trị  $dz$ , diện tích sẽ tăng thêm một lượng bằng  $y_{ph}dz$  (phần gạch chéo một lần trên hình 3.37) và giảm đi một lượng bằng  $y_{tr}dz$  (phần gạch chéo hai lần trên hình 3.37).

Do đó:  $d\omega = y_{ph} dz - y_{tr} dz$ .

Suy ra  $d\omega/dz = y_{ph} - y_{tr} = 0$ .

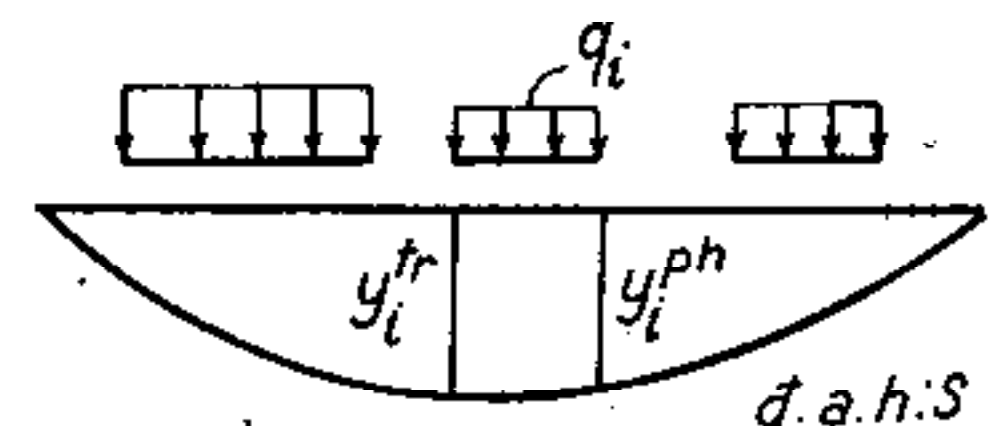
Vậy điều kiện cực trị sẽ xảy ra khi  $y_{ph} = y_{tr}$ . Đó là điều cần chứng minh.

### 3. Trường hợp có nhiều tải trọng phân bố đều với cường độ khác nhau và chiều dài chung của chúng nhỏ hơn chiều dài của đường ảnh hưởng (hình 3.38)

Cũng lý luận tương tự như trên ta có điều kiện cực trị:

$$\frac{dS}{dz} = \sum_i q_i \frac{d\omega_i}{dz} = \sum_i q_i (y_i^{ph} - y_i^{tr}) = 0.$$

Do đó  $\sum_i q_i y_i^{ph} = \sum_i q_i y_i^{tr}$ .



Hình 3.38

Vậy trong trường hợp này, vị trí bất lợi của tải trọng xảy ra khi tổng các tích số giữa cường độ tải trọng với tung độ đường ảnh hưởng tại các đầu trái của từng đoạn tải trọng tương ứng bằng tổng các tích số giữa cường độ tải trọng với tung độ đường ảnh hưởng tại các đầu phải của từng đoạn tải trọng tương ứng.

### 3.11. Khái niệm về tải trọng tương đương

Khi thiết kế kết cấu chịu tải trọng di động, ta thường lặp lại nhiều lần việc tìm vị trí bất lợi của một đoàn tải trọng tiêu chuẩn nào đó trên một số dạng đường ảnh hưởng có hình dạng giống nhau mà chỉ khác về độ lớn. Do đó, để tiết kiệm thời gian và sức lao động ta có thể đặt vấn đề là tìm một dạng tải trọng đơn giản nào

đó thay thế cho tải trọng tiêu chuẩn phải tính để sao cho tải trọng này gây ảnh hưởng lớn nhất đến đại lượng  $S$  bằng ảnh hưởng lớn nhất do tải trọng tiêu chuẩn phải tính gây ra. Người ta đã thực hiện được điều đó và dùng dạng tải trọng phân bố đều để thay thế gọi là *tải trọng tương đương*.

Như vậy, *tải trọng tương đương* đối với một đường ảnh hưởng  $S$  nào đó là *tải trọng phân bố đều trên toàn chiều dài của đường ảnh hưởng với cường độ  $q_{td}$  để sao cho trị số để tính của đại lượng  $S$  là  $S_{tính}$  ( $maxS_{max}$  hay  $minS_{min}$ ) do nó gây ra bằng trị số  $S_{tính}$  do tải trọng được thay thế gây ra.*

Khi đó theo (3.26) ta có

$$S_{tính} = q_{td} \cdot \omega, \quad (3.27)$$

với  $\omega$  là diện tích của *đ.a.h.*  $S$ .

Từ đó suy ra 
$$q_{td} = \frac{S_{tính}}{\omega}. \quad (3.28)$$

Công thức này dùng để xác định cường độ của tải trọng tương đương.

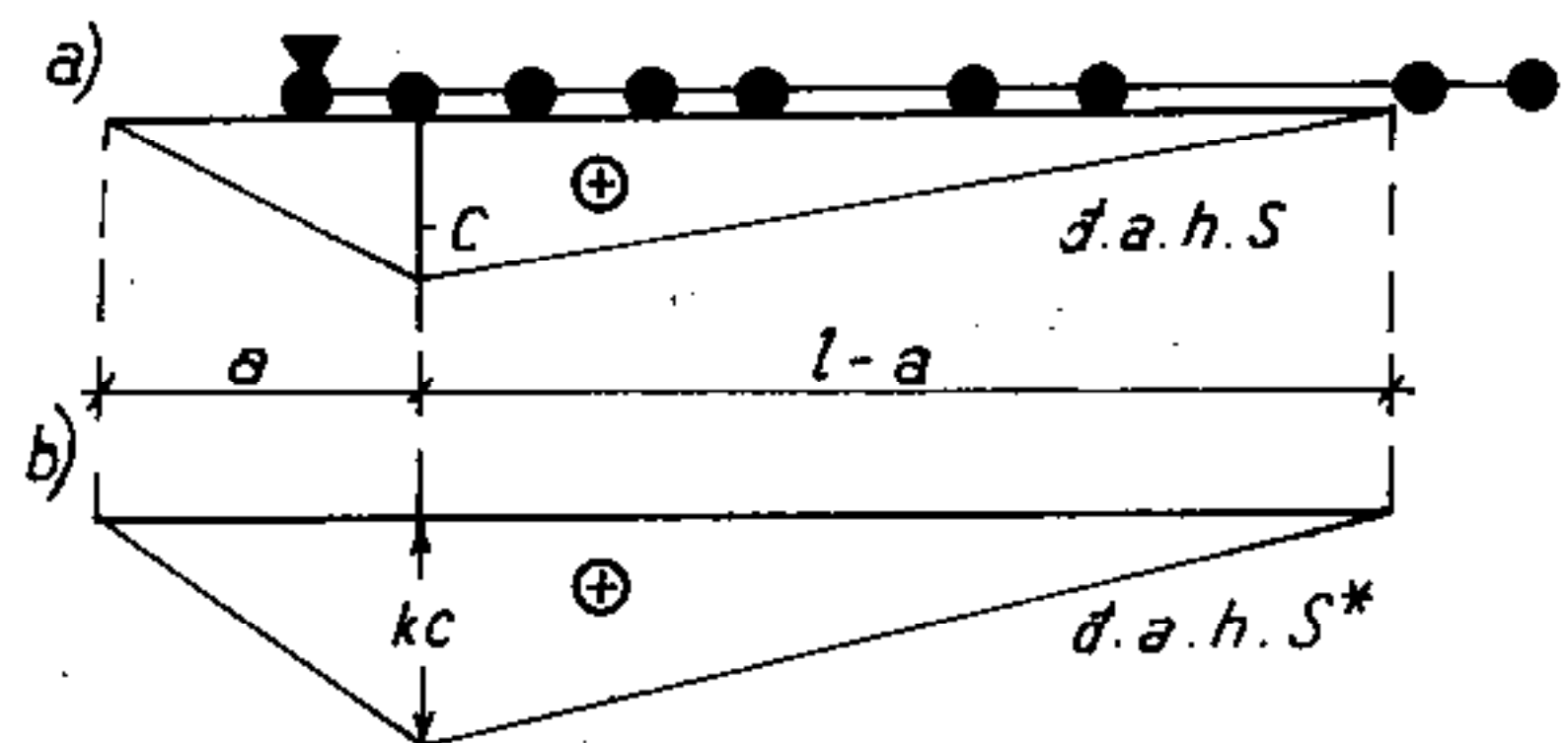
Để xác định  $S_{tính}$  do tải trọng được thay thế gây ra, ta vận dụng các quy tắc trình bày ở mục 3.10.

Thoáng nhìn qua, ta thấy công việc này có vẻ luẩn quẩn vì cần có  $q_{td}$  để xác định  $S_{tính}$  mà  $q_{td}$  lại xác định theo  $S_{tính}$ . Thực ra không phải hoàn toàn như vậy. Trước khi giải quyết thắc mắc đó ta cần chứng minh tính chất sau:

*Tải trọng tương đương chỉ phụ thuộc chiều dài, hình dạng của đường ảnh hưởng mà không phụ thuộc độ lớn của các tung độ đường ảnh hưởng.*

Thật vậy, giả sử trên *đ.a.h.*  $S$  có dạng tam giác (hình 3.39a) ta đã tìm được vị trí bất lợi của đoàn tải trọng và xác định được giá trị để tính của đại lượng  $S$  là  $S_{tính}$ ; tải trọng tương đương bằng

$$q_{td} = \frac{S_{tính}}{\omega}.$$



Hình 3.39

Bây giờ ta xét *đ.a.h.*  $S^*$  (hình 3.39b) có cùng chiều dài và hình dạng với *đ.a.h.*  $S$  nhưng độ lớn của các tung độ tăng lên  $k$  lần. Lúc này vị trí bất lợi của đoàn tải trọng không thay đổi vì *tang* của góc nghiêng của *đ.a.h.* trong hai trường hợp thay đổi tỷ lệ với nhau nên điều kiện xảy ra cực trị không đổi. Đại lượng  $S_{tính}$  và diện tích  $\omega$  của *đ.a.h.* sẽ tăng lên  $k$  lần vì các tung độ tăng lên  $k$  lần. Ta có

$$q^*_{td} = \frac{S^*_{tính}}{\omega^*} = \frac{k S_{tính}}{k \omega} = \frac{S_{tính}}{\omega}$$

So sánh với trường hợp trên ta thấy  $q^*_{td} = q_{td}$ . Đó là điều cần chứng minh.

Như vậy ứng với mỗi loại tải trọng tiêu chuẩn, với mỗi hình dạng và chiều dài của đường ảnh hưởng khác nhau ta chỉ cần xác định  $S_{tính}$  và suy ra  $q_{td}$  trong một lần đầu tiên, sau đó có thể dùng giá trị  $q_{td}$  này để tính  $S_{tính}$  theo (3.27) cho các đ.a.h. khác có cùng chiều dài và hình dạng.

Trong các "Sổ tay thiết kế" người ta đã thiết lập sẵn các bảng tải trọng tương đương cho nhiều đoàn tải trọng di động và các dạng đ.a.h. khác nhau tương ứng với từng chiều dài của đ.a.h.

Khi dùng tải trọng tương đương để tìm  $S_{tính}$  ta cần

- căn cứ vào tải trọng và dạng đ.a.h. đang xét, tìm bảng tải trọng tương đương tương ứng;
- căn cứ vào chiều dài của đ.a.h. đang xét, tìm giá trị của  $q_{td}$ ;
- sử dụng công thức (3.27) để xác định  $S_{tính}$ .

### 3.12. Khái niệm về biểu đồ bao nội lực

Các công trình trong thực tế thường chịu tác dụng đồng thời của tải trọng bất động và tải trọng di động. Do đó, khi tính toán những công trình này ta cần phải xác định được giá trị bất lợi nhất của nội lực cho từng tiết diện đối với tải trọng di động, đã cho kết hợp với nội lực do tải trọng bất động gây ra. Để thực hiện yêu cầu đó ta vận dụng khái niệm về biểu đồ bao nội lực.

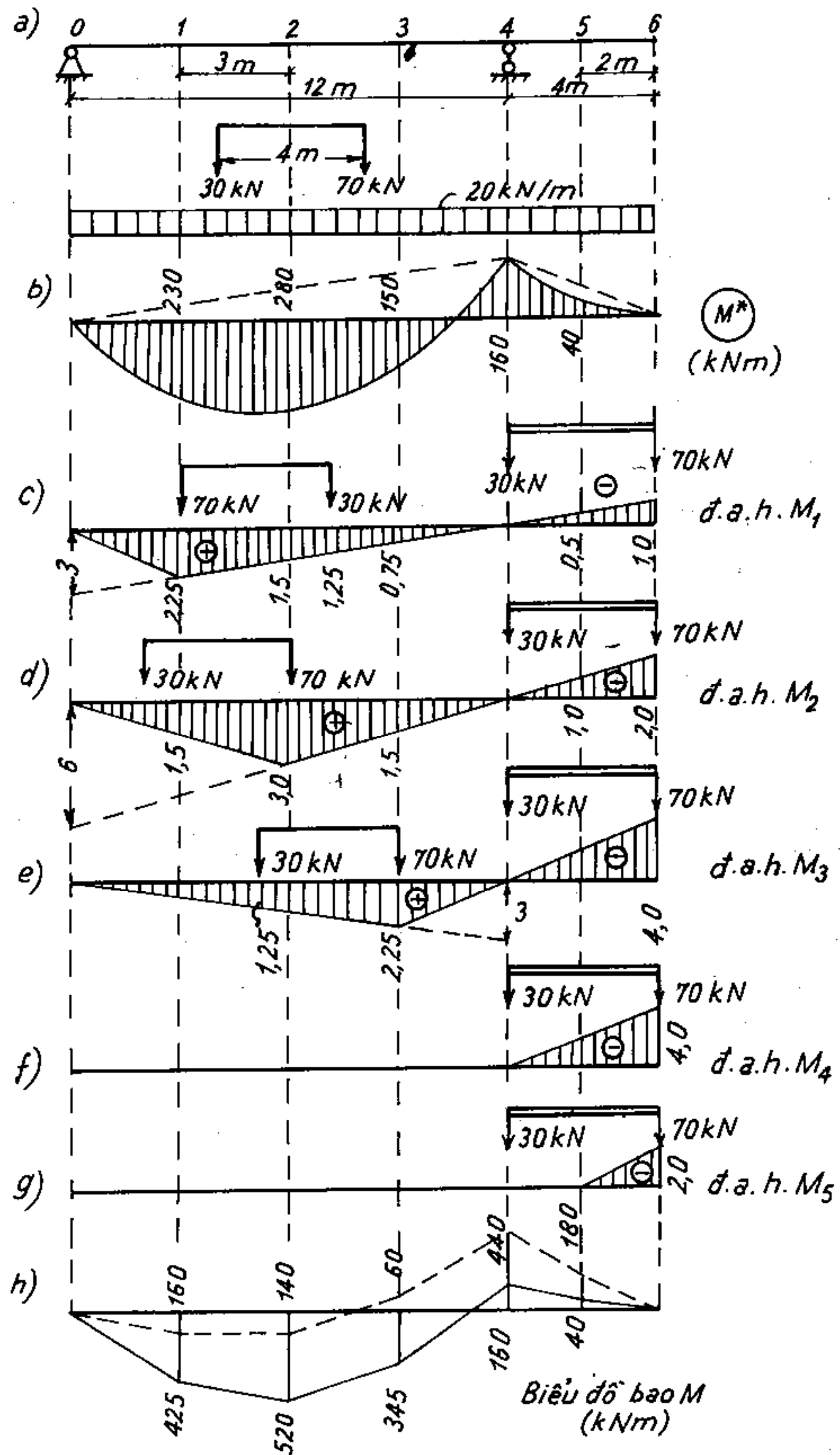
*Biểu đồ bao nội lực là biểu đồ mà mỗi tung độ của nó biểu thị giá trị đại số của nội lực lớn nhất hoặc nhỏ nhất có thể xảy ra tại tiết diện tương ứng.*

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ biểu đồ bao nội lực thông qua một ví dụ cụ thể là biểu đồ bao mômen uốn trong dầm đơn giản có một đầu thừa (hình 3.40a) chịu tải trọng di động dưới dạng hai lực tập trung và chịu tải trọng bất động phân bố đều. Tất nhiên, cách vẽ cũng có thể áp dụng cho mọi trường hợp khác.

- 1) *Vẽ đường ảnh hưởng nội lực tại một số tiết diện chỉ định trên dầm.* Trong trường hợp hệ vẽ trên hình 3.40a, các tiết diện đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5 và 6. Tất nhiên, càng thực hiện với nhiều tiết diện thì biểu đồ bao tìm được càng sát với kết quả chính xác nhưng khối lượng tính toán sẽ tăng lên theo. Trên hình 3.40c, d, e, f, g là các đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện 1, 2, 3, 4, 5.
- 2) *Xác định nội lực do tải trọng bất động gây ra bằng cách vẽ biểu đồ nội lực hoặc bằng cách sử dụng các đường ảnh hưởng như đã trình bày trong mục 3.7.* Kết

quả tính ghi trên hình 3.40b và trên cột 2 của bảng 3.1.

3) Xác định các giá trị để tính max hoặc min của nội lực cho từng tiết diện. Tương ứng với mỗi tiết diện ta cần vận dụng phương pháp đã trình bày trong mục 3.9 để xác định vị trí bất lợi nhất của tải trọng di động, tiếp đó suy ra giá trị để tính.



Hình 3.40

Ví dụ với tiết diện  $I$  (hình 3.40c):

- Vị trí bất lợi của tải trọng di động trên  $d.a.h$ .  $M_I$  tương ứng với dấu dương là vị trí của lực có một nét nổi ngang. Giá trị để tính tương ứng là

$$M_{I,max} = 70.2,25 + 30.1,25 = 195 \text{ kNm.}$$

- Vị trí bất lợi của tải trọng di động trên  $d.a.h$ .  $M_I$  tương ứng với dấu âm là vị trí của lực có hai nét nổi ngang. Giá trị để tính tương ứng là

$$M_{I,min} = 70.(-1) + 30.0 = -70 \text{ kNm.}$$

Cũng thực hiện như thế với các tiết diện khác ta sẽ tính được các giá trị  $M_{k,max}$  và  $M_{k,min}$  do tải trọng di động gây ra. Kết quả tính ghi trên các cột 3 và 4 của bảng 3.1.

**Bảng 3.1**

Tiết diện	$M^*$ (kNm)	$M_{max}$ (kNm)	$M_{min}$ (kNm)	$M_{max}^b$ (kNm)	$M_{min}^b$ (kNm)
1	230	$70.2,25 + 30.1,25 = 195$	$70(-1) + 30.0 = -70$	$230 + 195 = 425$	$230 - 70 = 160$
2	280	$70.3 + 30.1 = 240$	$70(-2) = -140$	$280 + 240 = 520$	$280 - 140 = 140$
3	150	$70.2,25 + 30.1,25 = 195$	$70(-3) = -210$	$150 + 195 = 345$	$150 - 210 = -60$
4	-160	0	$70(-4) = -280$	$-160 + 0 = -160$	$-160 - 280 = -440$
5	-40	0	$70(-2) = -140$	$-40 + 0 = -40$	$-40 - 140 = -180$

- 4) Vẽ biểu đồ bao nội lực do tải trọng di động và bất động đồng thời gây ra. Sau khi đã tính được các giá trị max và min của nội lực do tải trọng di động gây ra, đem cộng đại số những giá trị này với các giá trị nội lực tại từng tiết diện tương ứng lấy trên biểu đồ do tải trọng bất động gây ra ta sẽ tính được các tung độ của biểu đồ bao nội lực

$$M_{k,max}^b = M_{k,max} + M_k^* \quad (3.29)$$

$$M_{k,min}^b = M_{k,min} + M_k^* \quad (3.30)$$

Ví dụ, tại tiết diện  $I$  ta có  $M_{I,max}^b = 195 + 230 = 425 \text{ kNm.}$

Tại tiết diện 2 ta có  $M_{I,min}^b = -70 + 230 = 160 \text{ kNm.}$

Cũng thực hiện như thế với các tiết diện khác ta sẽ xác định được các tung độ của biểu đồ bao. Kết quả tính ghi trên các cột 5 và 6 của bảng 3.1.

Sau khi dựng các tung độ tìm được và nối lại với nhau bằng các đoạn thẳng, ta sẽ được biểu đồ bao mômen uốn max (đường liền nét) và biểu đồ bao mômen uốn min (đường đứt nét) như trên hình 3.40h.

Cần chú ý là với cách làm như vậy ta chỉ được các giá trị đúng của biểu đồ bao tại các tiết diện đã chỉ định. Trên thực tế biểu đồ bao có dạng đường cong chứ không phải là đường đa giác như đã tìm được.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 3.1. Nhiệm vụ cơ bản khi tính công trình chịu tải trong di động là gì? Nêu phương hướng chung để thực hiện nhiệm vụ tính công trình chịu tải trọng di động.
- 3.2. Định nghĩa đường ảnh hưởng. Nêu nguyên tắc và những quy ước cần thống nhất khi vẽ đường ảnh hưởng.
- 3.3. Phân biệt ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng  $S$  và biểu đồ nội lực  $S$ .
- 3.4. Đường ảnh hưởng nội lực ứng dưới một phần xác định của hệ tĩnh định cố dạng như thế nào?
- 3.5. Trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng của phản lực, nội lực trong dầm đơn giản có đầu thừa và dầm côngxôn. Nêu các nhận xét và cách vẽ thực hành đ.a.h. cho các hệ này.
- 3.6. Trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ có hệ thống truyền lực.
- 3.7. Trình bày cách vẽ đ.a.h. trong hệ ghép tĩnh định. Cho ví dụ minh họa.
- 3.8. Trình bày cách vẽ đ.a.h. của các thành phần phản lực (phản lực đứng, lực xô, lực vòm) trong hệ ba khớp.
- 3.9. Trình bày cách vẽ thực hành đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện  $k$  trong hệ ba khớp. Cho ví dụ.
- 3.10. Trình bày cách vẽ thực hành đ.a.h. lực cắt tại tiết diện  $k$  trong hệ ba khớp. Cho ví dụ.
- 3.11. Trình bày cách vẽ thực hành đ.a.h. lực dọc tại tiết diện  $k$  trong hệ ba khớp. Cho ví dụ.



- 3.12. Trình bày cách sử dụng phương pháp tách mắt để vẽ đ.a.h. lực dọc trong các thanh của dàn.
- 3.13. Trình bày cách sử dụng phương pháp mặt cắt đơn giản để vẽ đ.a.h. lực dọc trong các thanh của hệ dàn dầm. Cho ví dụ.
- 3.14. Trình bày cách vẽ đ.a.h. lực dọc trong các thanh của hệ dàn vòm ba khớp. Cho ví dụ.
- 3.15. Thiết lập các công thức tính giá trị của đại lượng nghiên cứu  $S$  theo đường ảnh hưởng tương ứng với các trường hợp sau:
- ◇ hệ tải trọng tập trung;
  - ◇ tải trọng phân bố;
  - ◇ mômen tập trung.
- 3.16. Chứng minh rằng ảnh hưởng của hệ tải trọng tập trung đến đại lượng  $S$  có thể thay thế bằng ảnh hưởng của hợp lực các tải trọng tập trung khi đ.a.h.  $S$  là một đoạn thẳng liên tục.
- 3.17. Thế nào là vị trí bất lợi của đoàn tải trọng di động? Chứng minh điều kiện cần để xảy ra vị trí bất lợi của đoàn tải trọng di động trên đường ảnh hưởng có dạng đa giác một dấu. Nêu thứ tự thực hiện khi tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng di động trên đường ảnh hưởng đa giác một dấu.
- 3.18. Thế nào là biểu đồ bao nội lực? Nêu thứ tự thực hiện khi vẽ biểu đồ bao nội lực.

# 4

## Cách xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng dàn hồi tuyến tính

Nghiên cứu cách xác định chuyển vị trong hệ thanh dàn hồi tuyến tính nhằm phục vụ hai mục đích sau

- \* Kiểm tra độ cứng của công trình.
- \* Chuẩn bị cơ sở cho việc nghiên cứu các hệ siêu tĩnh.

Trong Sức bền vật liệu, ta đã nghiên cứu cách tìm phương trình đường dàn hồi của hệ đơn giản. Trong Cơ học kết cấu, để đạt được hai mục đích nói trên ta không cần tìm đường dàn hồi của hệ thanh mà chỉ cần xác định chuyển vị tại các vị trí xác định của hệ thanh.

Khi nghiên cứu cách xác định chuyển vị của hệ thanh dàn hồi tuyến tính ta thừa nhận các giả thiết sau

- ◆ Tải trọng gây ra chuyển vị là tải trọng tác dụng tĩnh.
- ◆ Chuyển vị của hệ nghiên cứu tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

Để xác định chuyển vị trong hệ thanh ta có thể thực hiện theo một trong hai hướng:

- ❖ Xuất phát từ nguyên lý bảo toàn năng lượng, xác định chuyển vị theo thế năng biến dạng dàn hồi.
- ❖ Xuất phát từ nguyên lý công khả dĩ của hệ thanh.

### 4.1. Khái niệm về biến dạng và chuyển vị

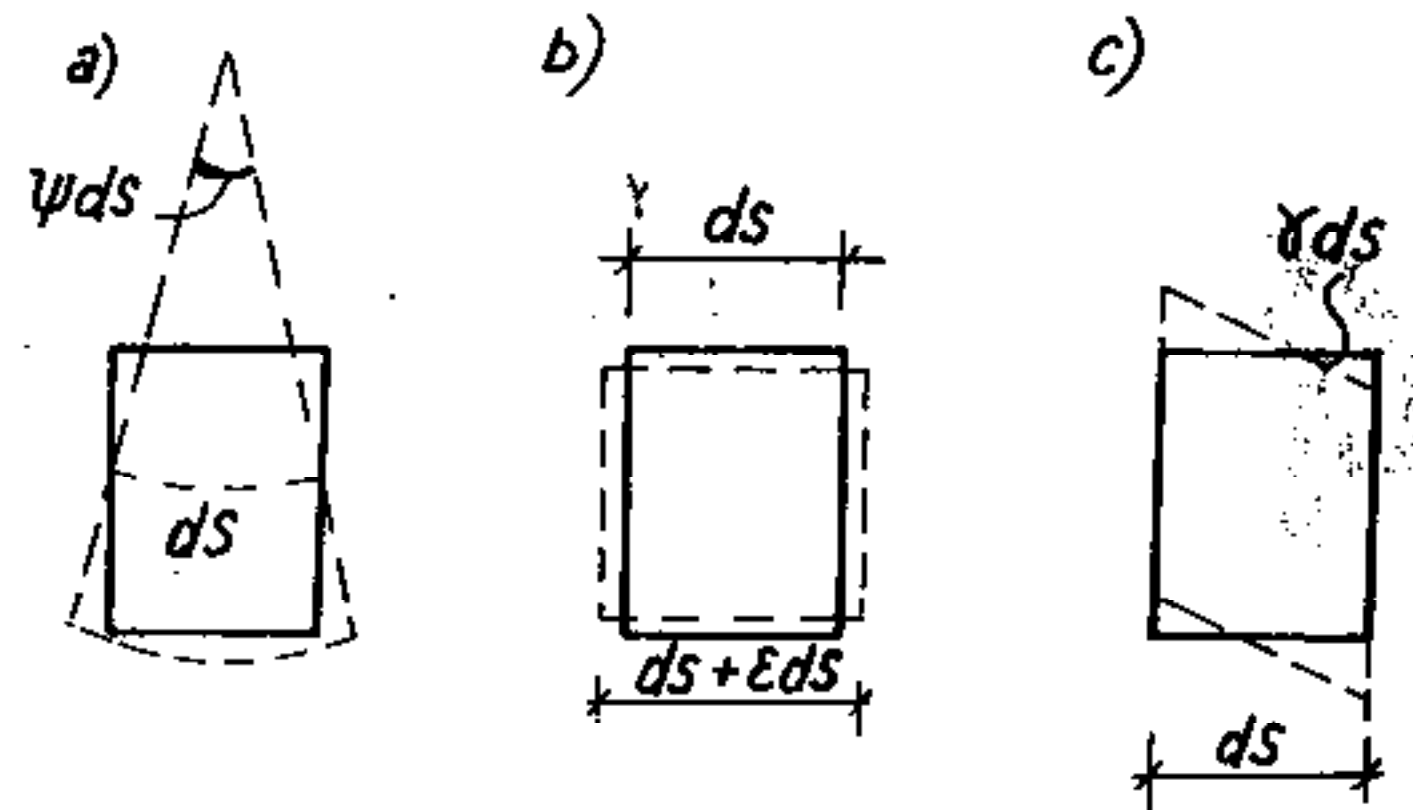
*Sự thay đổi hình dạng của công trình dưới tác dụng của nguyên nhân bên ngoài như tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, gọi là biến dạng. Biến dạng của công trình là do kết quả biến dạng của các phân tố vô cùng bé trong các cấu kiện của công trình hay nói khác đi là do kết quả của sự thay đổi kích thước và hình dạng của các phân tố đó.*

Trong phạm vi bài toán hệ thanh phẳng, biến dạng của mỗi phân tố thanh có chiều dài  $ds$  được phân tích thành ba thành phần:

- ◆ Biến dạng xoay  $\psi ds$  giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố (hình 4.1a).  $\psi$  là biến

dạng xoay tỷ đối (góc hợp giữa hai tiết diện nói trên khi phân tố có chiều dài bằng đơn vị).

- ◆ Biến dạng dọc trục  $\varepsilon ds$  giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố (hình 4.1b).  $\varepsilon$  là biến dạng dọc trục tỷ đối.
- ◆ Biến dạng trượt  $\gamma ds$  giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố (hình 4.1c).  $\gamma$  là góc trượt tỷ đối.



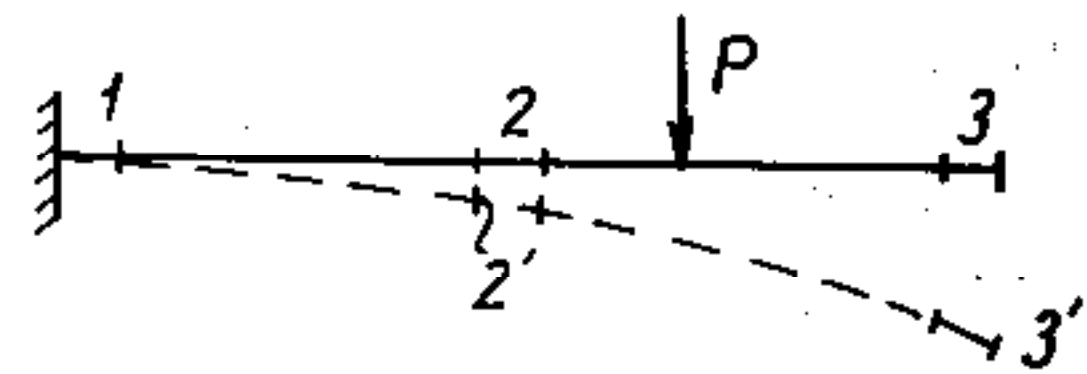
Hình 4.1

Chiều dương của các đại lượng này tương ứng với các chiều vẽ trên hình 4.1.

Khi hệ biến dạng, hầu hết các phân tố sẽ có vị trí mới. Sự thay đổi vị trí của phân tố gọi là chuyển vị. Như vậy có thể nói chuyển vị là hệ quả của biến dạng.

