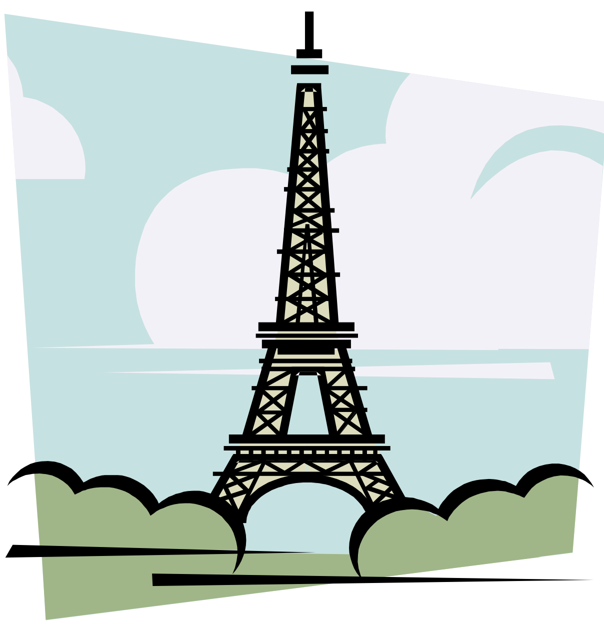
GIÁO TRÌNH

CƠ HỌC KẾT CẤU II



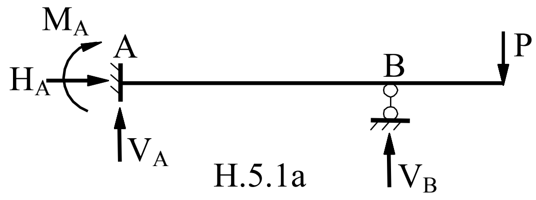
Giáo viên: TRẦN XUÂN MINH KHOA XÂY DỰNG

CHƯƠNG 5: TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC
§1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH - BẬC SIÊU TĨNH

I. Hệ siêu tĩnh:

1. Định nghĩa: Hệ siêu tĩnh là những hệ mà chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ. Nói cách khác, đó là hệ bất biến hình và có liên kết thừa.

2. Ví dụ: Xét hệ trên hình (H.5.1a)



H.5.1a

- Phần hệ BC là tĩnh định vì có thể xác định được ngay nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.

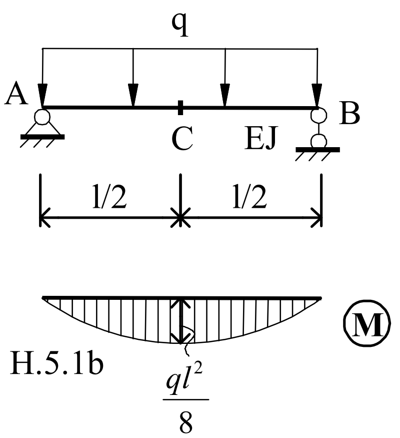
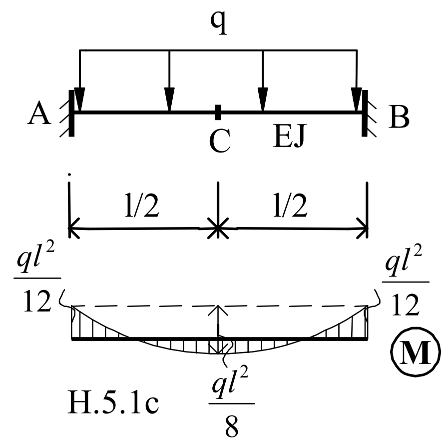
- Phần hệ AB chưa thể xác định được phản lực chỉ bằng các phương trình cân bằng tĩnh học (4 phản lực V_A, H_A, M_A, V_B nhưng chỉ có 3 phương trình) nên cũng chưa thể xác định được nội lực.

Vậy theo định nghĩa, hệ đã cho là hệ siêu tĩnh.

II. Tính chất của hệ siêu tĩnh:

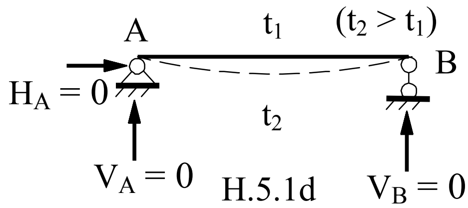
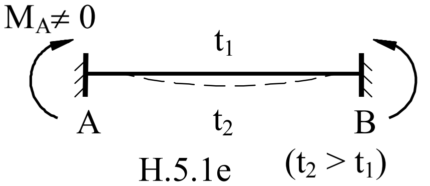
1. Tính chất 1:

Nội lực, biến dạng và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh nói chung là nhỏ hơn so với hệ có cùng kích thước và tải trọng tác dụng.

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
 H.5.1b	 H.5.1c
$\lvert M\rvert_{max} = \frac{ql^2}{8}$, $y_{max} = y_C = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}$	$\lvert M\rvert_{max} = \frac{ql^2}{12}$, $y_{max} = y_C = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EJ}$

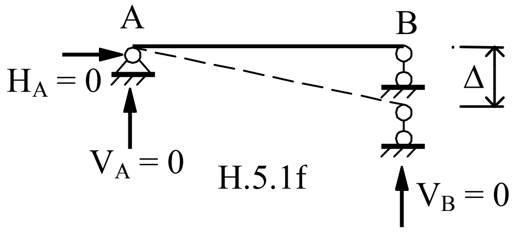
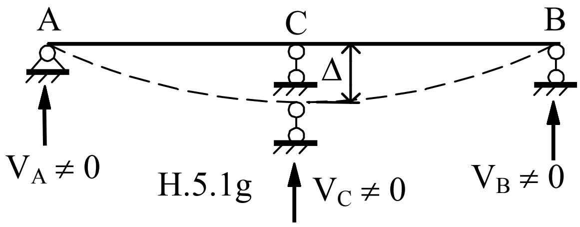
2. Tính chất 2: Trong hệ siêu tĩnh có xuất hiện nội lực do các nguyên nhân: biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa và do chế tạo, lắp ráp không chính xác gây ra.

a. Nguyên nhân biến thiên nhiệt độ:

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
 H.5.1d	 H.5.1e

Các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực	Các liên kết tại A, B ngăn cản biến dạng của dầm nên làm xuất hiện phản lực và nội lực.

b. Nguyên nhân chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa:

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
 H.5.1f	 H.5.1g
Các liên kết không ngăn cản chuyển vị tại gối B nên dầm chỉ bị nghiên đi mà không biến dạng nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực	Các liên kết tại A, B có xu hướng ngăn cản chuyển vị tại gối C làm cho dầm bị uốn cong do đó làm xuất hiện phản lực và nội lực

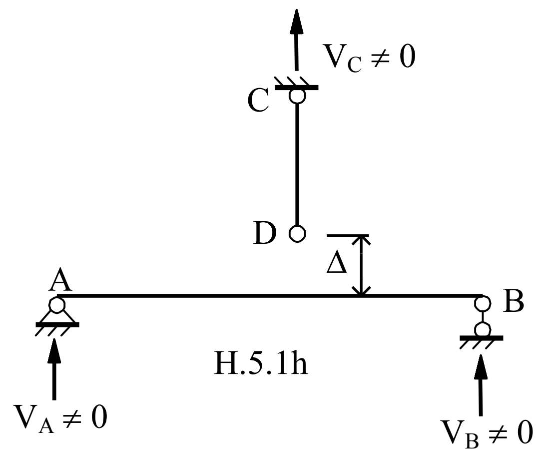
c. Nguyên nhân chế tạo, lắp ráp không chính xác:(H.5.1h)

Dầm tĩnh định AB nếu được ráp thêm thanh CD vào sẽ trở thành hệ siêu tĩnh. Nếu thanh CD do chế tạo hụt 1 đoạn Δ thì khi ráp vào, nó sẽ bị kéo dãn ra đồng thời dầm AB sẽ bị uốn cong nên sẽ làm phát sinh phản lực và nội lực trong hệ.

3. Tính chất 3:

Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào độ cứng của các cấu kiện trong hệ (EJ, FF, GF…)

**Nhận xét:* Hệ siêu tĩnh chịu lực tốt hơn hệ tĩnh định.



H.5.1h

III. Bậc siêu tĩnh:

1. Định nghĩa: Bậc siêu tĩnh là số các liên kết thừa tương đương với liên kết loại 1 ngoài số liên kết cần thiết để cho hệ bất biến hình. Ký hiệu n

2. Cách xác định:

Có thể sử dụng các công thức liên hệ giữa số lượng các miếng cứng và các liên kết giữa chúng trong phần cấu tạo hình học của hệ để xác định.

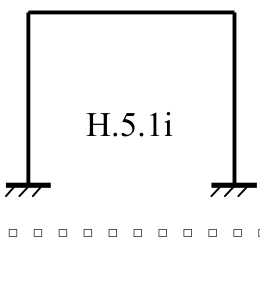
$n = T + 2K + 3H + C - 3D$ (Cho hệ bất kỳ có nối đất)

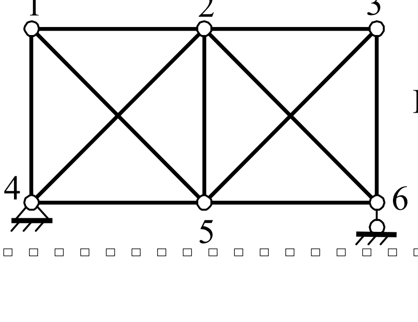
$n = T + 2K + 3H - 3(D - 1)$ (Cho hệ bất kỳ không nối đất)

$n = D - 2M + C$ (Cho hệ dàn có nối đất)

$n = D - 2M + 3$ (Cho hệ dàn không nối đất)

Ví dụ: Xác định bậc siêu tĩnh của hệ trên hình (H.5.1i & H.5.1j)


H.5.1i

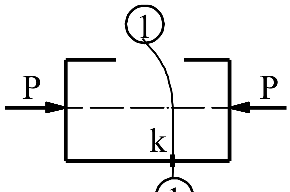


H.5.1j

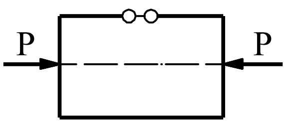
- Hệ trên hình (H.5.1i) có n = 0 + 2.0 + 3.0 + 6 – 3.1 = 3
- Hệ trên hình (H.5.1j) có n = 11 – 2.6 + 3 = 2.

Cách phân tích các chu vi kín của hệ:

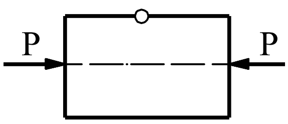
Xét 1 chu vi hở trên hình (H.5.1k). Đây là hệ tĩnh định.



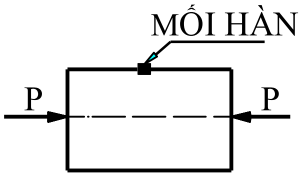
H.5.1k



H.5.1l



H.5.1m



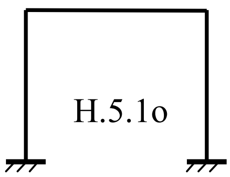
H.5.1n

- Nếu nối chu vi đó bằng 1 liên kết thanh (H.5.1l) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 1 (n = 1).
- Nếu nối chu đó bằng 1 liên kết khớp (H.5.1m) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 2 (n = 2)
- Nếu nối chu vi đó bằng một liên kết hàn (H.5.1n) thì hệ thu được có bậc siêu tĩnh bằng 3 (n = 3). Hệ lúc này còn được gọi là chu vi kín.

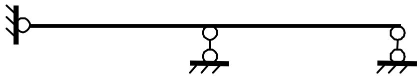
Phân tích ngược lại ta thấy 1chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng 3, nếu thêm vào 1 khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh sẽ giảm đi 1. Vậy nếu gọi V là số chu vi kín, K là số liên kết khớp đơn giản của hệ thì bậc siêu tĩnh của hệ được tính bằng công thức:

$$n = 3V - K \qquad (5\text{-}1)$$

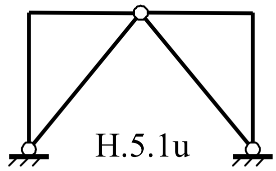
Ví dụ: Xác định bậc siêu tĩnh của các hệ cho trên hình vẽ bên dưới.



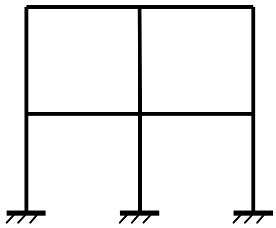
H.5.1o



H.5.1p



H.5.1u

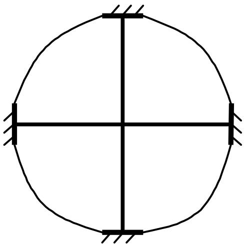


H.5.1v

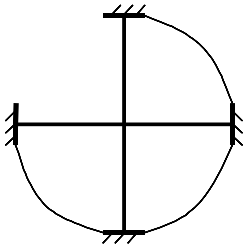
- Hệ trên hình (H.5.1o) có n = 3.1 – 0 = 3
- Hệ trên hình (H.5.1p) có n = 3.2 – 5 = 1
- Hệ trên hình (H.5.1u) có n = 3.3 – 7 = 2
- Hệ trên hình (H.5.1v) có n = 3.4 – 0 = 12

Chú ý: Cần quan niệm trái đất là 1 chu vi hở (miếng cứng tĩnh định) trong biểu thức (5 - 1)

Nếu quan niệm hệ gồm 4 chu vi kín như trên hình vẽ (H.5.1x) thì bậc siêu tĩnh của hệ n = 12. Đây là quan niệm sai vì trái đất tạo thành 1 chu vi kín. Quan niệm hệ gồm 3 chu vi kín như trên hình (H.5.1y) là quan niệm đúng. Và n = 3.3 – 0 = 9



H.5.1x



H.5.1y

§2. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

I. Hệ cơ bản của phương pháp lực:

Hệ cơ bản của phương pháp lực là hệ được suy ra từ hệ đã cho bằng cách loại bỏ một số hay tất cả các liên kết thừa.

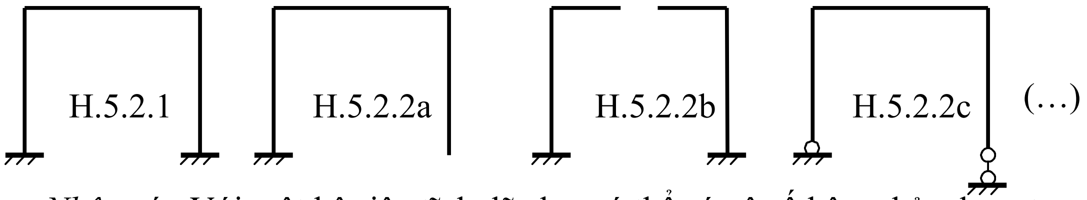
+ Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản sẽ là hệ tĩnh định. (thường sử dụng cách này)

+ Nếu loại bỏ một số các liên kết thừa thì hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh bậc thấp hơn.

Yêu cầu: Hệ cơ bản phải là hệ bất biến hình và nên thuận tiện cho việc tính tính toán.

Ví dụ: Lập hệ cơ bản phương pháp lực của hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.2.1)

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh n = 3. Với hệ cơ bản là tĩnh định có thể được tạo như trên các hình (H.5.2.2abc)

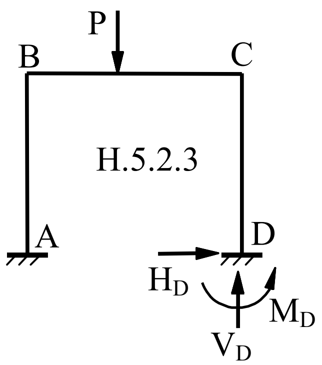
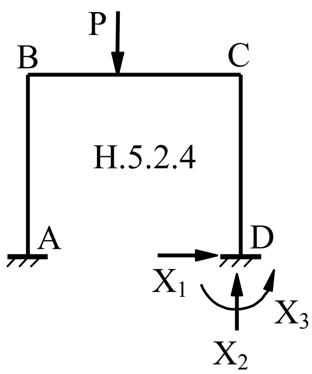


Nhận xét: Với một hệ siêu tĩnh đã cho, có thể có vô số hệ cơ bản được tạo ra.

II. Hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực:

Khi tính hệ siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính hệ cơ bản của nó. Tuy nhiên, hệ cơ bản và hệ ban đầu là có sự khác nhau. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu của nó ta cần so sánh và bổ sung thêm các điều kiện.

Ta đi so sánh hệ siêu tĩnh (H5.2.3) và hệ cơ bản của nó (H5.2.4)

Hệ siêu tĩnh	Hệ cơ bản
	
-Tại D tồn tại các phản lực $\{V_D, H_D, M_D\}$. -Tại D không tồn tại chuyển vị	-Tại D không tồn tại phản lực -Tại D nói chung là tồn tại chuyển vị $\{\Delta x_D, \Delta y_D, \Delta\varphi_D\}$

Vậy để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu thì trên hệ cơ bản cần:

+ Đặt thêm vào D các lực (X_1, X_2, X_3) tương đương thay thế (H_D, V_D, M_D).

+ Thiết lập điều kiện chuyển vị tại D do (X_1, X_2, X_3, P) gây ra bằng không:

$$\begin{cases}\Delta x_D(X_1,X_2,X_3,P)=0\\ \Delta y_D(X_1,X_2,X_3,P)=0\\ \Delta\varphi_D(X_1,X_2,X_3,P)=0\end{cases}$$

Tổng quát: Cho hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân: tải trọng (P), biến thiên nhiệt độ (t), chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa (Z) và chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ n liên kết thừa. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu, trên hệ cơ bản cần:

+ Đặt thêm các lực ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ, có chiều tùy ý. Những lực này chưa biết và giữ vai trò ẩn số.

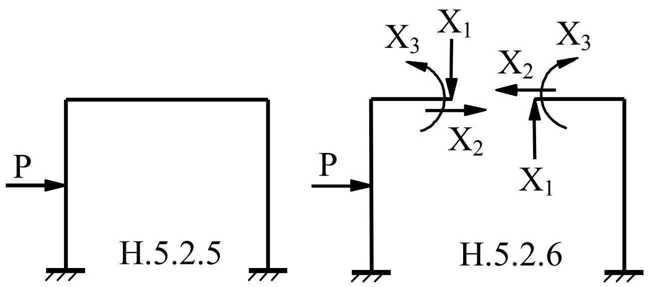
+ Thiết lập điều kiện chuyển vị tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ do các nguyên nhân ($X_1, X_2 \ldots X_n$, P, t, Z) = 0 (chính xác hơn là bằng như trên hệ siêu tĩnh ban đầu). Điều kiện này có thể viết dưới dạng:

$$\begin{cases} \Delta X_1(X_1, X_2, \ldots X_n, P, t, Z) = 0 \\ \Delta X_2(X_1, X_2, \ldots X_n, P, t, Z) = 0 \\ \ldots\ldots \\ \Delta X_n(X_1, X_2, \ldots X_n, P, t, Z) = 0 \end{cases} \qquad (5\text{-}2)$$

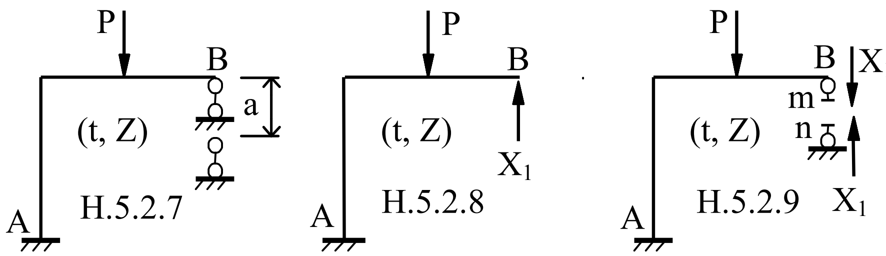
Hệ (5-2) gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực.

**Chú ý:*

- Nếu tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng thì trên hệ cơ bản phải đặt vào những cặp lực lực trực đối nhau tại các liên kết bị loại bỏ và điều kiện chuyển vị chính là chuyển vị tương đối giữa 2 tiết diện 2 bên liên kết bị loại bỏ bằng không. Ví dụ hệ cơ bản (H.5.2.6) của hệ trên hình (H.5.2.5)



- Trường hợp liên kết trong hệ chịu chuyển vị cưỡng bức và khi tạo hệ cơ bản ta loại bỏ liên kết này. Ví dụ xét hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.2.7) và hệ cơ bản của nó trên hình (H.5.2.8).



Lúc này chuyển vị tại B theo phương X_1 sẽ bằng chuyển vị cưỡng bức. Hệ phương trình cơ bản sẽ là:

$$\Delta X_1(X_1, P, t, Z) = -a.$$

Lấy dấu âm trước a khi X_1 ngược chiều chuyển vị cưỡng bức.

- Cũng trong trường hợp chuyển vị cưỡng bức nhưng nếu tạo hệ cơ bản bằng cách bỏ liên kết này, ví dụ hệ cơ bản tạo trên hình (H.5.2.9).

Có thể xem đây là trường hợp loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng nên trên hệ cơ bản ta đặt thêm cặp X_1. Dù rằng tại tiết diện bị cắt m, n có tồn tại chuyển vị do liên kết bị chuyển vị cưỡng bức nhưng chuyển vị tương đối của chúng theo phương X_1 vẫn bằng không nên hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_1(X_1, P\ t, Z) = 0$$

III. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực:

Xét phương trình thứ k của hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_k(X_1, X_2 .... X_n, P, t, Z) = 0$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, khai triển:

$$\Delta X_k(X_1) + \Delta X_k(X_2) + ... \Delta X_k(X_n) + \Delta X_k(P) + \Delta X_k(t) + \Delta X_k(Z) = 0$$

Gọi δ_{km} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương X_k do riêng $X_m = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$\Delta X_k(X_m) = \delta_{km}.X_m$$

Gọi Δ_{kp}, Δ_{kt}, Δ_{kZ} lần lượt là chuyển vị tương ứng vị trí và phương X_k do riêng P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$\Delta X_k(P) = \Delta_{kP}$, $\Delta X_k(t) = \Delta_{kt}$, $\Delta X_k(Z) = \Delta_{kZ}$

Cho m = $\overline{1,n}$ và thay tất cả vào, ta được:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + ...+ \delta_{kn}X_n + \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{kZ} = 0$$

Cho k = $\overline{1,n}$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ...\delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1z} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ...\delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} + \Delta_{2t} + \Delta_{2z} = 0 \\ ..... \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ...\delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} + \Delta_{nz} = 0 \end{cases} \quad (5\text{-}3)$$

Hệ phương trình (5-3) gọi là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực với các ẩn số ($X_1,X_2,...X_n$).

Trong đó:

δ_{kk} gọi là hệ số chính, $\delta_{kk} > 0$

δ_{km} ($k \neq m$) gọi là hệ số phụ, $\delta_{km} = \delta_{mk}$

Δ_{kp}, Δ_{kt}, Δ_{kZ} là các số hạng tự do.

IV. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Như đã nói trong phần hệ phương trình chính tắc, ý nghĩa của các hệ số và các số hạng tự do là chuyển vị trên hệ cơ bản do các nguyên nhân tương ứng gây ra. Vậy việc xác định chúng là đi thực hiện bài toán tìm chuyển vị.

1. Hệ số chính và phụ:(δ_{km})

+ Trạng thái "m": tính hệ cơ bản chịu nguyên nhân $X_m = 1$. Xác định nội lực $\overline{M}_m, \overline{N}_m, \overline{Q}_m$

+ Tạo trạng thái "k": đặt lực $P_k = 1$ tương ứng phương và vị trí của lực X_k trên hệ cơ bản. Xác định nội lực $\overline{M}_k$, $\overline{N}_k, \overline{Q}_k$. Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\delta_{km} = \sum\int \overline{M}_k.\frac{\overline{M}_m}{EJ}ds + \sum\int \overline{N}_k.\frac{\overline{N}_m}{EF}ds + \sum\int \nu\overline{Q}_k.\frac{\overline{Q}_m}{GF}ds \quad (5\text{-}4)$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\delta_{km} = (\overline{M}_m)(\overline{M}_k) + (\overline{N}_m)(\overline{N}_k) + (\overline{Q}_m)(\overline{Q}_k) \quad (5\text{-}5)$$

2. Số hạng tự do:

a. Do tải trọng: (Δ_{kp})

+ Trạng thái "m": Tính hệ cơ bản chịu tải trọng. Xác định nội lực: M_P^o, N_P^o, Q_P^o

+ Tạo trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km}.

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kP} = \sum\int \overline{M}_k.\frac{M_P^o}{EJ}ds + \sum\int \overline{N}_k.\frac{N_P^o}{EF}ds + \sum\int \nu\overline{Q}_k.\frac{Q_P^o}{GF}ds \quad (5\text{-}6)$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\Delta_{kP} = (\overline{M}_m)(M_P^o) + (\overline{N}_m)(N_P^o) + (\overline{Q}_m)(Q_P^o) \quad (5\text{-}7)$$

b. Do biến thiên nhiệt độ (Δ_{kt}):

+ Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân biến thiên nhiệt độ. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này sẽ không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

+ Trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km}

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kt} = \sum\int \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\overline{M}_k ds + \sum\int \alpha t_{cm}\overline{N}_k ds \quad (5\text{-}8)$$

Trong trường hợp α, h, t_{2m}, t_{1m}, t_{cm} = const trên từng đoạn thanh thì:

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M}_k) + \sum \alpha t_{cm}\Omega(\overline{N}_k) \quad (5\text{-}9)$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng, xem trong chương chuyển vị.

c. Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: (Δ_{kz})

- Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bứccủa các gối tựa. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

- Trạng thái "k": tương tự khi xác định δ_{km}, nhưng chỉ xác định $\overline{R}_{jk}$.

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kZ} = -\sum \overline{R}_{jk}.Z_j \quad (5\text{-}10)$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng, xem trong chương chuyển vị.

**Chú ý:* Nếu lực X_k lấy bằng 1 thì có thể lấy X_k thay thế cho P_k = 1 khi tạo trạng thái "k" để xác định các hệ số.

V. Cách tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh:

a. Cách tính trực tiếp:

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc xác định các ẩn số X_k ($k = \overline{1,n}$), ta xem chúng như các ngoại lực tác dụng lên hệ cơ bản cùng với các nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu. Giải hệ cơ bản chịu các nguyên nhân này sẽ tìm được các nội lực của hệ. Vì hệ cơ bản thường là hệ tĩnh định nên có thể sử dụng các phương pháp đã quen biết để tìm nội lực.

b. Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

Xét 1 đại lượng nghiên cứu S nào đó (nội lực, phản lực, chuyển vị, biểu đồ nội lực...). Theo cách tính trực tiếp nói trên, ta có thể thay thế việc xác định S trên hệ siêu tĩnh bằng cách xác định đại lượng S trên hệ cơ bản chịu nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu và các lực X_k đồng thời tác dụng.

$$S = S(X_1, X_2,... X_n, P, t, Z)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

$$S = S(X_1) + S(X_2) + ... S(X_n) + S(P) + S(t) + S(Z)$$

Gọi $\overline{S}_k$ là đại lượng S do riêng X_k = 1gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$S(X_k) = \overline{S}_k.X_k$$

Gọi S_P^o, S_t^o, S_Z^o lần lượt là đại lượng S do riêng P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản, thế thì:

$$S(P) = S_P^o,\ S(t) = S_t^o,\ S(Z) = S_Z^o$$

Cho k = $\overline{1,n}$ thay tất cả vào ta được:

$$S = \overline{S}_1.X_1 + \overline{S}_2.X_2 + ...\overline{S}_n.X_n + S_p^o + S_t^o + S_Z^o \qquad (5\text{-}11)$$

Chú ý:

- Đại lượng S có thể được xác định ngay nếu có sẵn $\overline{S}_k, S_P^o, S_t^o, S_Z^o$

- Nếu đại lượng S là phản lực hay nội lực và hệ cơ bản là tĩnh định thì các đại lượng S_P^o, S_t^o, S_Z^o sẽ không tồn tại.

Sau đây ta sẽ vận dụng biểu thức (5-11) để vẽ các biểu đồ nội lực.

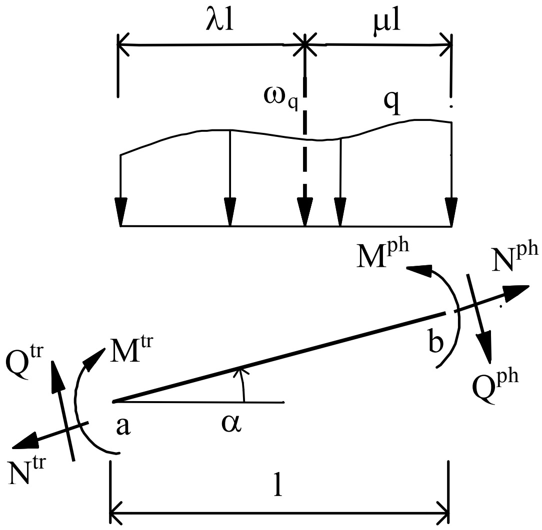
a. Biểu đồ mômen uốn (M):

Đối với những hệ dầm và khung gồm những thanh thẳng, trong các bước tính toán trung gian, người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị. Do đó, khi xác định các hệ số người ta không vẽ các biểu đồ (Q), (N) mà chỉ vẽ biểu đồ mômen (M). Trong những trường hợp này, biểu đồ mômen của hệ được vẽ theo biểu thức (5-11) là tiện lợi nhất. Thay đại lượng S bằng biểu đồ (M) ta được:

$$(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2 + ...(\overline{M}_n).X_n + (M_p^o) + (M_t^o) + (M_Z^o) \qquad (5\text{-}12)$$

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

Như phân tích trên, sẽ không thuận lợi nếu vẽ biểu đồ (Q) theo biểu thức (5-11). Sau đây sẽ trình bày cách vẽ biểu đồ lực cắt theo biểu đồ (M) đã vẽ. Để tiện lợi cho việc áp dụng, ta đi thiết lập công thức tổng quát xác định lực cắt ở 2 đầu 1 đoạn thanh thẳng ab tách ra từ hệ chịu tải trọng phân bố liên tục hướng theo 1 phương bất kỳ và có qui luật bất kỳ như trên hình vẽ (H.5.2.10)



H.5.2.10

Tải trọng tác dụng được mô tả trên (H.5.2.10). Trong đó q, M^{tr}, M^{ph} đã biết, Q^{tr}, N^{tr}, Q^{ph}, N^{ph} chưa biết, giả thiết có chiều dương theo vị trí người quan sát nhìn sao cho tải trọng phân bố q hướng xuống.

Từ các điều kiện cân bằng mômen với điểm b và a, ta suy ra:

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha + \mu.\omega_q \cos\alpha$$

$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha - \lambda.\omega_q \cos\alpha \qquad (5\text{-}13)$$

Trong đó:

ω_q: là hợp lực của tải phân bố q trên đoạn thanh ab.

λl, μl: lần lượt là khoảng cách từ hợp lực ω_q đến đầu trái và phải của thanh ab theo phương nằm ngang.

Nếu tải trọng tác dụng lên thanh ab là phân bố đều:

$$q = \text{const thì } \omega_q = ql,\ \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

Thay vào biểu thức (5-13)

$$\begin{aligned} Q^{tr} &= \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha + \frac{1}{2}ql.\cos\alpha \\ Q^{ph} &= \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha - \frac{1}{2}ql\cos\alpha \end{aligned} \qquad (5\text{-}14)$$

Nếu trên đoạn thanh ab không chịu tải trọng: q = 0 thì ω_q= 0. Thay vào biểu thức (5-13):

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha \qquad (5\text{-}15)$$

Sau khi xác định được lực cắt từ hai đầu mỗi đoạn thanh cũng chính là tại các tiết diện đặc trưng, tiến hành vẽ biểu đồ lực cắt dựa vào dạng đường của nó như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

c. Biểu đồ lực dọc:

Cũng tương tự cho biểu đồ (Q), biểu đồ lực dọc (N) được vẽ bằng cách suy ra từ biểu đồ lực cắt. Cách thực hiện như sau:

Tách và xét cân bằng hình chiếu cho mỗi nút của hệ sao cho tại mỗi nút có không quá 2 lực dọc chưa biết. Khi khảo sát cân bằng, ngoài tải trọng tác dụng lên nút còn có nội lực tại các đầu thanh quy tụ vào nút bao gồm: mômen uốn (đã biết nhưng không cần quan tâm), lực cắt (đã biết, lấy trên biểu đồ lực cắt), lực dọc (chưa biết, giả thiết có chiều dương)

Ngoài ra, khi xác định lực dọc cũng có thể vận dụng mối quan hệ giữa lực dọc tại hai đầu thanh từ điều kiện của thanh được vẽ trên hình (H.5.2.10).

$$N^{ph} = N^{tr} + \omega_q.\sin\alpha \qquad (5\text{-}16)$$

Từ phương trình (5-16) cho thấy nếu trên đoạn thanh không chịu tải trọng hoặc tải trọng tác dụng vuông góc với trục thanh thì lực dọc tại 2 đầu sẽ bằng nhau và cùng gây kéo hoặc gây nén.