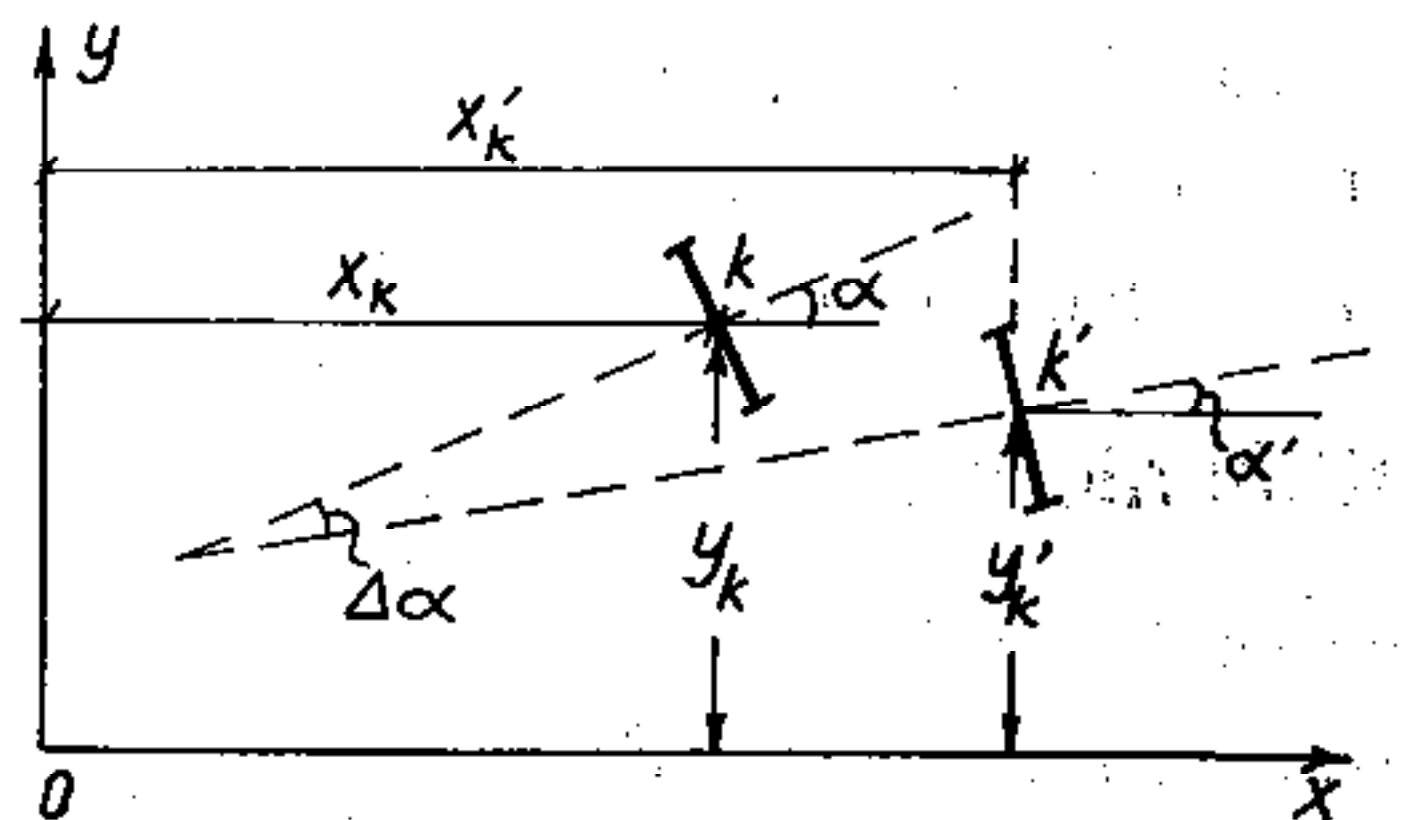
Một phân tố trong hệ có thể có ba khả năng (hình 4.2):

- Không chuyển vị nhưng có biến dạng (phân tố 1, phân tố này ở ngay tại ngàm nên không chuyển vị được nhưng vẫn bị biến dạng vì tại ngàm vẫn có nội lực).
- Có chuyển vị và có biến dạng (phân tố 2).
- Có chuyển vị nhưng không biến dạng (phân tố 3, phân tố này không bị biến dạng vì tại đó không có nội lực, song vẫn có chuyển vị do hệ quả biến dạng của các phân tố khác).



Hình 4.2

Trong thực hành người ta thường sử dụng khái niệm chuyển vị của tiết diện.



Hình 4.3

Giả sử xét một tiết diện  $k$  bất kỳ được xác định trong hệ tọa độ  $xOy$  (hình 4.3). Ở vị trí ban đầu, tiết diện được xác định theo các tọa độ  $x_k, y_k$  và góc nghiêng  $\alpha$  của tiếp tuyến tại tiết diện  $k$  so với phương  $x$ . Sau khi hệ biến dạng, tiết diện  $k$  có vị trí mới là  $k'$  và được xác định theo  $x'_k, y'_k, \alpha'$ .

Trong bài toán phẳng, nói chung chuyển vị của tiết diện bao gồm ba thành phần:

chuyển vị thẳng theo phương  $x$ :  $\Delta x = x'_k - x_k$ ;

chuyển vị thẳng theo phương  $y$ :  $\Delta y = y'_k - y_k$ ;

chuyển vị góc:  $\Delta \alpha = \alpha' - \alpha$ .

Ký hiệu chung cho các chuyển vị thẳng cũng như chuyển vị góc bằng  $\Delta$  có mang theo hai chỉ số: chỉ số thứ nhất chỉ vị trí, phương của chuyển vị còn chỉ số thứ hai chỉ nguyên nhân gây ra chuyển vị.

$\Delta_{km}$  - chuyển vị tương ứng với vị trí và phương  $k$  do nguyên nhân  $m$  gây ra.

Khi nguyên nhân gây ra chuyển vị bằng đơn vị thì ký hiệu bằng  $\delta$  và gọi là chuyển vị đơn vị, nghĩa là:

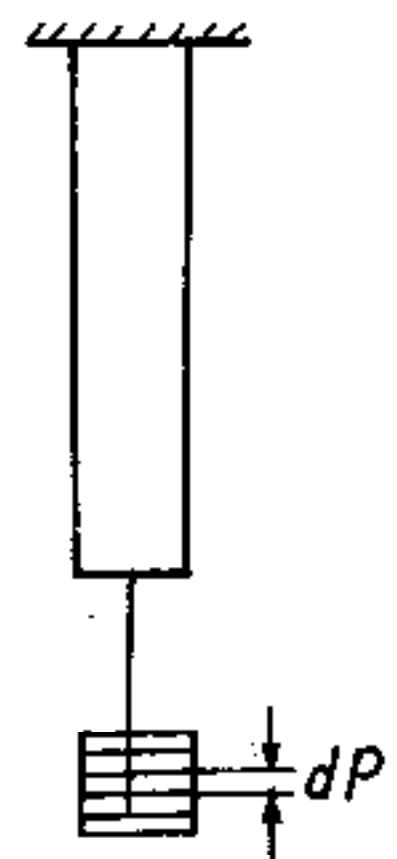
$\delta_{km}$  - chuyển vị tương ứng với vị trí và phương  $k$  do nguyên nhân  $m$  bằng đơn vị gây ra.

## 4.2. Thế năng của hệ thanh đàn hồi tuyến tính

### A. Nguyên lý bảo toàn năng lượng

Cách tính chuyển vị theo thế năng dựa trên cơ sở áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng cho một hệ đàn hồi cô lập. Trong mục này ta sẽ ôn lại những khái niệm cần thiết có liên quan đến vấn đề đang nghiên cứu.

Để trình bày được cụ thể ta khảo sát một thanh chịu kéo đúng tâm. Khi kéo thanh bởi một lực tăng lên từ từ bằng cách thêm dần các tải trọng vô cùng bé  $dP$  (hình 4.4), thì mỗi lần thêm tải trọng ta thấy điểm đặt lực hạ thấp xuống một chút tức là thế năng của ngoại lực giảm xuống đồng thời thế năng biến dạng của thanh tăng lên. Như vậy, thế năng đã chuyển biến từ dạng này qua dạng khác: *phần thế năng tác dụng vào thanh hoàn toàn biến thành thế năng biến dạng của thanh.*



Hình 4.4

Hiện tượng này cũng xảy ra với tất cả các loại biến dạng khác của hệ đàn hồi, do đó ta có thể xem hệ đàn hồi như là một môi trường có thể biến thế năng từ dạng này sang dạng khác.

Tất nhiên sự biến đổi thế năng đó chỉ đúng khi ngoại lực tác dụng cân bằng với nội lực. Hơn nữa, vì tải trọng tác dụng tĩnh nên động năng không biến đổi. Ngoài ra ta cũng có thể bỏ qua phần năng lượng do các hiện tượng từ, điện, nhiệt xảy ra, kèm theo biến dạng tĩnh của vật thể đàn hồi vì phần năng lượng này rất nhỏ. Như vậy ta có thể phát biểu:

Toàn bộ thế năng của ngoại lực  $U_P$  biến thành thế năng biến dạng  $U$  tích lũy trong hệ đàn hồi nếu biến dạng không phá vỡ sự cân bằng của hệ

$$U_P = U. \quad (4.1)$$

Như đã biết, năng lượng được đo bằng công sinh ra trong vật thể đàn hồi. Do đó, thế năng  $U_P$  được đo bằng công  $T$  của các ngoại lực sinh ra trên những chuyển vị của các điểm đặt lực. Công  $T$  dương vì chuyển vị cùng chiều với ngoại lực. Thế năng biến dạng  $U$  tích lũy trong hệ đàn hồi được đo bằng công  $A^*$  của các nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi của hệ. Công  $A^*$  âm vì nội lực có khuynh hướng ngăn cản biến dạng của hệ:

$$\text{Như vậy:} \quad T = -A^* \quad \text{hay} \quad T + A^* = 0. \quad (4.2)$$

Từ (4.1) và (4.2) ta suy ra:

$$U = T = -A^*. \quad (4.3)$$

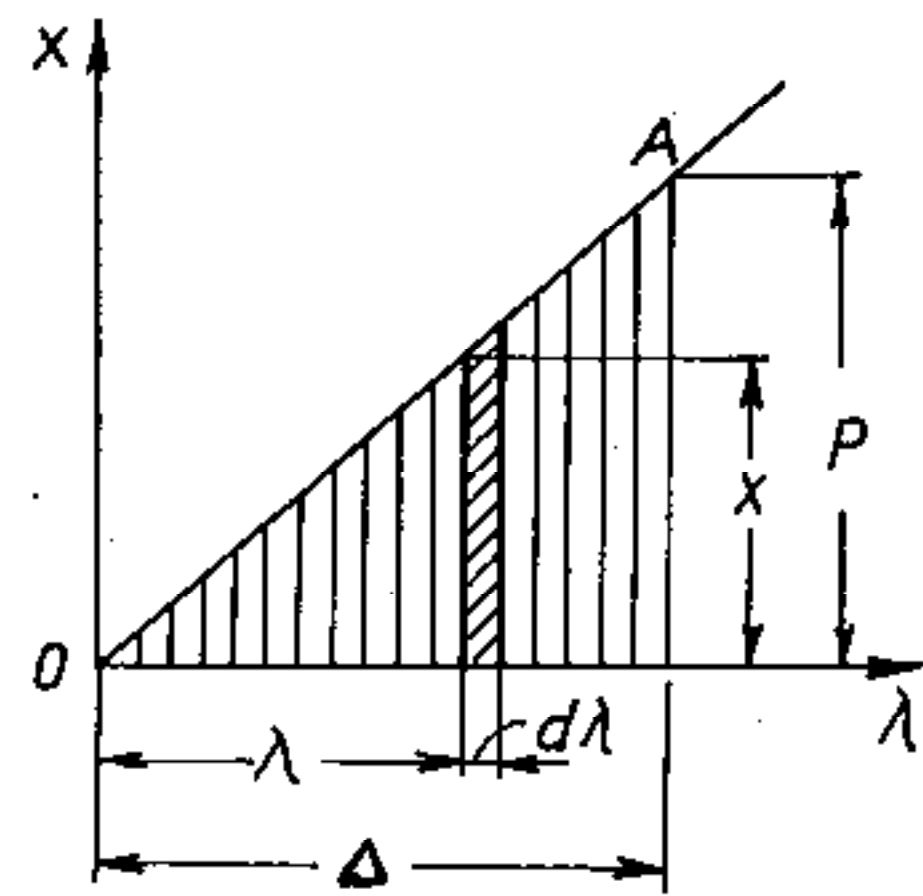
Như vậy: Về trị số, thế năng biến dạng tích lũy trong hệ đàn hồi bằng công  $T$  của các ngoại lực gây ra biến dạng hay bằng công  $A^*$  của các nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi nhưng trái dấu.

Ta sẽ sử dụng công thức (4.3) để thiết lập biểu thức của thế năng. Muốn vậy trước tiên cần xác định công của ngoại lực và công của nội lực trong hệ đàn hồi.

### B. Công của ngoại lực

Như đã biết: công được đo bằng tích số giữa lực tác dụng với trị số chuyển vị của điểm đặt lực theo phương của lực. Phát biểu như vậy chỉ đúng khi lực không thay đổi giá trị trong quá trình điểm đặt lực chuyển dời.

Trong trường hợp đang xét, vì tải trọng  $P$  tác dụng tĩnh và vật liệu tuyệt đối đàn hồi nên trong quá trình chuyển vị của hệ, tải trọng không giữ nguyên trị số mà biến thiên cùng với chuyển vị theo quan hệ bậc nhất. Do đó, công của lực sẽ không bằng tích số giữa trị số cuối cùng  $P$  của lực với trị số cuối cùng  $\Delta$  của chuyển vị tương ứng, mà nhỏ hơn tích số đó.



Hình 4.5

Gọi  $X$  là giá trị của lực biến thiên và  $\lambda$  là giá trị chuyển vị tương ứng (hình 4.5). Khi chuyển vị thay đổi một lượng vô cùng bé thì công của lực  $X$  bằng tích số:

$$dT = X.d\lambda.$$

Giữa chuyển vị và ngoại lực có sự liên hệ tuyến tính nên đồ thị trên hình 4.5 là đường thẳng. Ta thấy công phân tố  $dT$  là diện tích của phần gạch chéo trên hình 4.5. Do đó công tổng cộng khi lực  $X$  đạt tới giá trị  $P$  và chuyển vị  $\lambda$  đạt tới giá trị  $\Delta$  sẽ bằng diện tích của tam giác  $OAB$ , tức là

$$T = \frac{1}{2} P \cdot \Delta. \quad (4.4)$$

Trong trường hợp có nhiều lực  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ; nếu gọi  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  là các chuyển vị tương ứng theo phương của các lực  $P_1, P_2, \dots, P_n$  do tất cả các lực đó gây ra thì:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i. \quad (4.5)$$

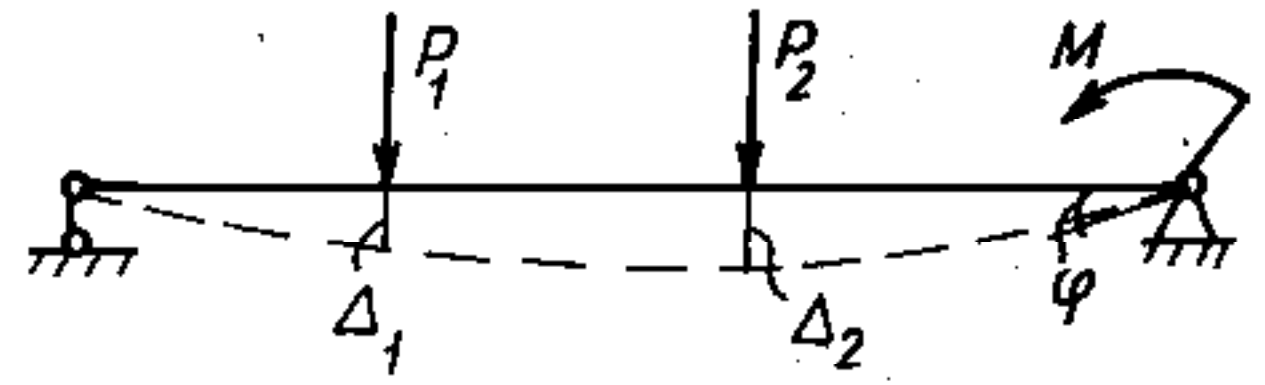
Như vậy: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công của các ngoại lực tập trung đồng thời cùng tác dụng tĩnh được xác định bằng nửa tổng các tích số của giá trị cuối cùng của mỗi ngoại lực với giá trị cuối cùng của chuyển vị tổng cộng tương ứng.

Đó là định lý do Clapeyron (1799-1864) đề xuất vào năm 1852.

Ta cần hiểu giá trị cuối cùng của chuyển vị tổng cộng tương ứng là giá trị chuyển vị  $\Delta_i$  theo phương lực  $P_i$  do tất cả các lực có giá trị cuối cùng gây ra.

Ví dụ, tìm công của các lực  $P_1, P_2$ , mômen  $M$  tác dụng trên dầm vẽ ở hình 4.6. Gọi  $\Delta_1, \Delta_2, \varphi$  là giá trị cuối cùng của chuyển vị theo phương  $P_1, P_2, M$  do tất cả các lực và mômen đó gây ra, ta có:

$$T = \frac{1}{2} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + M \varphi).$$



Hình 4.6

**Chú thích:**

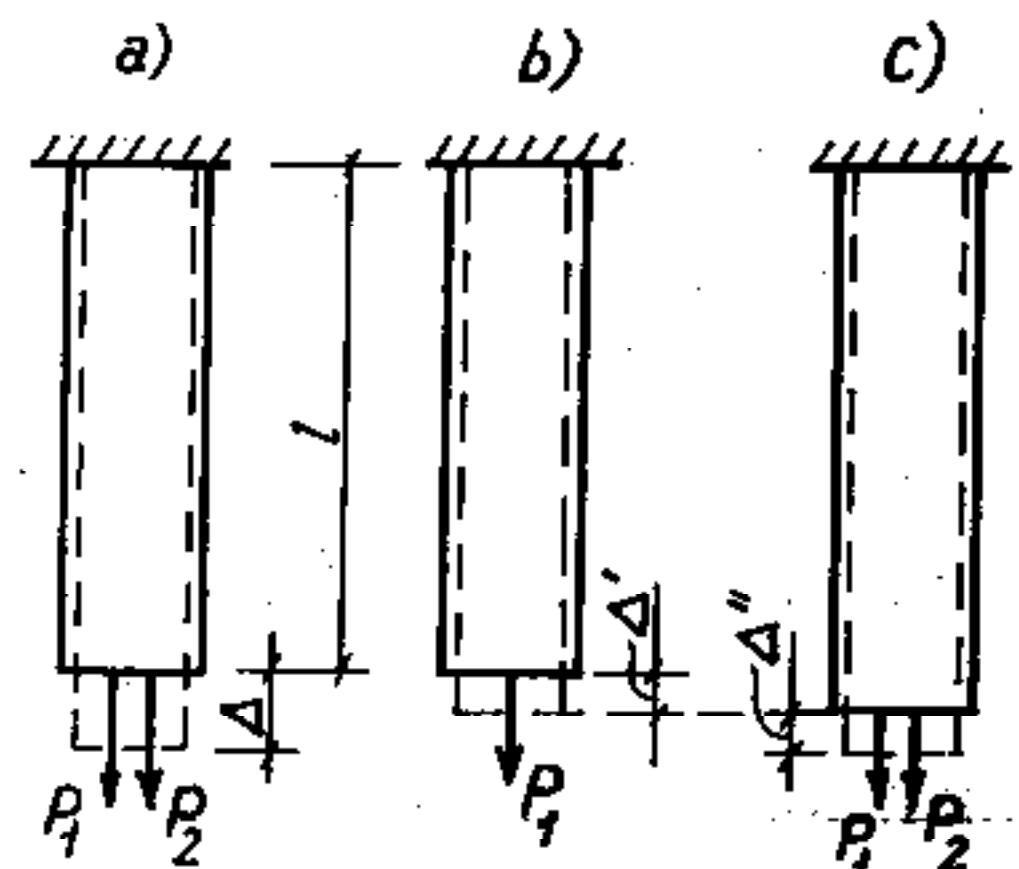
1. Công tổng cộng không phụ thuộc thứ tự tác dụng của các ngoại lực.

Thật vậy, giả sử cho hai lực kéo  $P_1$  và  $P_2$  tác dụng đồng thời (hình 4.7a). Công của hai lực đó là:

$$T = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \Delta \quad \text{với} \quad \Delta = \frac{(P_1 + P_2)l}{EA}$$

$$\text{Vậy} \quad T = \frac{(P_1 + P_2)^2 l}{2EA} = \frac{P_1^2 l}{2EA} + \frac{P_2^2 l}{2EA} + \frac{P_1 P_2 l}{EA}$$

Bây giờ giả sử cho  $P_1$  tác dụng trước (hình 4.7b).



Hình 4.7



- Công của lực đó là  $T_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta'$  với  $\Delta' = \frac{P_1 l}{EA}$ .

Sau khi lực  $P_1$  đạt tới giá trị cuối cùng của nó, ta cho lực  $P_2$  tác dụng (hình 4.7c).

Gọi  $\Delta''$  là độ dãn dài của thanh do riêng  $P_2$  gây ra:  $\Delta'' = \frac{P_2 l}{EA}$ . Lúc này:

- Lực  $P_2$  sinh công  $T_2 = \frac{1}{2} P_2 \Delta''$ .
- Lực  $P_1$  sinh công  $T'_1 = P_1 \Delta''$  (không phải chia đôi vì lực  $P_1$  không thay đổi trong quá trình thanh biến dạng với giá trị  $\Delta''$ ).

Vậy công tổng cộng của cả hai lực là

$$T' = T_1 + T_2 + T'_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta' + \frac{1}{2} P_2 \Delta'' + P_1 \Delta'' = \frac{P_1^2 l}{2EA} + \frac{P_2^2 l}{2EA} + \frac{P_1 P_2 l}{EA}.$$

Ta thấy  $T' = T$ .

Nếu cho  $P_2$  tác dụng trước và  $P_1$  tác dụng sau ta cũng được kết quả tương tự.

Điều đó chứng tỏ là công không phụ thuộc thứ tự tác dụng của các lực.

## 2. Công của ngoại lực trên những chuyển vị đàn hồi không tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

Nghĩa là công do nhiều lực đồng thời tác dụng gây ra không bằng tổng công của từng tác dụng riêng biệt gây ra.

Thật vậy, chuyển vị tỷ lệ bậc nhất với lực  $P$  nên từ (4.5) ta thấy công  $T$  tỷ lệ bậc hai với ngoại lực.

Điều kiện để cho một đại lượng tuân theo nguyên lý cộng tác dụng là đại lượng đó phải tỷ lệ tuyến tính với tải trọng. Ta thấy công  $T$  không thỏa mãn điều kiện này. Đó là điều cần xác minh.

### C. Công của nội lực - Thế năng của hệ thanh

Để tính công của nội lực trong toàn hệ, trước tiên ta hãy tính công của nội lực trong một phân tố của hệ gọi là công phân tố.

Tách khỏi hệ (hình 4.8a) một phân tố thanh dài  $ds$  và tính công phân tố  $dA$  của các nội lực trong phân tố. Khi tách phân tố, ta cần thay thế tác dụng của các phần bị loại bỏ bằng các lực  $M, N, Q$  đặt tại tiết diện bên trái; các lực  $M+dM; N+dN; Q+dQ$  đặt tại tiết diện bên phải và các lực tác dụng trên phân tố (hình 4.8b). Nếu xét toàn bộ thanh thì các lực này là nội lực, nhưng sau khi tách phân tố thì các lực đó trở thành ngoại lực đối với phân tố. Như vậy, ta có thể dùng công thức (4.5) để xác định công phân tố  $dT$  của các ngoại lực tác dụng trên phân tố, sau đó suy ra công phân tố  $dA^*$  của các nội lực trong phân tố, theo (4.3), ta có

$$dA^* = -dT. \quad (4.6)$$

Trước khi tính công  $dT$  ta cần nhận xét:

♦ Chiều dài  $ds$  của phân tố rất nhỏ nên độ biến thiên của các lực  $dM$ ,  $dN$ ,  $dQ$  và tải trọng  $q ds$  cũng rất nhỏ do đó có thể bỏ qua khi tính công  $dT$ . Nếu không bỏ qua thì những đại lượng đó sẽ cho những độ biến thiên của công với những vô cùng bé bậc hai so với  $ds$  mà trong phạm vi nghiên cứu của Cơ học kết cấu, ta chỉ xét tới những vô cùng bé bậc một. Bởi vậy, để cho đơn giản tính toán ta có thể bỏ qua chúng ngay từ đầu và thay thế phân tố trên hình 4.8b bằng phân tố trên hình 4.8c.

♦ Các lực  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  sinh công trên những biến dạng tương ứng độc lập với nhau (xem hình 4.9a, b, c) nên ta có thể tính riêng rẽ rồi cộng các kết quả.

Ta có:  $dT = dT_M + dT_N + dT_Q$ .

❖ *Tính công  $dT_M$  của mômen  $M$  (hình 4.9a).*

Theo công thức (4.5), ta có

$$dT_M = \frac{1}{2} \left( M \frac{\psi ds}{2} + M \frac{\psi ds}{2} \right) = \frac{1}{2} M \psi ds,$$

trong đó  $\psi ds$  là góc hợp giữa hai tiết diện của phân tố khi chịu mômen uốn  $M$ .

Nếu gọi  $\rho$  là bán kính cong của phân tố bị uốn thì từ hình (4.9a), ta thấy

$$\psi ds = \frac{l}{\rho} ds \quad \text{hay} \quad \frac{l}{\rho} = \psi. \quad (a)$$

Mặt khác, khi nghiên cứu sự uốn thuần túy của các thanh thẳng trong Sức bền vật liệu ta đã biết

$$\frac{l}{\rho} = \frac{M}{EI}, \quad (b)$$

với:  $E$  – môđun đàn hồi khi kéo hoặc nén của vật liệu;

$I$  – mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện thanh.

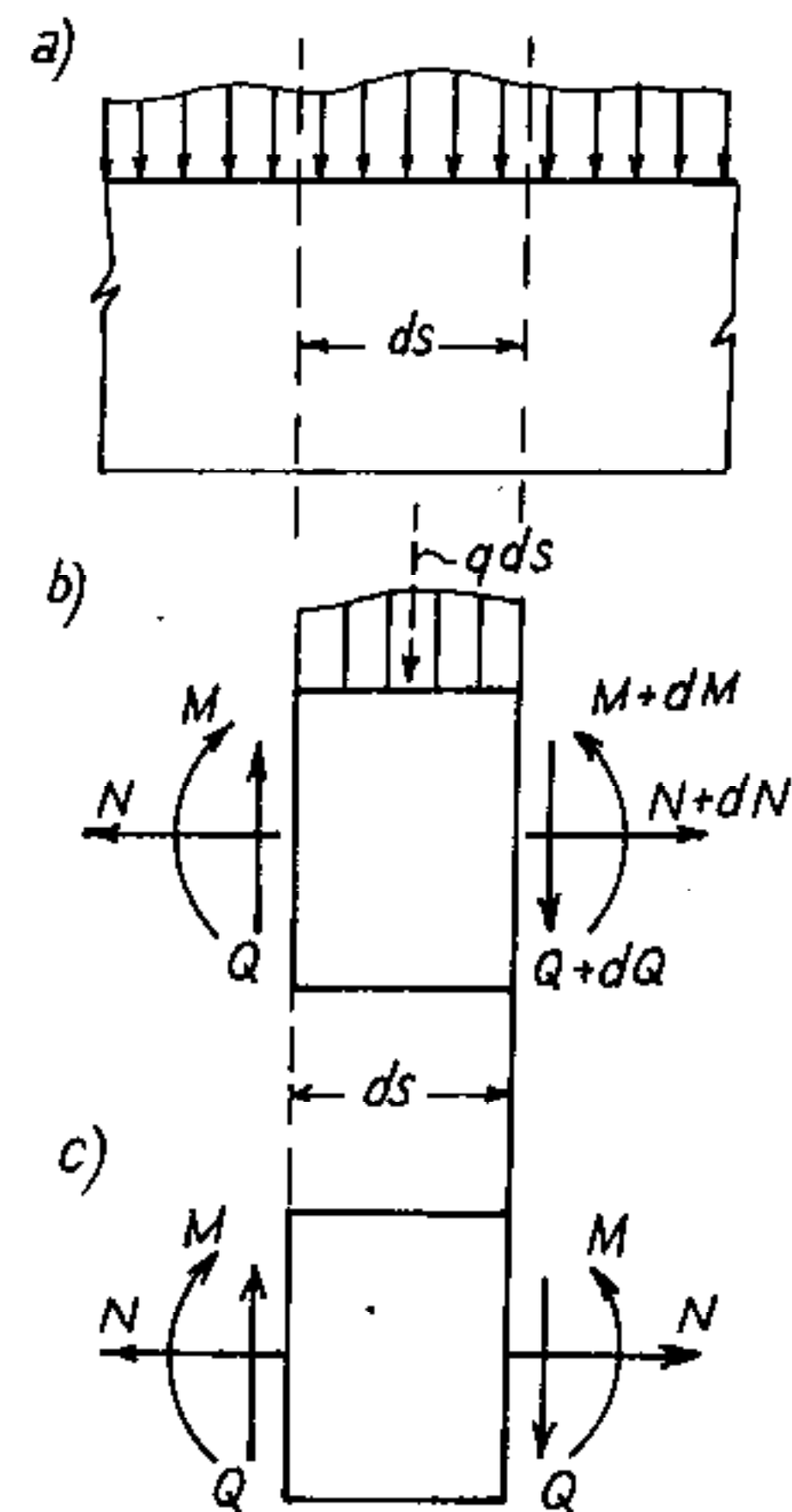
So sánh (a) với (b), ta được:  $\psi = \frac{M}{EI}$

Vậy 
$$dT_M = \frac{M^2 ds}{2EI}. \quad (4.7)$$

❖ *Tính công  $dT_N$  của lực dọc  $N$  (hình 4.9b). Theo công thức (4.5):*

$$dT_N = \frac{1}{2} \left( N \frac{\varepsilon ds}{2} + N \frac{\varepsilon ds}{2} \right) = \frac{1}{2} N \varepsilon ds,$$

trong đó  $\varepsilon ds$  là độ dãn của phân tố do lực dọc.

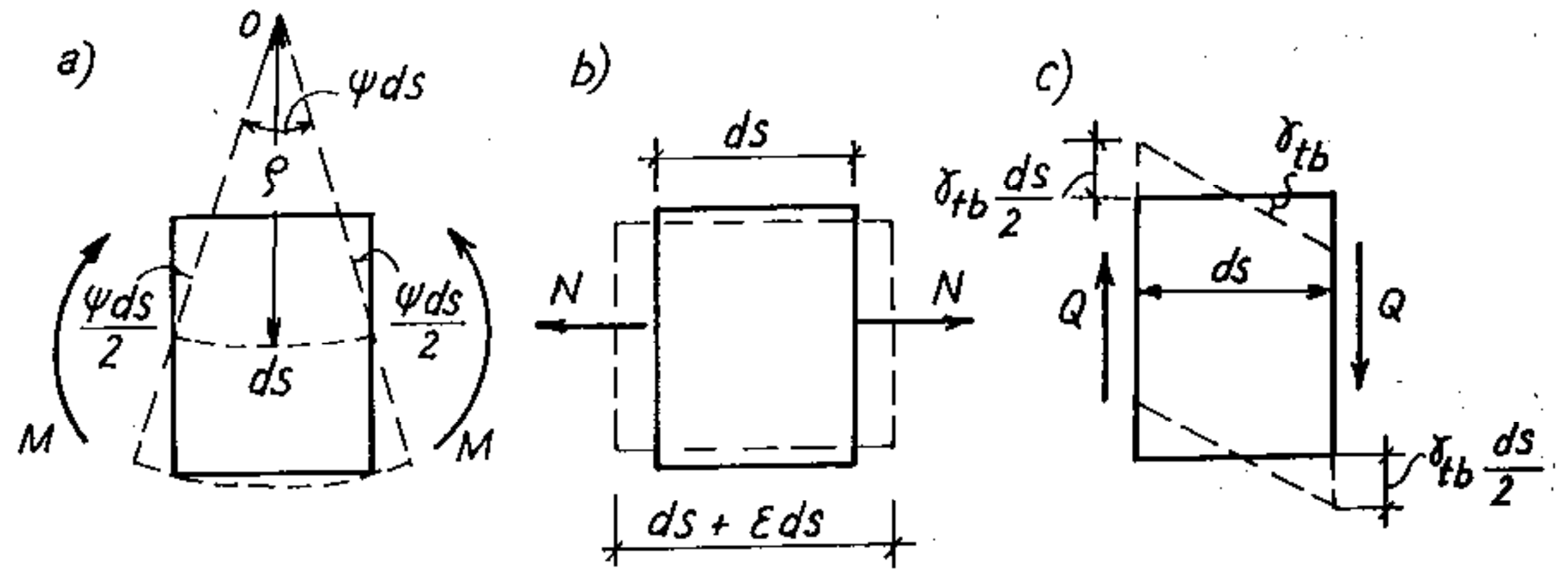


Hình 4.8

Theo định luật Hooke khi kéo hoặc nén:  $\varepsilon ds = \frac{N}{EA} ds$ ,

với  $A$  – diện tích của tiết diện thanh.