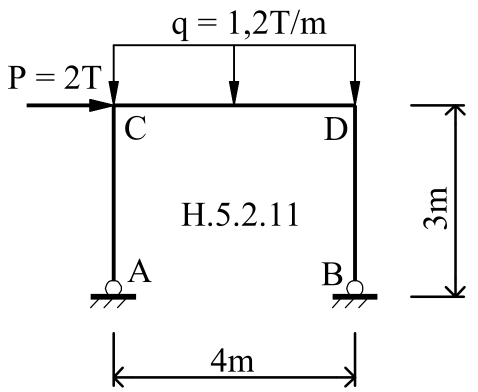
Sau khi xác định được lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn thanh, tiến hành vẽ biểu đồ lực dọc như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

CÁC VÍ DỤ VỀ PHƯƠNG PHÁP LỰC

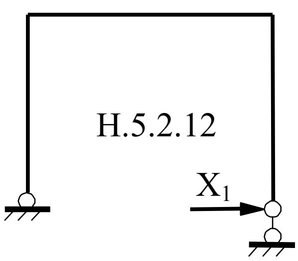
Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực trên hình (H.5.2.11). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là EJ, trong thanh ngang là 2EJ. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Bậc siêu tĩnh:

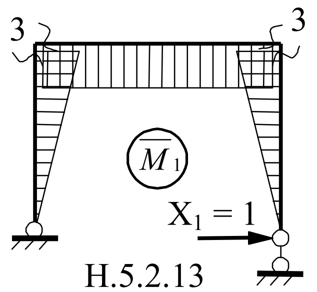
n = 3V - K = 3.1 - 2 = 1



H.5.2.11



H.5.2.12

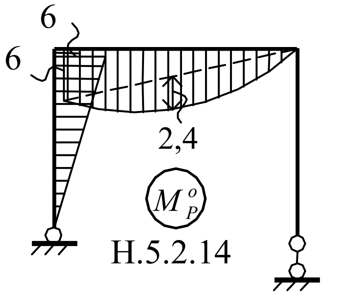


H.5.2.13

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.12)
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$



H.5.2.14

3. Xác địnhcác hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\overline{M}_1),(M_p^o)$: (H.5.2.13 & 14)

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1).(\overline{M}_1) = \left[\frac{1}{\text{EJ}}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right].2 + \frac{1}{2EJ}.3.4.3 = \frac{36}{EJ}$$

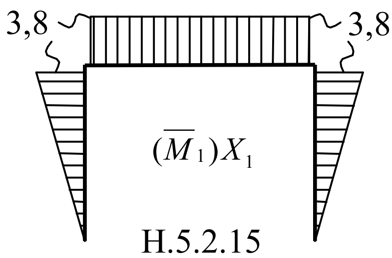
$$\Delta_{1p} = (\overline{M}_1).(M_p^o) = \frac{1}{\text{EJ}}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.6 + \frac{1}{2EJ}\left[\frac{6.4}{2} + \frac{2}{3}.4.2,4\right].3 = \frac{45,6}{EJ}$$

Thay vào phương trình chính tắc:

$$\frac{36}{EJ}.X_1 + \frac{45,6}{EJ} = 0 \rightarrow X_1 = \frac{-45,6}{36} = -1,266 < 0$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (M_p^o)$



H.5.2.15

$(\overline{M}_1).X_1$: lấy tung độ trên biểu đồ $(\overline{M}_1)$ nhân với giá trị X_1 = -1,266. Dấu "-" có nghĩa là ta phải đổi dấu của tung độ sau khi nhân vào. Kết quả trên hình vẽ (H5.2.15). Sau đó lấy tổng đại số các tung độ trên 2 biểu đồ $(\overline{M}_1)X_1$ và (M_p^o) sẽ được biểu đồ (M). Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.16)

b. Lực cắt: Được vẽ bằng cách suy ra từ (M)

- Trên đoạn AC: q = 0

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha = \frac{2,2-0}{3}.1 = 0,733$$

- Trên đoạn BD: q = 0

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha = \frac{3,8-0}{3}.1 = 1,266$$

- Trên đoạn CD: q = const

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha + \frac{1}{2}ql\cos\alpha = \frac{-3,8-(2,2)}{4}.1 + \frac{1}{2}.1,2.4 = 0,9$$

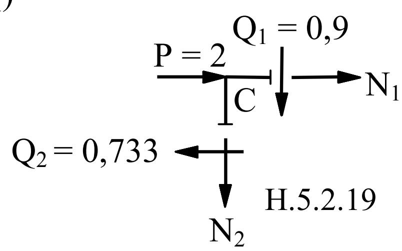
$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha - \frac{1}{2}ql\cos\alpha = \frac{-3,8-(2,2)}{4}.1 - \frac{1}{2}.1,2.4 = -3,9$$

Dựng các tung độ vừa tính và vẽ biểu đồ (Q) như trên hình vẽ (H5.2.17)

c. Lực dọc: Suy ra từ các biểu đồ lực cắt: (Q)

- Tách nút C:

$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \rightarrow N_1 = Q_2 - P = -1,266 \\ \Sigma Y = 0 \rightarrow N_2 = -Q_1 = -0,9 \end{cases}$$



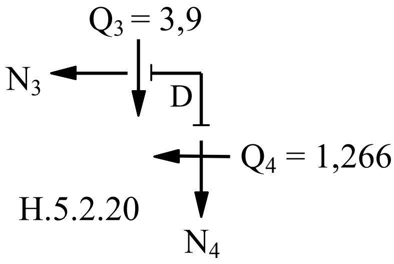
H.5.2.19

- Tách D:

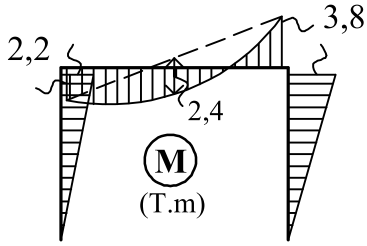
$$\begin{cases}\Sigma X = 0 \rightarrow N_3 = -Q_4 = -1{,}266 \\ \Sigma Y = 0 \rightarrow N_4 = -Q_3 = -3{,}9\end{cases}$$

N_1 giống N_3 theo quan hệ lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn. Suy ra lực dọc tại A và C theo N_2 và N_4.

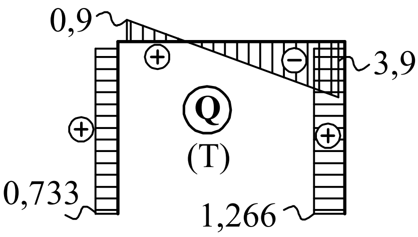
Kết quả biểu đồ (N) được vẽ trên hình vẽ (H5.2.18)



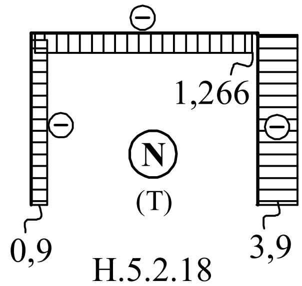
H.5.2.20



H.5.2.16

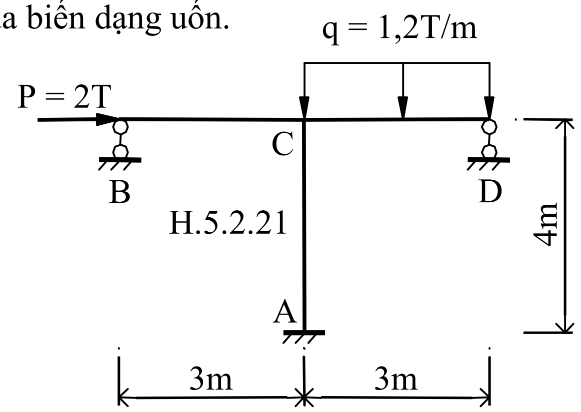


H.5.2.17

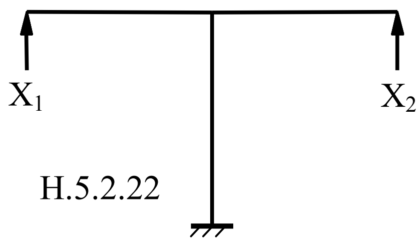


H.5.2.18

Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.5.2.21). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là 2EJ, trong các thanh ngang là EJ. Chỉ xét đến ảnh hưởng của biến dạng uốn.



H.5.2.21



H.5.2.22

1. Bậc siêu tĩnh:

$n = 3V - K = 3.2 - 4 = 2$

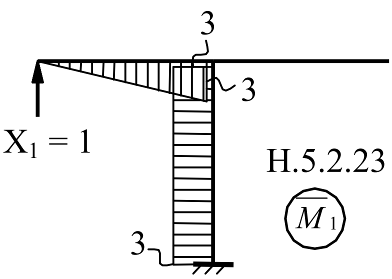
2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H.5.2.22)
- Hệ phương trình chính tắc:

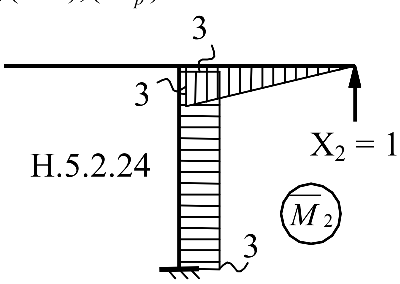
$$\begin{cases}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0\end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

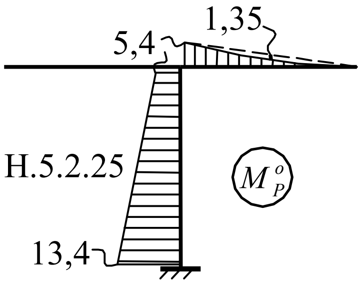
-Vẽ các biểu đồ $(\overline{M}_1), (\overline{M}_2), (M_p^o)$



H.5.2.23



H.5.2.24



H.5.2.25

-Xác định các hệ số:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \frac{1}{EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3 + \frac{1}{2EJ}.3.4.3 = \frac{27}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_2) = -\frac{1}{2EJ}.3.4.3 = -\frac{18}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2)(\overline{M}_2) = \delta_{11} = \frac{27}{EJ}$$

$$\Delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M_P^o) = \frac{1}{2EJ}.\frac{13,4+5,4}{2}.4.3 = \frac{56,4}{EJ}$$

$$\Delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M_P^o) = -\Delta_{1P} - \frac{1}{EJ}.\frac{5,4.3}{2}.\frac{2}{3}.3 + \frac{1}{EJ}.\frac{2}{3}.3.1,35.\frac{3}{2} = -\frac{68,55}{EJ}$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc sau khi đã bỏ đi EJ dưới mẫu số:

$$\begin{cases} 27.X_1 - 18.X_2 + 56,4 = 0 \\ -18.X_1 + 27.X_2 - 68,55 = 0 \end{cases} \text{ Giải ra được } \begin{cases} X_1 = -0,713 < 0 \\ X_2 = 2,063 > 0 \end{cases}$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2 + (M_P^o)$

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.28)

b. Lực cắt: Suy ra từ biểu đồ (M)

- Trên đoạn BC: q = 0

$$\to Q^{tr} = Q^{Ph} = \frac{-2,139-0}{3}.1 = -0,713$$

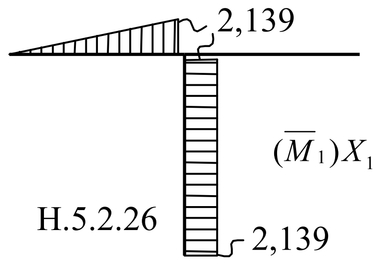
- Trên đoạn AC: q = 0

$$\to Q^{tr} = Q^{Ph} = \frac{2,928-(-5,072)}{4}.1 = 2$$

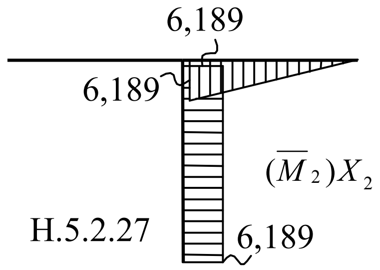
- Trên đoạn CD: q = const.

$$Q^{tr} = \frac{0-0,789}{3}.1 + \frac{1}{2}.1,2.3.1 = 1,537$$

$$Q^{ph} = \frac{0-0,789}{3}.1 - \frac{1}{2}.1,2.3.1 = -2,063$$



H.5.2.26



H.5.2.27

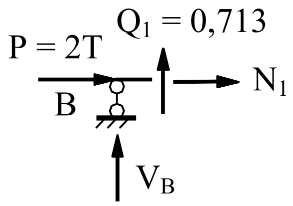
Kết quả vẽ biểu đồ lực cắt thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.29)

c. Lực dọc (N):Suy ra từ biểu đồ (Q)

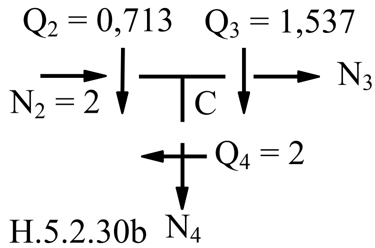
* Tách và xét cân bằng B.

* Tách và xét cân bằng C.

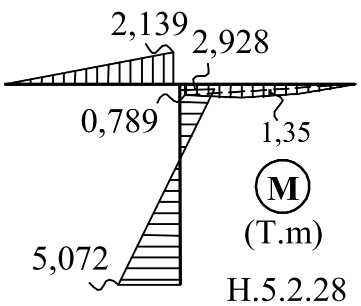
Sau đó suy ra lực dọc tại các đầu thanh còn lại và vẽ được biểu đồ (N) như trên hình vẽ (H.5.2.31).



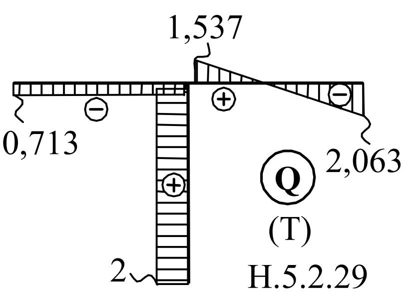
H.5.2.30a



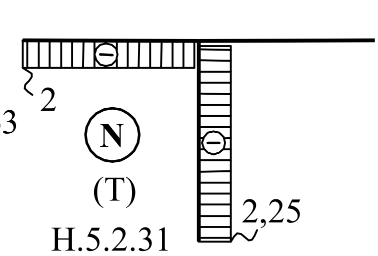
H.5.2.30b



H.5.2.28



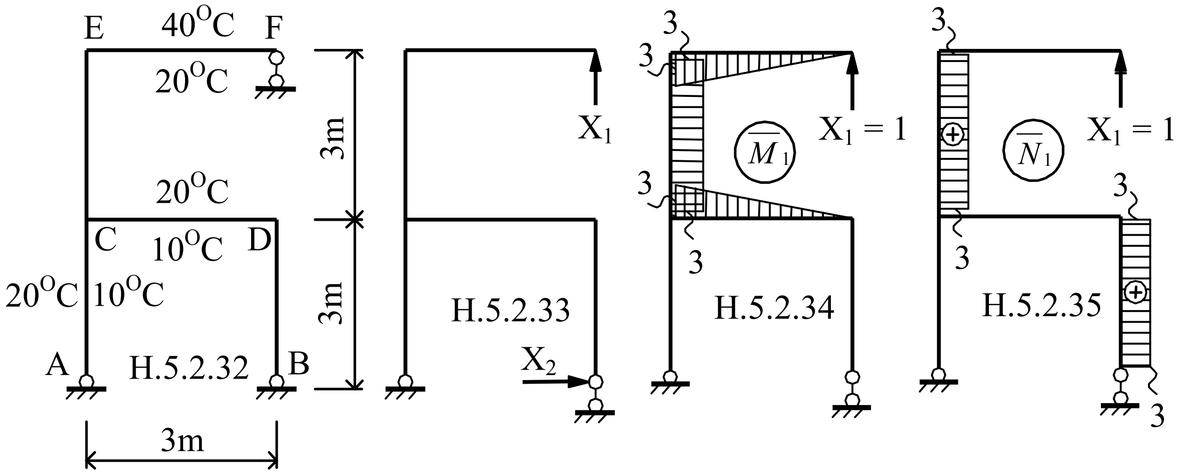
H.5.2.29



H.5.2.31

Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực trên hình vẽ (H.5.2.32).

Số liệu: α = $1{,}2.10^{-5}.C^{-1}$; thanh ngang có độ cứng 2EJ, h = 0,4m; thanh đứng là EJ, h = 0,3m; EJ = $1080T.m^2$



1. Bậc siêu tĩnh:

n = 3K - V = 3.2 - 4 = 2

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.33).
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0\\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0\end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

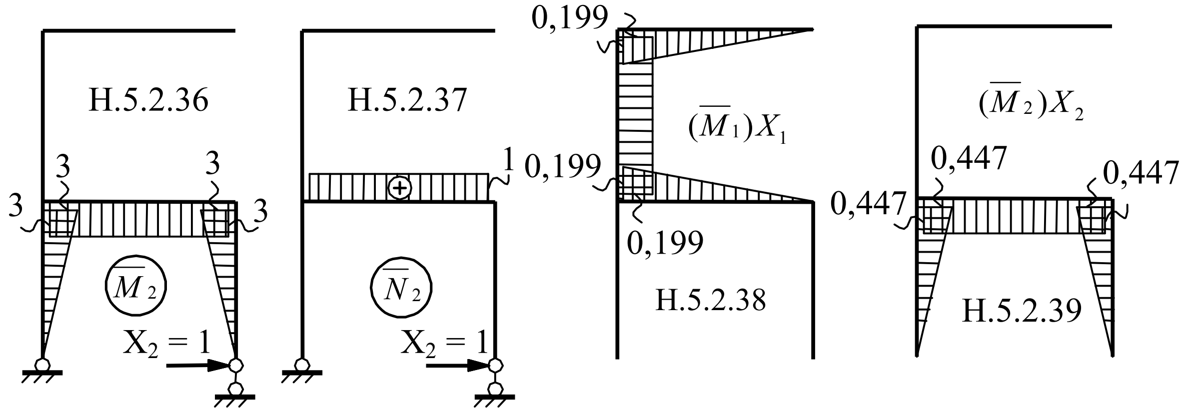
-Vẽ các biểu đồ $(\overline{M}_1),(\overline{N}_1),(\overline{M}_2),(\overline{N}_2)$

Kết quả thể hiện trên các hình vẽ (H.5.2.34 → H.2.2.37)

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \left[\frac{1}{2EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right].2 + \frac{1}{EJ}.3.4.3 = \frac{36}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_2) = -\frac{1}{2EJ}.\frac{3.3}{2}.3 = -\frac{27}{4EJ} = \frac{-6{,}25}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2)(\overline{M}_2) = \left[\frac{1}{EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right].2 + \frac{1}{2EJ}.3.3.3 = \frac{31{,}5}{EJ}$$



$$\Delta_{1t} = \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_1) + \Sigma\alpha.t_c.\Omega(\overline{N}_1) =$$

$$= \frac{\alpha}{0,4}(10-20)(-\frac{3.3}{2}) + \frac{\alpha}{0,4}(20-40)(+\frac{3.3}{2}) = -112,5\alpha = -0,00135$$

$$\Delta_{2t} = \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_2) + \Sigma\alpha.t_c.\Omega(\overline{N}_2)$$

$$= \frac{\alpha}{0,4}(10-20)(3.3) + \frac{\alpha}{0,3}(10-20)(\frac{3.3}{2}) + \alpha.\frac{10+20}{2}.(1.3) = -330\alpha = -0,00396$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \dfrac{36}{EJ}.X_1 - \dfrac{6,25}{EJ}X_2 - 0,00135 = 0 \\ \dfrac{-6,25}{EJ}.X_1 - \dfrac{31,5}{EJ}X_2 - 0,00396 = 0 \end{cases}$$ Thay EJ = 1080 vào, giải ra $\begin{cases} X_1 = 0,0663 \\ X_2 = 0,148 \end{cases}$

4. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2$

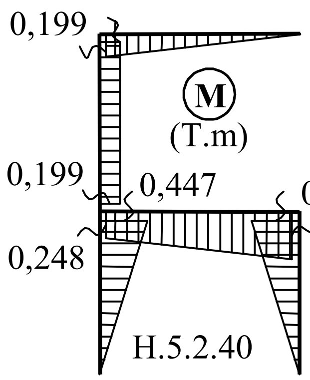
Ở đây $(M_P^o), (M_t^o), (M_Z^o)$ không tồn tại

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.40)

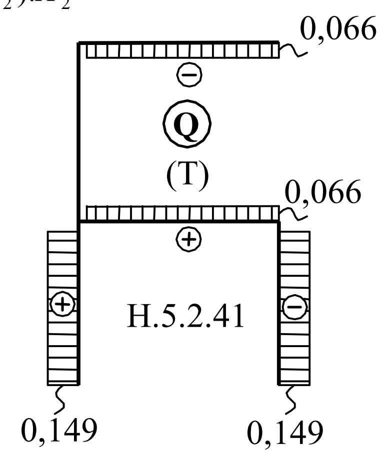
b. Biểu đồ lực cắt và lực dọc: tương tự ví dụ trước. Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.41 & H.5.2.42).

* *Chú ý:* Ở đây có thể vẽ ngay biểu đồ (N) bằng cách:

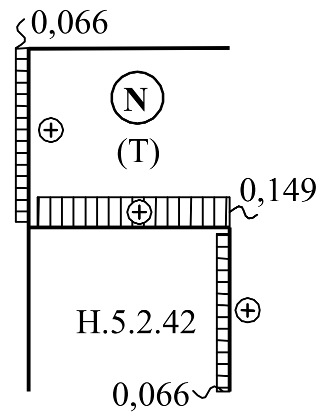
$(N) = (\overline{N}_1).X_1 + (\overline{N}_2).X_2$



H.5.2.40



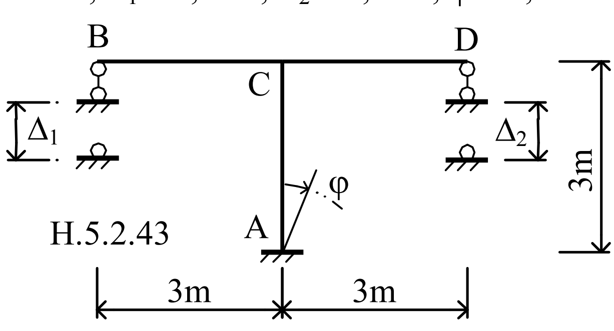
H.5.2.41



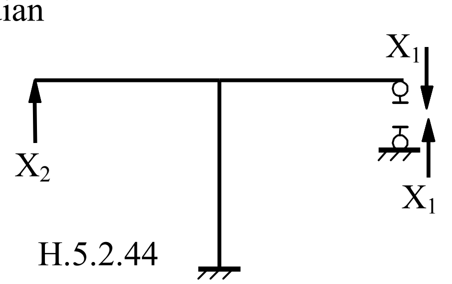
H.5.2.42

Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình vẽ (H.5.2.43).

Cho biết độ cứng trong các thanh ngang là EJ, thanh đứng là 2EJ và EJ = 1080T.m^2, Δ_1 = 0,03m, Δ_2 = 0,02m, φ = 0,005radian



H.5.2.43



H.5.2.44

1. Bậc siêu tĩnh: n = 3V - K = 3.2 - 4 = 2

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

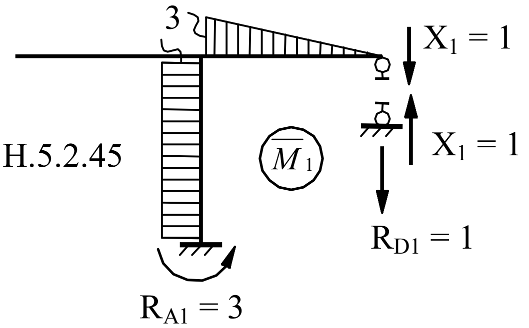
- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H5.2.44)

- Hệ phương trình chính tắc:

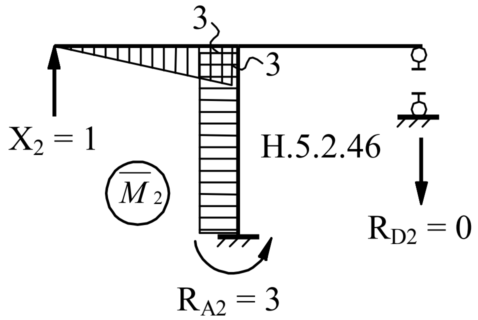
$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1Z}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2Z}=-\Delta_1=-0{,}03\end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

-Vẽ $(\overline{M}_1)(\overline{M}_2)$, xác định các $\overline{R}_{jk}$. Xem hình (H.5.2.45 & H.5.2.46).



H.5.2.45



H.5.2.46

$$\delta_{11}=(\overline{M}_1)(\overline{M}_1)=\frac{1}{EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3+\frac{1}{2EJ}.3.3.3=\frac{22{,}5}{EJ}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=(\overline{M}_1)(\overline{M}_2)=\frac{1}{2EJ}.3.3.3=\frac{13{,}5}{EJ}$$

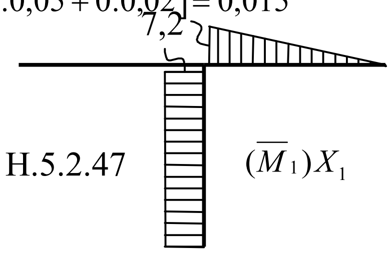
$$\delta_{22}=(\overline{M}_2)(\overline{M}_2)=\frac{22{,}5}{EJ}$$

$$\Delta_{1Z}=-\Sigma\overline{R}_{j1}.Z_j=-\left[\overline{R}_{A1}.\varphi+\overline{R}_{D1}.\Delta_2\right]=-\left[-3.0{,}005+1.0{,}02\right]=-0{,}005$$

$$\Delta_{2Z}=-\Sigma\overline{R}_{jZ}.Z_j=-\left[\overline{R}_{A2}.\varphi+\overline{R}_{D2}.\Delta_2\right]=-\left[-3.0{,}05+0.0{,}02\right]=0{,}015$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases}\dfrac{22{,}5}{EJ}.X_1+\dfrac{13{,}5}{EJ}.X_2-0{,}005=0\\ \dfrac{13{,}5}{EJ}.X_1+\dfrac{22{,}5}{EJ}.X_2+0{,}015=-0{,}03\end{cases}$$

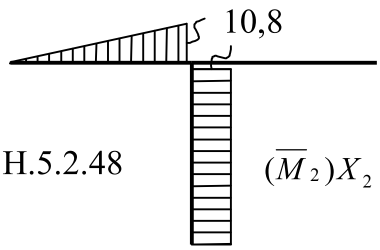


H.5.2.47

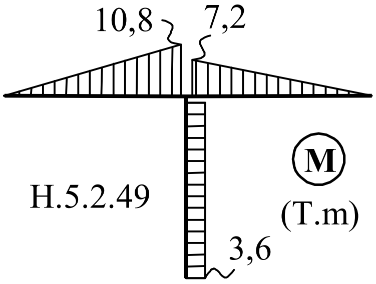
4. Vẽ biểu đồ nội lực:

- Biểu đồ momen: $(M)=(\overline{M}_1).X_1+(\overline{M}_2).X_2$

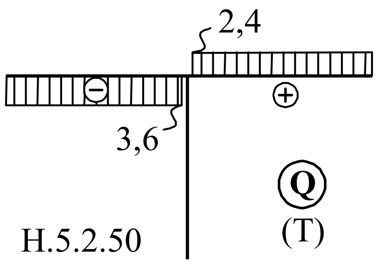
- Biểu đồ lực cắt (Q) và lực dọc (N): vẽ giống các ví dụ trước. Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.50 & H.5.2.51).



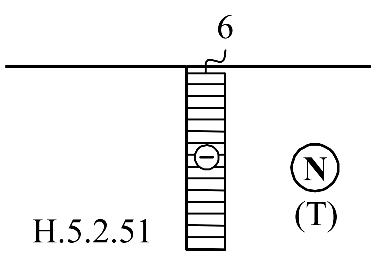
H.5.2.48



H.5.2.49



H.5.2.50



H.5.2.51

§3. XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU TĨNH

I. Nguyên tắc chung:

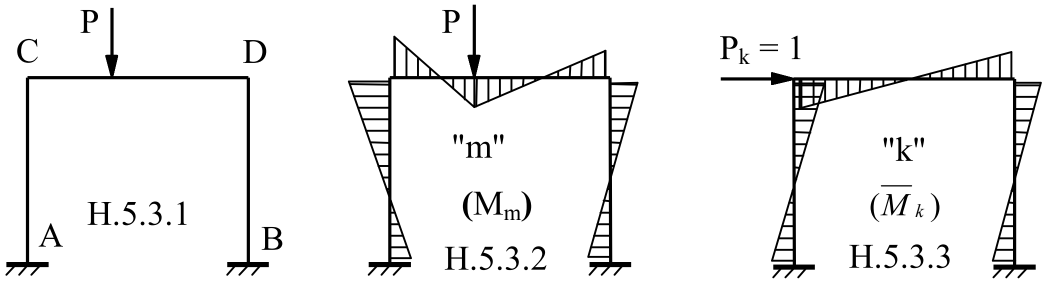
Công thức tính chuyển vị Maxwell-Morh là công thức tổng quát áp dụng cho cả hệ tĩnh định và hệ siêu tĩnh. Trong công thức này, ta phải tính hệ với 2 trạng thái:

-Trạng thái "m": là trạng thái ban đầu của hệ.

-Trạng thái "k": được tạo ra bằng cách đặt lực $P_k = 1$ tương ứng với vị trí và phương chuyển vị ở trên sơ đồ tính ban đầu của hệ.

Chẳng hạn, để xác định chuyển vị ngang tại C của hệ trên hình H.5.3.1

- Ở trạng thái "m" ta tính hệ siêu tĩnh ban đầu (H.5.3.2)
- Ở trạng thái "k" ta tính hệ siêu tĩnh đó 1 lần nữa do $P_k = 1$gây ra (H.5.3.3)

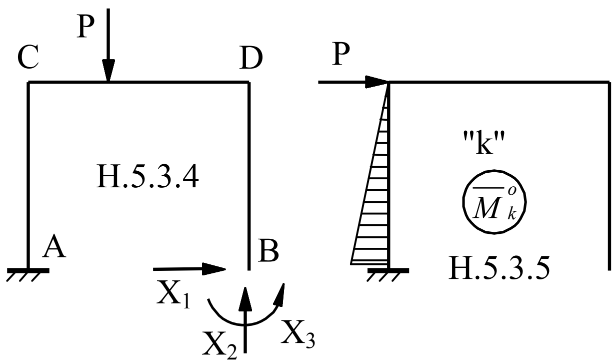


Sau khi tính giải nội lực, thực hiện công thức Morh hoặc nhân biểu đồ Vêrêxaghin sẽ được kết quả.

*Nhận xét:*Ta phải tính hệ siêu tĩnh 2 lần, khối lượng tính toán nặng nề.

II. Cách sử dụng hệ cơ bản:

Không mất tính tổng quát, ta phân tích cho bài toán xác định chuyển vị của hệ trên hình (H.5.3.1). Giả sử chọn hệ cơ bản của nó trên hình (H.5.3.4). (X_1, X_2, X_3) là nghiệm của hệ phương trình chính tắc.



Khi giải hệ trên hình (H.5.3.1) bằng hệ cơ bản trên hình (H.5.3.4) thì 2 hệ này là tương đương nhau. Nghĩa là nội lực, biến dạng và chuyển vị của 2 hệ là như nhau. Ta thử đi tìm chuyển vị trên hệ cơ bản. Để tìm chuyển vị trên hình (H.5.3.4), ở trạng thái "m" ta cũng cần phải giải tìm X_1, X_2, X_3, nghĩa là tương đương với trạng thái "m" trên hình (H.5.3.2). Tuy nhiên ở trạng thái "k" được tạo ra trên (H.5.3.5) thì tính khá dễ dàng vì là hệ tĩnh định. Lúc này, nội lực ở trạng thái "k" được ký hiệu: $\overline{M}_k^o, \overline{N}_k^o, \overline{Q}_k^o$

Vậy, khi tính chuyển vị trong hệ siêu tĩnh, ta tạo trạng thái k trên hệ cơ bản thay vì trên hệ siêu tĩnh ban đầu. Biểu thức Maxwell-Morh trong trường hợp hệ chịu các nguyên nhân (P, t, Z):

$$\Delta_{km} = \Sigma\int \frac{\overline{M}_k^o M_m}{EJ} ds + \Sigma\int \frac{\overline{N}_k^o N_m}{EF} ds + \Sigma\int \upsilon \frac{\overline{Q}_k^o Q_m}{EJ} ds - \\ - \Sigma \overline{R}_{jk}^o Z_{jm} + \Sigma\int \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\overline{M}_k^o ds + \Sigma\int \alpha t_{cm} \overline{N}_k^o ds \qquad (5\text{-}17)$$

Nếu cho phép áp dụng "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin và các đại lượng α , h, t_{2m}, t_{1m}, t_{cm} = const trên từng đoạn:

$$\Delta_{km} = (\overline{M}_k^o)(\overline{M}_m) + (\overline{N}_k^o)(\overline{N}_m) + (\overline{Q}_k^o)(\overline{Q}_m)$$

$$+\Sigma\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M}_k^o) + \Sigma\alpha t_{cm}\Omega(\overline{N}_k^o) \qquad (5\text{-}18)$$

Ý nghĩa của các đại lượng, xem ở chương chuyển vị của hệ thanh.

** Chú ý:*

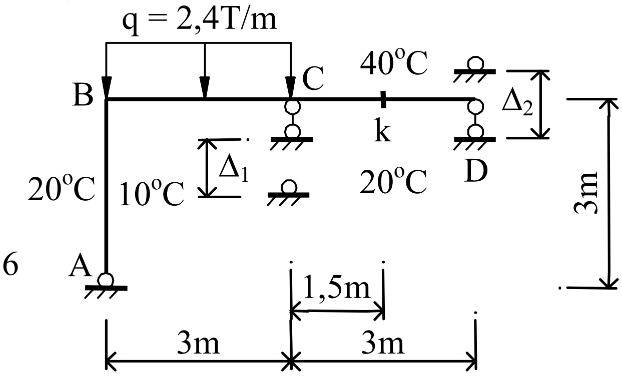
- Các đại lượng xác định ở trạng thái "k" có ký hiệu chỉ số không kèm theo là biểu thị cho việc tạo trên hệ cơ bản.

- Vì có nhiều cách tạo hệ cơ bản nên trạng thái "k" sẽ có nhiều sơ đồ tính, ta nên chọn hệ cơ bản để tạo sao cho việc tính toán và nhân biểu đồ được dễ dàng.

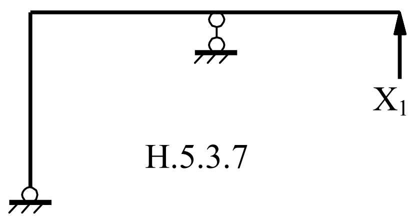
Ví dụ: -Vẽ các biểu đồ nội lực và xác định chuyển vị đứng tại k (H.5.3.6).

Cho $\alpha = 1{,}2.10^{-5}(^oC^{-1})$, độ cứng chống uốn trong thanh ngang là 2EJ, trong thanh đứng là EJ; chiều cao thanh ngang là h = 0,4m; thanh đứng là h = 0,3m; EJ = 1080T.m^2; Δ_1 = 0,02m; Δ_2 = 0,03m. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Bậc siêu tĩnh: n = 3V - K = 3.2 - 5 = 1



H.5.3.6



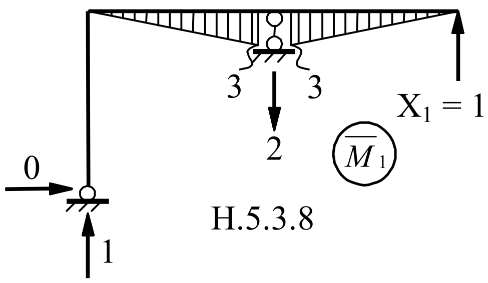
H.5.3.7

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H.5.3.7)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_{1Z} = 0{,}03$$



H.5.3.8

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

-Vẽ $(\overline{M}_1),(\overline{N}_1),(M_p^o)$, xác định các $\overline{R}_{j1}$.