Vậy 
$$dT_N = \frac{N^2 ds}{2EA} \quad (4.8)$$



Hình 4.9

❖ Tính công  $dT_Q$  của lực cắt  $Q$  (hình 4.9c).

Dưới tác dụng của lực cắt, các tiết diện trượt với nhau một góc  $\gamma_{tb}$ . Vì ứng suất tiếp do  $Q$  gây ra biến đổi không đều theo chiều cao của tiết diện nên góc trượt (xem SBVL) cũng phân bố không đều theo chiều cao, do đó ta dùng giá trị trung bình  $\gamma_{tb}$ .

Theo (4.5): 
$$dT_Q = \frac{1}{2} \left( Q \gamma_{tb} \frac{ds}{2} + Q \gamma_{tb} \frac{ds}{2} \right) = \frac{1}{2} Q \gamma_{tb} ds.$$

Để xác định  $\gamma_{tb}$  ta áp dụng định luật Hooke khi biến dạng trượt:

$$\gamma_{tb} = \frac{\tau_{tb}}{G} = \frac{1}{G} \cdot \nu \frac{Q}{A},$$

trong đó:  $G$  – môđun đàn hồi khi trượt;

$\nu$  – là hệ số điều chỉnh, kể tới sự phân bố không đều của ứng suất tiếp. Hệ số này chỉ phụ thuộc hình dạng của tiết diện.

Vậy 
$$dT_Q = \nu \frac{Q^2 ds}{2GA} \quad (4.9)$$

Để thiết lập công thức xác định hệ số  $\nu$  ta cần tính công do các ứng suất tiếp gây ra. Xét một phân tố diện tích  $dA$  song song với trục trung hòa  $x$  của tiết diện (hình 4.10a). Thành phần của ứng suất tiếp theo phương song song với  $Q$  trên phân tố diện tích này bằng nhau và được xác định theo công thức của Jurapski:

$$\tau = \frac{Q S_c}{I_x b_c}$$

trong đó:

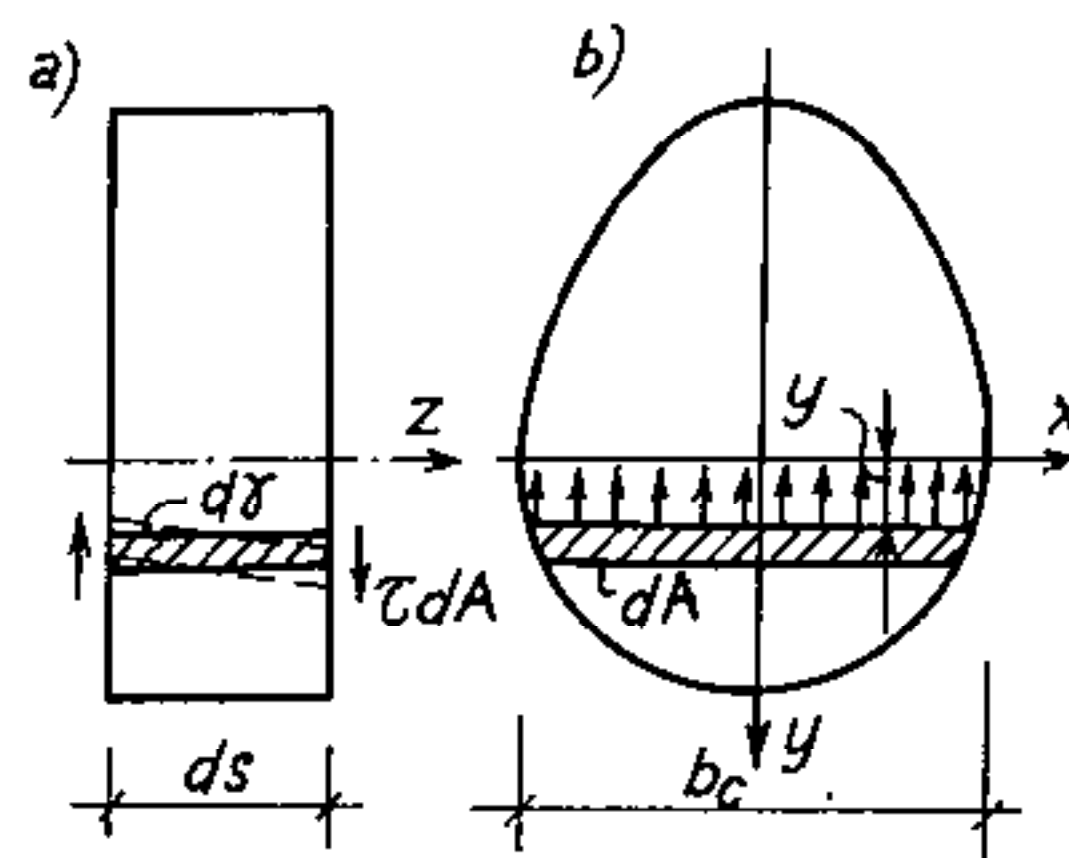
$b_c$  - bề rộng của tiết diện tại vị trí cần xác định ứng suất tiếp;

$S_c$  - mômen tĩnh của phần tiết diện bên dưới hoặc bên trên đường  $b_c$ , lấy đối với trục trung hòa  $x$ .

Dưới tác dụng của các ứng suất tiếp, hai diện tích  $dA$  tương ứng ở hai tiết diện của phân tố thanh có chiều dài  $ds$  sẽ trượt một góc bằng  $d\gamma = \tau / G$ . Do đó, công của ứng suất tiếp tác dụng trên diện tích  $dA$  sẽ bằng:

$$2 \left[ \frac{1}{2} \tau \cdot dA \cdot d\gamma \cdot \frac{ds}{2} \right] = \frac{1}{2} \tau \cdot dA \cdot \frac{\tau}{G} ds.$$

Công của các ứng suất tiếp trên toàn tiết diện thuộc phân tố thanh:



Hình 4.10

$$dT_Q = \int_A \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} ds \cdot dA = \int_A \frac{1}{2} \frac{Q^2 S_c^2}{I_x^2 b_c^2 G} ds \cdot dA.$$

Vì tích phân được lấy theo diện tích, nên có thể đưa các đại lượng  $ds$ ,  $I_x$ ,  $Q$ ,  $G$  ra ngoài dấu tích phân. Ta có:

$$dT_Q = \left[ \frac{A}{I_x^2} \int_A \frac{S_c^2}{b_c^2} dA \right] \cdot \frac{Q^2}{2GA} ds.$$

So sánh với (4.9) ta được:

$$v = \frac{A}{I_x^2} \int_A \frac{S_c^2}{b_c^2} dA. \quad (4.10)$$

- Với tiết diện chữ nhật  $v = 1,2$ .
- Với tiết diện tròn  $v = 32/27 \approx 1,18$  (\*).
- Với tiết diện hình ống mỏng  $v = 2$ .
- Với tiết diện chữ I  $v = A / A_b$ .

trong đó:  $A$  - diện tích của toàn bộ tiết diện;

$A_b$  - diện tích của bản bụng.

Cộng các kết quả trong các công thức (4.7), (4.8) và (4.9) ta được công tổng cộng đối với phân tố thanh thẳng:

$$dT = \frac{M^2 ds}{2EI} + \frac{N^2 ds}{2EA} + v \frac{Q^2 ds}{2GA}.$$

(\*) Nếu giả thiết là các ứng suất tiếp song song với  $Q$  và áp dụng công thức (4.10) ta sẽ thấy đối với tiết diện tròn:  $v = 10/9 \approx 1,11$ . Thực ra các ứng suất tiếp không song song với  $Q$ , nếu kể tới thành phần ứng suất tiếp vuông góc với lực cắt ta sẽ được giá trị  $v$  lớn hơn và bằng  $32/27 \approx 1,18$ .

Công phân tố của nội lực:

$$dA^* = -d\Pi = -\left(\frac{M^2 ds}{2EI} + \frac{N^2 ds}{2EA} + \nu \frac{Q^2 ds}{2GA}\right)$$

Để có công tổng cộng của nội lực trong toàn hệ ta cần lấy tích phân của  $dA^*$  dọc theo chiều dài của từng thanh trong hệ. Nói chung, các hàm số dưới dấu tích phân thường không liên tục, khi đó ta cần lấy tích phân trong từng đoạn mà những hàm số đó liên tục rồi cộng kết quả

$$A^* = \int dA^* = -\left[\sum \int \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int \nu \frac{Q^2 ds}{2GA}\right] \quad (4.11)$$

Sau khi xác định công  $A^*$  ta có thể tìm được công thức cho thế năng đàn hồi của hệ thanh biểu thị theo các nội lực. Từ công thức (4.3) ta có:

$$U = \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int \nu \frac{Q^2 ds}{2GA} \quad (4.12)$$

*Chú thích:*

- 1) Từ công thức (4.12) ta thấy thế năng  $U$  luôn luôn dương vì các đại lượng dưới dấu tích phân luôn luôn dương.
- 2) Các tích phân trong (4.11) và (4.12) là tích phân định hạn tuy rằng ở đây ta không ghi các cận trên và dưới của chúng. Khi áp dụng, ta cần lấy tích phân trên từng đoạn trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục, sau đó cộng kết quả theo số đoạn đã lấy tích phân.
- 3) Biểu thức (4.12) chỉ áp dụng đúng cho trường hợp hệ gồm những thanh thẳng hoặc hệ gồm những thanh cong với độ cong nhỏ. Thanh cong được xem là có độ cong nhỏ khi  $h/r \leq 1/5$ ; trong đó  $h$  là chiều cao tiết diện,  $r$  là bán kính cong bé nhất của trục thanh ở trạng thái ban đầu.

### 4.3. Cách xác định chuyển vị theo thế năng

#### A. Cách áp dụng trực tiếp biểu thức thế năng

Ta có thể áp dụng cách xác định này khi trên hệ chỉ có một lực tác dụng và chỉ cần tìm chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực đó.

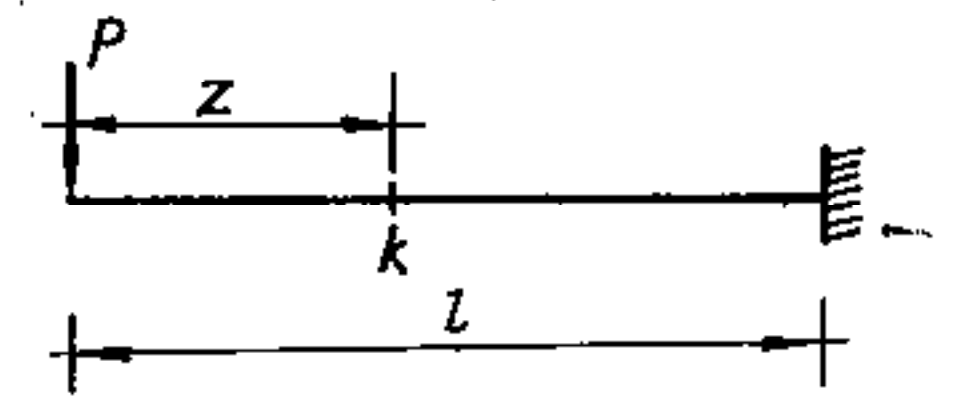
Giả sử trên hệ chỉ có một lực  $P$  tác dụng và cần xác định chuyển vị  $\Delta$  có vị trí và phương tương ứng với lực  $P$ . Từ (4.3) và (4.5) ta có:

$$T = \frac{1}{2} P \cdot \Delta = U. \quad \text{Suy ra} \quad \Delta = \frac{2U}{P}$$

Nếu chú ý đến (4.12) ta có thể xác định  $\Delta$  theo công thức sau

$$\Delta = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P} \left[ \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int \nu \frac{Q^2 ds}{2GA} \right] \quad (4.13)$$

**Ví dụ 4.1.** Xác định độ võng tại nút thừa của dầm cho trên hình 4.11. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt (dưới đây ta sẽ thấy những ảnh hưởng này rất nhỏ so với ảnh hưởng của mômen uốn).



Trong trường hợp này ta có:

$$\Delta = \frac{2}{P} \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI} = \frac{1}{P} \int_0^l \frac{(Pz)^2 dz}{EI} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

Hình 4.11

Để giải quyết phần nào sự hạn chế đã nêu ở trên, ta có thể áp dụng định lý Castigliano.

### B. Cách xác định chuyển vị theo định lý Castigliano

Ta sẽ chứng minh định lý Castigliano:

*Đạo hàm riêng của thế năng biến dạng U theo một trong các ngoại lực  $P_k$  nào đó bằng chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực  $P_k$ .*

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} \quad (4.14)$$

Để chứng minh định lý này (\*) ta xét trường hợp hệ chịu một số lực tập trung  $P_1, P_k, P_n, \dots$  (hình 4.12). Tất nhiên cách lập luận dưới đây vẫn đúng cho hệ bất kỳ chịu lực dưới các dạng khác.

Dưới tác dụng của các lực  $P_1, P_k, P_n$  các điểm đặt lực  $I, k, n$  bị võng xuống là  $y_1, y_k, y_n$ , toàn dầm có vị trí theo đường cong  $I$ . Giả sử cần tìm độ võng  $y_k$ .

Ta chuyển dầm từ vị trí  $I$  sang vị trí lân cận  $II$ . Muốn vậy có thể dùng nhiều cách: thêm tải trọng mới hoặc tăng cường tải trọng cũ v.v... Giả sử ta thêm một lực  $dP_k$  vô cùng bé để chuyển dầm từ vị trí  $I$  sang vị trí  $II$ .

Khi chuyển dầm từ vị trí  $I$  sang vị trí  $II$ , các lực  $P_1, P_k, P_n$  đều hạ thấp xuống, sinh công  $dT$  và thế năng biến dạng của dầm tăng lên là  $dU$ , với:

$$dU = dT \quad (a)$$

Vì  $U$  là hàm số của các lực  $P_1, P_k, P_n, \dots$  và  $dU$  là độ biến thiên thế năng do riêng lực  $P_k$  biến đổi với một lượng  $dP_k$  vô cùng bé gây ra, nên  $dU$  chính là vi phân riêng phần của  $U$  khi  $P_k$  thay đổi, tức là:

(\*) Cũng có thể chứng minh định lý này một cách đơn giản và gọn hơn sau khi biết định lý tương hỗ của các chuyển vị đơn vị (xem mục 4.8)

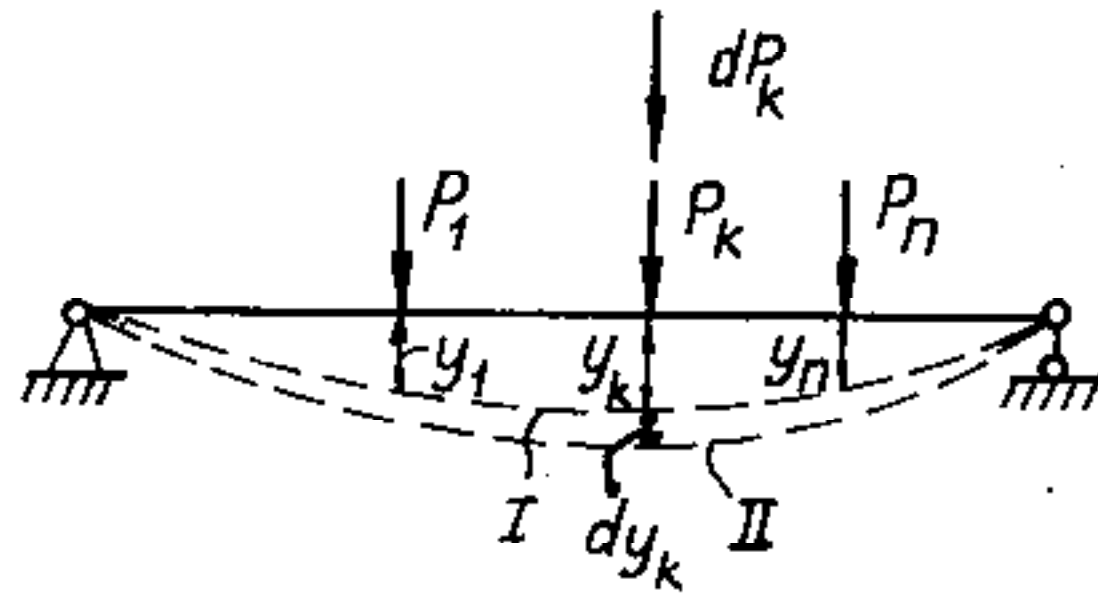


$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k \quad (b)$$

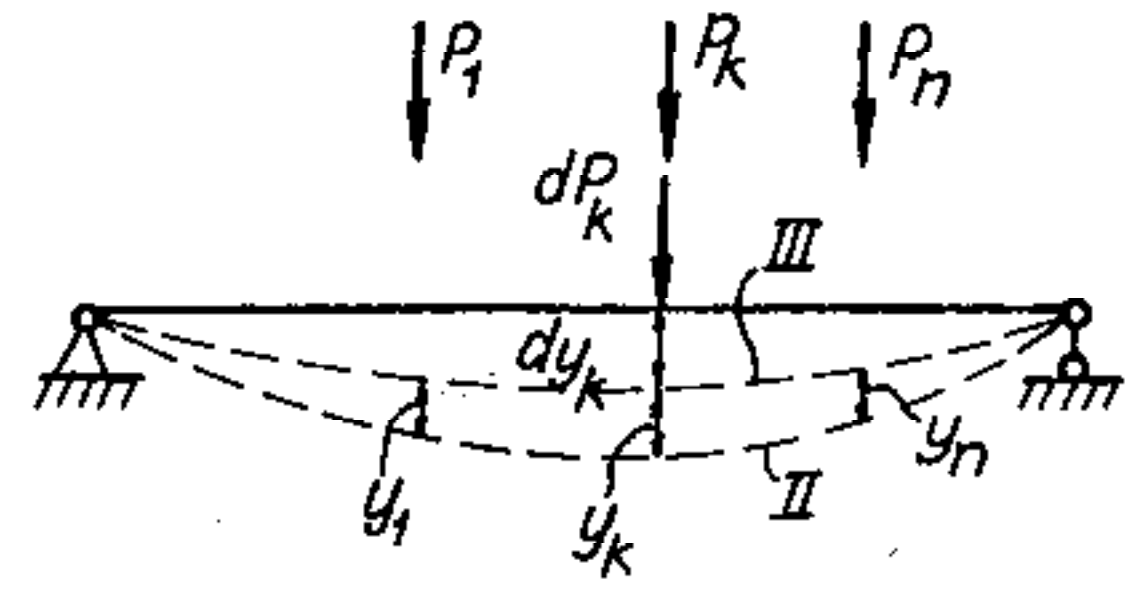
Mặt khác, ta tính độ biến thiên  $dT$  của công ngoại lực. Nếu gọi  $T_1$  và  $T_2$  là giá trị của công của các ngoại lực khi dầm ở vị trí  $I$  và  $II$ , ta có:

$$dT = T_2 - T_1. \quad (c)$$

Theo (4.5): 
$$T_1 = \frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_k y_k + \frac{1}{2} P_n y_n. \quad (d)$$



Hình 4.12



Hình 4.13

Để tính công  $T_2$  ta nhớ lại tính chất: công tổng cộng không phụ thuộc thứ tự tác dụng của các lực. Do đó, đầu tiên ta có thể cho lực  $dP_k$  tác dụng, dầm sẽ cong tới vị trí  $III$  (hình 4.13), điểm đặt của  $dP_k$  chuyển vị bằng  $dy_k$ .

Công của lực  $dP_k$  sẽ bằng  $\frac{1}{2} dP_k dy_k$ .

Sau đó cho các lực  $P_1, P_k, P_n$  tác dụng, dầm bị cong tới vị trí  $II$ , các điểm đặt lực chuyển dời  $y_1, y_k, y_n$  (hình 4.13). Công của các lực  $P_1, P_k, P_n$ :

$$\frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_k y_k + \frac{1}{2} P_n y_n.$$

Ngoài ra lực  $dP_k$  sẵn có trên dầm cũng di chuyển một đoạn  $y_k$  và bởi vì trong cả quá trình chuyển vị, lực  $dP_k$  không đổi trị số nên nó sinh công bằng  $dP_k y_k$ .

Vậy công tổng cộng của các ngoại lực khi dầm chuyển từ vị trí ban đầu đến vị trí  $II$  là

$$T_2 = \frac{1}{2} dP_k dy_k + \frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_k y_k + \frac{1}{2} P_n y_n + dP_k y_k. \quad (e)$$

Thay (e) và (d) vào (c): 
$$dT = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} dP_k dy_k + dP_k y_k.$$

Bỏ qua những lượng vô cùng bé bậc hai, ta được: 
$$dT = dP_k y_k. \quad (f)$$

Thay (b) và (f) vào (a), ta có: 
$$dP_k y_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k,$$

hay 
$$y_k = \frac{\partial U}{\partial P_k},$$

Vậy, chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực  $P_k$  bằng đạo hàm riêng của thế năng theo lực đó.

Cũng có thể mở rộng kết quả này cho:

- ❖ Trường hợp tải trọng phân bố: lúc này ta có thể thay tải trọng phân bố bằng vô số lực tập trung.
- ❖ Trường hợp lực  $P_k$  là mômen tập trung, chuyển vị tương ứng là góc xoay.

Để suy ra công thức cuối cùng dùng để xác định chuyển vị theo các nội lực ta thay (4.12) vào (4.14)

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_k} \left[ \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int \frac{Q^2 ds}{2GA} \right].$$

Ta thấy các nội lực  $M, N, Q$  là hàm của lực  $P_k$  và tọa độ  $s$ , các tích phân ở đây là lấy theo  $s$ , còn đạo hàm riêng lấy theo  $P_k$ . Như đã biết, nếu giới hạn của tích phân là hằng lượng thì có thể đưa đạo hàm theo biến số khác với biến số lấy tích phân vào trong dấu tích phân. Hơn nữa:

$$\frac{\partial(M^2)}{\partial P_k} = 2M \frac{\partial M}{\partial P_k}; \quad \frac{\partial(N^2)}{\partial P_k} = 2N \frac{\partial N}{\partial P_k}; \quad \frac{\partial(Q^2)}{\partial P_k} = 2Q \frac{\partial Q}{\partial P_k},$$

nên:

$$\Delta_k = \sum \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_k} ds + \sum \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_k} ds + \sum \int \frac{Q}{GA} \frac{\partial Q}{\partial P_k} ds, \quad (4.15)$$

trong đó:  $\frac{\partial M}{\partial P_k}, \frac{\partial N}{\partial P_k}, \frac{\partial Q}{\partial P_k}$  là đạo hàm riêng của các biểu thức nội lực  $M, N, Q$  lấy

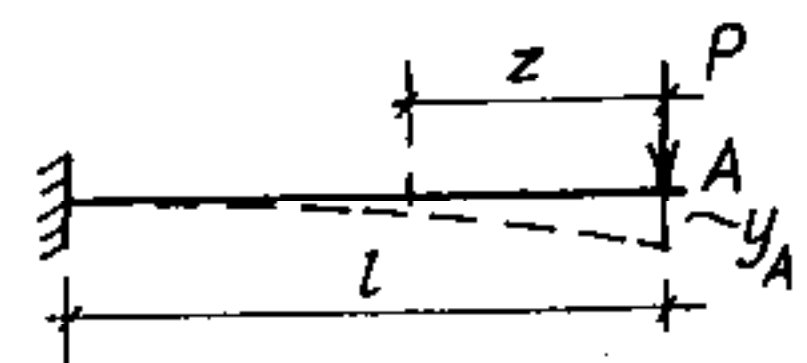
theo lực  $P_k$ .

**Chú thích:** Trường hợp muốn tìm chuyển vị  $\Delta_k$  có vị trí và phương bất kỳ mà ở đó không có lực đặt theo phương cần tìm chuyển vị, ta cần thực hiện như sau: đặt thêm một lực  $P_k$  có điểm đặt và phương theo chuyển vị cần tìm rồi áp dụng định lý như thường lệ, cuối cùng cho lực  $P_k = 0$ .

**Ví dụ 4.2.** Xác định độ võng tại nút thừa  $A$  (hình 4.14). Bỏ qua ảnh hưởng của  $N$  và  $Q$ . Cho biết  $EI = \text{const}$ .

Chuyển vị cần tìm có vị trí và phương tương ứng với lực  $P$ , do đó theo (4.15), ta có:

$$y_A = \Delta_P = \sum \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} ds.$$



Hình 4.14

Từ hình 4.14 ta thấy:  $M = -Pz$ ;  $\frac{\partial M}{\partial P} = -z$ .

Những hàm số này liên tục trên toàn chiều dài của dầm. Do đó:

$$y_A = \Delta_P = \int_0^l \frac{(-Pz)}{EI} (-z) dz = \frac{Pl^3}{3EI}$$

Kết quả mang dấu cộng chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của lực  $P$ .

**Ví dụ 4.3.** Xác định độ võng tại  $C$  (hình 4.15). Bỏ qua ảnh hưởng của  $N$  và  $Q$ . Cho biết  $EI = const$ .

Tại  $C$  không có lực tương ứng với chuyển vị cần tìm, nên ta phải đặt thêm một lực  $R$  phù hợp. Khi đó:

$$y_C = \Delta_R = \sum \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R} ds$$

Trong trường hợp này mômen uốn  $M$  không liên tục trên toàn chiều dài, ta phải chia thành hai đoạn để khảo sát:

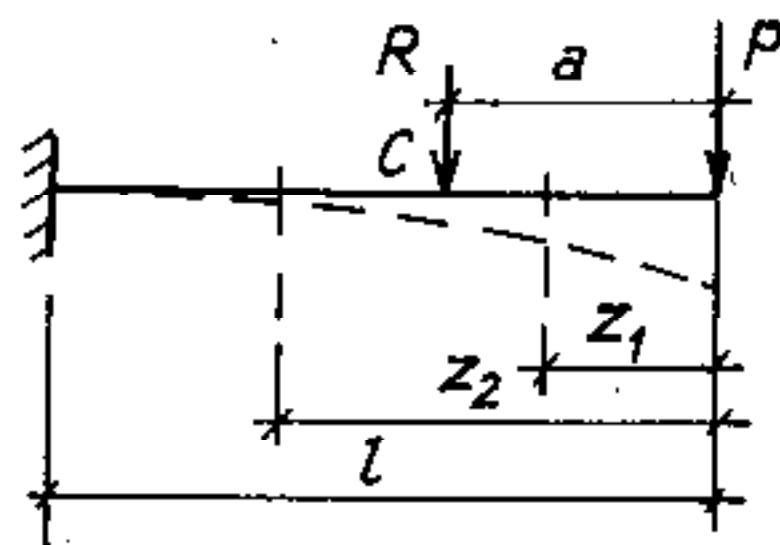
$$\text{Khi } 0 \leq z_1 \leq a; \quad M_1 = -Pz_1; \quad \frac{\partial M_1}{\partial R} = 0.$$

$$\text{Khi } a \leq z_2 \leq l; \quad M_2 = -Pz_2 - R(z_2 - a); \quad \frac{\partial M_2}{\partial R} = -(z_2 - a).$$

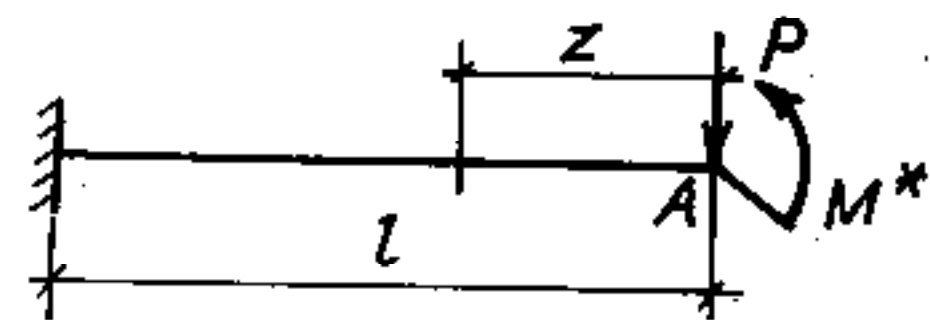
Sau khi lấy đạo hàm riêng phần theo  $R$  ta có thể cho ngay  $R = 0$  để đơn giản việc lấy tích phân. Ta có:

$$y_C = \int_0^a \frac{(-Pz_1)}{EI} (0) dz_1 + \int_a^l \frac{(-Pz_2)}{EI} [-(z_2 - a)] dz_2 = \frac{P}{EI} \left[ \frac{l^3 - a^3}{3} - \frac{a}{2}(l^2 - a^2) \right]$$

Kết quả mang dấu cộng chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của lực  $R$ , tức là hướng xuống dưới.



Hình 4.15



Hình 4.16

**Ví dụ 4.4.** Xác định góc xoay tại tiết diện  $A$  (hình 4.16).  $EI = const$ . Bỏ qua ảnh hưởng của  $N$  và  $Q$ .

Để xác định chuyển vị góc tại một tiết diện nào đó thì ta cần lấy đạo hàm riêng của thế năng  $U$  theo mômen tập trung. Trong trường hợp này ở điểm  $A$  không có mômen tập trung nên cần đặt thêm vào đó một mômen  $M^*$  có chiều bất kỳ

(hình 4.16). Khi đó, theo (4.15), ta có

$$\varphi_A = \Delta_{M^*} = \sum \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M^*} ds.$$

Từ hình (4.16) ta tính được:  $M = -Pz + M^*$ ;  $\frac{\partial M}{\partial M^*} = 1$ .

Sau đó cho  $M^* = 0$  và thay vào công thức trên, ta có

$$\varphi_A = \Delta_{M^*} = \int_0^l \frac{(-Pz)}{EI} \cdot 1 \cdot dz = -\frac{Pl^2}{2EI}.$$

Kết quả mang dấu âm chứng tỏ chiều quay của góc  $\varphi_A$  ngược với chiều của  $M^*$  nên góc xoay quay thuận chiều kim đồng hồ.

#### 4.4. Công khả dĩ của ngoại lực và nội lực

Cách xác định chuyển vị theo thế năng đã trình bày còn có nhiều bất tiện trong khi tính toán và chưa giải quyết được vấn đề xác định chuyển vị trong những hệ chịu sự biến thiên nhiệt độ và chuyển vị gối tựa. Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách xác định chuyển vị theo khái niệm công khả dĩ. Với cách này ta có thể thiết lập được công thức tổng quát cho chuyển vị khi hệ chịu nhiều nguyên nhân khác nhau.

##### A. Định nghĩa công khả dĩ

*Công khả dĩ là công sinh ra bởi các lực trên những chuyển vị và biến dạng vô cùng bé do một nguyên nhân bất kỳ nào đó gây ra.*

Chuyển vị và biến dạng vô cùng bé đó phải phù hợp với các điều kiện liên kết ngoại cũng như liên kết nội của hệ, tức là thỏa mãn điều kiện động học và được gọi là *chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ*.

Nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng có thể là tải trọng hay nhiệt độ và sự chuyển vị của các gối tựa.

Nếu nguyên nhân gây ra các chuyển vị và biến dạng chính là các lực sinh ra công thì công đó gọi là *công thực*. Khái niệm này đã đề cập ở mục 4.2.

Để thấy rõ định nghĩa về công khả dĩ, ta xét một hệ ở hai trạng thái (hình 4.17):

- ◆ Trạng thái thứ nhất gọi là trạng thái "k" chịu lực  $P_k$  (hình 4.17a).
- ◆ Trạng thái thứ hai gọi là trạng thái "m" chịu các nguyên nhân "m". Các nguyên nhân "m" trên hình 4.17b gồm có các tải trọng  $P_m$ , sự biến thiên nhiệt độ  $t_{1m}, t_{2m}$ .

Chuyển vị và biến dạng đàn hồi ở trạng thái "m" là nhỏ và tự động thỏa mãn điều kiện động học nên được xem là chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.

Gọi  $\Delta_{km}$  là chuyển vị khả dĩ tương ứng với lực  $P_k$  (có vị trí và phương tương ứng với lực  $P_k$ ) do các nguyên nhân "m" gây ra.

Tích số  $P_k \Delta_{km}$  là công khả dĩ của lực  $P_k$  trên những chuyển vị tương ứng do các nguyên nhân "m" gây ra.