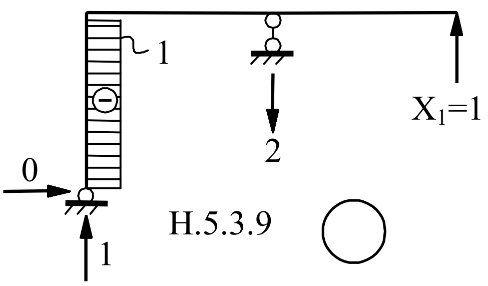
$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \left[\frac{1}{2EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right].2 = \frac{9}{EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\overline{M}_1)(M_p^o) = \frac{1}{2EJ}.\frac{2}{3}.3.2{,}7.\frac{1}{2}.3 = \frac{4{,}05}{EJ}$$

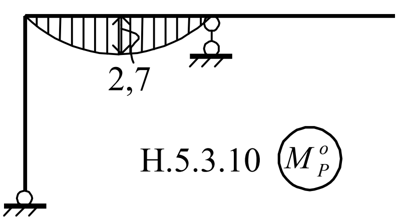
$$\Delta_{1t} = \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_1) + \Sigma\alpha.t_c.\Omega(\overline{N}_1)$$

$$= \frac{\alpha}{0{,}4}(10-20)(-\frac{3.3}{2}) + \frac{\alpha}{0{,}4}(20-40)(-\frac{3.3}{2})$$

$$= -112{,}5\alpha = -0{,}00135$$



H.5.3.9



H.5.3.10

$\Delta_{1t} = -\Sigma\overline{R}_{j1}.Z_{jm} = -\left[\overline{R}_{c1}.\Delta_1\right] = -[2.0,02] = -0,04$

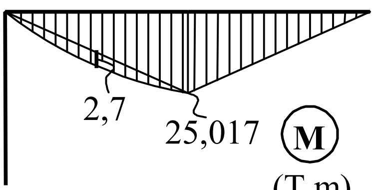
Thay vào: $\frac{9X_1}{EJ} + \frac{4,05}{EJ} = -0,00324 - 0,04 = 0,03$

Thay EJ và giải $X_1 = 8,339 > 0$

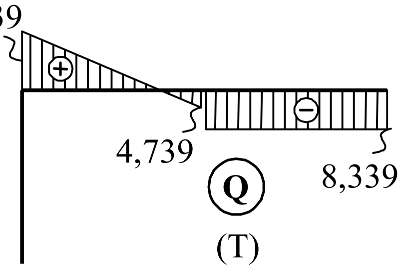
4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (M_p^o)$

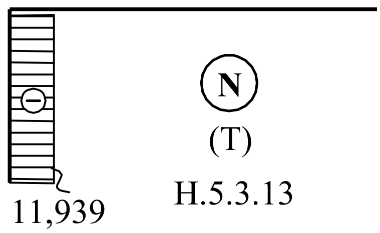
Lực cắt và lực dọc: Tương tự các ví dụ trên. Kết quả thể hiên trên hình vẽ (H.5.3.12 & H.5.3.13).



H.5.3.11



H.5.3.12

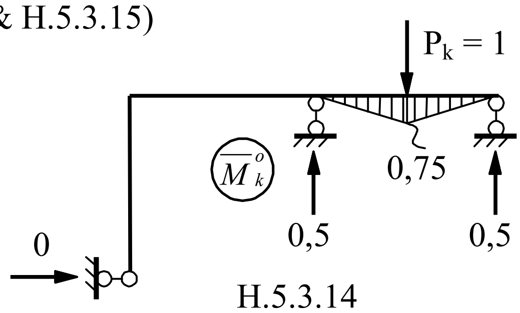


H.5.3.13

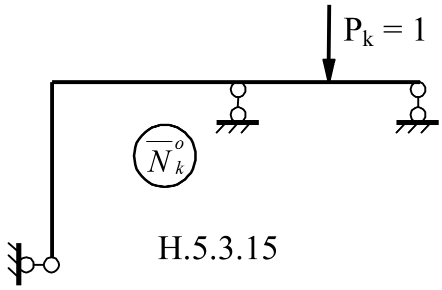
5. Xác định chuyển vị đứng tại k:

- Trạng thái "m": Biểu đồ mômen (M_m) đã vẽ ở trên.

- Trạng thái "k": vẽ $(\overline{M}_k^o),(\overline{N}_k^o)$ trên 1 hệ cơ bản chọn như trên hình (H.5.3.14 & H.5.3.15)



H.5.3.14



H.5.3.15

- Xác định chuyển vị đứng tại k:

$$y_k = (\overline{M}_k^o)(M_m) - \Sigma\overline{R}_{jk}^o Z_{jm} + \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M}_k^o) + \Sigma\alpha t_{cm}\Omega(\overline{N}_k^o)$$

$$= \frac{1}{2EJ}.\frac{0.75.3}{2}.\frac{25,017}{2} - \left[-0,5.0,02 + 0,05.0,03\right] + \frac{\alpha}{0,4}(20-40)(\frac{0,75.3}{2})$$

$$= \frac{7,036}{EJ} - 0,005 - \frac{22,5\alpha}{0,4} = 0,839(mm) > 0$$

§4. KIỂM TRA KẾT QUẢ TÍNH TOÁN CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

Do phải thực hiện nhiều phép tính trung gian khi giải hệ siêu tĩnh nên dễ mắc phải những sai số lớn hoặc sai lầm trong kết quả cuối cùng. Để tránh những sai số lớn ta phải tính chính xác các phép tính trung gian. Để tránh những sai lầm ta cần kiểm tra kết quả.

I. Kiểm tra quá trình tính toán:

1. Kiểm tra các biểu đồ đơn vị $(\overline{M}_k)$ **và biểu đồ** (M_p^o)**:**

- Sử dụng các liên hệ vi phân và điều kiện cân bằng của từng phần hệ tách ra để kiểm tra.

- Vẽ biểu đồ $(\overline{M}_s)$ do các lực $X_1 = X_2 = ... X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra. Kiểm tra mối quan hệ:

$$(\overline{M}_s) \equiv (\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) + ... + (\overline{M}_n) \qquad (5\text{-}19)$$

2. Kiểm tra các hệ số: (δ_{km})

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_k) = \delta_{k1} + \delta_{k2} + ..\delta_{kn} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki}$$

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \delta_{km} \qquad (5\text{-}20)$$

Chứng minh các điều kiện kiểm tra:

- Theo ý nghĩa của biểu đồ $(\overline{M}_s)$ và các biểu đồ $(\overline{M}_k)$ nên theo nguyên lý cộng tác dụng, điều kiện (5-19) phải thỏa mãn.

- Thay (5-19) vào 2 điều kiện bên dưới và khai triển sẽ có 2 điều kiện (5-20).

3. Kiểm tra các số hạng tự do:

a. Kiểm tra: (Δ_{kp})

Biểu thức kiểm tra:

$$(\overline{M}_s)(M_P^o) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kP} \qquad (5\text{-}21)$$

Thay (M_s) từ điều kiện (5-19) vào và triển khai ta được điều kiện (5-21).

b. Kiểm tra: (Δ_{kt})

Biểu thức kiểm tra:

$$\Sigma \alpha t_c.\Omega(\overline{N}_s) + \Sigma \frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_s) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kt} \qquad (5\text{-}22)$$

Trong đó $\Omega(\overline{M}_s)$, $\Omega(\overline{N}_s)$ lần lượt là diện tích biểu đồ mômen và lực dọc do $X_1 = X_2 = ... X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra. Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\Omega(\overline{M}_s) = \Omega(\overline{M}_1) + \Omega(\overline{M}_2) + ..\Omega(\overline{M}_n)$$

$$\Omega(\overline{N}_s) = \Omega(\overline{N}_1) + \Omega(\overline{N}_2) + ..\Omega(\overline{N}_n)$$

Thay vào ta sẽ chứng minh được điều kiện (5-23)

c. Kiểm tra: (Δ_{kZ})

Biểu thức kiểm tra: $-\Sigma \overline{R}_{js}.Z_{jm} = \Sigma \Delta_{kZ}$ (5-24)

Trong đó $\overline{R}_{js}$ là phản lực tại liên kết j do $X_1 = X_2 = ... X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

Chứng minh tương tự các biểu thức trên.

4. Kiểm tra việc giải hệ phương trình chính tắc:

Do việc làm tròn số khi tính toán giải hệ phương trình chính tắc nên khi thay thế ngược các lực X_k đã tìm được vào thì các phương trình thường khác không.

Người ta đánh giá sai số của mỗi phương trình dưới dạng sai số tương đối ε.

$$\varepsilon = \frac{A-B}{A}.100\% \le [\varepsilon] \qquad (5\text{-}25)$$

Trong đó: A, B là tập hợp các số liệu của mỗi phương trình cần kiểm tra dưới dạng A – B, [ε] sai số tương đối cho phép.

II. Kiểm tra kết quả cuối cùng:

Biểu thức kiểm tra:
$$\begin{aligned}(M)(\overline{M}_k) &= -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}\\ (M)(\overline{M}_s) &= -\Sigma\Delta_{kt} - \Sigma\Delta_{kZ}\end{aligned} \qquad (5\text{-}26)$$

Chứng minh điều kiện kiểm tra:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + ...\delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kZ} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{M}_k)(\overline{M}_1)X_1 + (\overline{M}_k)(\overline{M}_2)X_2 + ...(\overline{M}_k)(\overline{M}_n)X_n + (\overline{M}_k)(M_p^o) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{M}_k)(\overline{M}_1X_1 + \overline{M}_2X_2 + ...\overline{M}_nX_n(M_p^o)) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{M}_k)(M) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}$$

$(M)(\overline{M}_s) = -\Sigma\Delta_{kt} - \Sigma\Delta_{kZ}$: chứng minh tương tự.

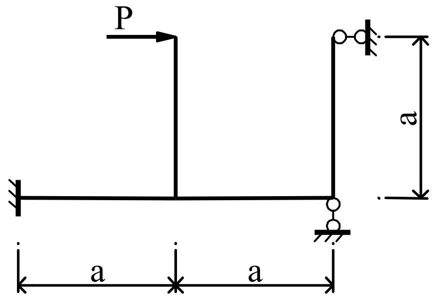
Ví dụ: Vẽ biểu đồ mômen và kiểm tra lại kết quả tính của hệ trên H.5.4.1. Cho độ cứng trong tất cả các thanh là EJ = const.

1. Vẽ biểu đồ mômen (M):

Bậc siêu tĩnh n = 2

Hệ cơ bản được tạo trên hình H.5.4.2.

Các hệ số được xác định:



H.5.4.1

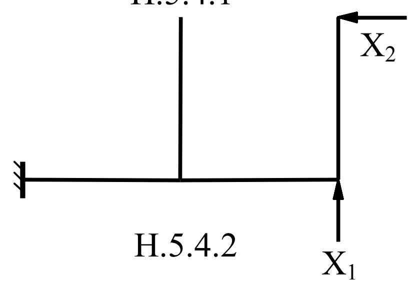
$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \frac{1}{EJ}.\frac{2a.2a}{2}.\frac{2}{3}.2a = \frac{8a^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_2) = \frac{1}{EJ}.\frac{2a.2a}{2}.a = \frac{2a^3}{EJ}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.a + \frac{1}{EJ}.a.2a.a = \frac{7a^3}{3EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\overline{M}_1)(M_p^o) = -\frac{1}{EJ}(\frac{a+2a}{2}.a.Pa) = -\frac{1{,}5.Pa^3}{EJ}$$

$$\Delta_{2p} = (\overline{M}_1)(M_p^o) = -\frac{1}{EJ}a.a.Pa = -\frac{Pa^3}{EJ}$$



H.5.4.2

Hệ phương trình chính tắc sau khi đã quy đồng và bỏ 3EJ dưới mẫu số:

$$\begin{cases}8a^3X_1 + 6a^3X_2 - 4{,}5Pa^3 = 0\\ 6a^3X_1 + 7a^3X_2 - 3Pa^3 = 0\end{cases} \text{ Giải ra } \begin{cases}X_1 = 0{,}675P\\ X_2 = -0{,}15P\end{cases}$$

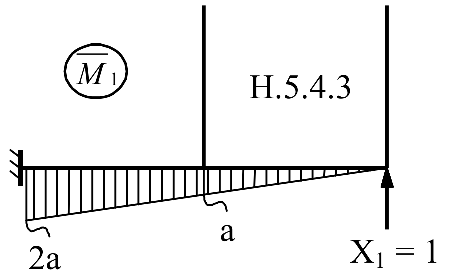
Vẽ biểu đồ mômen (M): $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2 + (M_P^o)$ Xem hình (H.5.4.6)

2. Kiểm tra kết quả:

- Kiểm tra biểu đồ: $(\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) \equiv (\overline{M}_s)$:

thấy đúng

$(\overline{M}_s)$ vẽ trên hình (H.5.4.7)



H.5.4.3

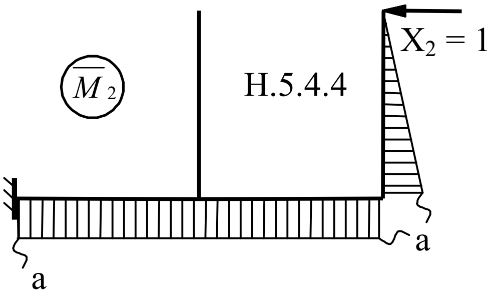
-Kiểm tra các hệ số:

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_1) = \frac{1}{EJ}.\frac{2a.2a}{2}.\left[a + \frac{2}{3}.2a\right] = \frac{14a^3}{3EJ}$$

Mặc khác: $\delta_{11} + \delta_{12} = \dfrac{8a^3}{3EJ} + \dfrac{2a^3}{EJ} = \dfrac{14a^3}{3EJ}$

(đúng)



H.5.4.4

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_2) = \frac{1}{EJ}.\frac{(3a+a)}{2}.2a.a + \frac{1}{EJ}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.a = \frac{13a^3}{3EJ}$$

Mặc khác: $\delta_{21} + \delta_{22} = \dfrac{2a^3}{EJ} + \dfrac{7a^3}{3EJ} = \dfrac{13a^3}{3EJ}$ (đúng)

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_s) = \frac{1}{EJ}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.a + \frac{2a}{6EJ}\left[2.9a^2 + 2a^2 + 2.3a^2\right] = \frac{a^3}{3EJ} + \frac{26a^3}{3EJ} = \frac{27a^3}{3EJ} = \frac{9a^3}{EJ}$$

Mặc khác: $\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \dfrac{14a^3}{3EJ} + \dfrac{13a^3}{3EJ} = \dfrac{9a^3}{EJ}$ (đúng)

-Kiểm tra số hạng tự do:

Nhân 2 biểu đồ:

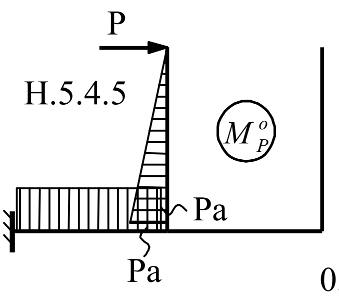
$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_P^o) = -\frac{1}{EJ}.\frac{(3a+2a)}{2}.a.Pa = -\frac{2,5.Pa^3}{EJ}$$

Mặc khác:

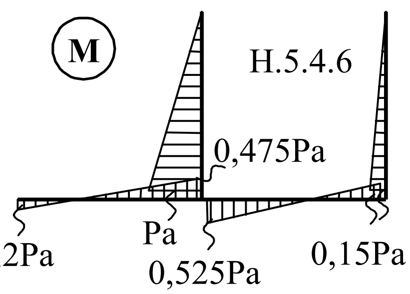
$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{1,5Pa^3}{EJ} - \frac{Pa^3}{EJ} = -\frac{2,5Pa^3}{EJ} \quad \text{(đúng)}$$

- Kiểm tra kết quả cuối cùng:

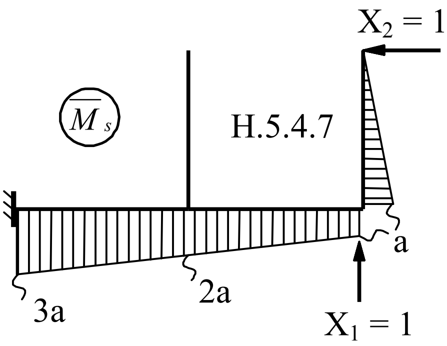
Nhân 2 biểu đồ:



H.5.4.5



H.5.4.6



H.5.4.7

$$(\overline{M}_s)(M) = -\frac{1}{EJ}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.0{,}15Pa + \frac{a}{6EJ}\left[2.3a.0{,}2Pa - 2.2a.0{,}475Pa - 3a.0{,}475Pa + 2a.0{,}2Pa\right]$$

$$+\frac{a}{6EJ}\left[2.2a.0{,}525Pa - 2.a.0{,}15Pa - 2a.0{,}15Pa + a.0{,}525Pa\right] = 0$$

**Chú ý:*

- Các biểu thức điều kiện kiểm tra vẫn đúng trong trường hợp có kể đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.
- Khối lượng tính toán kiểm tra còn nhiều.
- Khi điều kiện kiểm tra thỏa mãn thì cũng chưa thể loại trừ được khả năng xảy ra sai lầm.

§5. MỘT SỐ ĐIỀU CẦN CHÚ Ý KHI TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẬC CAO

I.Các biện pháp nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán:

- Chọn phương pháp tính cho số lượng ẩn số là ít nhất (phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp và liên hợp...)

- Khi sử dụng phương pháp lực nên chọn hệ cơ bản để sao cho các ẩn X_k ít ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng.

- Dùng các biện pháp nhằm giảm bậc của hệ phương trình chính tắc. (sẽ trình bày ở dưới)

II. Các biện pháp làm giảm nhẹ khối lượng tính toán:

1. Các biện pháp giảm bậc của hệ phương trình chính tắc:

- Chọn phương pháp tính cho số ẩn số là ít nhất (đã nói ở trên)

- Khi chọn hệ cơ bản của phương trình lực, ta chọn hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh bậc thấp thay vì chọn hệ cơ bản tĩnh định.

- Nên sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ là hệ đối xứng

2. Các biện pháp đơn giản hoá cấu trúc của hệ phương trình chính tắc:

Hệ phương trình chính tắc có cấu trúc đơn giản khi chúng có nhiều hệ số phụ bằng không. Để đạt được mục đích này, ta có thể thực hiện các cách sau:

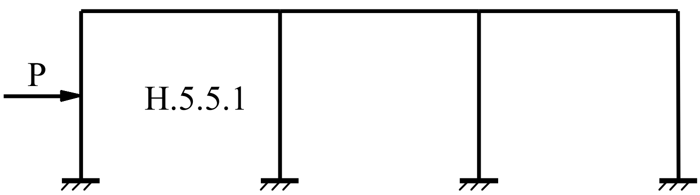
- Sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ đối xứng.