Ký hiệu  $T_{km}$  là công khả dĩ của lực ở trạng thái k sinh ra trên các chuyển vị tương ứng ở trạng thái m. Ta có

$$T_{km} = P_k \cdot \Delta_{km} ,$$

Cần lưu ý là: khác với công thức đã quen biết ở trên, công khả dĩ bằng tích số của lực với chuyển dời tương ứng mà không chia đôi. Sở dĩ như vậy là vì khi các nguyên nhân "m" gây ra chuyển vị  $\Delta_{km}$ , lực  $P_k$  không tham gia chuyển vị nên không thay đổi trị số.

Khái niệm công khả dĩ là một khái niệm mở rộng, trừu tượng, giúp ta dễ dàng xác định được chuyển vị có vị trí và phương bất kỳ do mọi nguyên nhân gây ra.

### B. Nguyên lý công khả dĩ áp dụng cho hệ đàn hồi (S. D. Poisson 1833)

Trong Cơ học cơ sở ta đã biết nội dung nguyên lý công khả dĩ của Lagrange:

*Nếu một hệ chất điểm nào đó của vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực thì công khả dĩ của các lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé (tức là những chuyển dời mà các liên kết cho phép) phải bằng không*

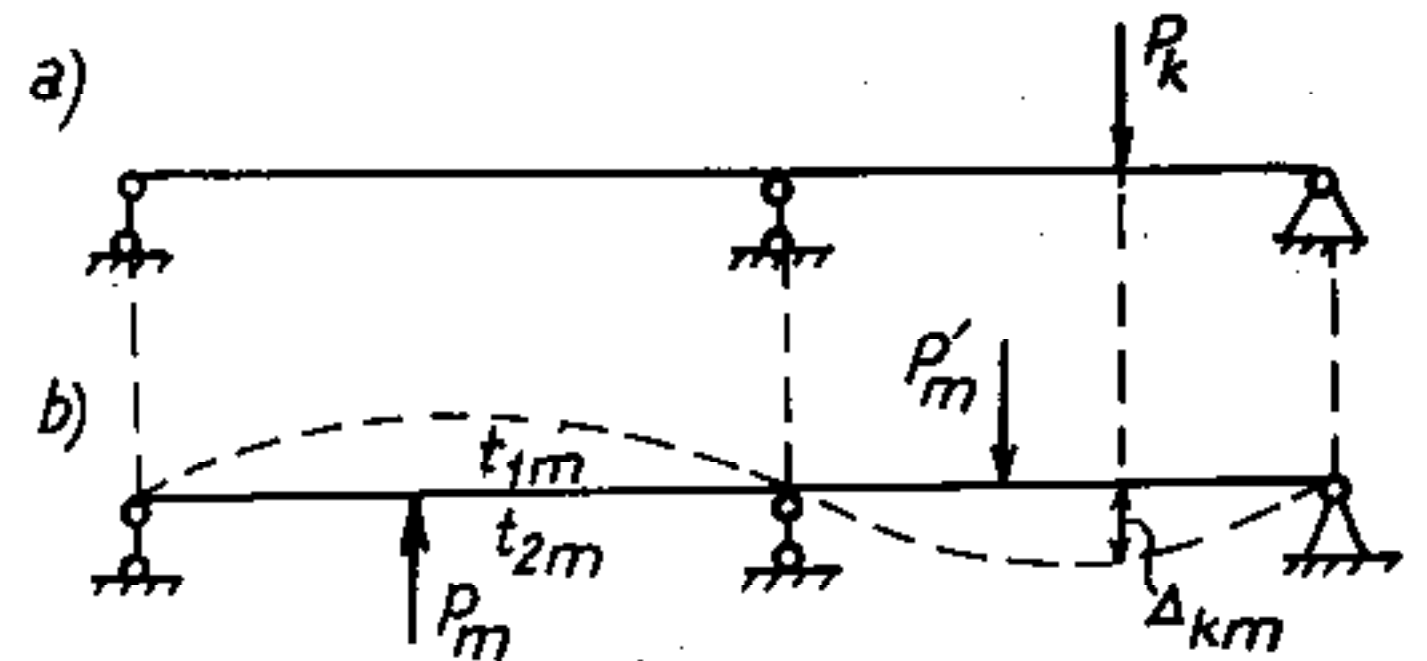
$$T_{km} = 0 . \quad (4.16)$$

Công thức (4.16) biểu thị công khả dĩ của các ngoại lực bằng không.

Trong trường hợp hệ biến dạng đàn hồi thì ngoài công khả dĩ của các ngoại lực ta còn phải kể đến công khả dĩ của các nội lực trên những biến dạng khả dĩ. Do đó, có thể phát biểu nguyên lý như sau:

*Nếu một hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ  $T_{km}$  của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng và công khả dĩ của các nội lực  $A^*_{km}$  trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không*

$$T_{km} + A^*_{km} = 0 , \quad \text{hay} \quad T_{km} = - A^*_{km} . \quad (4.17)$$



Hình 4.17

### C. Công khả dĩ của ngoại lực $T_{km}$

Theo khái niệm công khả dĩ trình bày ở trên ta có thể phát biểu định nghĩa mở rộng cho trường hợp nhiều lực như sau:

*Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái k trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái m bằng tổng các tích số giữa các ngoại lực tác dụng ở trạng thái k với những chuyển vị tương ứng ở trạng thái m*

$$T_{km} = \sum_i P_{ik} \Delta_{km}^i \quad (4.18)$$

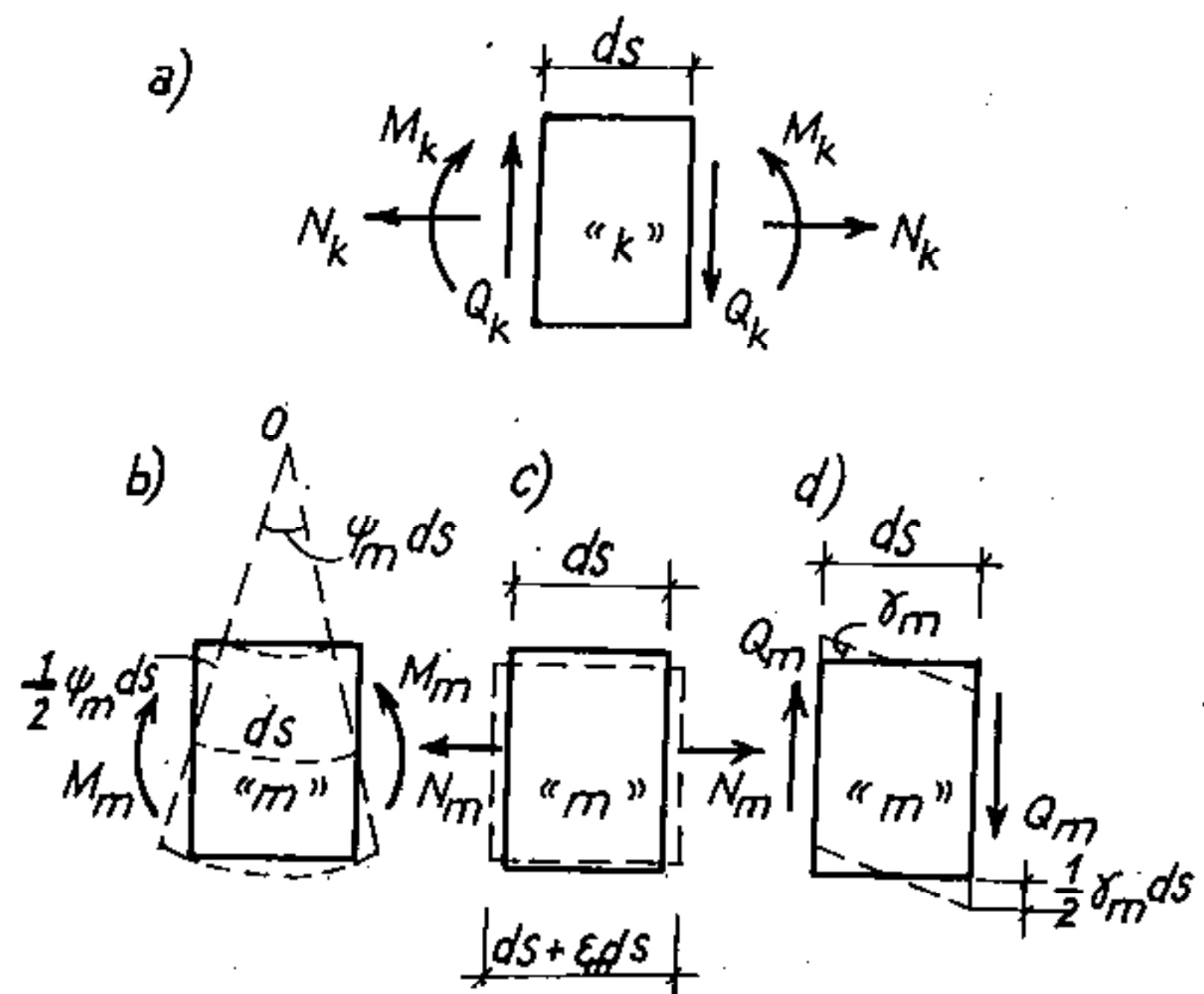
### D. Công khả dĩ của nội lực

Để xác định công khả dĩ của nội lực cho toàn hệ, cũng như ở mục 4.2 trước tiên ta tính công khả dĩ của một phân tố thanh.

- ◆ Ở trạng thái "k" ta tách một phân tố có chiều dài  $ds$ . Trong trường hợp tổng quát của bài toán phẳng tại các mặt cắt đầu trái và đầu phải của phân tố có các lực  $M_k, N_k, Q_k$  tác dụng. Các lực này là ngoại lực đối với phân tố đang xét, nhưng là nội lực đối với toàn hệ ở trạng thái "k" do nguyên nhân k gây ra (hình 4.18a).
- ◆ Ở trạng thái "m" tại vị trí tương ứng ta cũng tách phân tố có chiều dài  $ds$ . Ở trạng thái này phân tố  $ds$  có thể có những biến dạng sau:

#### 1. Biến dạng do các nội lực $M_m, N_m, Q_m$

- Hai tiết diện ở hai đầu phân tố bị xoay tạo thành góc  $\psi_m ds$  (hình 4.18b).
- Phân tố bị dãn dài dọc trục một đoạn  $\epsilon_m ds$  (hình 4.18c).
- Hai tiết diện ở hai đầu phân tố bị trượt một góc  $\gamma_m^{tb} ds$  (hình 4.18d).



Hình 4.18

Vì biến dạng của hệ là đàn hồi tuyến tính cho nên theo định luật Hooke (xem 4.2c), ta có:

$$\psi_m = \frac{M_m}{EI}; \quad \varepsilon_m = \frac{N_m}{EA}; \quad \gamma_m^{tb} = \nu \frac{Q_m}{GA}. \quad (a)$$

## 2. Biến dạng do sự thay đổi nhiệt độ

Gọi  $t_{1m}$  và  $t_{2m}$  là sự thay đổi nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới của thanh. Nếu chấp nhận quy luật biến thiên của nhiệt độ theo chiều cao tiết diện là luật bậc nhất thì biểu đồ biến thiên nhiệt độ có dạng đường thẳng như trên hình 4.19a.

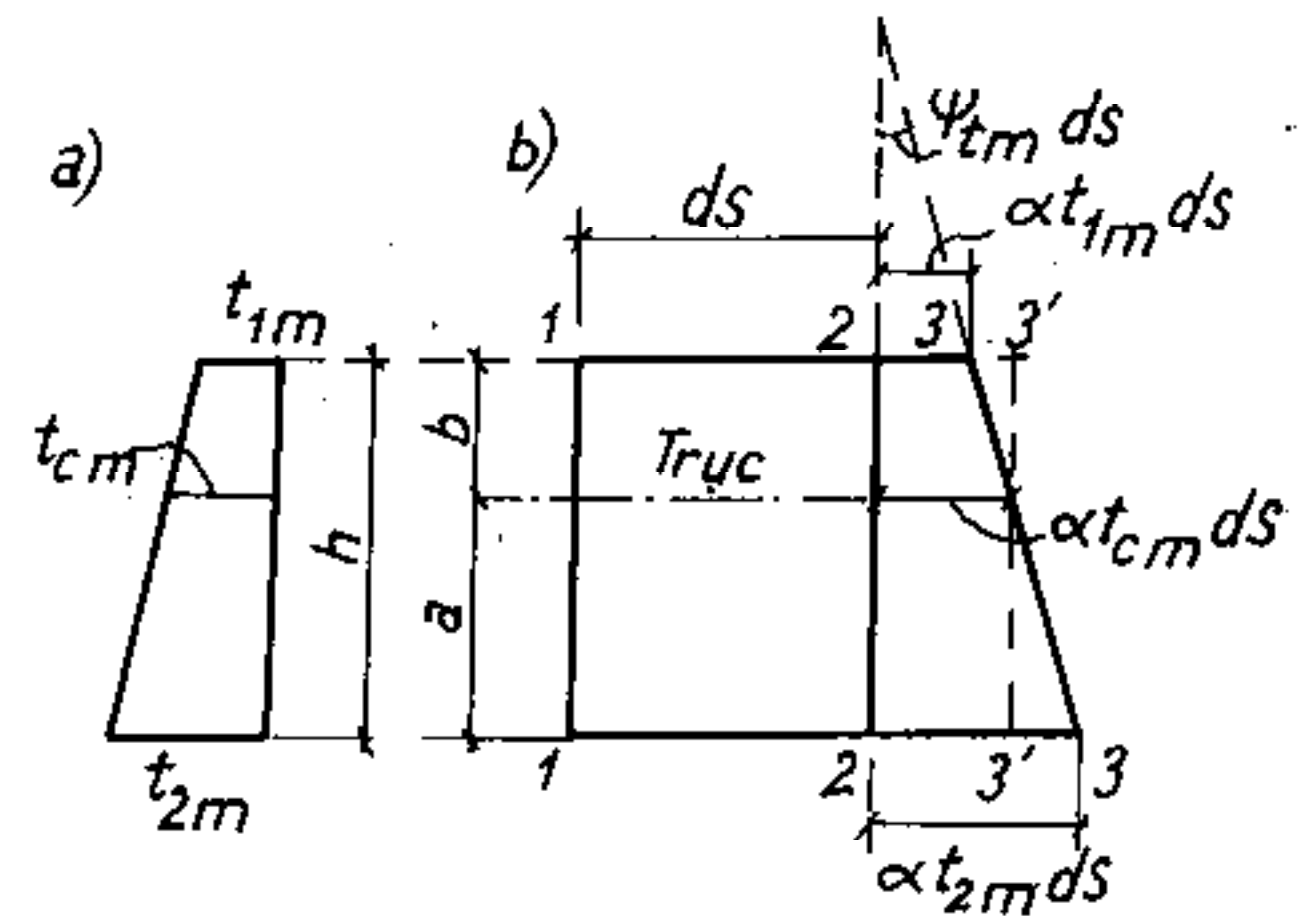
Từ đó ta dễ dàng xác định được độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh:

$$t_{cm} = \frac{at_{1m} + bt_{2m}}{h}$$

Nếu  $a = b = h/2$ ; ta có:

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2}$$

Để lập các công thức ta giả thiết  $t_{1m} > 0$  và  $t_{2m} > t_{1m}$ ; tiết diện 1-1 ở đầu trái của phân tố là cố định.



Hình 4.19

Gọi  $\alpha$  là hệ số dẫn nở vì nhiệt của vật liệu ta có: thớ trên của phân tố sẽ giãn dài bằng  $\alpha t_{1m} ds$ , trục phân tố (thớ trung hòa) sẽ giãn dài là  $\alpha t_{cm} ds$  và thớ dưới phân tố sẽ giãn dài là  $\alpha t_{2m} ds$  (hình 4.19b). Như vậy phân tố có hai thành phần biến dạng vì nhiệt như sau:

- Biến dạng dài dọc theo trục do nhiệt độ  $t_{cm}$  gây ra:

$$\varepsilon_{im} ds = \alpha t_{cm} ds. \quad (b)$$

- Biến dạng xoay giữa hai tiết diện đầu trái và đầu phải:

$$\psi_{tm} ds = \frac{\alpha t_{2m} ds - \alpha t_{1m} ds}{h} = \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds. \quad (c)$$

Vậy công khả dĩ phân tố của các lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" bằng

$$dT_{km} = \frac{1}{2} M_k \psi_m ds + \frac{1}{2} M_k \psi_m ds + \frac{1}{2} N_k \varepsilon_m ds + \frac{1}{2} N_k \varepsilon_m ds + \frac{1}{2} Q_k \gamma_m^{tb} ds + \frac{1}{2} Q_k \gamma_m^{tb} ds + M_k \psi_{tm} ds + N_k \varepsilon_{im} ds,$$

hay

$$dT_{km} = M_k \psi_m ds + N_k \varepsilon_m ds + Q_k \gamma_m^{tb} ds + M_k \psi_{tm} ds + N_k \varepsilon_{im} ds.$$

Theo (4.17) ta có  $dT_{km} = -dA^*_{km}$ .



Do đó:

$$dA^*_{km} = -dT_{km} = -[M_k \psi_m ds + N_k \varepsilon_m ds + Q_k \gamma_m^{tb} ds + M_k \psi_{tm} ds + N_k \varepsilon_{tm} ds].$$

Trên toàn hệ, công khả dĩ của nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" bằng

$$A^*_{km} = -[\sum \int M_k \psi_m ds + \sum \int N_k \varepsilon_m ds + \sum \int Q_k \gamma_m^{tb} ds + \sum \int M_k \psi_{tm} ds + \sum \int N_k \varepsilon_{tm} ds].$$

Thay (a), (b), (c) vào biểu thức công nội lực, ta có

$$A^*_{km} = -[\sum \int \frac{M_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{Q_k Q_m}{GA} ds + \sum \int M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int N_k \alpha t_{cm} ds]. \quad (4.19)$$

### E. Công thức công khả dĩ

Thay (4.18) và (4.19) vào (4.17), ta có:

$$\sum_i P_{ik} \Delta_{km} = \sum \int \frac{M_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{Q_k Q_m}{GA} ds + \sum \int M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int N_k \alpha t_{cm} ds. \quad (4.20)$$

Công thức (4.20) biểu thị sự cân bằng giữa công khả dĩ của các ngoại lực tác dụng trên hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" với công khả dĩ của nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

Dưới đây ta sẽ vận dụng công thức này để thiết lập công thức chuyển vị.

**Chú thích:**

- ❖ Công thức này được áp dụng cho các hệ đàn hồi tuyến tính gồm những thanh thẳng hoặc những thanh cong có độ cong nhỏ (xem 4.2c).
- ❖ Dấu tích phân trong công thức trên cần hiểu là tích phân định hạn, ta cần lấy tích phân trên từng đoạn thanh trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng ở vế phải áp dụng cho các đoạn thanh trong hệ. Dấu tổng ở vế trái lấy theo số lực ở trạng thái "k".

## 4.5. Các định lý tương hỗ trong hệ đàn hồi tuyến tính

Ta sẽ chứng minh bốn định lý tương hỗ để phục vụ cho việc nghiên cứu các nội dung sau này.

### A. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực

Định lý này do E. Betti đề xuất vào năm 1872.

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính tương ứng với hai trạng thái: ở trạng thái "m" hệ chịu các ngoại lực  $P_{jm}$ ; ở trạng thái "k" hệ chịu các ngoại lực  $P_{ik}$ . Theo công thức công khả dĩ (4.20) ta có:

- ♦ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "m" trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k":

$$\sum_j P_{jm} \Delta_{mk} = \sum \int \frac{M_m M_k}{EI} ds + \sum \int \frac{N_m N_k}{EA} ds + \sum \int_V \frac{Q_m Q_k}{GA} ds. \quad (a)$$

- ♦ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "k" trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m":

$$\sum_i P_{ik} \Delta_{km} = \sum \int \frac{M_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{Q_k Q_m}{GA} ds. \quad (b)$$

So sánh (a) và (b) ta có:

$$\sum_j P_{jm} \Delta_{mk} = \sum_i P_{ik} \Delta_{km} \quad (4.21)$$

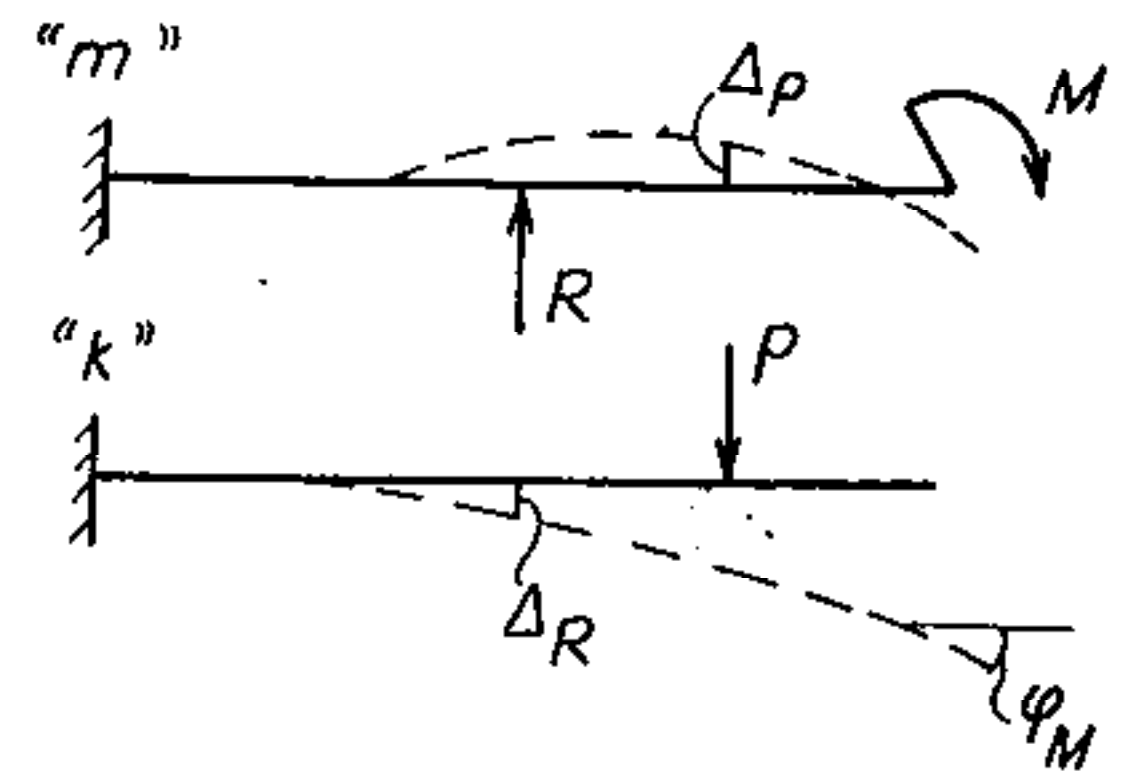
Vậy, trong hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của các ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k" tương hỗ bằng công khả dĩ của các ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

Cần hiểu khái niệm *tương hỗ* như sau:

- ♦ Hai trạng thái "m" và "k" phải xảy ra trên cùng một hệ.
- ♦ Chuyển dời ở trạng thái này phải có vị trí và phương tương ứng với vị trí và phương của lực ở trạng thái kia.

Ví dụ đối với hệ cho trên hình 4.20:

- Công khả dĩ của các lực ở trạng thái "m" trên những chuyển dời ở trạng thái "k" là  $R\Delta_R + M\varphi_M$ .
- Công khả dĩ của các lực ở trạng thái "k" trên những chuyển dời ở trạng thái "m" là  $P\Delta_P$ .



Hình 4.20

Theo định lý E. Betti, ta có  $R\Delta_R + M\varphi_M = P\Delta_P$ .

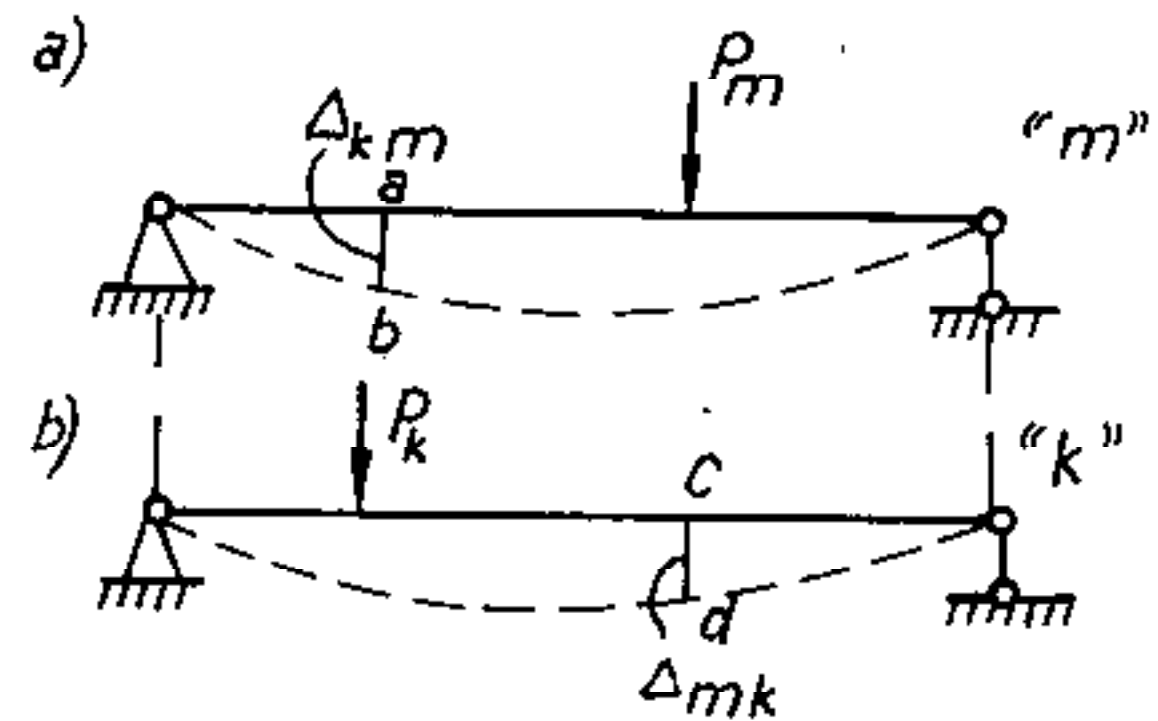
Dưới đây ta sẽ vận dụng định lý E. Betti để chứng minh các định lý khác.

## B. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị

Định lý này do J. Maxwell đề xuất năm 1864.

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái (hình 4.21):

- ◆ Trạng thái "m", có một lực (lực tập trung hoặc mômen tập trung)  $P_m$  tác dụng.
- ◆ Trạng thái "k", có một lực (lực tập trung hoặc mômen tập trung)  $P_k$  tác dụng.



Hình 4.21

Theo định lý Betti ta có:

$$P_m \Delta_{mk} = P_k \Delta_{km}$$

hay  $\Delta_{mk}/P_k = \Delta_{km}/P_m$

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$\Delta_{mk}/P_k = \delta_{mk}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do lực  $P_k$  bằng đơn vị gây ra, gọi là *chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do lực  $P_k$  gây ra*.

$\Delta_{km}/P_m = \delta_{km}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do lực  $P_m$  bằng đơn vị gây ra, gọi là *chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do lực  $P_m$  gây ra*.

Do đó ta có

$$\boxed{\delta_{mk} = \delta_{km}} \quad (4.22)$$

Như vậy, trong hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do lực  $P_k$  gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do lực  $P_m$  gây ra.

Định lý này được áp dụng trong phương pháp lực khi tính hệ siêu tĩnh.

Từ định nghĩa trên ta suy ra thứ nguyên (TN) của chuyển vị đơn vị:

$$TN \text{ của } \delta_{mk} = \frac{TN \text{ của } \Delta_{mk}}{TN \text{ của lực } P_k}$$

Cần hiểu chuyển vị đơn vị là chuyển vị do nguyên nhân bằng đơn vị gây ra chứ không phải bản thân nó bằng đơn vị.

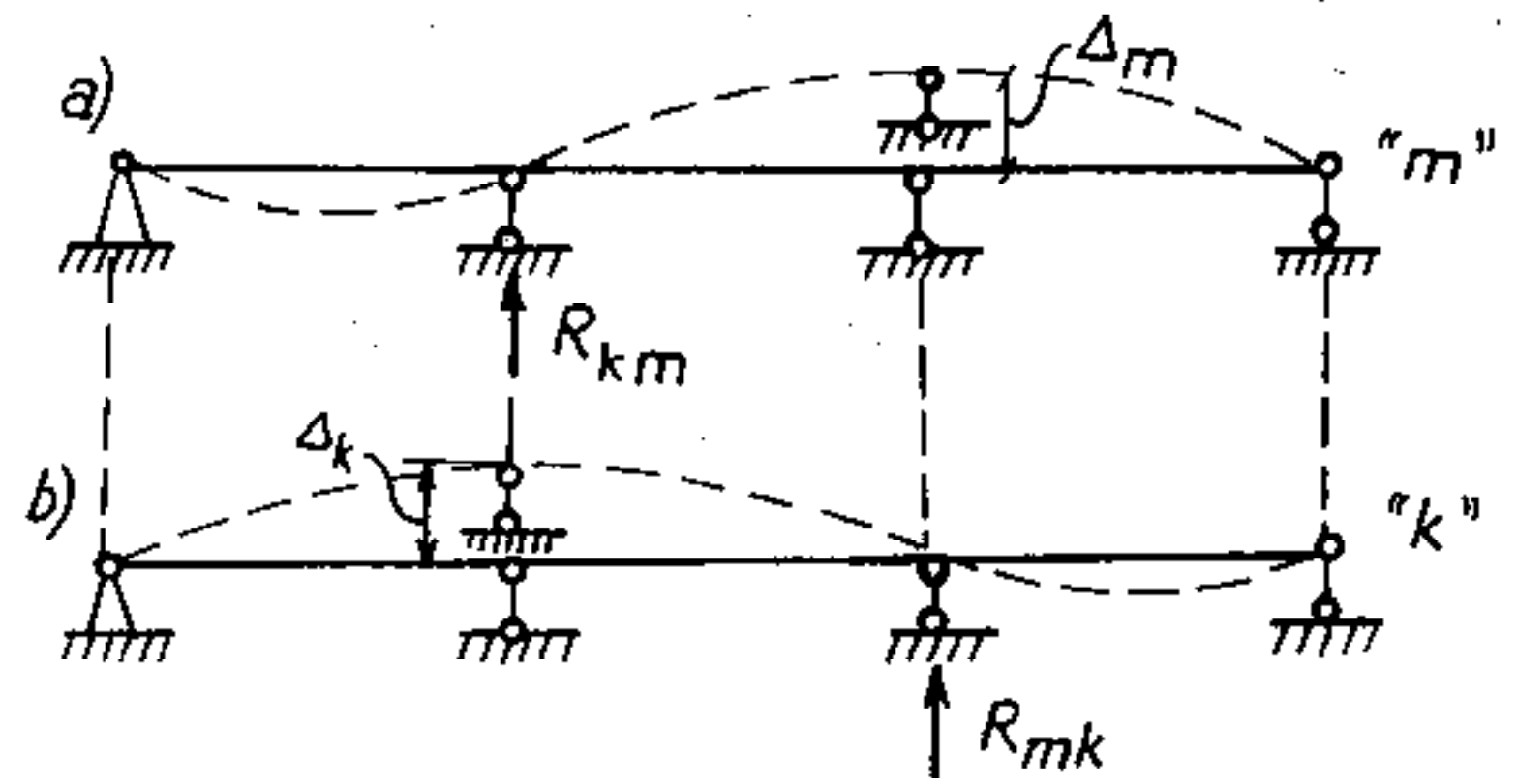
Có thể hiểu định lý một cách cụ thể hơn như sau: xét một hệ ở hai trạng thái, nếu trong mỗi trạng thái chỉ đặt một lực bằng đơn vị thì các chuyển vị theo phương của lực này do lực kia gây ra sẽ bằng nhau. Đối với hệ trên hình 4.21, khi  $P_m = 1$  và  $P_k = 1$  thì  $ab = cd$ .

### C. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị

Định lý này do L. Rayleigh (1842-1919) đề xuất năm 1875.

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính tương ứng với hai trạng thái (hình 4.22):

- ◆ Trạng thái "m", có một liên kết m của hệ chuyển vị cưỡng bức  $\Delta_m$ .
- ◆ Trạng thái "k", có một liên kết k của hệ chuyển vị cưỡng bức  $\Delta_k$ .



Hình 4.22

Khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức, trong các liên kết sẽ phát sinh phản lực.

Gọi:  $R_{mk}$  – phản lực tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức  $\Delta_k$  gây ra;  
 $R_{km}$  – phản lực tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức  $\Delta_m$  gây ra.

Các phản lực đó chính là các ngoại lực, áp dụng định lý Betti ta có:

$$R_{mk} \cdot \Delta_m = R_{km} \cdot \Delta_k,$$

hay

$$R_{mk} / \Delta_k = R_{km} / \Delta_m.$$

Ta thấy:

$R_{mk} / \Delta_k = r_{mk}$  là phản lực tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra; gọi là *phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra*.

$R_{km} / \Delta_m = r_{km}$  là phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m gây ra; gọi là *phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m gây ra*.

Do đó, ta có:

$$r_{mk} = r_{km}.$$

(4.23)

Như vậy, trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m gây ra.

Định lý này được áp dụng trong phương pháp chuyển vị khi tính hệ siêu động.

Thứ nguyên của phản lực đơn vị:

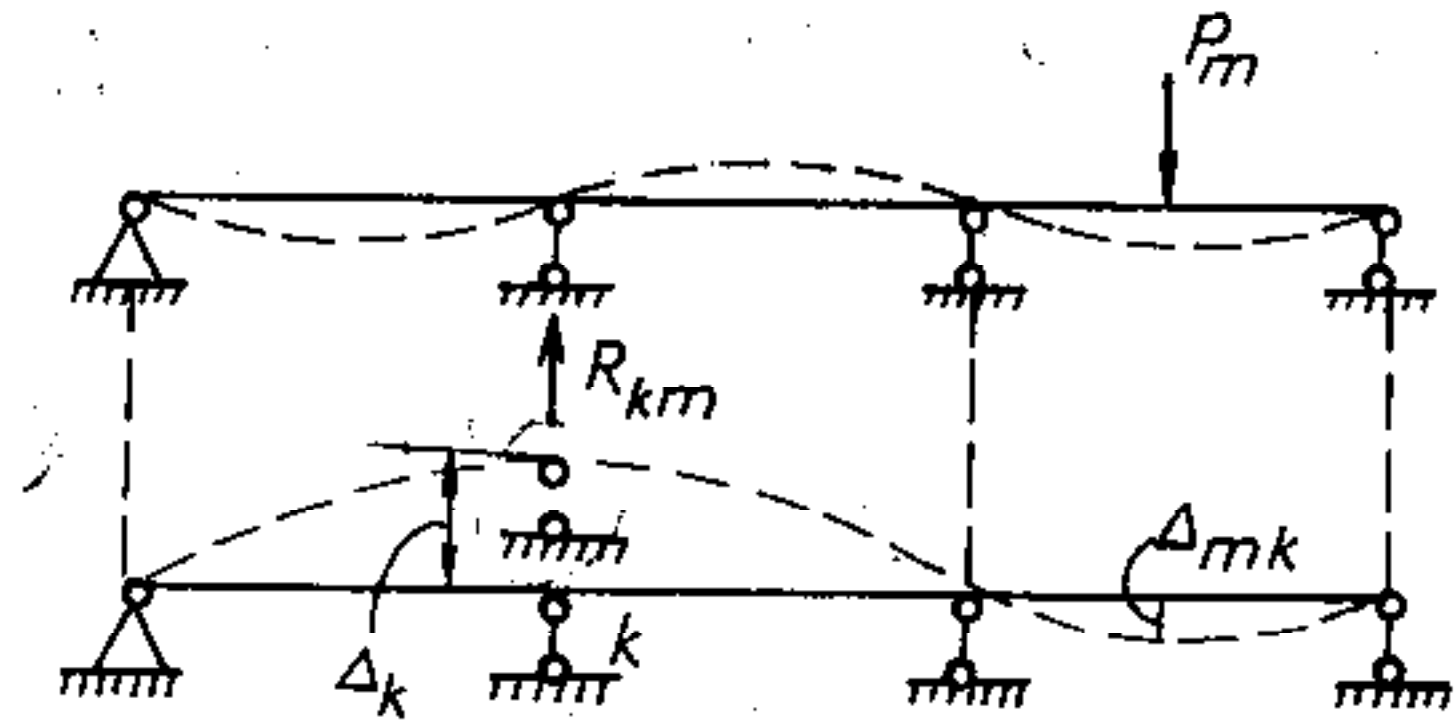
$$TN \text{ của } r_{mk} = \frac{TN \text{ của } R_{mk}}{TN \text{ của } \Delta_k}.$$

#### D. Định lý tương hỗ về chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị

Định lý này do A. A. Gvozđiev đề xuất năm 1927.

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính tương ứng với hai trạng thái (hình 4.23):

- ◆ Trạng thái "m", hệ chịu một lực  $P_m$ .
- ◆ Trạng thái "k", có một liên kết k của hệ chuyển vị cường bức  $\Delta_k$ .



Hình 4.23

Gọi:  $R_{km}$  – phản lực tại liên kết k có chuyển vị cường bức  $\Delta_k$ , do lực  $P_m$  gây ra ở trạng thái "m";

$\Delta_{mk}$  – chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực  $P_m$ , do chuyển vị cường bức  $\Delta_k$  tại liên kết k gây ra ở trạng thái "k".

Trong trường hợp này ta thấy công khả dĩ của các phản lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" bằng không, vì các chuyển vị ở trạng thái "m" theo phương của các phản lực ở trạng thái "k" bằng không. Do đó, theo định lý Betti ta có:

$$R_{km} \cdot \Delta_k + P_m \cdot \Delta_{mk} = 0,$$

hay:

$$R_{km}/P_m = -\Delta_{mk}/\Delta_k.$$

Ta thấy:

$R_{km}/P_m = \dot{r}_{km}$  là phản lực tại liên kết k do lực  $P_m$  bằng đơn vị gây ra; gọi là *phản lực đơn vị tại liên kết k do lực  $P_m$  gây ra* (dấu chấm trên ký hiệu  $\dot{r}_{km}$  biểu thị phản lực này do lực gây ra để phân biệt với  $r_{km}$  là phản lực do chuyển vị cường bức gây ra).

$$TN \text{ của } \dot{r}_{km} = \frac{TN \text{ của } R_{km}}{TN \text{ của lực } P_m}.$$

$\Delta_{mk}/\Delta_k = \dot{\delta}_{mk}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do chuyển vị cường bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra; gọi là *chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do chuyển vị cường bức tại liên kết k gây ra* (dấu chấm trên ký hiệu  $\dot{\delta}_{mk}$  biểu thị chuyển vị này do chuyển vị cường bức gây ra, để phân biệt với chuyển vị  $\delta_{mk}$  do lực gây ra).

$$TN \text{ của } \dot{\delta}_{mk} = \frac{TN \text{ của } \Delta_{mk}}{TN \text{ của } \Delta_k}.$$

Do đó ta có:

$$\dot{\delta}_{km} = -\dot{\delta}_{mk} \quad (4.24)$$

Như vậy, trong hệ đàn hồi tuyến tính phản lực đơn vị tại liên kết  $k$  do lực  $P_m$  gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $k$  gây ra nhưng trái dấu.

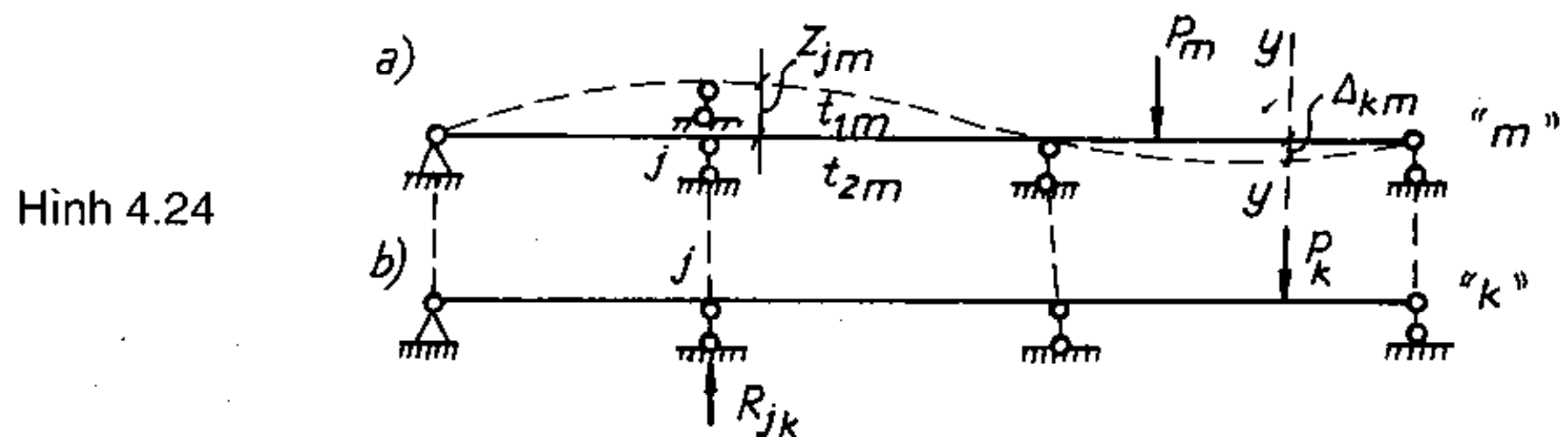
Định lý này còn được gọi là định lý Rayleigh thứ hai. Định lý được áp dụng trong phương pháp hỗn hợp khi tính các hệ siêu tĩnh.

## 4.6. Công thức tổng quát của chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính

(Công thức Maxwell-Morh, 1874)

Ta áp dụng công thức công khả dĩ (4.20) để thiết lập công thức tổng quát của chuyển vị trong hệ đàn hồi tuyến tính.

Xét hệ thanh bất kỳ (tĩnh định hoặc siêu tĩnh), đồng thời chịu tác dụng của các nguyên nhân sau: tải trọng  $P_m$ ; chuyển vị cưỡng bức  $Z_m$  tại các liên kết tựa; sự thay đổi nhiệt độ  $t_{2m}$ ,  $t_{1m}$ . Gọi trạng thái này của hệ là trạng thái thực "m". Hệ bị biến dạng theo đường đứt nét như trên hình 4.24a.



Yêu cầu xác định chuyển vị tại tiết diện  $k$  nào đó trên hệ. Tại tiết diện  $k$  có thể có chuyển vị thẳng được phân tích thành hai thành phần theo hai phương bất kỳ và chuyển vị xoay, được ký hiệu chung là  $\Delta_{km}$ . Giả định cần tìm thành phần chuyển vị thẳng theo phương  $y-y$ .

Để thực hiện yêu cầu trên ta tưởng tượng tạo ra trên hệ đã cho một trạng thái khả dĩ (còn gọi là trạng thái giả tạo) "k" trong đó đặt lực  $P_k$  sao cho lực này sinh công khả dĩ trên chuyển vị  $\Delta_{km}$  cần tìm, nghĩa là:

❖ Nếu chuyển vị cần tìm là thành phần chuyển vị thẳng tại một tiết diện nào đó theo phương  $Y$  thì ở trạng thái khả dĩ "k" ta cần đặt lực  $P_k$  dưới dạng một lực tập trung tại tiết diện đó, có chiều chọn tùy ý theo phương  $Y$ .

- \* Nếu chuyển vị cần tìm là chuyển vị xoay tại một tiết diện nào đó thì ở trạng thái khả dĩ "k" ta cần đặt lực  $P_k$  dưới dạng một mômen tập trung tại tiết diện đó, có chiều chọn tùy ý.

Trên hình 4.24b là trạng thái khả dĩ "k" khi tìm thành phần chuyển vị thẳng tại k theo phương y-y.

Áp dụng công thức công khả dĩ của ngoại lực và nội lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị và biến dạng khả dĩ ở trạng thái "m" ta có:

$$P_k \Delta_{km} + \sum_j R_{jk} Z_{jm} = \sum \int \frac{M_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{Q_k Q_m}{GA} ds + \sum \int M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int N_k \alpha t_{cm} ds$$

Chia cả hai vế của biểu thức này cho  $P_k$  đồng thời ký hiệu:

$$\bar{M}_k = \frac{M_k}{P_k}; \quad \bar{N}_k = \frac{N_k}{P_k}; \quad \bar{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k}; \quad \bar{R}_{jk} = \frac{R_{jk}}{P_k};$$

trong đó:

$\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$  - nội lực do lực  $P_k = 1$  gây ra trong hệ ở trạng thái "k";

$\bar{R}_{jk}$  - phản lực tại liên kết thứ j do lực  $P_k = 1$  gây ra ở trạng thái "k".

Ta được công thức tổng quát của chuyển vị trong hệ đàn hồi tuyến tính:

$$\Delta_{km} = -\sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm} + \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k Q_m}{GA} ds + \sum \int \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{N}_k \alpha t_{cm} ds \quad (4.25)$$

Khi sử dụng công thức cần chú ý:

1) Chiều của  $P_k = 1$  có thể chọn tùy ý. Nếu kết quả của chuyển vị tìm được mang dấu dương thì chuyển vị cần tìm hướng theo chiều  $P_k = 1$  đã chọn. Nếu kết quả mang dấu âm thì ngược lại.

2)  $Z_{jm}$  - chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ j ở trạng thái "m"

$\bar{R}_{jk}$  - phản lực tại liên kết thứ j do  $P_k = 1$  gây ra ở trạng thái "k".

Tích  $\bar{R}_{jk} Z_{jm}$  dương khi  $\bar{R}_{jk}$  cùng chiều với  $Z_{jm}$ .

Dấu tổng của số hạng thứ nhất lấy theo j, tức là theo số liên kết có chuyển vị cưỡng bức.

3)  $M_m, N_m, Q_m$  - các biểu thức nội lực trong hệ ở trạng thái "m";



$\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$  - các biểu thức của nội lực trong hệ do  $P_k = 1$  gây ra ở trạng thái "k".

Trong các số hạng từ thứ hai đến thứ sáu, các tích phân là định hạn, lấy theo từng đoạn thanh trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng được áp dụng cho tất cả các đoạn thanh đã lấy tích phân.

- 4) Công thức này dùng để tính chuyển vị trong hệ thanh tĩnh định cứng như siêu tĩnh nếu biết được nội lực trong hệ ở trạng thái  $m$  và  $k$ .
- 5) Công thức (4.25) chỉ áp dụng cho trường hợp hệ gồm những thanh thẳng hoặc thanh cong có độ cong nhỏ (xem 4.2.c).

#### 4.7. Cách vận dụng công thức chuyển vị

Trong thực tế ta ít gặp trường hợp phải vận dụng toàn bộ công thức tổng quát của chuyển vị. Tùy theo từng trường hợp cụ thể chỉ cần vận dụng một vài số hạng của công thức. Dưới đây ta sẽ xét một số trường hợp cụ thể thường gặp.

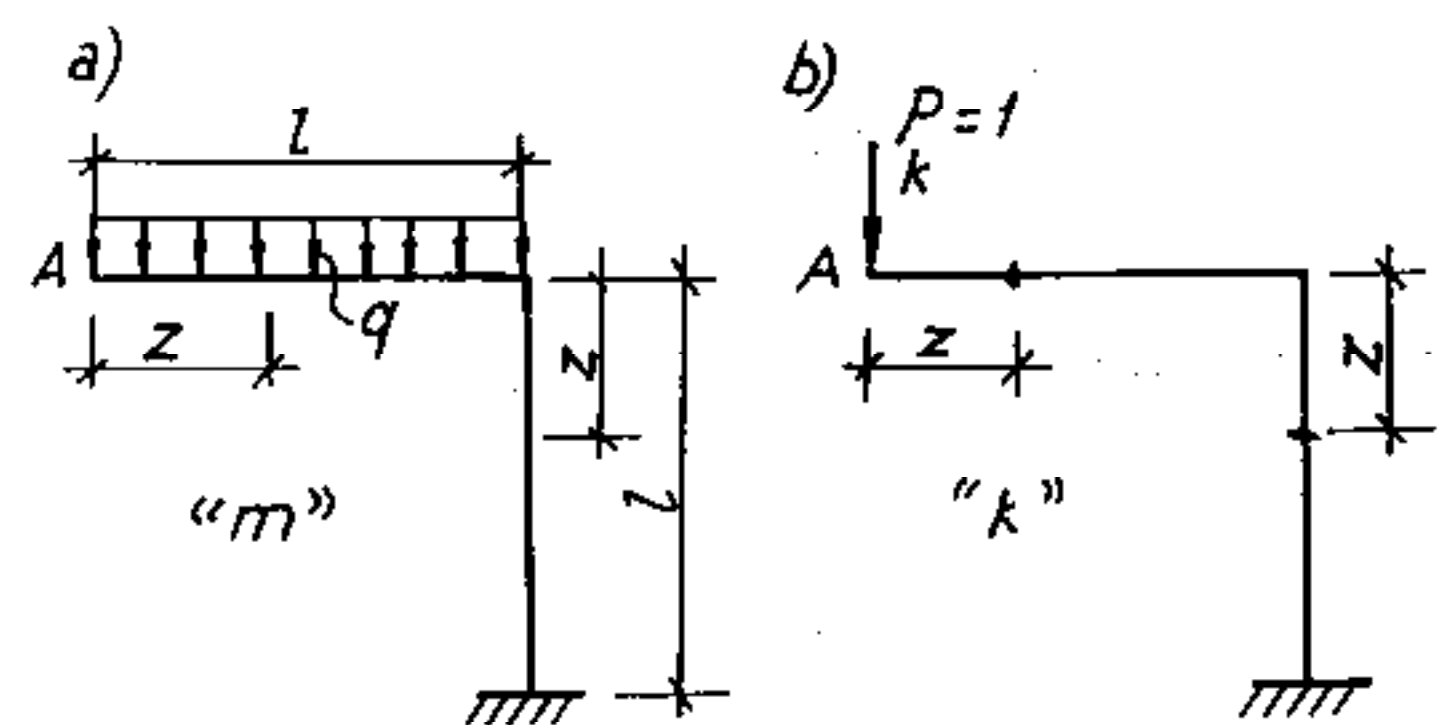
##### A. Trường hợp hệ dầm và khung chịu tải trọng

Kinh nghiệm tính toán các hệ dầm và khung cho ta thấy phần ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt thể hiện qua lực dọc và lực cắt đối với các chuyển vị thường nhỏ hơn rất nhiều so với phần ảnh hưởng của biến dạng uốn thể hiện qua mômen uốn, do đó thường có thể bỏ qua được. Lúc này công thức chuyển vị có dạng:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds. \quad (4.26)$$

**Ví dụ 4.5.** Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A của khung chịu tải trọng như trên hình 4.25. Tiết diện của các thanh ngang và đứng không đổi và có dạng hình chữ nhật với kích thước là  $b \times h$ .

Để thấy rõ ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt, trong ví dụ này ta tính chuyển vị có xét cả phần ảnh hưởng của chúng. Ta có:



Hình 4.25

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds + \sum \int \frac{\bar{Q}_k Q_m}{GA} ds.$$

Trạng thái "m" là trạng thái thực trên hình 4.25a. Theo yêu cầu của bài toán, ở trạng thái "k" ta đặt lực  $P_k = 1$  tại A và có phương thẳng đứng (chiều chọn tùy

ý, ở đây hướng xuống dưới, hình 4.25b). Các nội lực ở trạng thái "m" và "k":

• Trong thanh ngang:  $M_m = -\frac{qz^2}{2}; \quad N_m = 0; \quad Q_m = -qz;$

$\bar{M}_k = -l.z; \quad \bar{N}_k = 0; \quad \bar{Q}_k = -1.$

• Trong thanh đứng:  $M_m = -\frac{ql^2}{2}; \quad N_m = -ql; \quad Q_m = 0;$

$\bar{M}_k = -l.l; \quad \bar{N}_k = -1; \quad \bar{Q}_k = 0.$

Thay các đại lượng này vào công thức chuyển vị, ta được:

$$\Delta_{km} = \int_0^l (-z) \left( -\frac{qz^2}{2} \right) \frac{dz}{EI} + \int_0^l (-l) \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \frac{dz}{EI} + \int_0^l (-1)(-ql) \frac{dz}{EA} + \int_0^l \nu(-1)(-qz) \frac{dz}{GA},$$

$$\Delta_{km} = \frac{5ql^4}{8EI} \left[ 1 + \frac{8I}{5l^2A} + \nu \frac{4EI}{5l^2GA} \right] = \frac{5ql^4}{8EI} (1 + \eta),$$

trong đó  $\eta$  là hệ số kể đến ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt so với ảnh hưởng của mômen uốn.

Vì tiết diện là chữ nhật nên  $\nu = 1,2$  và  $\frac{I}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$ .

Ngoài ra ta có liên hệ:  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ , với  $\mu$  là hệ số biến dạng ngang Poisson.

Do đó: 
$$\eta = \frac{8}{5} \frac{h^2}{12l^2} + \frac{4}{5} 1,2 \frac{h^2}{12l^2} 2(1+\mu) = \frac{2}{15} \left[ 1 + 1,2(1+\mu) \right] \frac{h^2}{l^2}.$$

Ta thấy trị số  $\eta$  dùng để đánh giá ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt phụ thuộc tỷ số  $h/l$ . Nếu  $l \gg h$  thì  $\eta \approx 0$  tức là ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt không đáng kể. Nếu cho  $l = 4h$  và  $\mu = 1/3$  thì

$$\eta = \frac{2}{15} \left[ 1 + 1,2 \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \right] \frac{1}{16} \approx 0,022 = 2,2 \%$$

Ta thấy trong trường hợp này, ảnh hưởng của  $N$  và  $Q$  so với ảnh hưởng của  $M$  là nhỏ, không đáng kể và có thể bỏ qua được.

**Ví dụ 4.6.** Xác định góc xoay tại tiết diện A của dầm công xôn có tiết diện chữ nhật thay đổi như trên hình 4.26a.

Ta xác định chuyển vị góc theo công thức (4.26):

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds = \int_0^l \frac{\bar{M}_k M_m}{EI(z)} dz.$$

Xác định quy luật biến thiên của  $I$ , ta có:  $I(z) = bh^3(z)/12$ .

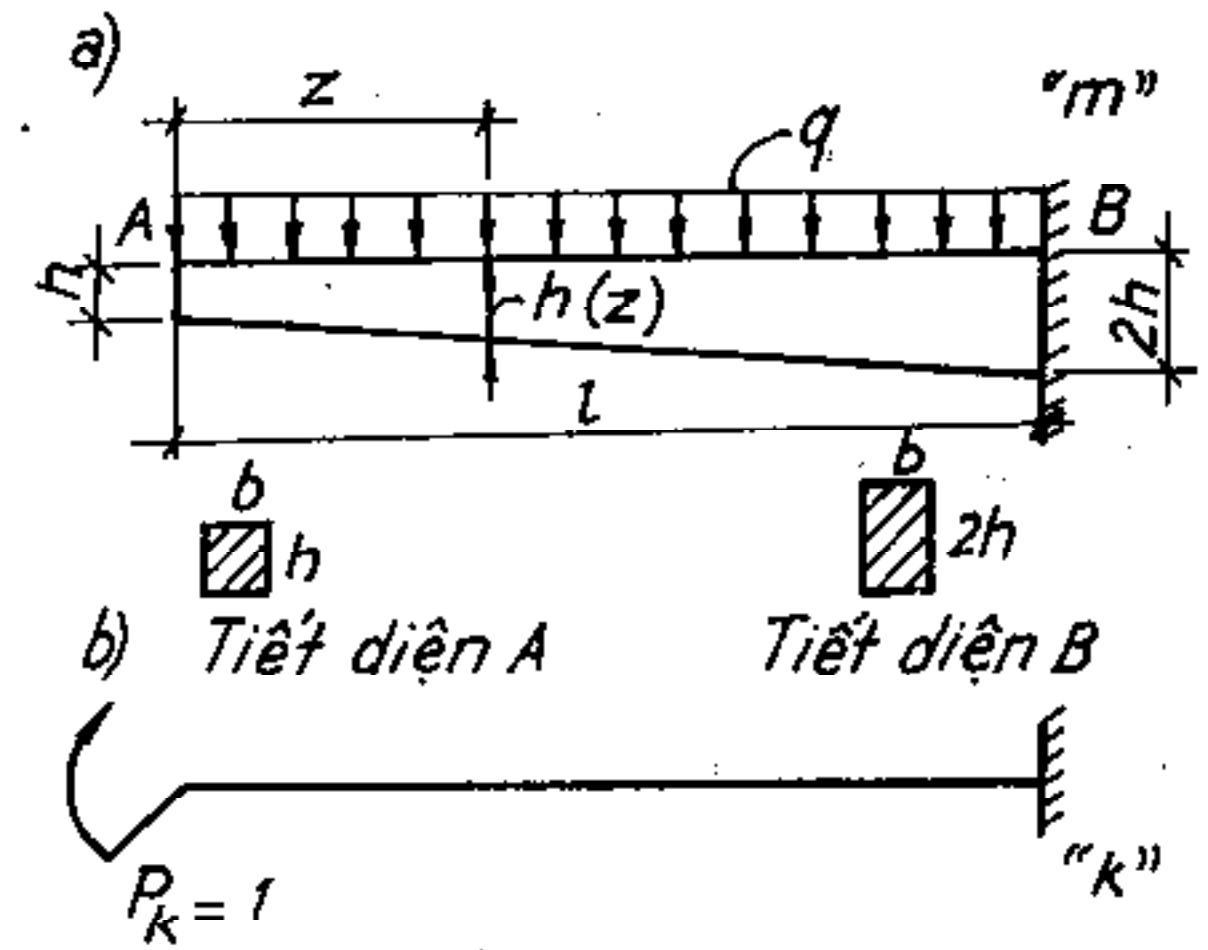
Theo luật đồng dạng:  $h(z) = h \left( 1 + \frac{z}{l} \right)$

$$\text{nên } I(z) = \frac{bh^3}{12} \frac{(l+z)^3}{l^3} = I_o \frac{(l+z)^3}{l^3},$$

với  $I_o = \frac{bh^3}{12}$  là mômen quán tính tại tiết diện A.

Nội lực ở trạng thái "m":

$$M_m(z) = -qz^2/2.$$



Hình 4.26

Tạo trạng thái "k" và xác định nội lực ở trạng thái "k". Vì cần tìm góc xoay tại A, nên trong trường hợp này  $P_k$  là một mômen tập trung đặt tại A. Chọn chiều của mômen quay thuận chiều kim đồng hồ (hình 4.26b).

$$\bar{M}_k(z) = +1.$$

Thay các đại lượng này vào công thức chuyển vị ta có

$$\varphi_A = \Delta_{km} = \int_0^l l \left( -\frac{qz^2}{2} \right) \frac{l^3 dz}{EI_o(l+z)^3} = -\frac{ql^3}{2EI_o} \int_0^l \frac{z^2}{(l+z)^3} dz.$$

Sau khi lấy tích phân (xem cách lấy tích phân trong các Sổ tay toán học), ta được kết quả

$$\varphi_A = -\frac{ql^3}{2EI_o} \left[ \ln(l+z) + \frac{2l}{l+z} - \frac{l^2}{2(l+z)^2} \right]_0^l = -\frac{ql^3}{2EI_o} \cdot 0,0681 = -0,03405 \frac{ql^3}{EI_o}.$$

Kết quả mang dấu âm chứng tỏ góc xoay tại A quay ngược chiều với  $P_k$ . Cụ thể ở đây là quay ngược chiều kim đồng hồ.

**Ví dụ 4.7.** Xác định chuyển vị ngang tại đầu tự do của dầm cong trên hình 4.27a. Cho biết  $EI = const$ .

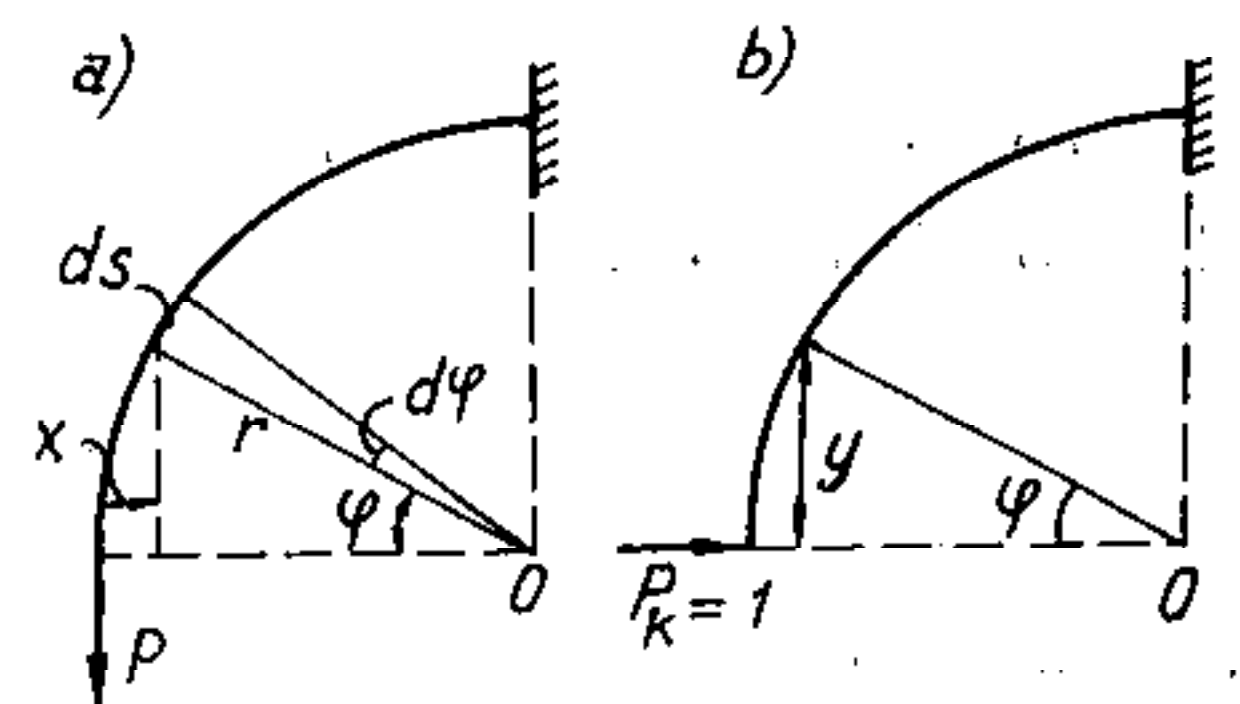
Vì bỏ qua ảnh hưởng của  $N$  và  $Q$  nên ta có thể xác định chuyển vị theo công thức (4.26).

Trạng thái "k" như trên hình 4.27b.

Nếu lấy biến số là góc  $\varphi$  thì:

• Nội lực ở trạng thái "m":  $M_m = -P \cdot x = -Pr(1 - \cos\varphi)$ .

• Nội lực ở trạng thái "k":  $\bar{M}_k = -l \cdot y = -r \sin\varphi$ .



Hình 4.27

Vi phân của chiều dài  $ds = r d\varphi$ .

Thay các đại lượng đó vào 4.26, ta được

$$\begin{aligned}\Delta_{km} &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{EI} (-r \sin\varphi) [-Pr(1 - \cos\varphi)] r d\varphi = \frac{Pr^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi(1 - \cos\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{Pr^3}{EI} \int_1^0 -(1 - \cos\varphi) d(\cos\varphi) = \frac{Pr^3}{2EI}.\end{aligned}$$

Kết quả mang dấu dương chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của  $P_k$  tức là hướng về bên phải.