- Chọn hệ cơ bản hợp lý bằng cách chia hệ thành nhiều bộ phận độc lập. Vì lúc này, các biểu đồ đơn vị sẽ phân bố cục bộ. Việc xác định các hệ số của phương trình chính tắc sẽ đơn giản và triển vọng có nhiều hệ số phụ bằng không. Mặc khác, việc làm này còn làm giảm nhẹ khối lượng tính toán ở các khâu: xác định nội lực, xác định các hệ số và số hạng tự do, giải hệ phương trình chính tắc.

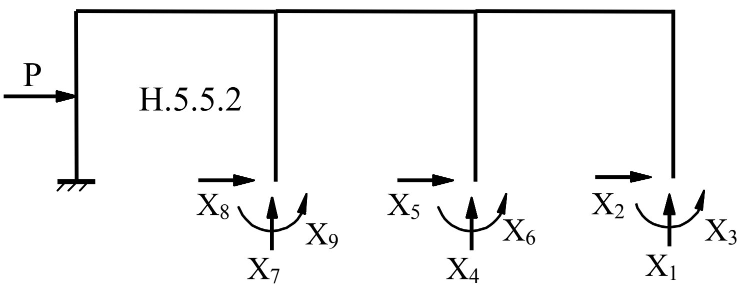
Xét hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.5.1), ta nêu ra 2 cách để chọn hệ cơ bản so sánh:

+ Với hệ cơ bản chọn trên hình (H.5.2.2), nội lực trên hệ này nói chung sẽ phân khối trên toàn hệ. Do đó, việc xác định các hệ số và số hạng tự do mất nhiều công sức. Các hệ số phụ đều khác không.

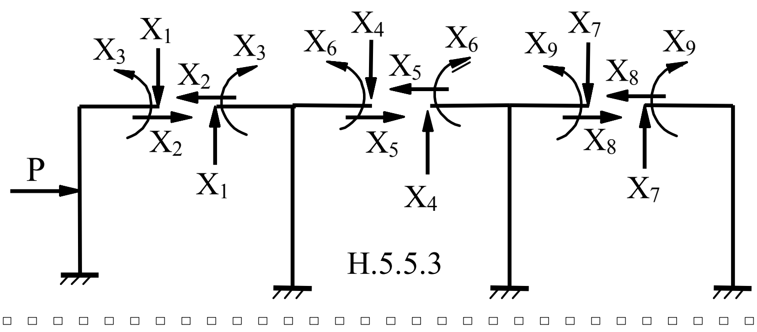
+ Với hệ cơ bản chọn trên hình (H.5.5.3), các biểu đồ đơn vị chỉ phân bố trên 1 hoặc 2 bộ phận lân cận của hệ. Do đó, việc vẽ biểu đồ nội lực, xác định các hệ số và số hạng tự do sẽ đơn giản, có nhiều hệ số phụ bằng không.



H.5.5.1



H.5.5.2



H.5.5.3

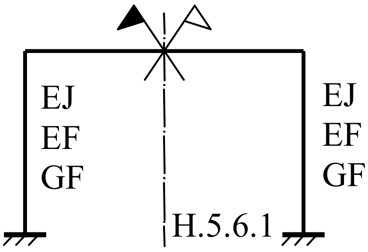
$$\delta_{17} = \delta_{71} = \delta_{18} = \delta_{81} = \delta_{19} = \delta_{91} = \delta_{27} = \delta_{72} = \delta_{29} = \delta_{92} = \delta_{37} = \delta_{73} =$$
$$= \delta_{38} = \delta_{83} = \delta_{39} = \delta_{93} = 0$$

- Sử dụng các thanh tuyệt đối cứng để thay đổi vị trí và phương các ẩn số (nghiên cứu ở phần sau).

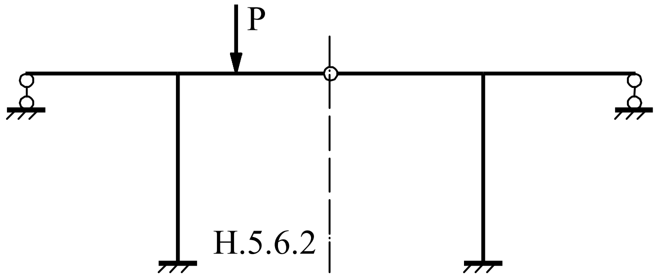
§6. CÁCH VẬN DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA HỆ ĐỐI XỨNG

Hệ đối xứng là hệ có kích thước, hình dạng hình học, độ cứng và kiên kết đối xứng qua 1 trục (H.5.6.1)

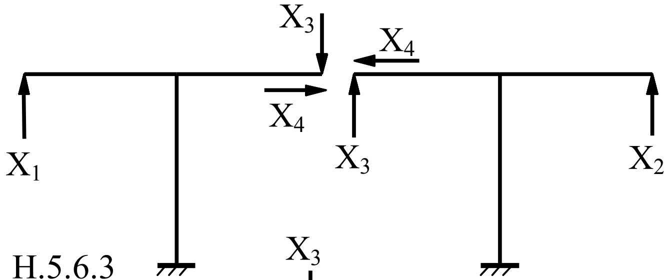
I. Biện pháp sử dụng cặp ẩn số đối xứng và phản xứng:



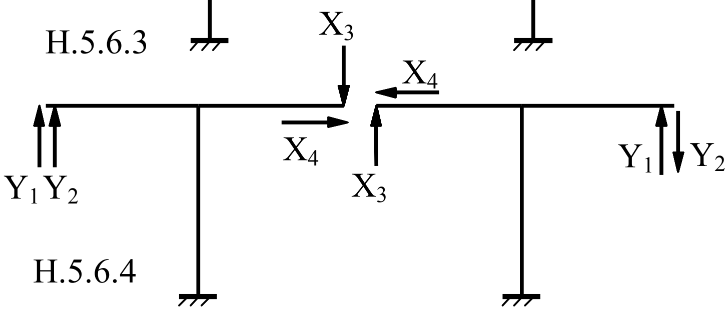
H.5.6.1



H.5.6.2



H.5.6.3



H.5.6.4

Xét hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng tác dụng như trên hình (H.5.6.2). Chọn hệ cơ bản cũng có tính chất đối xứng như trên hình (H.5.6.3). Có 2 loại ẩn số:

- Cặp ẩn số đối xứng X_4 và phản xứng X_3.
- Cặp ẩn số chỉ có vị trí đối xứng X_1 và X_2.

Để triệt để sử dụng tính đối xứng của hệ, ta phân tích X_1, X_2 thành hai cặp: cặp đối xứng Y_1 và cặp phản ứng Y_2 như trên hình vẽ (H.5.6.4).Tức là:

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = X_1 \\ Y_1 + Y_2 = X_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1 = \dfrac{X_1 + X_2}{2} \\ Y_2 = \dfrac{X_1 - X_2}{2} \end{cases}$$

Các ẩn số lúc này là (Y_1, Y_2 , X_3, X_4)

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{12}Y_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}Y_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}Y_1 + \delta_{32}Y_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0 \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{42}Y_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases}$$

Mặc khác, đối với hệ đối xứng có tính chất sau:

- Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng (phản ứng) thì biểu đồ mômen sẽ đối xứng (phản ứng). Suy ra: $(\overline{M}_1),(\overline{M}_4)$ sẽ đối xứng; $(\overline{M}_2),(\overline{M}_3)$ sẽ phản ứng.
- Kết quả nhân biểu đồ phản ứng với biểu đồ đối xứng sẽ bằng không. Suy ra:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{24} = \delta_{42} = \delta_{43} = \delta_{34} = 0$$

Thay vào, ta được:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases}$$ (a) (chứa cặp ẩn đối xứng)

$$\begin{cases} \delta_{22}Y_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{32}Y_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$ (b) (chứa cặp ẩn phản xứng)

***Kết luận**:* Với hệ đối xứng có bậc siêu tĩnh bằng n, nếu áp dụng các cặp ẩn số đố xứng và phản xứng ta có thể đưa hệ phương trình chính tắc về hai hệ phương trình độc lập: 1 hệ gồm n_1 phương trình chứa ẩn đối xứng, 1 hệ gồm n_2 phương trình chứa ẩn phản xứng với $n_1 + n_2 = n$.

*** Các trường hợp đặc biệt:**

1. Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng đối xứng:

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì lúc này (M_P^o) sẽ đối xứng. Suy ra $\Delta_{2P} = \Delta_{3P} = 0$. Thay vào hệ (b) thì được $Y_2 = X_3 = 0$

Vậy 1 hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì các ẩn phản xứng = 0

2. Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng phản xứng:

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì tương tự ta sẽ có được $Y_1 = X_4 = 0$

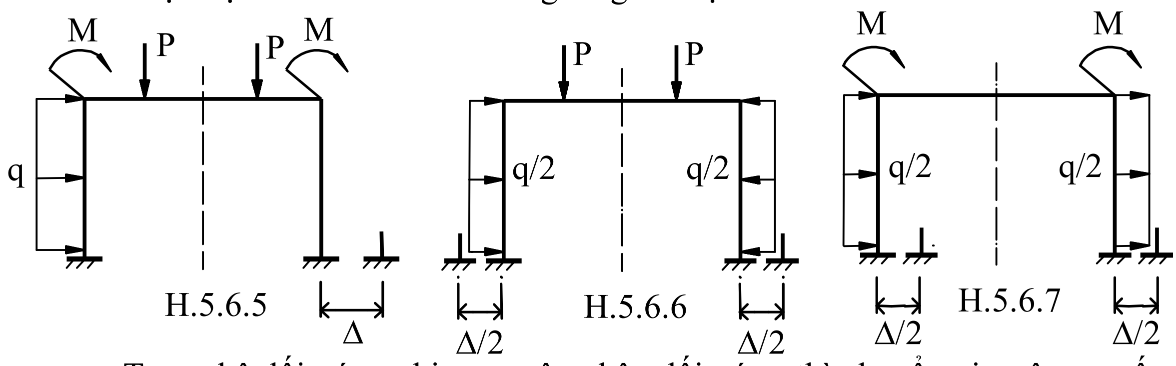
Vậy khi hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì các ẩn đối xứng = 0

II. Biện pháp biến đổi sơ đồ tính:

*** Các đặc điểm của hệ đối xứng:**

- Một hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ bao giờ cũng có thể phân tích thành tổng của 2 hệ: hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng với hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng.

Ví dụ: Hệ trên hình H.5.6.5 bằng tổng hai hệ trên hình H.5.6.6 với H.5.6.7.



H.5.6.5 H.5.6.6 H.5.6.7

- Trong hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng thì chuyển vị, mômen uốn, lực dọc sẽ đối xứng, còn lực cắt có tính phản ứng.

- Trong hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản ứng thì chuyển vị, mômen, lực dọc sẽ phản xứng, còn lực cắt có tính đối ứng.

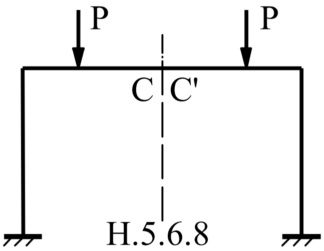
Như vậy với các đặc điểm này, nếu biết được kết quả của một nửa hệ đối xứng thì có thể suy ra kết quả trên toàn hệ. Ta đi tìm 1 nửa hệ tương đương.

1. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng:

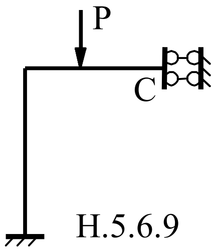
a. Trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ :

Xét tiết diện C và C' nằm bên trái và bên phải của trục đối xứng của hệ trên hình (H.5.6.8). Do chuyển vị của hệ là đối xứng nên tại C không thể có chuyển vị xoay và thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng. Tuy nhiên, chuyển vị thẳng theo phương trục đối xứng có thể được. Điều này chứng tỏ C làm việc như 1 ngàm trượt.

Vậy trên sơ đồ tính 1 nửa hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C 1 ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song nhau và vuông góc với trục đối xứng như trên hình vẽ (H.5.6.9)



H.5.6.8

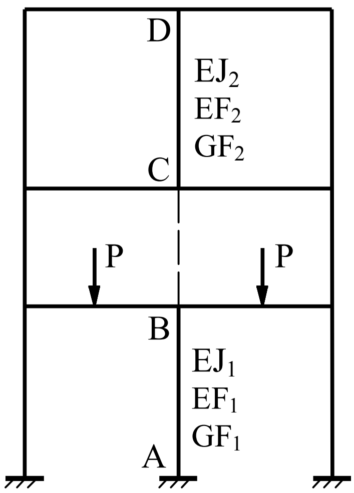


H.5.6.9

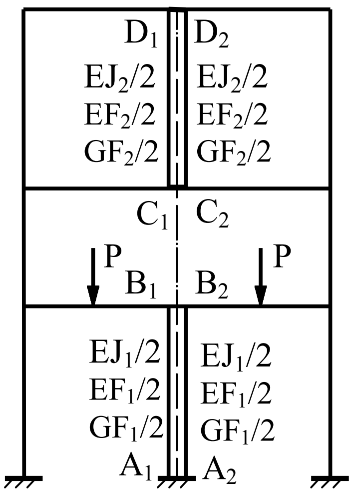
Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ, ta đặt thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh song song và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên một nửa hệ và suy ra kết quả trên toàn hệ.

b. Trường hợp trục đối xứng trùng với 1 số trục thanh của hệ.

Xét hệ trên hình (H.5.6.10). Đưa về hệ tương đương đối xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ bằng cách thay thế mỗi thanh AB, CD bằng 2 thanh có độ cứng giảm đi một nửa, hai đầu A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 là vuông góc với trục đối xứng và có độ cứng bằng vô cùng (H.5.6.11). Đến đây ta trở lai trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh.



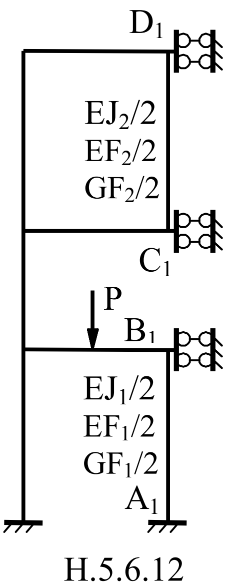
H.5.6.10



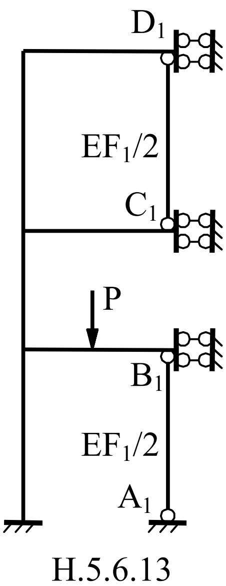
H.5.6.11

Một nửa hệ tương đương như trên hình (H.5.6.12). Nhưng tại A_1, B_1, C_1, D_1 không tồn tại chuyển vị góc xoay và chuyển vị thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng mà chỉ có thể chuyển vị theo phươngdọc trục thanh. Nghĩa là, các thanh A_1B_1, C_1D_1 làm việc như 1 liên kết thanh (liên kết loại 1) (H.5.6.13).

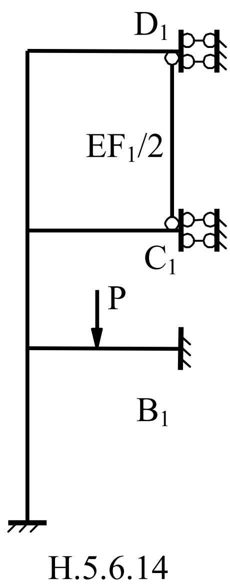
Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và có trục đối xứng trùng với một số trục thanh của hệ, ta cần đặt thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song với



H.5.6.12



H.5.6.13



H.5.6.14

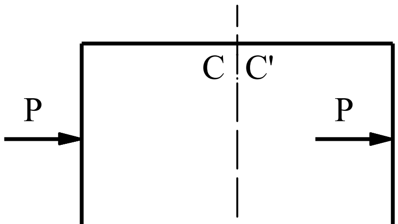
nhau và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng đồng thời thay thế các thanh trùng với trục đối xứng bằng các liên kết thanh (liên kết loại 1) có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi thực hiện tính toán trên 1 nửa hệ và sau đó suy ra kết quả trên toàn hệ. Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với thanh trùng với trục đối xứng lực dọc lấy gấp 2 lần so với khi giải 1 nửa hệ còn lực cắt và mômen lấy bằng không.

Trong trường hợp bỏ qua biến dạng dọc trục trong các thanh trùng với trục đối xứng và các thanh này bị ngăn cản chuyển vị theo phương dọc trục thanh (một đầu nối đất), ta có thể thay thế các ngàm trượt bằng ngàm (H.5.6.14)

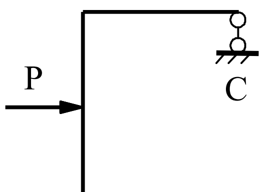
2. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng:

a. Trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ:

Xét tiết diện C và C' nằm bên trái và bên phải trục đối xứng của hệ trên hình (H.5.6.15). Do chuyển vị của hệ là phản xứng nên tại C không thể có chuyển vị theo phương trục đối xứng. Tuy nhiên,



H.5.6.15



H.5.6.16

chuyển vị góc xoay và chuyển vị theo phương vuông góc với trục đối xứng có thể được. Điều này chứng tỏ C làm việc như 1 gối di động. Vậy trên sơ đồ tính một phần 2 hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C 1 gối di động có phương của trục đối xứng (H.5.6.16).