### B. Trường hợp hệ dàn khớp chịu tải trọng

Như đã biết, trong dàn khớp chỉ tồn tại lực dọc còn  $M = Q = 0$ , nên:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds. \quad (4.27)$$

Trong thực tế, các đại lượng  $E$ ,  $A$  và lực dọc  $\bar{N}_k$  cũng như  $N_m$  thường không thay đổi trong từng thanh, do đó ta có thể đưa chúng ra ngoài dấu tích phân.

$$\Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{im}}{(EA)_i} \int_0^{l_i} ds,$$

suy ra

$$\Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{im}}{(EA)_i} l_i. \quad (4.28)$$

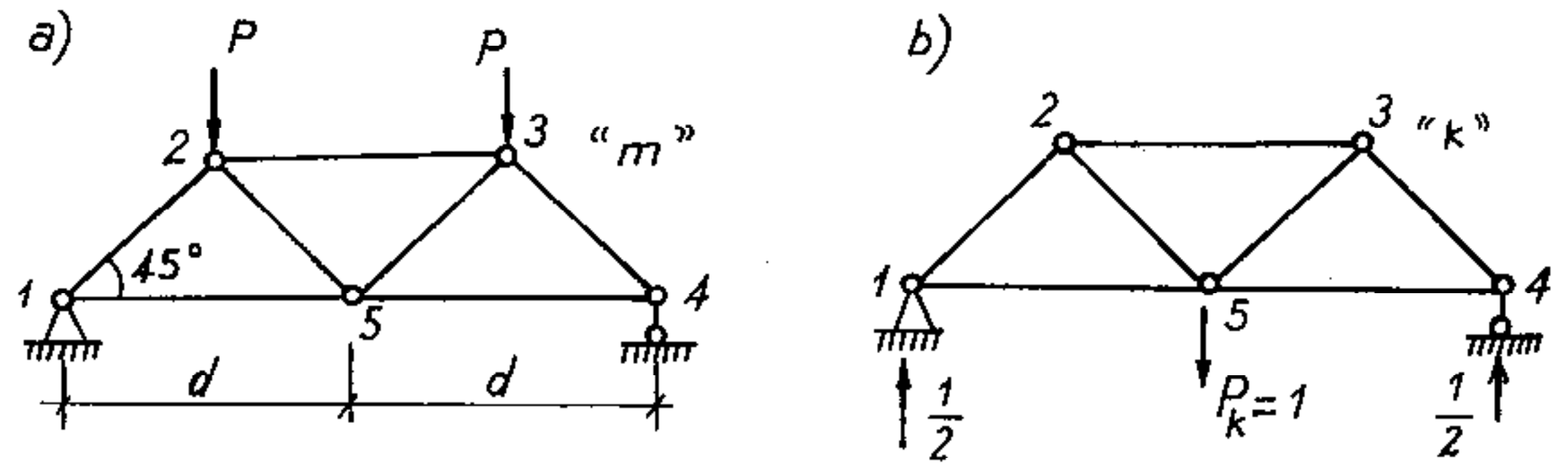
- Dấu tổng trong công thức áp dụng cho tất cả các thanh của dàn.

**Ví dụ 4.8.** Xác định chuyển vị đứng tại mắt 5 của dàn trên hình 4.28a. Cho biết  $EA = const$ .

Để cho thuận tiện, ta lập bảng tính chuyển vị trong dàn. Căn cứ vào công thức (4.28) ta chuẩn bị sẵn các số liệu cần thiết và ghi vào bảng 4.1. Thứ tự tính toán như sau:

- Xác định chiều dài của từng thanh và ghi kết quả vào bảng 4.1 (cột thứ hai).
- Xác định giá trị  $1/EA$  cho từng thanh và ghi vào cột thứ ba. Trong trường hợp này, các giá trị đó như nhau.
- Xác định lực dọc  $N_{im}$  trong từng thanh ở trạng thái "m" (ghi vào cột thứ tư) theo các phương pháp tách mắt hoặc mặt cắt đã biết.
- Tạo trạng thái "k" và xác định lực dọc  $\bar{N}_{ik}$  trong từng thanh, ghi vào cột thứ năm.

e) Tính các giá trị  $[\bar{N}_{ik} N_{im} l_i] / (EA)_i$  cho từng thanh bằng cách nhân các số liệu trong bốn cột: thứ hai, thứ ba, thứ tư và thứ năm với nhau. Ghi kết quả nhân vào cột thứ sáu rồi cộng các kết quả sẽ được chuyển vị cần tìm.



Hình 4.28

Bảng 4.1

Thanh	$l_i$	$1/(EA)_i$	$N_{im}$	$\bar{N}_{ik}$	$\bar{N}_{ik} N_{im} l_i / (EA)_i$
1-2	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$Pd\sqrt{2}/2EA$
2-3	$d$	$1/EA$	$-P$	$-1$	$Pd/EA$
3-4	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$Pd\sqrt{2}/2EA$
4-5	$d$	$1/EA$	$P$	$1/2$	$Pd/2EA$
5-1	$d$	$1/EA$	$P$	$1/2$	$Pd/2EA$
5-2	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$0$	$\sqrt{2}/2$	$0$
5-3	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$0$	$\sqrt{2}/2$	$0$

$$\sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{im} l_i}{(EA)_i} = \frac{Pd}{EA} (2 + \sqrt{2}).$$

Kết quả

$$\Delta_{km} = \frac{Pd}{EA} (2 + \sqrt{2}).$$

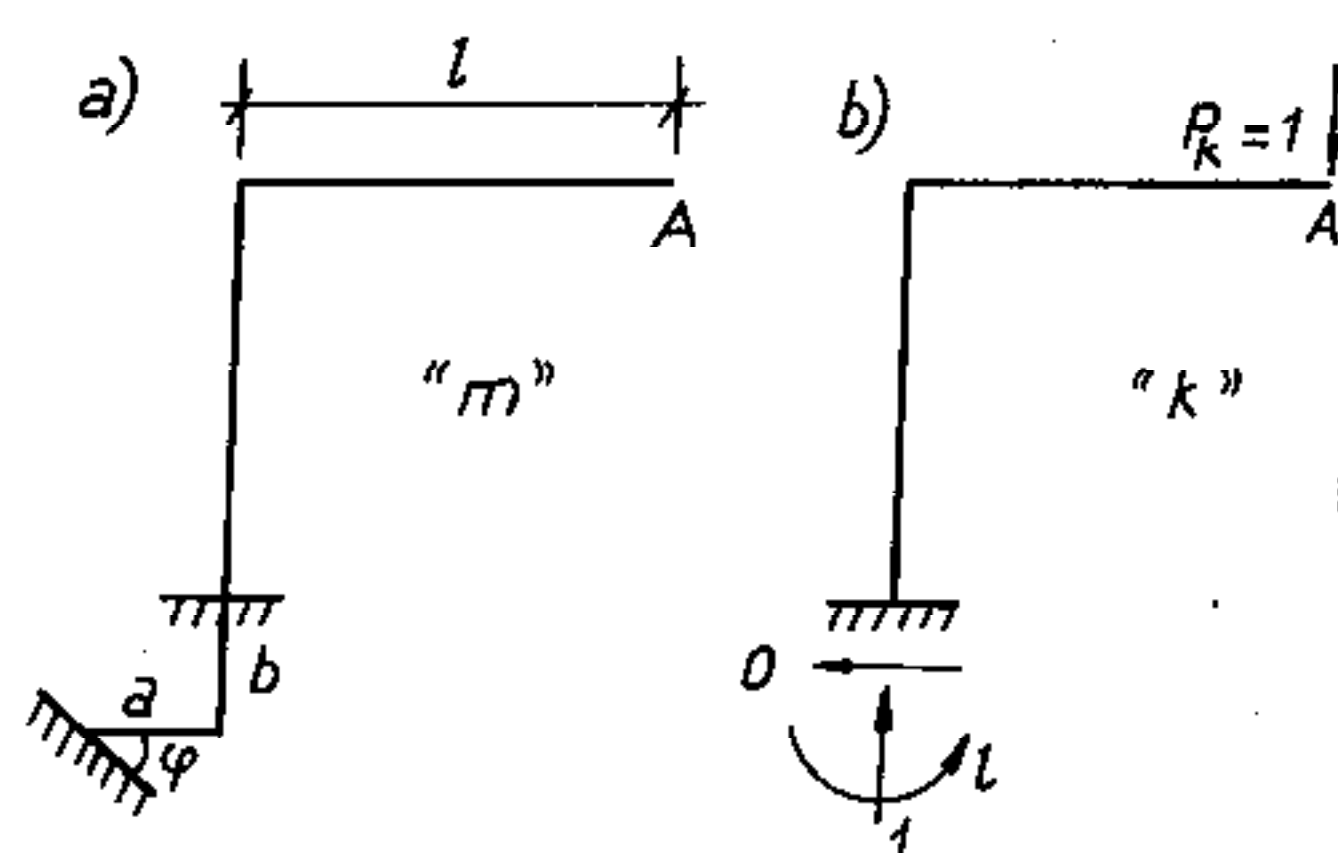
### C. Trường hợp hệ tĩnh định bất kỳ chịu chuyển vị cưỡng bức

Khi liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức, trong các hệ tĩnh định không phát sinh nội lực, do đó công thức chuyển vị sẽ có dạng

$$\Delta_{kZ} = - \sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm}. \quad (4.29)$$

**Ví dụ 4.9.** Xác định chuyển vị thẳng đứng tại đầu tự do của khung khi ngàm chịu chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang là  $a$ , theo phương thẳng đứng là  $b$  và xoay thuận chiều kim đồng hồ một góc bằng  $\varphi$  (hình 4.29a).

Để xác định chuyển vị này ta cần tạo trạng thái "k" (hình 4.29b) trong đó đặt lực  $P_k = 1$  tại đầu tự do, có phương thẳng đứng. Tiếp đó tìm các phản lực  $\bar{R}_{jk}$  tại các liên kết có chuyển vị cưỡng bức do  $P_k = 1$  gây ra. Giá trị của các phản lực này ghi trên hình 4.29b.



Hình 4.29

Áp dụng công thức (4.29), đồng thời chú ý là tích số của  $\bar{R}_{jk} Z_{jm}$  dương khi phản lực tại liên kết  $j$  ở trạng thái "k" cùng chiều với chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $j$  ở trạng thái "m", ta được

$$\Delta_{kz} = -(0.a - 1.b - l.\varphi) = b + l\varphi.$$

#### D. Trường hợp hệ tĩnh định bất kỳ chịu sự thay đổi nhiệt độ

Sự thay đổi nhiệt độ chỉ gây ra nội lực trong hệ siêu tĩnh mà không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định. Do đó ta có thể xác định chuyển vị trong hệ tĩnh định theo công thức sau

$$\Delta_{kt} = \sum \int \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{N}_k \alpha t_{cm} ds. \quad (4.30)$$

Trong những trường hợp khi:

- ◇ Nhiệt độ thay đổi như nhau theo chiều dài của từng đoạn thanh.
- ◇ Vật liệu trong từng đoạn thanh như nhau, nghĩa là  $\alpha = const$  trong từng đoạn thanh.
- ◇ Chiều cao  $h = const$  trong từng đoạn thanh.

Ta có thể đưa các đại lượng  $t_{cm}$ ,  $(t_{2m} - t_{1m})$ ,  $\alpha$  và  $h$  ra ngoài dấu tích phân

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \int \bar{M}_k ds + \sum \alpha t_{cm} \int \bar{N}_k ds.$$

Ta thấy các tích số  $\bar{M}_k ds$  và  $\bar{N}_k ds$  lần lượt là diện tích phân tố của biểu đồ mômen uốn và lực dọc nên:

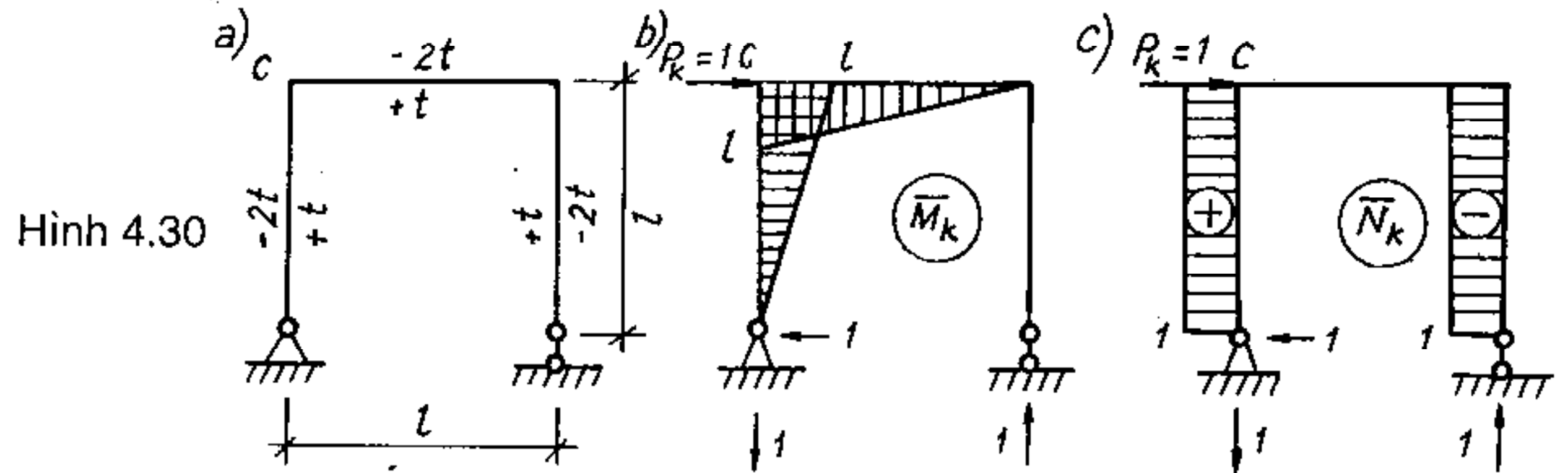
$$\int \bar{M}_k ds = \Omega(\bar{M}_k) - \text{diện tích biểu đồ mômen uốn trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k"}.$$

$$\int \bar{N}_k ds = \Omega(\bar{N}_k) - \text{diện tích biểu đồ lực dọc trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k"}.$$

Công thức sẽ có dạng

$$\Delta_{ki} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k). \quad (4.31)$$

**Ví dụ 4.10.** Xác định chuyển vị ngang của điểm C khi nhiệt độ ở trong khung biến đổi  $+t$  còn ở ngoài khung biến đổi  $-2t$  (hình 4.30a). Tiết diện chữ nhật có chiều cao  $h = \text{const}$ .



Để áp dụng công thức (4.31) ta cần chuẩn bị các số liệu sau:

- Xác định các giá trị  $t_{cm}$  và  $(t_{2m} - t_{1m})$ . Nếu đặt người quan sát đứng ở bên trong khung thì các giá trị này như nhau cho tất cả các thanh và bằng

$$t_{cm} = \frac{l}{2} (t_1 + t_2) = \frac{l}{2} (-2t + t) = -\frac{l}{2} t; \quad t_{2m} - t_{1m} = +t - (-2t) = +3t.$$

- Tạo trạng thái "k" và vẽ các biểu đồ nội lực. Biểu đồ  $\bar{M}_k$  như trên hình 4.30b (chỉ cần vẽ trong những đoạn thanh nào tồn tại  $t_{2m} - t_{1m}$ ). Biểu đồ  $\bar{N}_k$  như trên hình 4.30c (chỉ cần vẽ trong những đoạn thanh nào có  $t_{cm}$ ).

Áp dụng công thức (4.31):

$$\Delta_{ki} = \frac{\alpha}{h} 3t \frac{l \cdot l}{2} + \frac{\alpha}{h} 3t \frac{l \cdot l}{2} + \alpha \left(-\frac{l}{2}\right) (l \cdot l) + \alpha \left(-\frac{l}{2}\right) (-l \cdot l) = \frac{3\alpha t l^2}{h}.$$

Kết quả mang dấu cộng chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của lực  $P_k$  (hướng về bên phải).

### E. Trường hợp hệ dàn tĩnh định khi chiều dài các thanh chế tạo không chính xác

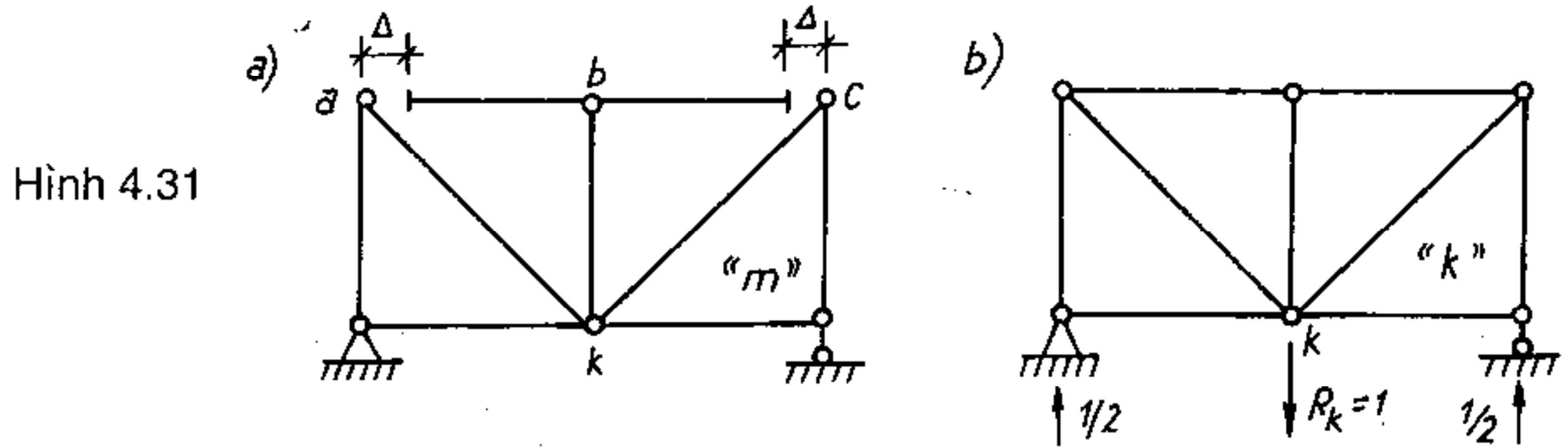
Khi lắp ráp các thanh chế tạo không chính xác vào hệ dàn, các mắt dàn sẽ chuyển vị. Bài toán có thể giải quyết tương tự như trường hợp hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ. Các thanh có chiều dài được chế tạo dài hơn chiều dài yêu cầu là  $\Delta$  được xem như chịu biến dạng vì nhiệt tương đương là  $\alpha t_c l = \Delta$ ; còn các thanh bị chế tạo hụt có thể xem như chịu biến dạng vì nhiệt tương đương là  $\alpha t_c l = -\Delta$  với  $l$  là chiều dài của thanh.



Một cách tổng quát, nếu gọi  $\Delta_i$  là độ dôi của thanh thứ  $i$  khi thanh được chế tạo dài hơn chiều dài yêu cầu thì sau khi áp dụng công thức (4.31) cho trường hợp này ta có:

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_{im}. \quad (4.32)$$

**Ví dụ 4.11.** Xác định độ võng tại  $k$  của dàn trên hình 4.31 nếu trong khi chế tạo, chiều dài của các thanh  $a-b$  và  $b-c$  bị hụt là  $\Delta$ .



Với bài toán đã cho, ta có:  $i = 2$ ;  $\Delta_{a-b} = \Delta_{b-c} = -\Delta$ . Trạng thái "k" được tạo ra như trên hình 4.39b. Sau khi tính toán ta được:

$$\bar{N}_{ab,k} = \bar{N}_{bc,k} = -\frac{l}{2}. \quad \text{Do đó} \quad \Delta_{k\Delta} = -\frac{l}{2}(-\Delta) - \frac{l}{2}(-\Delta) = \Delta.$$

*Chú thích:* Trong trường hợp hệ chịu nhiều nguyên nhân khác nhau ta có thể tính riêng biệt với từng nguyên nhân rồi cộng các kết quả.

#### 4.8. Cách tính các tích phân trong công thức chuyển vị theo cách "nhân biểu đồ"

Đối với hệ gồm các thanh thẳng (dầm, khung, dàn) ta có thể tính các tích phân trong công thức chuyển vị một cách đơn giản hơn so với cách lấy tích phân trực tiếp. Cách tính này gọi là cách "nhân biểu đồ" do A. N. Vêrêxaghin đề xuất vào năm 1925.

Các tích phân trong công thức chuyển vị (4.25) đều có thể đưa về dạng tích phân  $T$  của tích hai hàm số  $\varphi(s)$  và  $\Phi(s)$  như sau

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds. \quad (4.33)$$

Chẳng hạn  $\int_{s_1}^{s_2} \bar{M}_k \frac{M_m}{EI} ds = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds$ , trong đó  $\varphi(s) = \bar{M}_k$  còn  $\Phi(s) = \frac{M_m}{EI}$ .

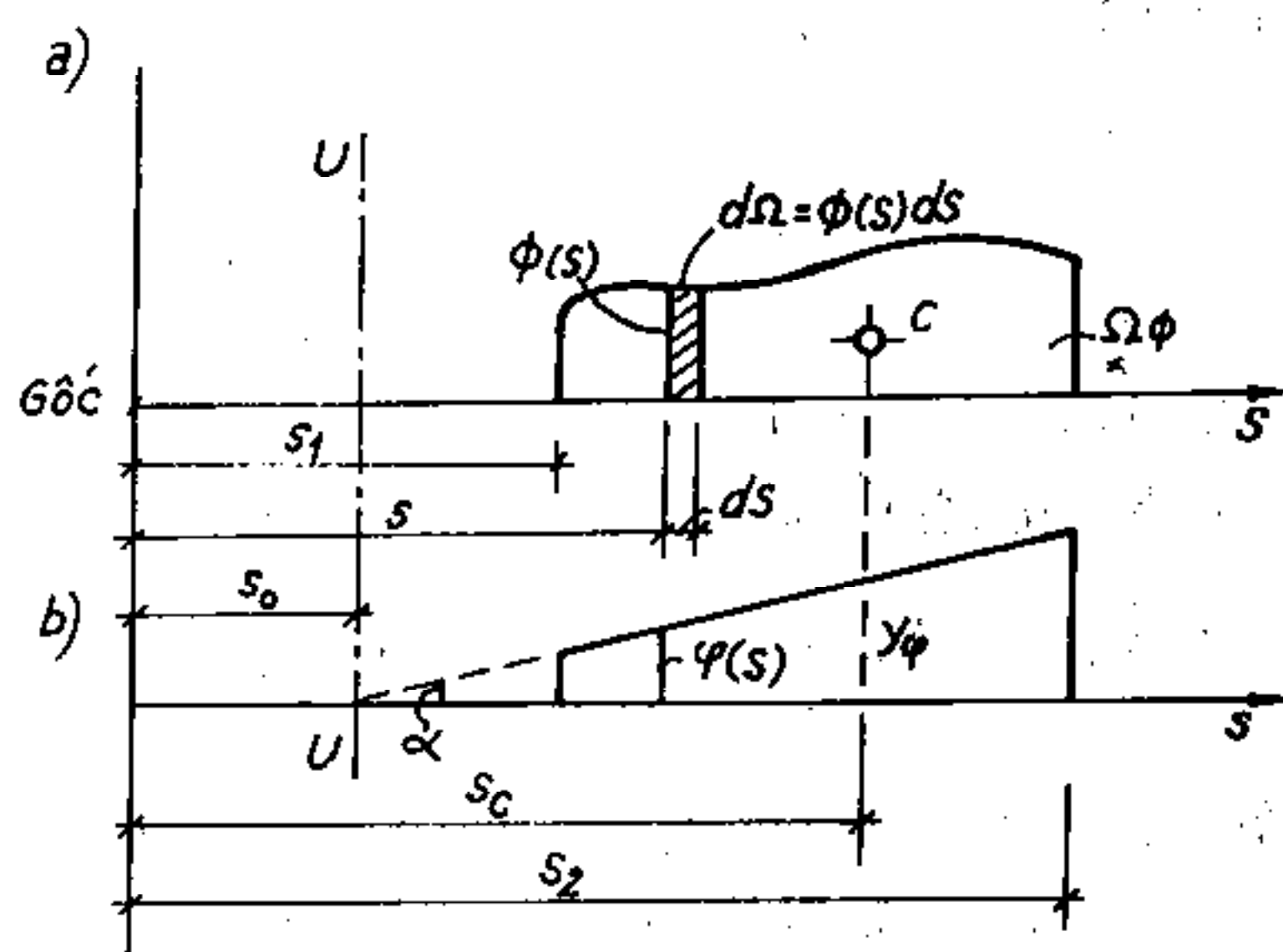
Trong những trường hợp khi hệ gồm những thanh thẳng và một trong hai hàm số là hằng số hoặc bậc nhất, giả sử  $\varphi(s)$  là hằng số hoặc bậc nhất và  $\Phi(s)$  có bậc bất kỳ, ta có thể tính tích phân  $T$  có dạng (4.33) bằng cách lấy diện tích  $\Omega_\Phi$  của biểu đồ có bậc bất kỳ nhân với tung độ  $y_\Phi$  của biểu đồ là hằng số hoặc bậc nhất lấy tại hoành độ tương ứng với trọng tâm của diện tích  $\Omega_\Phi$ .

Nghĩa là:

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds = \Omega_\Phi y_\Phi. \quad (4.34)$$

Thật vậy, giả sử trong khoảng  $(s_1, s_2)$  hàm  $\Phi(s)$  và  $\varphi(s)$  có dạng như trên hình 4.32a,b. Kéo dài đường thẳng  $\varphi(s)$  tới khi cắt đường chuẩn ở  $U$  và gọi  $\alpha$  là góc nghiêng của đường thẳng  $\varphi(s)$  với đường chuẩn. Từ hình vẽ ta dễ dàng thấy:

- $\varphi(s) = (s - s_0) \operatorname{tg} \alpha$ ;
- $\Phi(s) ds = d\Omega$  - diện tích phân tử của biểu đồ  $\Phi(s)$  (phần gạch chéo trên hình 4.32a).



Hình 4.32

Thay vào (4.33) ta được: 
$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} (s - s_0) \operatorname{tg} \alpha \cdot d\Omega.$$

Vì  $\operatorname{tg} \alpha$  không đổi trong khoảng  $(s_1, s_2)$ , nên: 
$$T = \operatorname{tg} \alpha \int_{s_1}^{s_2} (s - s_0) \cdot d\Omega.$$

Tích phân trong vế phải của biểu thức trên chính là mômen tĩnh  $S_U$  của diện tích trong khoảng  $(s_1, s_2)$  lấy đối với trục  $U$ . Trục  $U$  đi qua điểm  $U$  và vuông góc với đường chuẩn. Mặt khác, ta đã biết mômen tĩnh  $S_U$  bằng diện tích nhân với khoảng cách từ trọng tâm của diện tích đến trục  $U$ .

Do đó: 
$$\int_{s_1}^{s_2} (s - s_0) \cdot d\Omega = S_U = (s_c - s_0) \Omega_\Phi, \quad \text{nên} \quad T = \operatorname{tg} \alpha (s_c - s_0) \Omega_\Phi.$$

Từ hình 4.31b ta thấy:  $\operatorname{tg} \alpha (s_c - s_0) = y_\Phi.$

Vậy 
$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds = \Omega_{\Phi} y_{\varphi}.$$

Đó là điều cần chứng minh.

Cách tính các tích phân  $T$  như trình bày ở trên gọi là cách "nhân biểu đồ" theo *Vêrêxaghin*. Ta ký hiệu phép "nhân" biểu đồ như sau

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds = (\varphi) (\Phi). \quad (4.35)$$

Với cách ký hiệu như vậy, ta có thể viết lại công thức chuyển vị cho trường hợp hệ chịu tải trọng như sau

$$\Delta_{km} = (\bar{M}_k) (M_m) + (\bar{N}_k) (N_m) + (\bar{Q}_k) (Q_m). \quad (4.36)$$

đồng thời cần lưu ý là:

- ❖ Các đại lượng  $1/EI$ ,  $1/EA$ ,  $v/GA$  tuy không viết trong (4.36) nhưng cần hiểu ngầm là vẫn tồn tại, khi tính ta phải thêm các đại lượng đó vào.
- ❖ Trong (4.36) tuy không viết dấu tổng nhưng cũng cần hiểu là phải "nhân" biểu đồ trong tất cả các đoạn thanh của hệ rồi cộng đại số các kết quả.

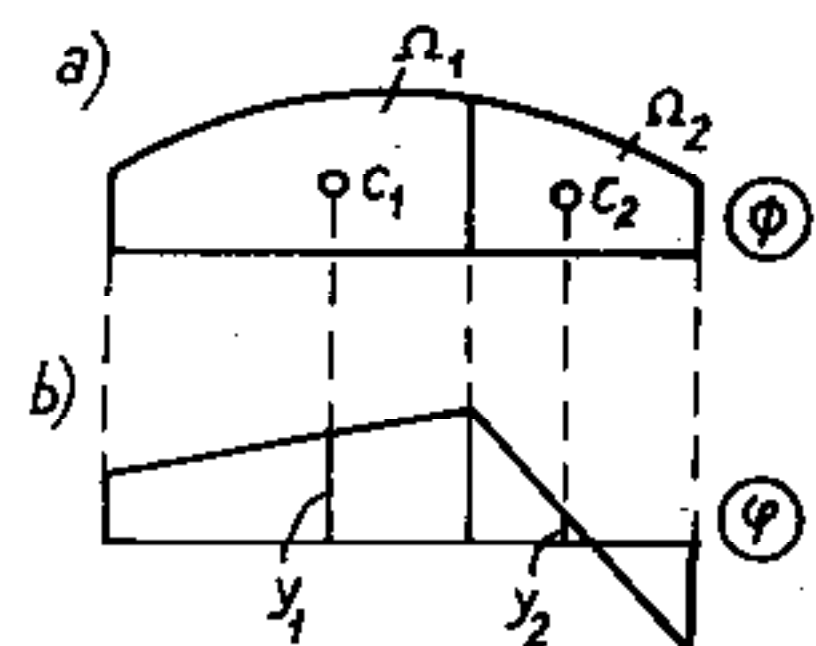
Chú ý trong khi nhân biểu đồ:

- 1) Tung độ  $y_{\varphi}$  bắt buộc phải lấy ở biểu đồ có bậc bé hơn hoặc bằng bậc một, còn diện tích có thể lấy ở biểu đồ bất kỳ.
- 2) Nếu diện tích và tung độ  $y_{\varphi}$  cùng dấu thì kết quả nhân mang dấu dương và ngược lại.
- 3) Trong khoảng  $(s_1, s_2)$  biểu đồ lấy tung độ phải là một đoạn thẳng trơn tru (nếu là đường thẳng gãy khúc thì  $tg\alpha$  sẽ thay đổi và ta sẽ không thể đưa ra ngoài dấu tích phân trong phép biến đổi khi chứng minh cách nhân).

Trong trường hợp biểu đồ bậc nhất  $\varphi(s)$  là đường thẳng gãy khúc ta cần chia khoảng  $(s_1, s_2)$  ra thành nhiều đoạn để áp dụng cách nhân rồi cộng kết quả với nhau. Chẳng hạn như trường hợp trên hình 4.33, chia khoảng cần nhân biểu đồ thành hai đoạn để thực hiện phép nhân, ta có:

$$T = \Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2.$$

Biểu đồ lấy diện tích không bị điều kiện này hạn chế.

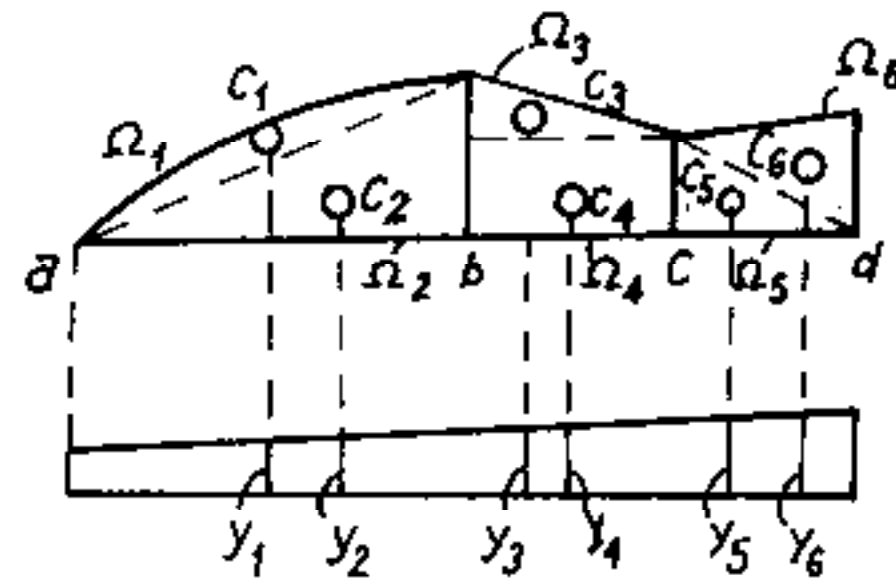


Hình 4.33

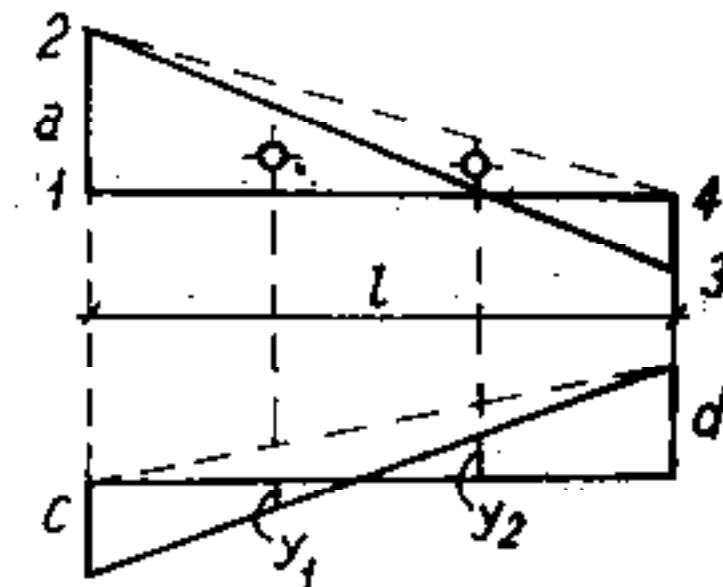
- 4) Theo tính chất tích phân của một tổng hoặc một hiệu bằng tổng hoặc hiệu các tích phân, khi biểu đồ lấy diện tích là hình phức tạp ta có thể chia thành nhiều hình đơn giản để áp dụng riêng

biệt cách nhân cho từng hình rồi cộng kết quả với nhau. Cần hiểu hình đơn giản là hình dễ tìm ngay được diện tích và trọng tâm của nó.

Ví dụ như trường hợp trên hình 4.34 ta có thể chia biểu đồ thành những hình đơn giản như sau: Trong khoảng  $ab$  ta chia biểu đồ có dạng parabol thành một mảnh parabol và một tam giác, trong khoảng  $bc$  và  $cd$  ta có thể chia thành một hình chữ nhật và một tam giác hoặc hai hình tam giác. Khi đó  $T = \Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3 + \Omega_4 y_4 + \Omega_5 y_5 + \Omega_6 y_6$ .



Hình 4.34



Hình 4.35

Đối với trường hợp biểu đồ có dạng hình thang xoắn như trên hình 4.35, ta có thể xem diện tích như hiệu của diện tích hai tam giác 1 2 4 và 2 4 3. Do đó:

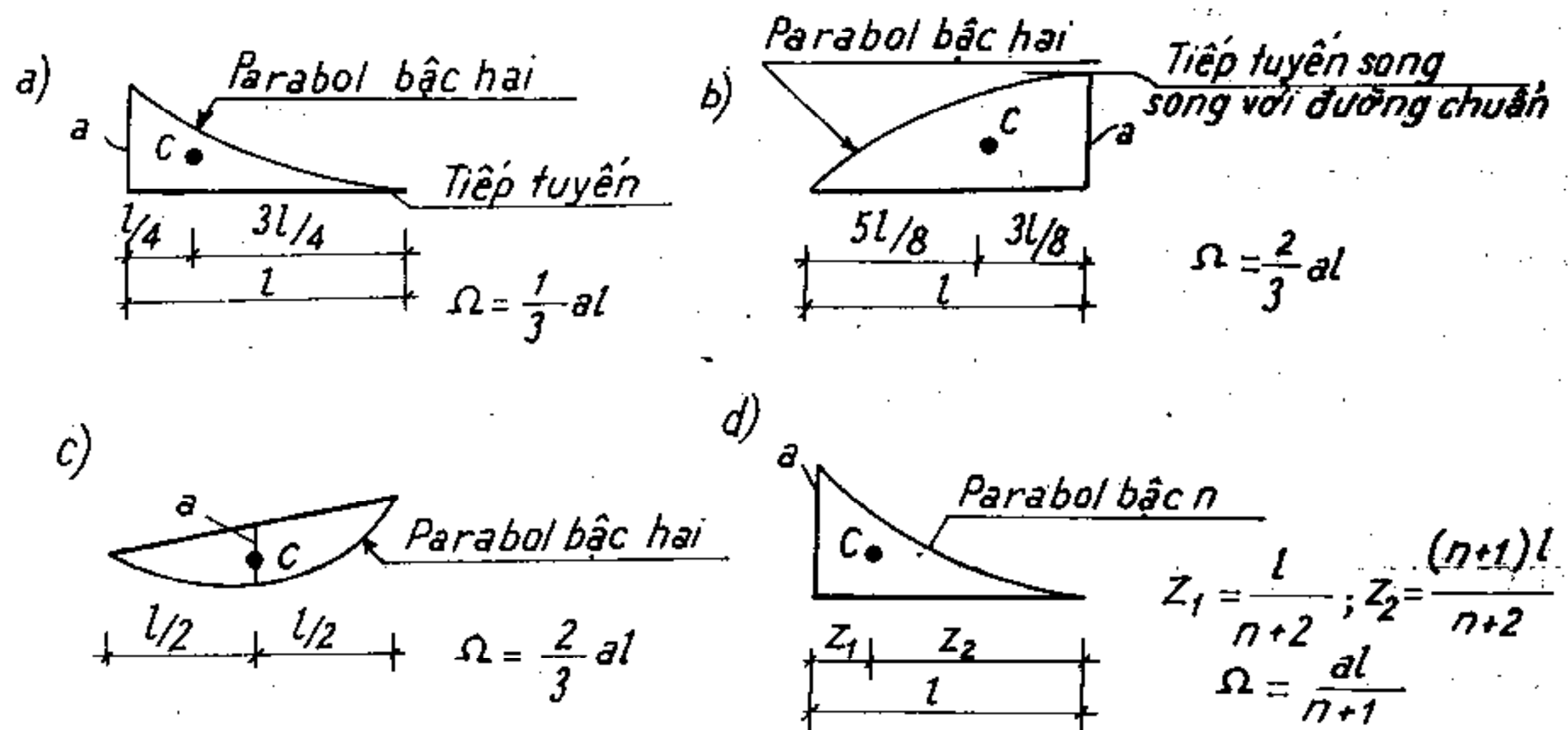
$$T = -\frac{1}{2} a l y_1 - \frac{1}{2} b l y_2.$$

Từ hình vẽ ta dễ dàng tìm được:  $y_1 = \frac{2}{3} c - \frac{1}{3} d$  và  $y_2 = \frac{2}{3} d - \frac{1}{3} c$ .

Do đó:  $T = -\frac{1}{6} l [a(2c - d) + b(2d - c)]$ .

5) Biểu đồ đối xứng nhân với biểu đồ phản xứng cho kết quả bằng không (theo tính chất của tích phân).

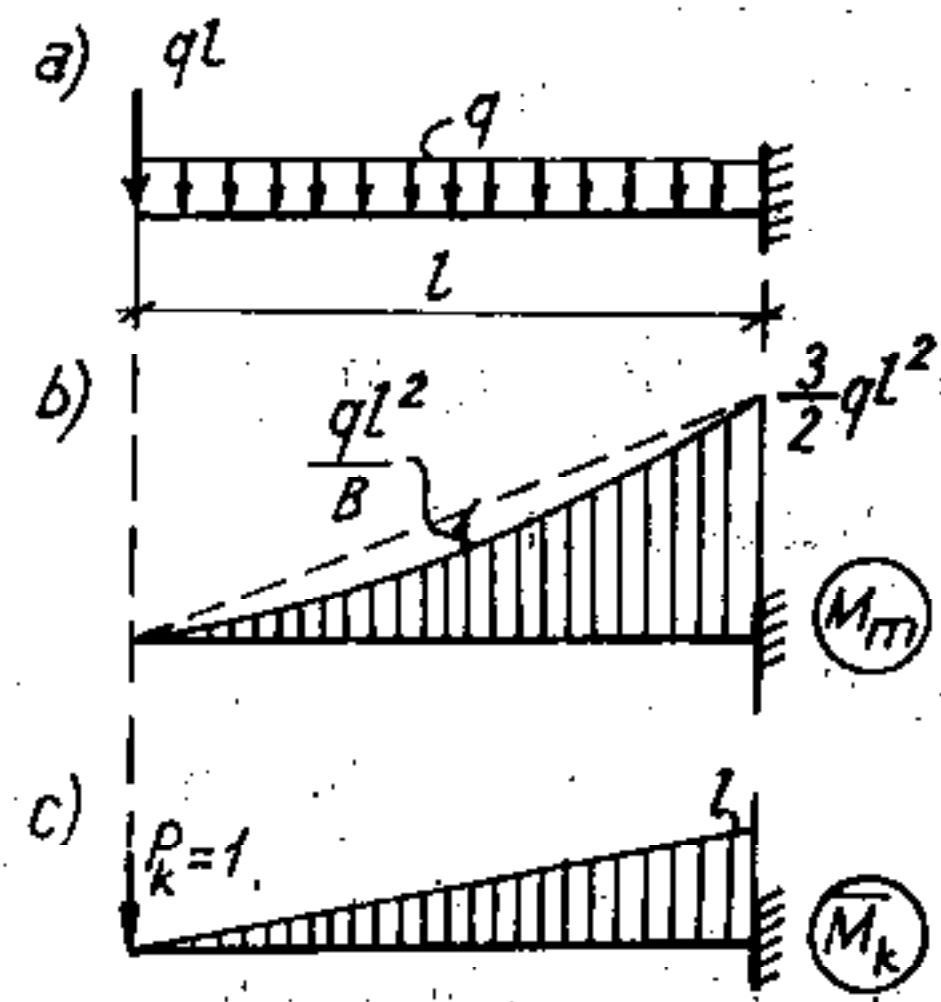
Trên hình 4.36 cung cấp số liệu về diện tích và vị trí trọng tâm của một số hình thường gặp.



Hình 4.36

**Ví dụ 4.12.** Xác định độ võng tại đầu tự do A của dầm chịu lực như trên hình 4.37a.

Biểu đồ  $M_m$  vẽ trên hình 4.37b. Trạng thái "k" và biểu đồ  $\bar{M}_k$  vẽ trên hình 4.37c. Biểu đồ  $\bar{M}_k$  có dạng đường thẳng nên có thể áp dụng phép "nhân biểu đồ", khi nhân ta xem biểu đồ  $M_m$  như hiệu của hai hình: hình tam giác và hình parabol (chú ý ở đây đường chuẩn không tiếp xúc với đường cong tại đầu tự do).



Hình 4.37

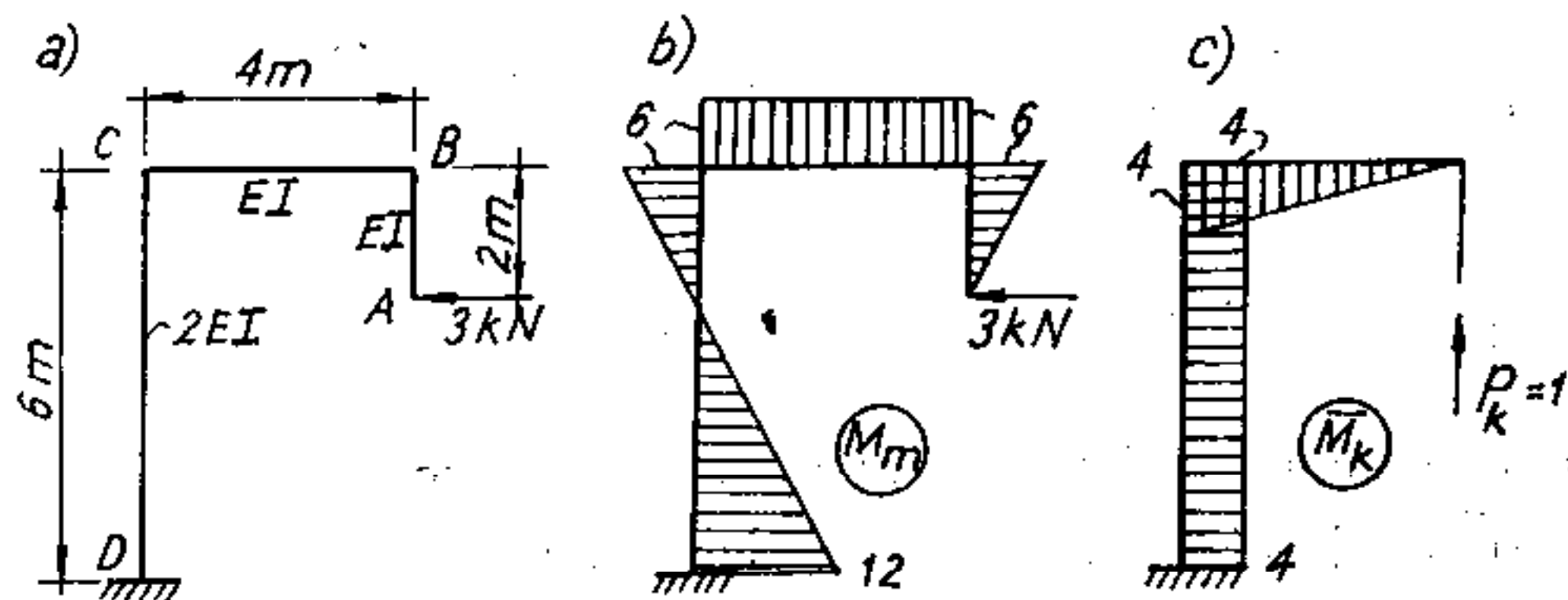
Ta có

$$\Delta_{km} = (\bar{M}_k)(M_m) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \frac{3ql^2}{2} l - \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \right] = \frac{11}{24} \frac{ql^4}{EI}$$

**Ví dụ 4.13.** Tìm chuyển vị thẳng đứng tại A của khung trên hình 4.38a.

Biểu đồ  $M_m$  vẽ trên hình 4.38b. Trạng thái "k" và biểu đồ  $\bar{M}_k$  vẽ trên hình 4.38c.

Hình 4.38



Trong khi nhân biểu đồ cần chú ý là độ cứng của các thanh có giá trị khác nhau. Vì hai biểu đồ đều có dạng đường thẳng nên ta lấy diện tích và tung độ  $y_\phi$  ở biểu đồ nào cũng được.

Kết quả nhân biểu đồ:

• Trong thanh AB: mômen uốn  $\bar{M}_k$  bằng không nên kết quả nhân bằng không.

• Trong thanh BC:  $-\frac{1}{EI} 4 \cdot 6 \cdot 2 = -\frac{48}{EI}$ ;

• Trong thanh CD:  $\frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} 12 \cdot 6 \cdot 4 - \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot 4 \right] = \frac{36}{EI}$

Như vậy:  $\Delta_{km} = -\frac{48}{EI} + \frac{36}{EI} = -\frac{12}{EI}$ .

Kết quả mang dấu trừ chứng tỏ chuyển vị hướng ngược chiều  $P_k$  tức là hướng

xuống dưới. Trong khi tính toán ta đã dùng các đơn vị lực kN, đơn vị chiều dài là m nên độ cứng  $EI$  cũng phải lấy theo  $(\text{kN/m}^2) \times \text{m}^4 = \text{kNm}^2$ , do đó chuyển vị tìm được sẽ tính theo mét.

#### 4.9. Cách tính gần đúng các tích phân trong công thức chuyển vị

Trong trường hợp hệ có các thanh cong (bài toán vòm) hoặc thanh có tiết diện thay đổi, nếu không thực hiện phép rời rạc hoá gần đúng bằng cách thay thanh cong và thanh có tiết diện thay đổi bằng các thanh thẳng có tiết diện không đổi thì về nguyên tắc ta không dùng được cách nhân biểu đồ mà phải tích phân trực tiếp các tích phân trong công thức chuyển vị. Nếu các hàm dưới dấu tích phân này không thể đưa được về dạng hàm sơ cấp quen thuộc thì có thể dùng cách tính gần đúng để xác định.

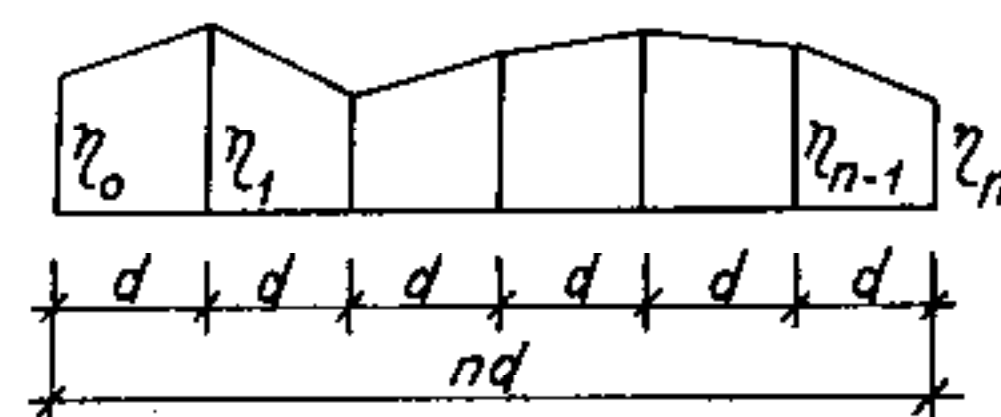
Nói chung, các tích phân trong công thức chuyển vị đều có thể đưa được về dạng

$$T = \int_a^b \eta dz. \quad (4.37)$$

Chẳng hạn 
$$\int_a^b \bar{M}_k \frac{M_m'}{EI} ds = \int_a^b \bar{M}_k \frac{M_m}{EI \cos \varphi} dz = \int_a^b \eta dz, \quad \text{với } \eta = \bar{M}_k \frac{M_m}{EI \cos \varphi},$$

trong đó  $\cos \varphi = 1 / \sqrt{1 + (dy/dz)^2}$  với  $y(z)$  là phương trình của trục thanh cong.

Chia khoảng cần lấy tích phân (khoảng  $a-b$ ) thành  $n$  đoạn có chiều dài bằng nhau theo trục  $z$  và bằng  $d$ . Tiếp đó xác định các giá trị của hàm  $\eta$  tại những hoành độ tương ứng với những khoảng đã chia.



Hình 4.39

Nếu vẽ đồ thị biểu diễn luật biến thiên của hàm  $\eta$  ta sẽ tìm được dạng gần đúng như trên hình 4.39. Các tung độ  $\eta$  tại ranh giới những đoạn chia biểu thị giá trị chính xác của hàm  $\eta$  còn các tung độ trung gian chỉ là gần đúng. Tích phân cần tìm chính là diện tích biểu đồ vừa vẽ được.

Do đó ta có thể dùng công thức tính diện tích để xác định tích phân 4.37.

❖ Nếu giả thiết là các tung độ giữa mỗi đoạn chia biến thiên theo luật đường thẳng (hình 4.39) thì ta có thể dùng công thức hình thang để tính diện tích tức là tính tích phân (4.37):

$$T = \int_a^b \eta dz = d \left[ \frac{\eta_0}{2} + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1} + \frac{\eta_n}{2} \right]. \quad (4.38)$$

\* Nếu giả thiết hàm số  $\eta$  thay đổi theo đường cong parabol trong hai đoạn kế tiếp nhau (đường parabol bậc hai đi qua ba tung độ chính xác) và nếu số đoạn chia là chẵn thì ta có thể dùng công thức Simpson để xác định:

$$T = \int_a^b \eta dz = \frac{d}{3} [\eta_0 + 4(\eta_1 + \eta_3 + \dots + \eta_{n-1}) + 2(\eta_2 + \eta_4 + \dots + \eta_{n-2}) + \eta_n]. \quad (4.38)$$

Trong thực hành người ta thường dùng công thức Simpson vì cho kết quả chính xác hơn công thức hình thang.

Nếu hàm số  $\eta$  không trơn tru thì ta phải chia khoảng lấy tích phân thành nhiều khoảng trong đó các hàm  $\eta$  trơn tru rồi áp dụng công thức trên cho từng khoảng, sau đó cộng kết quả với nhau.

Tất nhiên, nếu số đoạn chia càng nhiều thì kết quả càng chính xác nhưng khối lượng tính toán cũng tăng lên.

#### 4.10. Khái niệm về chuyển vị khái quát và lực khái quát

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính bất kỳ ở hai trạng thái "m" và "k" như trên hình 4.40a và b.

Ta biểu thị các lực ở trạng thái "k" theo lực  $P_{jk}$ :

$$P_{1k} = \alpha_{1j} P_{jk}; P_{2k} = \alpha_{2j} P_{jk}; \dots P_{nk} = \alpha_{nj} P_{jk}.$$

Công khả dĩ của nhóm lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" bằng

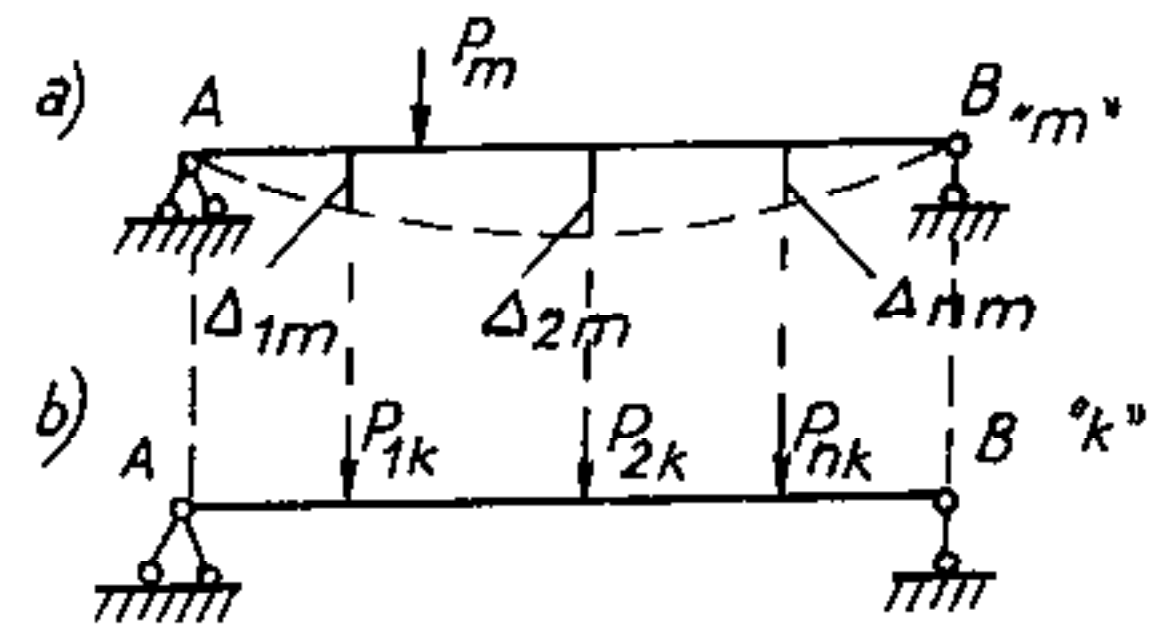
$$T_{km} = P_{1k} \Delta_{1m} + P_{2k} \Delta_{2m} + \dots + P_{nk} \Delta_{nm},$$

hay 
$$T_{km} = P_{jk} [\alpha_{1j} \Delta_{1m} + \alpha_{2j} \Delta_{2m} + \dots + \alpha_{nj} \Delta_{nm}] = P_k^* \Delta_{km}^*,$$

trong đó 
$$P_k^* = P_{jk} \quad \text{và} \quad \Delta_{km}^* = [\alpha_{1j} \Delta_{1m} + \alpha_{2j} \Delta_{2m} + \dots + \alpha_{nj} \Delta_{nm}].$$

Như vậy, trong trường hợp tổng quát ta luôn có thể biểu thị công khả dĩ của một nhóm lực  $P_{ik}$  bất kỳ (tập trung, phân bố...) dưới dạng một đơn thức là tích của hai đại lượng vô hướng:

$$T_{km} = \sum_{i=1}^n P_{ik} \Delta_{im} = P_k^* \Delta_{km}^*, \quad (4.40)$$



Hình 4.40



$P_k^*$  gọi là *lực khái quát*. Đó là lực tương đương thay thế cho các lực  $P_{ik}$ . Lực  $P_k^*$  phụ thuộc nhóm lực bất kỳ  $P_{ik}$  (tập trung hoặc phân bố) và biểu thị gián tiếp nhóm lực đó.

$\Delta_{km}^*$  gọi là *chuyển vị khái quát* tương ứng với các lực  $P_k^*$  do các nguyên nhân  $m$  gây ra. Chuyển vị khái quát phụ thuộc các chuyển vị  $\Delta_{im}$ .

Biểu diễn công của các lực dưới dạng tích của một lực khái quát với chuyển vị khái quát cho phép ta không cần phân biệt lực khái quát với lực đơn giản cũng như chuyển vị khái quát với chuyển vị đơn giản. Do đó *tất cả những nội dung đã được trình bày với lực đơn giản đều có thể mở rộng cho trường hợp lực khái quát và chuyển vị khái quát*.

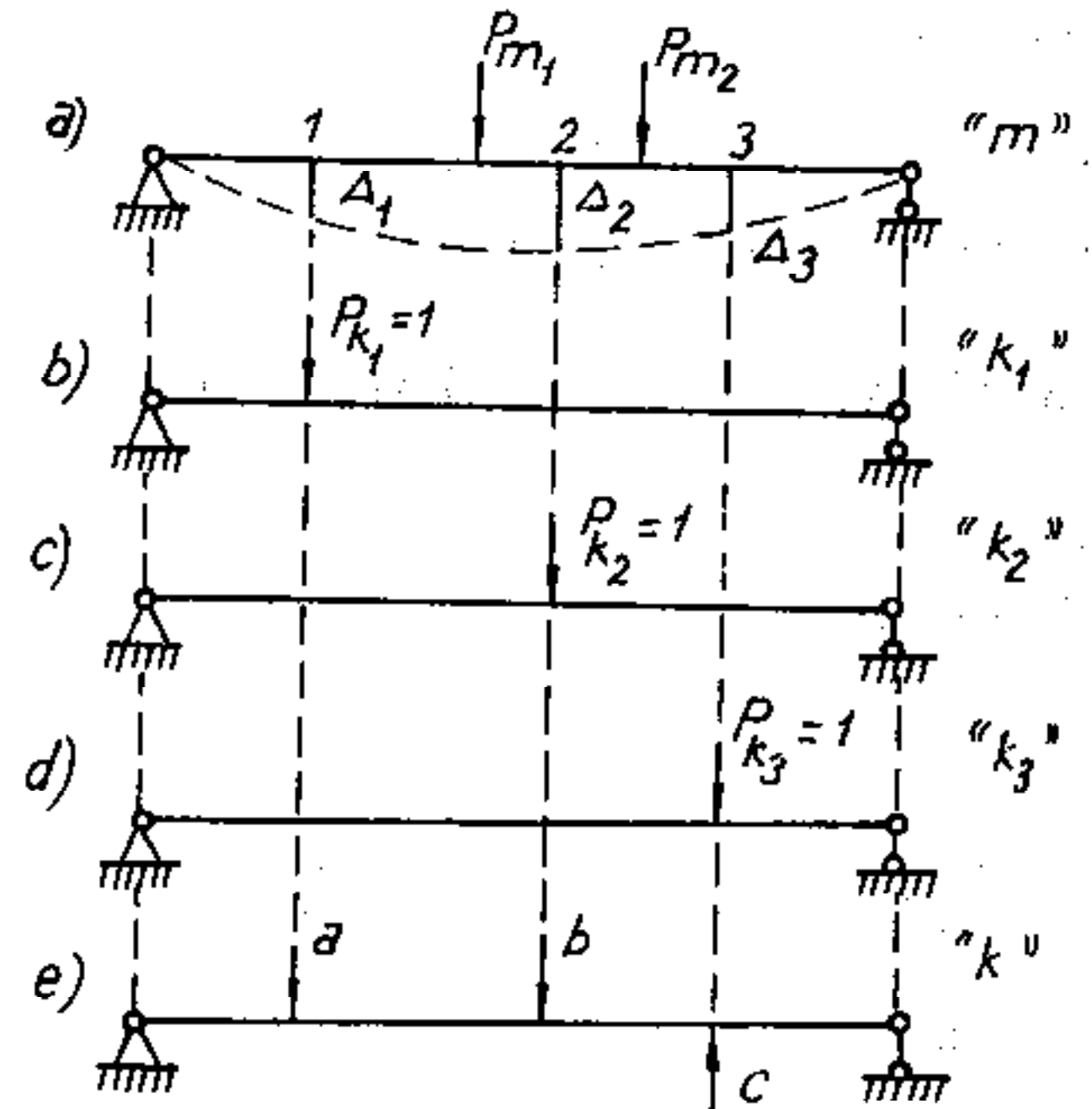
Trong phạm vi bài toán xác định chuyển vị ta có thể vận dụng khái niệm chuyển vị khái quát và lực khái quát để tạo các trạng thái "k" khi cần xác định các tập hợp chuyển vị.

Giả sử xét một hệ bất kỳ chịu tác dụng của các nguyên nhân "m", tại các điểm xác định 1, 2, 3 của hệ có các chuyển vị thẳng đứng lần lượt là  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  (hình 4.41a). Yêu cầu xác định tập hợp chuyển vị

$$\Delta^* = a\Delta_1 + b\Delta_2 - c\Delta_3$$

với  $a, b, c$  là các hằng số cho trước.

Nếu không vận dụng khái niệm chuyển vị khái quát, khi xác định  $\Delta^*$  ta cần thực hiện như sau



Hình 4.41

❖ *Xác định các chuyển vị  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ .*

Các trạng thái  $k_1, k_2, k_3$  tương ứng vẽ trên hình 4.41b, c, d. Để trình bày được đơn giản ta chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn (nếu xét thêm các ảnh hưởng khác thì nội dung cũng không có gì thay đổi) và viết các công thức chuyển vị dưới dạng nhân biểu đồ.

Ta có 
$$\Delta_1 = (\bar{M}_{k_1})(M_m); \quad \Delta_2 = (\bar{M}_{k_2})(M_m); \quad \Delta_3 = (\bar{M}_{k_3})(M_m). \quad (a)$$

❖ *Lần lượt nhân các chuyển vị  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  vừa tìm được với các hằng số  $a, b, -c$ , và thực hiện phép cộng ta sẽ xác định được*

$$\Delta^* = a\Delta_1 + b\Delta_2 - c\Delta_3. \quad (b)$$

Cách làm như vậy tương đối tốn thời gian vì phải nhân biểu đồ nhiều lần.

Bây giờ ta đặt vấn đề tìm lực khái quát  $P^*$  biểu thị bằng một nhóm lực nào đó đặt ở trạng thái "k" để sao cho  $P^*$  sinh công trên chuyển vị  $\Delta^*$  cần xác định. Nói khác đi là tìm nhóm lực  $P^*$  sao cho khi nhân biểu đồ  $\bar{M}_k$  do chúng gây ra với biểu đồ  $M_m$  ta sẽ tìm ngay được chuyển vị  $\Delta^*$

$$\Delta^* = (\bar{M}_k)(M_m) \quad (c)$$

Nếu thay (a) vào (b), ta được

$$\begin{aligned} \Delta^* &= a(\bar{M}_{k_1})(M_m) + b(\bar{M}_{k_2})(M_m) - c(\bar{M}_{k_3})(M_m) = \\ &= [a(\bar{M}_{k_1}) + b(\bar{M}_{k_2}) - c(\bar{M}_{k_3})](M_m). \end{aligned} \quad (d)$$

So sánh (c) với (d) ta thấy:

$$(\bar{M}_k) = a(\bar{M}_{k_1}) + b(\bar{M}_{k_2}) - c(\bar{M}_{k_3}).$$

Vì các tung độ biểu thị nội lực tỷ lệ bậc nhất với giá trị của lực tác dụng nên theo nguyên lý cộng tác dụng đồng thời xuất phát từ điều kiện trên, ta thấy lực khái quát  $P^*$  chính là nhóm lực như trên hình 4.41e.