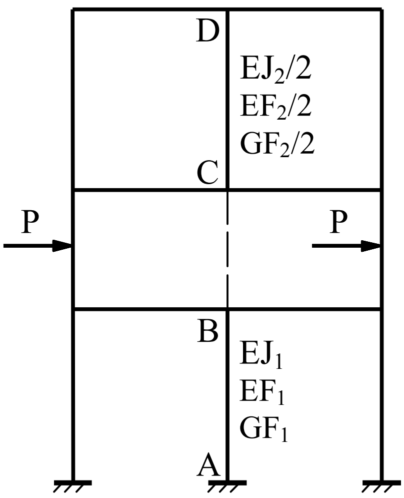
Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản ứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ ta đưa về 1 nửa hệ tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương của trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên 1 nửa hệ và sau đó suy ra kết quả trên toàn hệ.

b. Trường hợp trục đối xứng trùng với một số trục thanh của hệ:

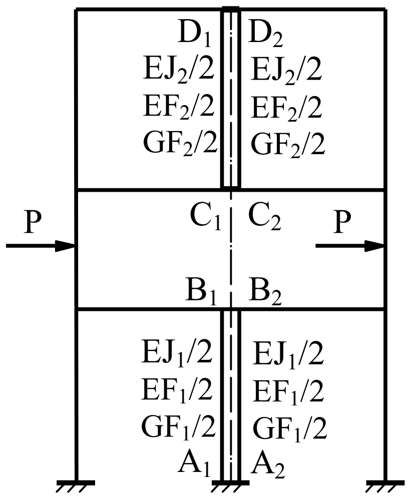
Cũng lý luận tương tự như trường hợp hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ở trên, ta đưa bài toán trở về trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ.

Với hệ cho trên hình (H.5.6.17), hệ tương đương của nó ở trên hình (H.5.6.18) và hệ trên hình (H.5.6.19) là 1 nửa hệ tương đương.

Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản ứng và có trục đối xứng trùng với trục thanh nào đó của hệ, ta đưa về 1 nửa hệ



H.5.6.17

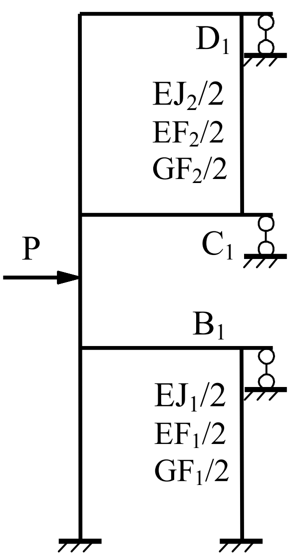


H.5.6.18

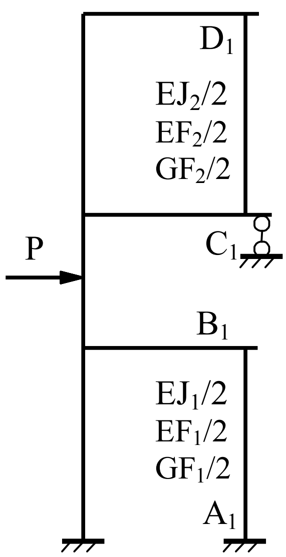
tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương trục đối xứng tại những tiết diện trục đối xứng bằng các thanh có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi tính toán trên 1 phần 2 và suy ra kết quả trên toàn hệ.

Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với các thanh trùng với trục đối xứng, lực dọc lấy bằng không còn mômen và lực cắt lấy gấp 2 lần so với khi tính trên nửa hệ.

Trong trường hợp bỏ qua ảnh hưởng biến dạng dọc trục thì ta có thể bỏ bớt 1 gối di động trong 2 gối ở hai đầu thanh (H.5.6.20).



H.5.6.19



H.5.6.20

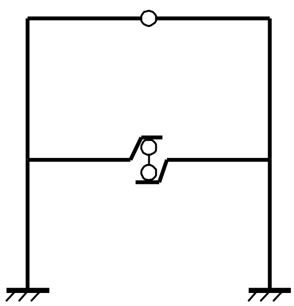
**** Chú thích:***

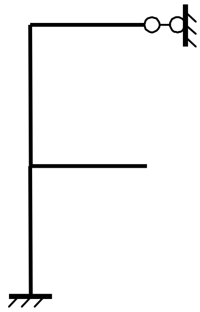
Trường hợp tiết diện trùng với trục đối xứng không phải là liên kết hàn, bằng cách phân tích sự làm việc tại các tiết diện này tương tự như ở trên ta có thể thay thế bằng các liên kết tương ứng khi tính trên 1 nửa hệ.

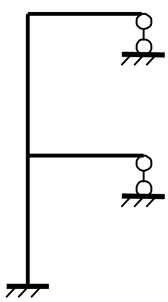
Chẳng hạn, hệ trên hình (H.5.6.21)

+ Nếu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên hình (H.5.6.22).

+ Nếu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên hình (H.5.6.23).

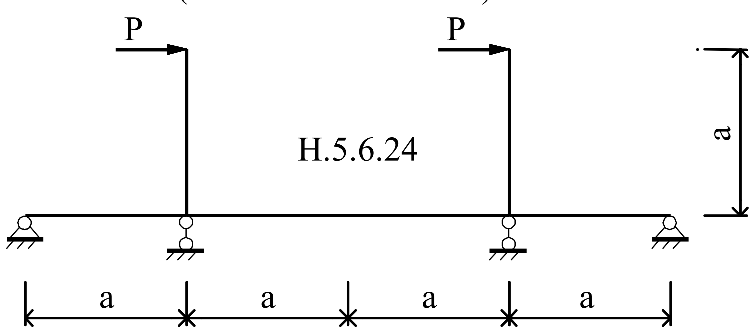

H.5.6.21


H.5.6.22

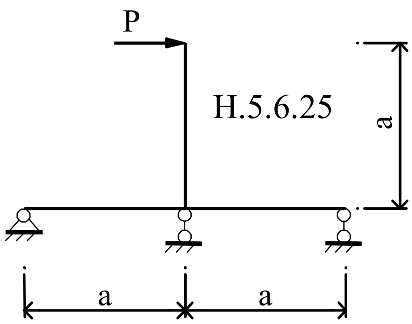

H.5.6.23

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.5.6.24). Cho độ cứng trong tất cả các thanh là EJ = const. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

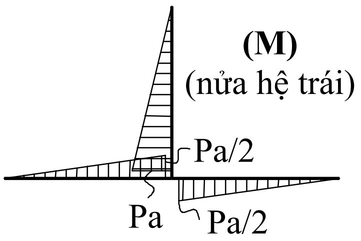
Hệ đã cho thuộc loại hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng. Một nửa hệ trái tương đương của hệ đã cho được tạo ra trên hình (H.5.6.25). Đây là hệ siêu tĩnh bậc 1. Tiến hành các bước giải sẽ vẽ được biểu đồ (M), (Q), (N). Sau đó suy ra kết quả của nửa hệ phải theo các đặc điểm của hệ đối xứng. Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.6.26 → H.5.6.31)



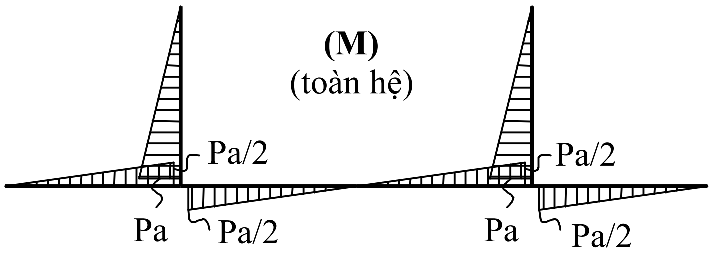
H.5.6.24



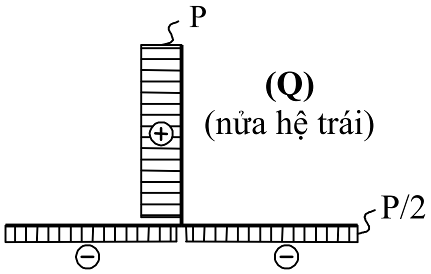
H.5.6.25



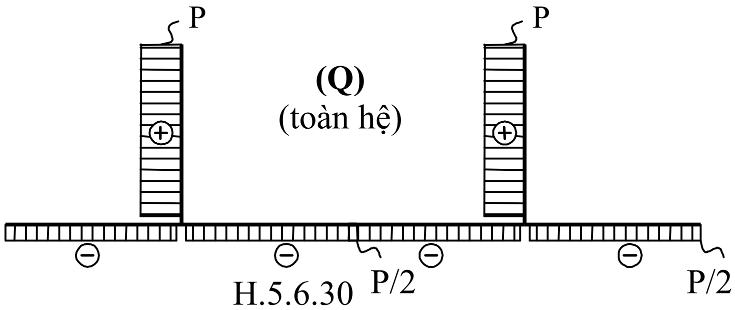
H.5.6.26



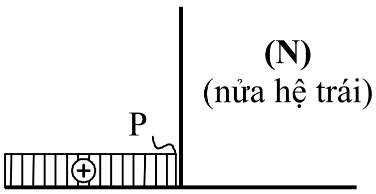
H.5.6.29



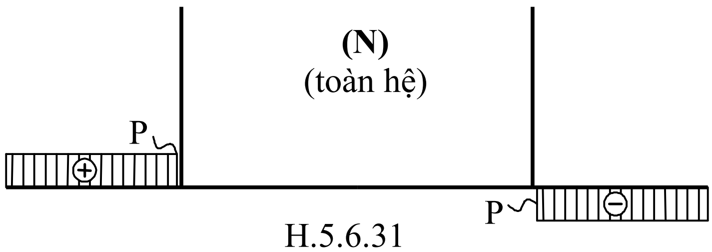
H.5.6.27



H.5.6.30



H.5.6.28



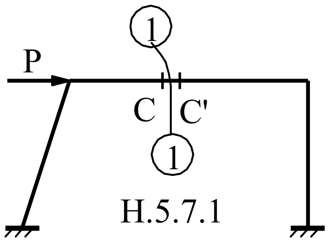
H.5.6.31

§7. SỬ DỤNG CÁC THANH TUYỆT ĐỐI CỨNG ĐỂ THAY ĐỔI VỊ TRÍ VÀ PHƯƠNG CÁC ẨN SỐ NHẰM ĐƠN GIẢN HOÁ CẤU TRÚC CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

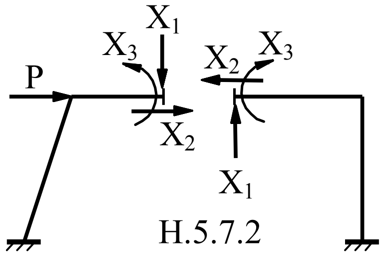
Mục đích của biện pháp là sử dụng các thanh tuyệt đối cứng nhằm thay đổi vị trí và phương của các ẩn số để sao cho hệ phương trình chính tắc có nhiều hệ số phụ bằng không.

Xét hệ trên hình (H.5.7.1). Để giải hệ ta có thể chọn hệ cơ bản như trên hình (H.5.7.2)

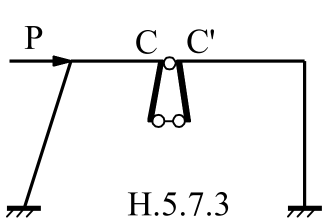
Ta biến đổi hệ trên hình (H.5.7.1) bằng cách thực hiện mặt cắt 1-1, hàn 2 thanh tuyệt đối cứng vào 2 tiết diện C và C'. Nếu nối 2 thanh tuyệt đối cứng bằng ba liên kết loại 1 theo điều kiện nối 2 miếng cứng tạo thành hệ bất biến hình thì hệ mới sẽ tương đương với hệ ban đầu (H.5.7.3, H.5.7.4...)



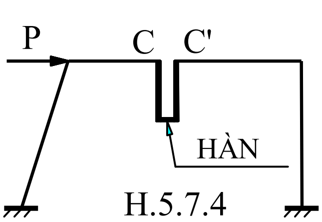
H.5.7.1



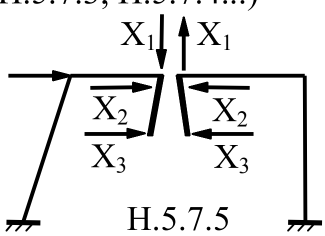
H.5.7.2



H.5.7.3

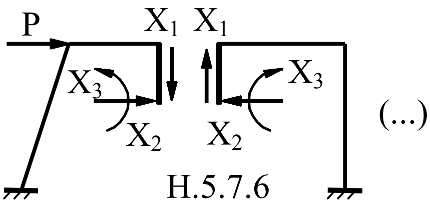


H.5.7.4



H.5.7.5

Nếu ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết nối giữa các thanh tuyệt đối cứng (H.5.7.5, H.5.7.6…) thì so với các hệ cơ bản trên hình (H.5.7.2), vị trí và phương của các ẩn số đã thay đổi. Điều đó có nghĩa là các hệ số cũng thay đổi. Rõ ràng là có nhiều cách lập hệ tương đương nên cũng nhiều cách thay đổi vị trí và phương của các ẩn số. Và ta thực hiện sao cho hệ phương trình chính tắc càng có nhiều hệ số phụ bằng không càng tốt.



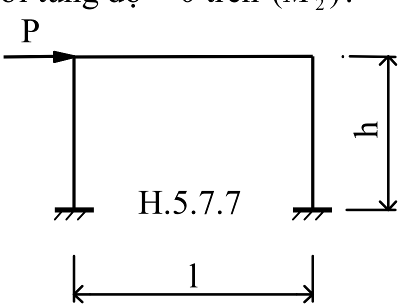
H.5.7.6

Ví dụ: Chọn hệ số cơ bản sao cho tất cả các hệ số phụ bằng không của khung trên hình (H.5.7.7). Cho độ cứng EJ là không đổi trên toàn hệ.

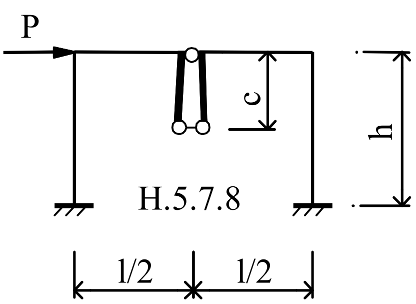
Hệ tương đương trên hình (H.5.7.8), hệ cơ bản tạo nên hình (H.5.7.9)

Các biểu đồ $(\overline{M}_1),(\overline{M}_2),(\overline{M}_3)$ vẽ trên hình (H.5.7.10 $\rightarrow$ H.5.7.12). $(\overline{M}_1),(\overline{M}_3)$ là đối xứng; $(\overline{M}_2)$ phản xứng nên $\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{23}=\delta_{32}=0$.

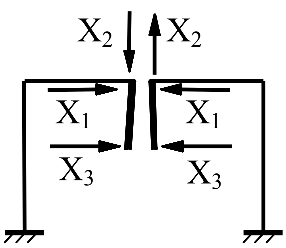
Để $\delta_{13}=\delta_{31}=(\overline{M}_3)(M_1)=0$ thì $c=\dfrac{2}{3}h$ vì khi đó trọng tâm lấy trên $(\overline{M}_1)$ ứng với tung độ = 0 trên $(\overline{M}_2)$.



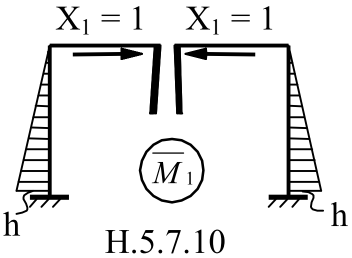
H.5.7.7



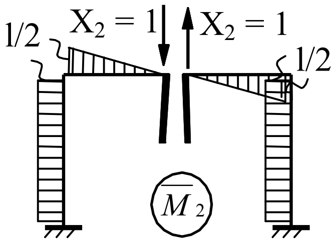
H.5.7.8



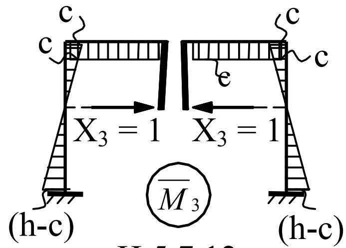
H.5.7.9



H.5.7.10



H.5.7.11



H.5.7.12

§8. HỆ DÀN SIÊU TĨNH

I. Bậc siêu tĩnh:

n = D - 2M + 3 (Đối với hệ dàn không nối đất)

n = D - 2M + C (Đối với hệ dàn nối đất)

II. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

Như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực.

III. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Do trong hệ dàn chỉ tồn tại lực dọc nên các hệ số chỉ kể đến thành phần biến dạng dọc trục.

1. Các hệ số chính và phụ:

$$\delta_{km} = \Sigma\int \frac{\overline{N}_k \overline{N}_m}{E\mathrm{F}}.ds = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}\overline{N}_{im}}{E\mathrm{F}_\mathrm{i}}.l_i$$

2. Các số hạng tự do:

a. Do tải trọng:

$$\Delta_{kP} = \Sigma\int \frac{\overline{N}_k N_p^o}{E\mathrm{F}}ds = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik} N_{ip}^o}{E\mathrm{F}_\mathrm{i}} l_i$$

b. Do biến thiên nhiệt độ:

$$\Delta_{kt} = \sum_i \alpha t_{ci}\Omega(\overline{N}_{ik}) = \sum_i \alpha t_{ci}\overline{N}_{ik}.l_i$$

c. Do chế tạo chiều dài thanh không chính xác:

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \overline{N}_{ik}.\Delta_i$$

Δ_i : độ dôi của thanh dàn thứ i. Nếu là chế tạo ngắn hơn chiều dài (còn gọi là độ hụt) thì Δ_i lấy dấu âm.

d. Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa:

$$\Delta_{kZ} = -\sum_{(j)} \overline{R}_{jk} Z_j$$

Trong các công thức trên:

$\overline{N}_{ik}, \overline{N}_{im}, N_{iP}^o$: lực dọc trong thanh dàn thứ i do $X_k = 1$ và $X_m = 1$, P gây ra trên hệ cơ bản.

EF_i , l_i : độ cứng và chiều dài thanh thứ i

α : hệ số dãn nở vì nhiệt độ.