Như vậy, nếu ở trạng thái "m" ta muốn tìm một tập hợp chuyển vị

$$\Delta_{km}^* = \sum_{i=1}^n a_i \Delta_i, \quad (4.41)$$

thì ở trạng thái "k" cần đặt lực khái quát  $P^*$  là một nhóm gồm n lực trong đó lực thứ i có vị trí và phương của chuyển vị  $\Delta_i$  còn giá trị bằng hệ số  $a_i$ . Tiếp đó áp dụng công thức chuyển vị như thường lệ:

$$\Delta_{km}^* = (\bar{M}_k)(M_m) \quad (4.42)$$

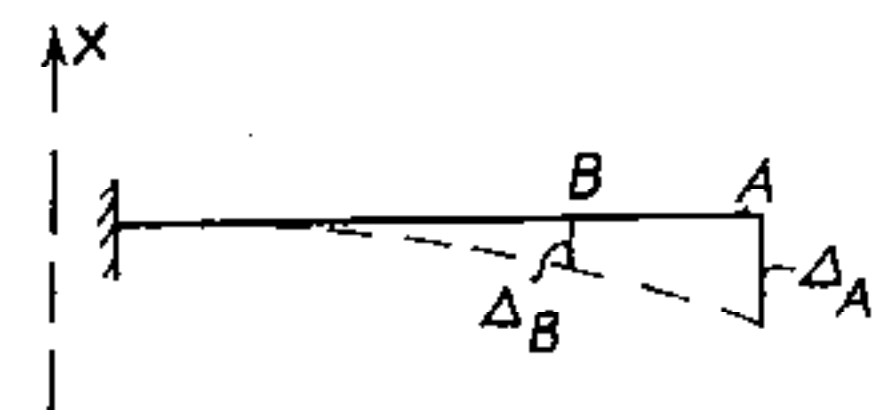
Dưới đây ta sẽ áp dụng kết luận vừa tìm được cho một số trường hợp thường gặp trong thực tế tính toán.

### A. Chuyển vị thẳng tương đối

Chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm theo phương X nào đó là hiệu số hình chiếu của khoảng cách giữa hai điểm đó theo phương X ở lúc sau và trước biến dạng.

Ví dụ cần xét chuyển vị tương đối giữa hai điểm A và B theo phương thẳng đứng trong hệ trên hình 4.42.

Ta thấy hình chiếu của khoảng cách giữa hai điểm A và B theo phương X trước biến dạng bằng không, còn sau biến dạng là  $\Delta_A - \Delta_B$ .



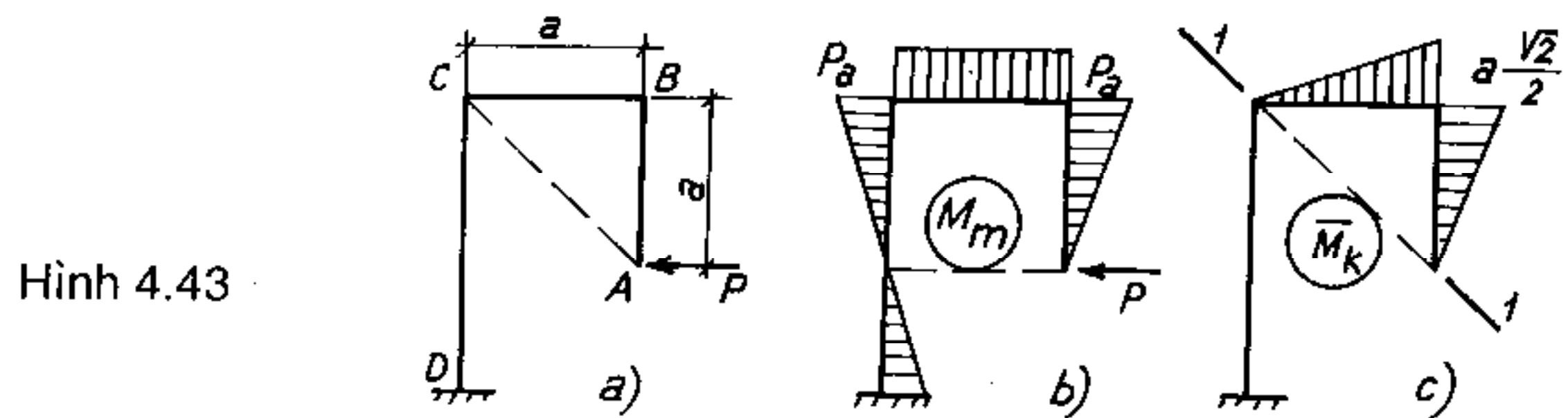
Hình 4.42

Do đó, chuyển vị tương đối  $\Delta_{AB} = \Delta_A - \Delta_B$  tức là hiệu của hai chuyển vị tuyệt đối cùng chiều nhau tại hai điểm A và B theo phương đang xét.

Như vậy, ta có thể phát biểu về cách tạo trạng thái "k" khi cần xác định chuyển vị thẳng tương đối như sau:

*Muốn tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm nào đó theo phương X bất kỳ thì ở trạng thái "k" ta cần đặt lực khái quát  $P^*$  dưới dạng hai lực ngược chiều nhau bằng đơn vị tại hai điểm đang xét và hướng theo phương X.*

**Ví dụ 4.14.** Tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm A và C theo phương nối liền hai điểm đó (hình 4.43a).



Hình 4.43

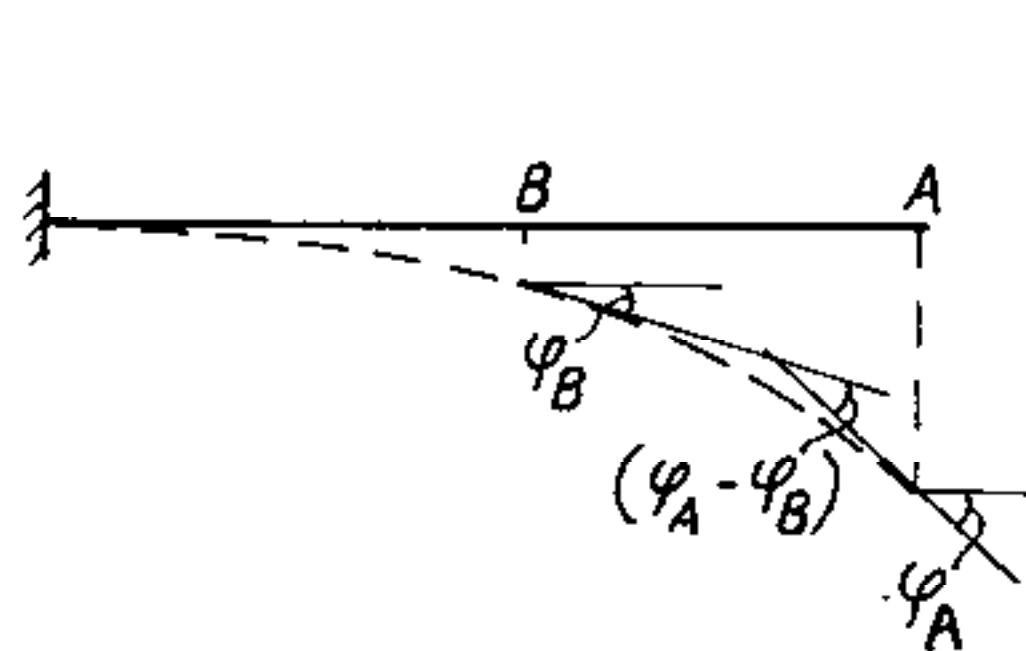
Trạng thái "m" và biểu đồ  $M_m$  vẽ trên hình 4.43b. Trạng thái "k" và biểu đồ  $\bar{M}_k$  vẽ trên hình 4.43c. Ta có

$$\Delta_{km}^* = \Delta_{AB} = \frac{I}{EI} \left[ \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} a \frac{2}{3} Pa + \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} a Pa \right] = \frac{5\sqrt{2}}{12EI} Pa^3.$$

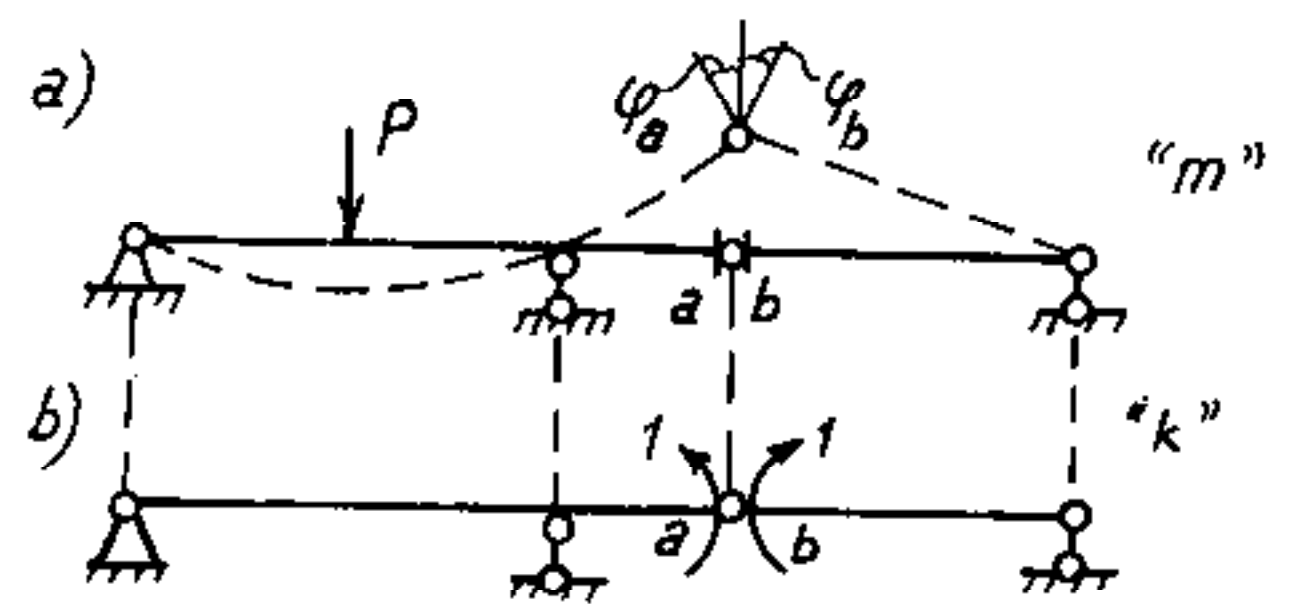
Kết quả mang dấu dương chứng tỏ chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm này hướng theo chiều của nhóm lực  $P^*$  (A và C tiến gần lại với nhau).

#### D. Chuyển vị góc tương đối

Chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện là hiệu của góc hợp giữa hai tiết diện đó ở lúc sau và trước biến dạng.



Hình 4.44



Hình 4.45

Ví dụ, xét chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện A và B của hệ trên hình 4.44.

Góc hợp thành giữa hai tiết diện  $A$  và  $B$  hay nói cách khác đi là góc hợp giữa phương tiếp tuyến tại hai tiết diện  $A$  và  $B$  trước biến dạng bằng không còn sau biến dạng là  $\varphi_A - \varphi_B$ . Do đó, chuyển vị xoay tương đối giữa hai tiết diện  $A$  và  $B$  bằng  $\varphi_{A-B} = \varphi_A - \varphi_B$  tức là bằng hiệu của hai chuyển vị góc tuyệt đối tại hai điểm đó nếu hai góc này được giả thiết là cùng chiều.

Như vậy, muốn tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện thì ở trạng thái "k" ta cần đặt lực khái quát  $P^*$  dưới dạng hai mômen đơn vị ngược chiều nhau tại hai tiết diện đó.

Ví dụ, muốn tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện  $a$  và  $b$  của hệ vẽ trên hình 4.5a ta tạo trạng thái "k" như trên hình 4.45b.

### C. Góc xoay của thanh trong dàn

Giả sử cần tìm góc xoay của thanh  $AB$  trong dàn (hình 4.46a). Vì các thanh trong dàn không bị uốn nên khi biến dạng chúng vẫn thẳng. Nếu gọi  $A'B'$  là vị trí của thanh  $AB$  sau biến dạng (hình 4.46), đồng thời gọi  $\Delta_A$  và  $\Delta_B$  là chuyển vị tại mắt  $A$  và  $B$  theo phương vuông góc với trục thanh  $AB$  thì khi  $\Delta_A$  và  $\Delta_B$  cùng chiều ta có

$$\varphi_{AB} \approx \operatorname{tg} \varphi_{AB} = \frac{\Delta_A - \Delta_B}{a} = \frac{1}{a} \Delta_A - \frac{1}{a} \Delta_B.$$

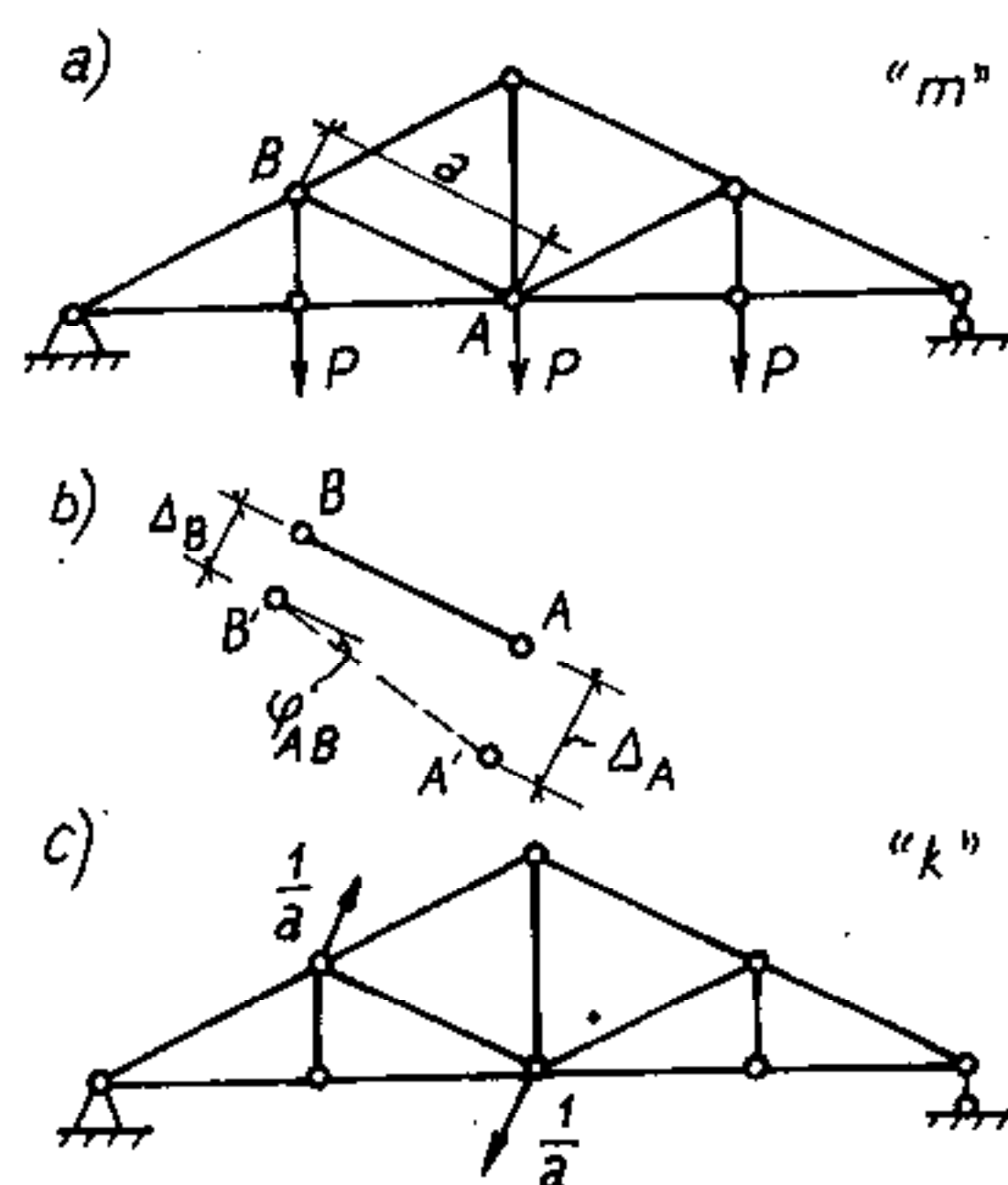
Ta thấy góc xoay của thanh  $AB$  trong dàn chính là tập hợp của hai chuyển vị  $\Delta_A$  và  $\Delta_B$  với các hệ số là  $1/a$  và  $-1/a$ .

Như vậy, muốn tìm góc xoay của thanh bất kỳ trong dàn thì ở trạng thái "k" ta cần đặt lực khái quát  $P^*$  dưới dạng hai lực đặt tại hai đầu thanh, ngược chiều nhau, vuông góc với trục của thanh, mỗi lực có giá trị bằng đơn vị chia cho chiều dài của thanh.

Trạng thái "k" để tìm góc xoay của thanh  $AB$  trong dàn vẽ trên hình 4.46c.

## 4.11. Cách xác định chuyển vị trong hệ chịu tải trọng di động

Nội dung chính của việc nghiên cứu chuyển vị trong hệ thanh chịu tải trọng di động là vẽ các đường ảnh hưởng của chuyển vị. Sau đó, ta có thể sử dụng các đường ảnh hưởng tìm được để xác định vị trí bất lợi của tải trọng và xác định



Hình 4.46

chuyển vị tương ứng với các vị trí của tải trọng như đã trình bày trong chương 3. Trong mục này chỉ cần nghiên cứu cách vẽ đường ảnh hưởng của chuyển vị.

*Đường ảnh hưởng của chuyển vị tại một điểm  $k$  nào đó là đường biến thiên của chuyển vị đó do một lực đơn vị di động trên công trình gây ra.*

Giả sử cần tìm đường ảnh hưởng của chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện  $k$  có hoành độ là  $a$ . Muốn vậy ta cần cho một lực  $P = 1$  di động trên công trình, vị trí của nó được xác định theo tọa độ chạy  $z$ , và xác định chuyển vị tại  $k$  theo công thức Mohr, chuyển vị này là hàm của  $z$ , sau khi cho  $z$  thay đổi ta sẽ vẽ được đường ảnh hưởng (hình 4.47b). Tất nhiên tung độ đường ảnh hưởng ở hoành độ  $z$  phải bằng chuyển vị  $\Delta_{km}$  tại  $k$  do lực  $P_m = 1$  đặt tại hoành độ  $z$  gây ra.

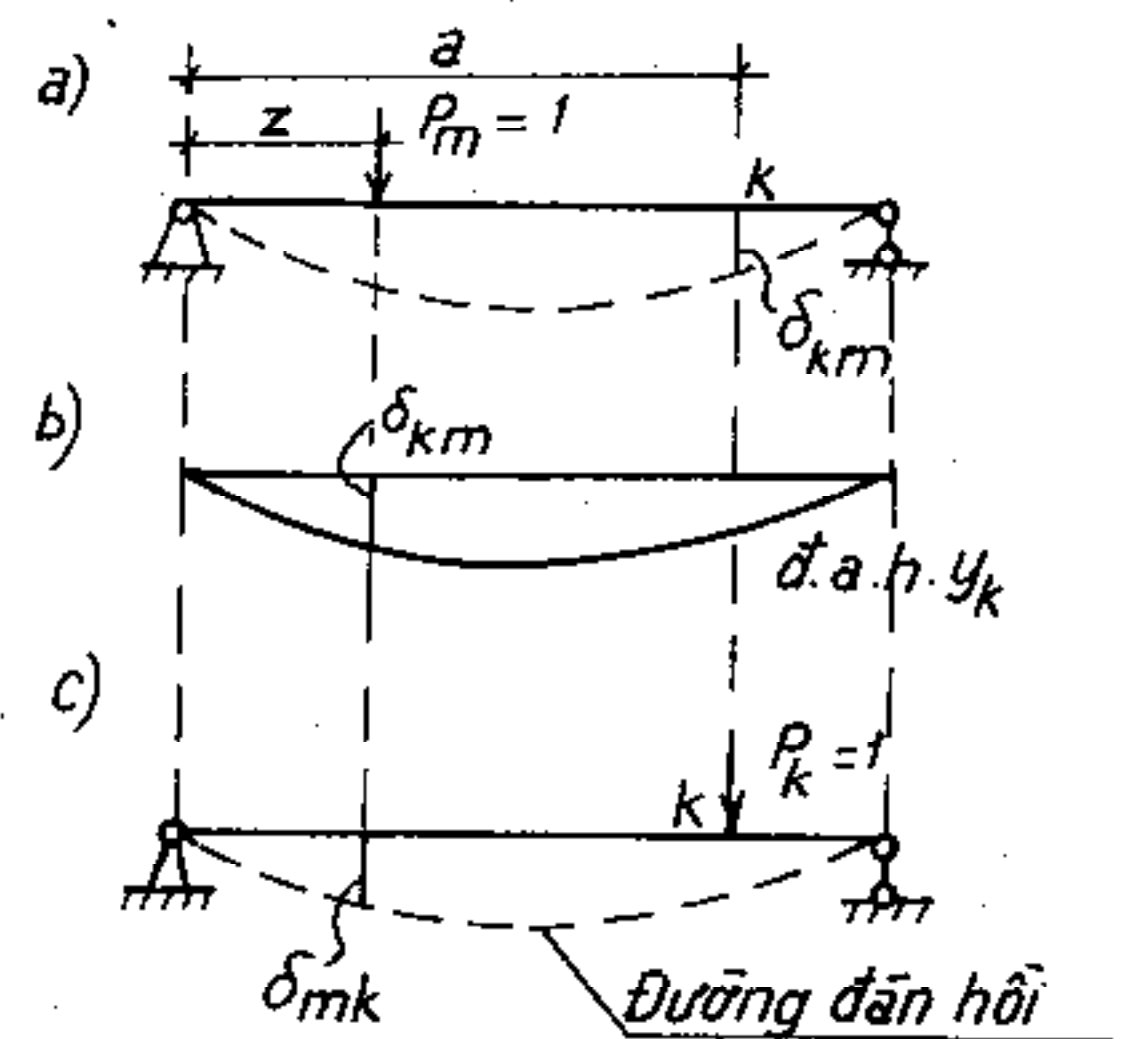
Cách thực hiện như vậy sẽ phức tạp, dựa trên cơ sở định lý tương hỗ của các chuyển vị ta có thể làm đơn giản hơn.

Bây giờ ta xét dầm chịu lực  $P_k = 1$  đặt tại tiết diện  $k$  cần tìm đường ảnh hưởng chuyển vị và đường đàn hồi (biểu đồ độ võng) tương ứng như trên hình 4.47c. Ta sẽ chứng minh rằng đường đàn hồi này có dạng và trị số giống đường ảnh hưởng  $y_k$ .

Thật vậy, lực  $P_k = 1$  gây ra độ võng tại điểm  $m$  có hoành độ  $z$  là  $\delta_{mk}$ , giá trị này thay đổi theo vị trí của điểm  $m$  tức là theo hoành độ  $z$ . Vì điểm  $k$  trên hình 4.47a và lực  $P_k = 1$  trên hình 4.47c cố định nên với bất kỳ vị trí nào của điểm  $m$ , theo định lý tương hỗ của các chuyển vị đơn vị, ta luôn luôn được

$$\delta_{km} = \delta_{mk}.$$

Như vậy ta đã chứng minh được đường đàn hồi (hình 4.47c) giống đường ảnh hưởng  $y_k$  (hình 4.47b).

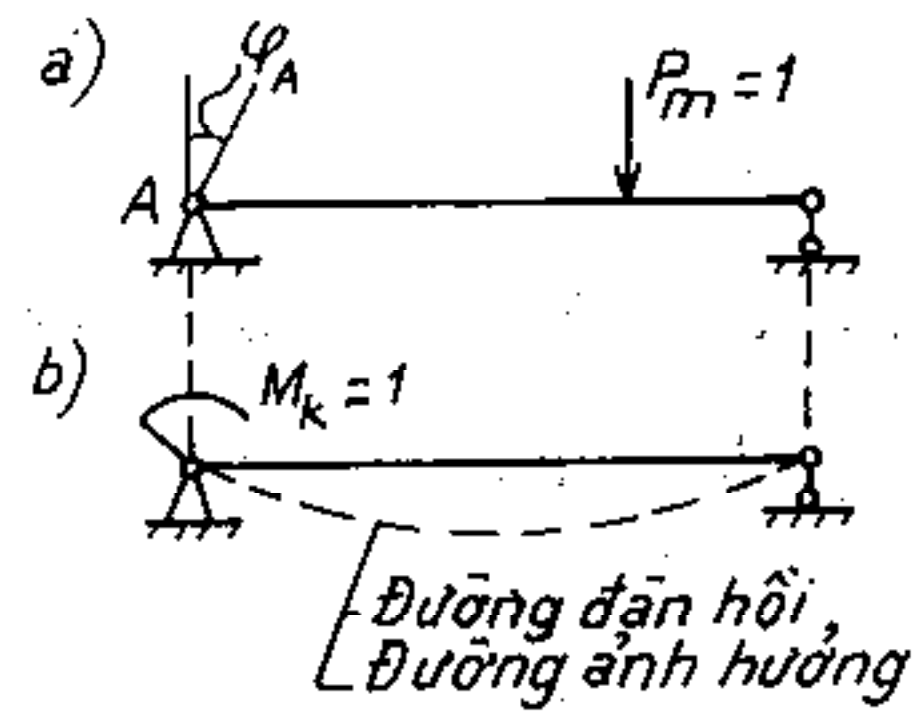


Hình 4.47

Căn cứ vào lập luận trên ta có thể kết luận:

- \* Đường ảnh hưởng của chuyển vị thẳng tại một tiết diện nào đó chính là đường đàn hồi do lực  $P_k = 1$  đặt tại tiết diện đó, có phương hướng theo phương của chuyển vị cần vẽ đường ảnh hưởng.
- \* Đường ảnh hưởng của góc xoay tại một tiết diện nào đó chính là đường đàn hồi do một mômen đơn vị đặt tại tiết diện đó.

Chẳng hạn cần tìm đường ảnh hưởng của góc xoay tại tiết diện A trong hệ trên hình 4.48a. Muốn vậy ta chỉ cần đặt tại A một mômen bằng đơn vị và vẽ đường đàn hồi của dầm do mômen đó gây ra (hình 4.48b).



Hình 4.48

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 4.1. Thế nào là biến dạng, chuyển vị? Các dạng biến dạng và chuyển vị trong bài toán phẳng? Cách ký hiệu chuyển vị và những giả thiết cơ bản khi nghiên cứu chuyển vị?
- 4.2. Thiết lập công thức xác định công ngoại lực tác dụng tĩnh trên hệ đàn hồi. Phát biểu tính chất của công ngoại lực.
- 4.3. Nêu các bước thiết lập công thức công của nội lực và công thức thế năng của hệ thanh đàn hồi tuyến tính. Giải thích ý nghĩa của các đại lượng trong công thức.
- 4.4. Trình bày cách xác định chuyển vị khi áp dụng trực tiếp biểu thức thế năng. Nêu các hạn chế của cách tính.
- 4.5. Phát biểu và chứng minh định lý Castigliano. Trình bày cách vận dụng định lý để tính chuyển vị.
- 4.6. Phân biệt chuyển vị thực và chuyển vị khả dĩ, công thức với công khả dĩ của ngoại lực.
- 4.7. Thiết lập và giải thích công thức công khả dĩ.
- 4.8. Phát biểu và chứng minh các định lý tương hỗ về:
  - công khả dĩ của ngoại lực;
  - chuyển vị đơn vị;
  - phản lực đơn vị;
  - chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị.

- 4.9. Thiết lập và giải thích công thức tổng quát của chuyển vị trong hệ thanh dàn hồi tuyến tính.
- 4.10. Trình bày cách vận dụng công thức chuyển vị trong các trường hợp:
- hệ khung, dầm chịu tải trọng;
  - hệ dàn chịu tải trọng;
  - hệ tĩnh định chịu chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa;
  - hệ tĩnh định chịu sự thay đổi nhiệt độ;
  - hệ dàn tĩnh định khi chiều dài các thanh chế tạo không chính xác.
- 4.11. Phát biểu và chứng minh phép nhân biểu đồ theo Vêrêxaghin. Nêu các chú ý khi nhân biểu đồ.
- 4.12. Thế nào là lực khái quát, chuyển vị khái quát? Cách vận dụng những khái niệm này để tìm một tập hợp chuyển vị.
- 4.13. Trình bày cách tạo trạng thái "k" để tìm:
- chuyển vị thẳng tương đối giữa hai tiết diện;
  - chuyển vị xoay tương đối giữa hai tiết diện;
  - góc xoay của thanh trong dàn.
- 4.14. Trình bày cách tìm đường ảnh hưởng của chuyển vị thẳng và đường ảnh hưởng của góc xoay tại một tiết diện.



# Mục lục

Lời tựa	
Ký hiệu các đại lượng	3
Mở đầu	4
1. Đối tượng và nhiệm vụ của Cơ học kết cấu	7
2. Sơ đồ tính của công trình	9
3. Phân loại công trình	11
4. Các nguyên nhân gây ra nội lực; biến dạng và chuyển vị	14
5. Các giả thiết - Nguyên lý cộng tác dụng	16
Câu hỏi ôn tập	18
<b>Chương 1. Phân tích cấu tạo hình học của các hệ phẳng</b>	
1.1. Khái niệm mở đầu	19
1.2. Các loại liên kết	22
1.3. Cách nối các miếng cứng thành một hệ bất biến hình	25
1.4. Ví dụ áp dụng	32
Câu hỏi ôn tập	36
<b>Chương 2. Cách xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động</b>	
2.1. Phân tích tính chất chịu lực của các hệ tĩnh định	37
2.2. Cách xác định nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động	44
2.3. Cách tính dàn dầm tĩnh định chịu tải trọng bất động	46
2.4. Biểu đồ nội lực và cách tính dầm, khung chịu tải trọng bất động	56
2.5. Cách tính hệ ba khớp chịu tải trọng bất động	65
	189

2.6. Cách tính hệ ghép tĩnh định chịu tải trọng bất động	77
2.7. Cách tính hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng bất động	78
2.8. Phương pháp tải trọng bằng không để khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ thanh phẳng có đủ số liên kết	79
Câu hỏi ôn tập	83
<b>Chương 3. Cách xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động</b>	
3.1. Phương pháp nghiên cứu hệ chịu tải trọng di động	85
3.2. Đường ảnh hưởng trong dầm tĩnh định đơn giản	90
3.3. Đường ảnh hưởng trong hệ có hệ thống truyền lực	94
3.4. Đường ảnh hưởng trong hệ ghép tĩnh định	95
3.5. Đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp	99
3.6. Đường ảnh hưởng trong hệ dầm dầm	108
3.7. Đường ảnh hưởng trong hệ dầm vòm ba khớp	117
3.8. Cách xác định các đại lượng nghiên cứu tương ứng với các dạng tải trọng khác nhau theo đường ảnh hưởng	120
3.9. Tính chất của đường ảnh hưởng có dạng đường thẳng	123
3.10. Cách dùng đường ảnh hưởng để xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng	125
3.11. Khái niệm về tải trọng tương đương	136
3.12. Khái niệm về biểu đồ bao nội lực	138
Câu hỏi ôn tập	141
<b>Chương 4. Cách xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng dàn hồi tuyến tính</b>	
4.1. Khái niệm về biến dạng và chuyển vị	143
4.2. Thế năng của hệ thanh dàn hồi tuyến tính	145
4.3. Cách xác định chuyển vị theo thế năng	152
4.4. Công khả dĩ của ngoại lực và nội lực	157

4.5. Các định lý tương hỗ trong hệ đàn hồi tuyến tính	161
4.6. Công thức tổng quát của chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính (Công thức Maxwell-Morh, 1874)	166
4.7. Cách vận dụng công thức chuyển vị	168
4.8. Cách tính các tích phân trong công thức chuyển vị theo cách "nhân biểu đồ"	175
4.9. Cách tính gần đúng các tích phân trong công thức chuyển vị	180
4.10. Khái niệm về chuyển vị khái quát và lực khái quát	181
4.11. Cách xác định chuyển vị trong hệ chịu tải trọng di động	185
Câu hỏi ôn tập	187

Gs, Ts. LÊU THỌ TRÌNH

# **CƠ HỌC KẾT CẤU**

**TẬP I**

**HỆ TÍNH ĐỊNH**

<i>Chịu trách nhiệm xuất bản :</i>		Pgs, Ts. TÔ ĐĂNG HẢI
<i>Biên tập</i>	:	MINH HẰNG, THANH ĐỊNH
<i>Kỹ mỹ thuật</i>	:	NHƯ MAI
<i>Sửa bản in</i>	:	MINH HẰNG
<i>Trình bày bìa</i>	:	HƯƠNG LAN

**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT**

**70 TRẦN HUNG ĐẠO, HÀ NỘI**

---

In 1.000 bản khổ 16 x 24 cm. Tại Xí nghiệp in 19 - 8.  
Số 3 đường Nguyễn Phong Sắc - Nghĩa Tân - Cầu Giấy - Hà Nội.  
Giấy phép xuất bản số 451-10-1 cấp ngày 4-10 - 2000  
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2000

Thư viện - DHDL Hai Phong



2001DVL732

Giá: 21.000đ

THƯ VIỆN DHDLHP