$\overline{R}_{jk}$: phản lực tại liên kết j do $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Z_j : chuyển vị cưỡng bức tại liên kết j.

IV. Xác định lực dọc trong các thanh dàn:

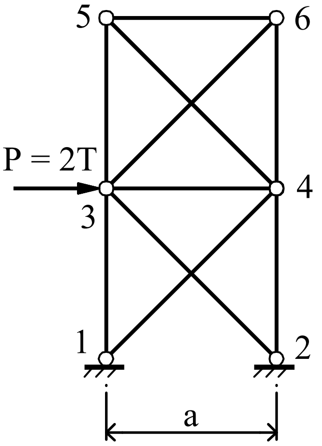
Lực dọc trong thanh dàn thứ i:

$$N_i = \overline{N}_{i1}.X_1 + \overline{N}_{i2}.X_2 + ...\overline{N}_{in}.X_n + N_{ip}^o + N_{it}^o + N_{i\Delta}^o + N_{iZ}^o$$

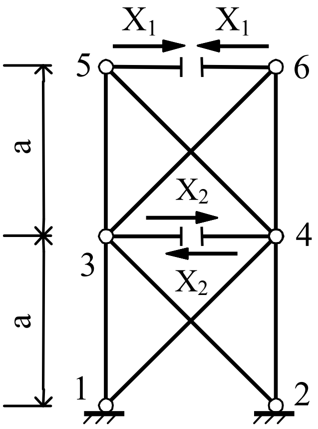
Trong đó: $N_{ip}^o, N_{it}^o, N_{i\Delta}^o, N_{iZ}^o$ lần lượt là lực dọc trong thanh dàn thứ i do các nguyên nhân P, t, Δ, Z gây ra trên hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định thì $N_{pt}^o, N_{i\Delta}^o, N_{iZ}^o = 0$.

Ví dụ: Xác định lực dọc trong các thanh dàn trên hình (H.5.8.1) cho biết độ cứng trong các thanh dàn là EF = const.

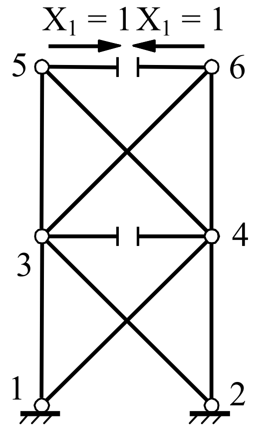
1. Bậc siêu tĩnh: n = D – 2M + C = 10 - 6.2 + 4 = 2



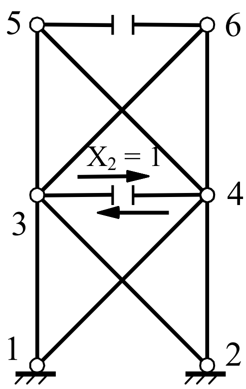
H.5.8.1



H.5.8.2



H.5.8.3



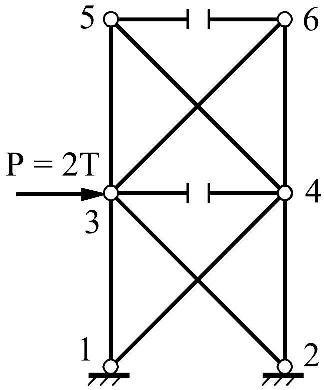
H.5.8.4

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.5.8.2). Ở đây ta xem các thanh 56, 34 là các liên kết thanh và cắt nó.

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\end{cases}$$



H.5.8.5

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{km}=\sum_i \frac{\overline{N}_{ik}\overline{N}_{im}}{EF_i}.l_i \qquad \text{k, m} = \overline{1,2}$$

$$\Delta_{kP}=\sum_i \frac{\overline{N}_{ik}N^o_{ip}}{EF_i}l_i \qquad \text{i : thanh thứ i.}$$

Sơ đồ để xác định $\overline{N}_{i1},\overline{N}_{i2},N^o_{ip}$ được tạo trên các hình vẽ (H.5.8.3, H.5.8.4 & H.5.8.5)

Lực dọc được xác định theo các cách trong bài hệ dàn.

Kết quả tính toán được thể hiện trong bảng tính (B.5.8.1)

Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases}(5+8\sqrt{2})a.X_1+(2-4\sqrt{2})a.X_2+(1-2\sqrt{2})Pa=0\\ (2-4\sqrt{2})a.X_1+(3+4\sqrt{2})a.X_2+(1+2\sqrt{2})Pa=0\end{cases}$$

Ở đây do các thanh có độ cứng bằng EF nên ta không đưa vào trong tính toán cho gọn.

Giải phương trình:

$$\begin{cases}X_1=0{,}014P\\ X_2=-0{,}436P\end{cases}$$

4. Xác định lực dọc trong các thanh dàn:

$$N_i=\overline{N}_{i1}X_1+\overline{N}_{i2}X_2+N^o_{ip}$$

Xem kết quả trong bảng tính (B.5.8.1)

Thanh	l_i	$\overline{N}_{i1}$	$\overline{N}_{i2}$	N_{ip}^{o}	$\overline{N}_{i1}\overline{N}_{i1}l_i$	$\overline{N}_{i1}\overline{N}_{i2}l_i$	$\overline{N}_{i2}\overline{N}_{i2}l_i$	$\overline{N}_{i1}N_{ip}^{o}l$	$\overline{N}_{i2}N_{ip}^{o}l_i$	N_i
5-6	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
6-4	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
6-3	$a\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$	0	0	0	0	-0,019P
5-4	$a\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$	0	0	0	0	-0,019P
5-3	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
3-4	a	0	1	0	0	0	0	0	0	-0,436P
4-2	a	1	1	0	a	a	0	0	0	-0,422P
4-1	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$2a\sqrt{2}$	$-2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	0	0	0,636P
3-2	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	$-2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	$-2aP\sqrt{2}$	$2aP\sqrt{2}$	-0,777P
3-1	a	1	1	P	a	a	a	Pa	Pa	0,578P
Tổng					$(5+8\sqrt{2})a$	$(2-4\sqrt{2})a$	$(3+4\sqrt{2})a$	$(1-2\sqrt{2})Pa$	$(1+2\sqrt{2})Pa$	

B.8.1 Bảng tính lực dọc trong các thanh dàn

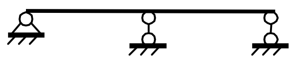
§9. DẦM LIÊN TỤC

I. phân tích hệ:

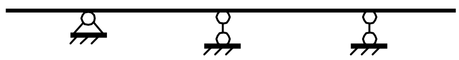
1. Khái niệm: Dầm liên tục là hệ gồm 1 thanh thẳng nối với trái đất bằng số gối tựa lớn hơn hai để tạo thành hệ bất biến hình.

2. Phân loại dầm liên tục:

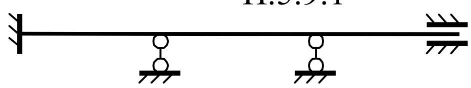
- Dầm liên tục hai đầu khớp (H.5.9.1)
- Dầm liên tục có đầu thừa (H.5.9.2)
- Dầm liên tục có đầu ngàm (H.5.9.3)



H.5.9.1



H.5.9.2



H.5.9.3

3. Bậc siêu tĩnh:

Cách 1: $n = 3V - K$

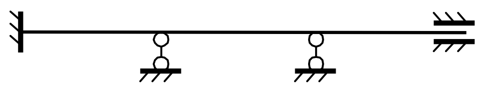
Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.4) có n = 3.3 – 7 = 2.

H.5.9.4

Cách 2: $n = C - 3$

C là số liên kết nối đất tương đương quy về liên kết loại 1.

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.5) có n = 7 – 3 = 4.



H.5.9.5

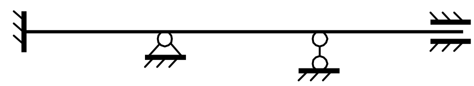
Trường hợp cho phép bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục và tải trọng chỉ tác dụng vuông góc với trục dầm thì gối cố định chỉ có hiệu quả như gối di động. Khi đó bậc siêu tĩnh được tính bằng biểu thức:

$$n = C_{tg} + N$$

C_{tg}: số gối tựa trung gian (không kể hai gối ngoài cùng), không cần phân biệt là gối cố định hay di động.

N: số liên kết ngàm, không cần phân biệt là ngàm trượt hay ngàm.

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.6) có n = 2 + 2 = 4.



H.5.9.6

II. Cách tính dầm liên tục bằng phương pháp phương trình ba mômen:

Bài toán dầm liên tục là một trường hợp của hệ siêu tĩnh nên ta có thể vận dụng phương pháp lực để tính toán. Tuy nhiên, để phục vụ cho việc tính toán được nhanh chóng và đơn giản ta đi cụ thể hoá hệ phương trình chính tắc của nó.

Xét một dầm liên tục hai đầu khớp gồm (n + 1) nhịp, có độ cứng EJ không đổi trên từng nhịp, chịu tác dụng của các nguyên nhân tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (H.5.9.7).

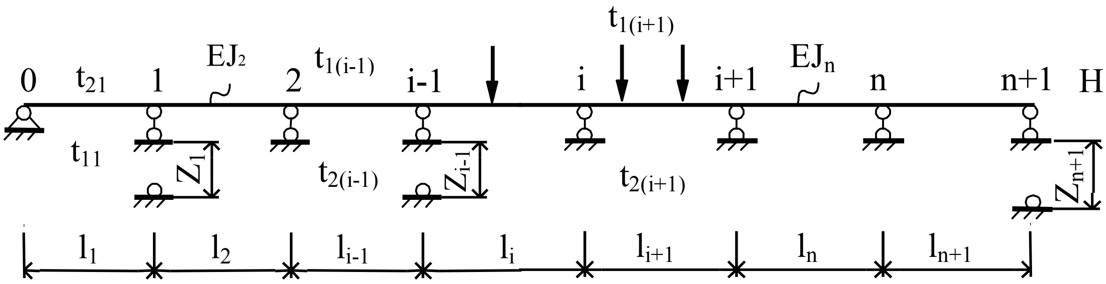
1. Hệ cơ bản:

Chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết ngăn cản chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện 2 bên gối tựa trung gian (thay thế liên kết hàn bằng liên kết khớp (H.5.9.8)).

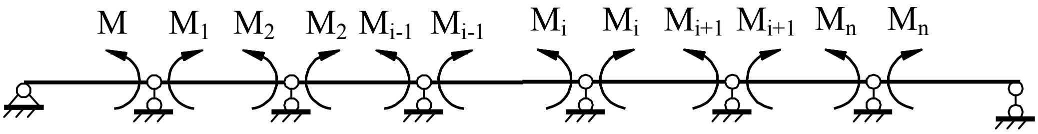
2. Hệ phương trình chính tắc:

Xét phương trình i của hệ phương trình cơ bản

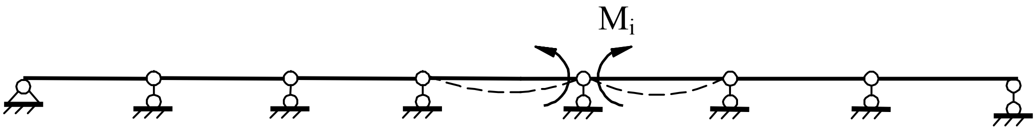
$$\delta_{i1}M_1 + \delta_{i2}M_2 + ...\delta_{ii-1}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{ii+1}M_{i+1} + ...\delta_{in}M_n + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{iZ} = 0$$



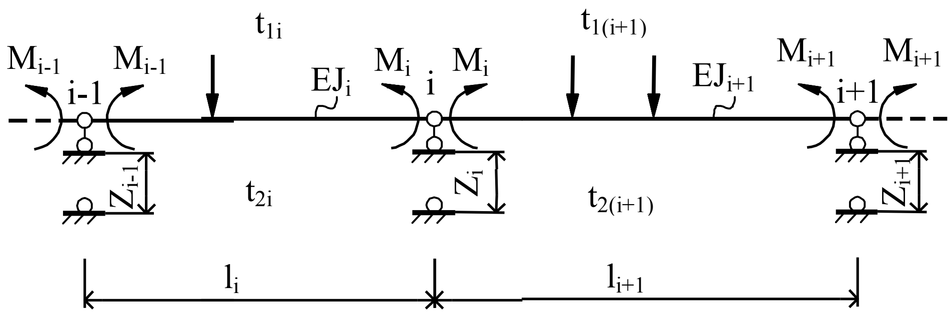
H.5.9.7



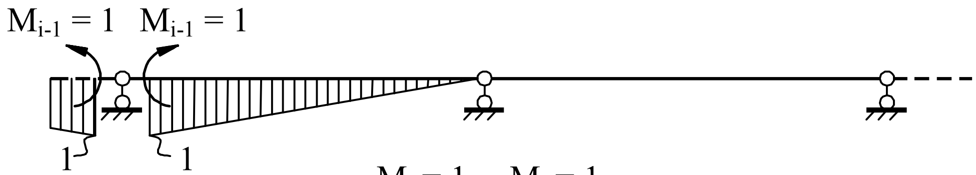
H.5.9.8



H.5.9.9

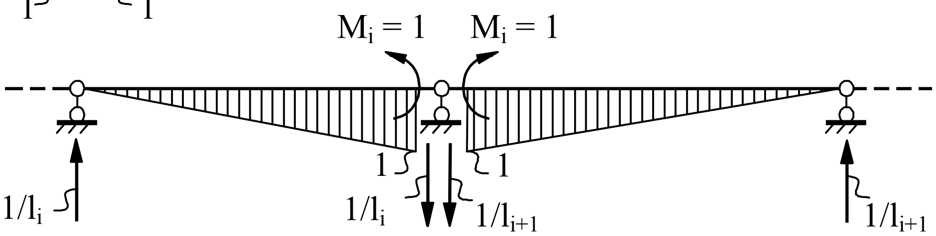


H.5.9.10



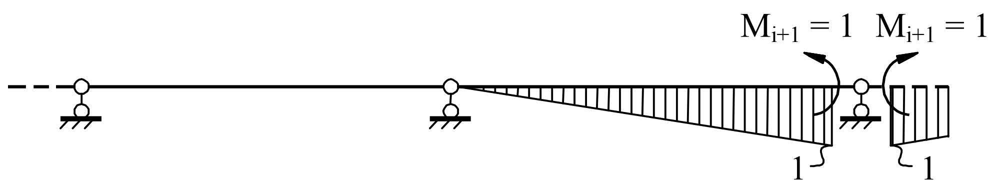
$(\overline{M}_{i-1})$

H.5.9.11



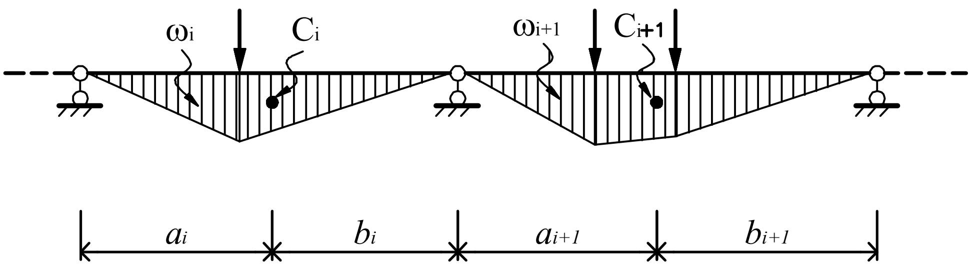
$(\overline{M}_i)$

H.5.9.12



$(\overline{M}_{i+1})$

H.5.9.13



(M_P^o)

H.5.9.14

Phương trình này biểu thị điều kiện góc xoay tương đối của 2 tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i bằng không.

Ta biết $\delta_{ik} = \delta_{ki}, \delta_{ki}$ ở đây là chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện hai bên gối tựa thứ k do riêng $M_i = 1$ gây ra trên hệ cơ bản. Mặt khác, M_i chỉ gây ra biến dạng trên nhịp i và (i + 1) (H.5.9.9). Điều đó có nghĩa là:

$\delta_{(i-1)i}, \delta_{ii}, \delta_{(i+1)i} \neq 0$, còn δ_{ki} (k $\neq$ (i - 1), i, (i + 1)) = 0

Thay vào phương trình trên:

$$\delta_{ii-1}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{ii+1}M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{iZ} = 0.$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Xác định các hệ số chính và phụ:

$$\delta_{i(i-1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i-1}) = \frac{1}{EJ_i}.\frac{1.l_i}{2}.\frac{2}{3}.1 = \frac{l_i}{6EJ_i}$$

$$\delta_{ii} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_i) = \frac{1}{EJ_i}.\frac{1.l_i}{2}.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{EJ_{i+1}}.\frac{1.l_{i+1}}{2}.\frac{2}{3}.1 = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i+1}) = \frac{1}{EJ_{i+1}}.\frac{1.l_{i+1}}{2}.\frac{1}{3}.1 = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}$$

b. Xác định các số hạng tự do:

- Do tải trọng: (Δ_{iP})

$$\Delta_{iP} = (\overline{M}_i)(M_p^o) = \frac{1}{EJ_i}\omega_i.\frac{a_i}{l_i}.1 + \frac{1}{EJ_{i+1}}.\omega_{i+1}.\frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}.1 = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1}.b_{i+1}}{l_{i+1}EJ_{i+1}}$$

ω_i: diện tích của (M_P^o) trên nhịp thứ i, dấu của ω_i được lấy theo dấu của (M_P^o).

a_i, b_i :khoảng cách từ trọng tâm diện tích của biểu đồ (M_P^o) đến gối tựa trái và phải của nhịp i.

-Do biến thiên nhiệt độ: (Δ_{it})

Trên hệ cơ bản không tồn tại lực dọc nên:

$$\Delta_{it} = \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_i) = \frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i})\frac{1.l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{1.l_{i+1}}{2}$$

α: Hệ số dãn nở vì nhiệt.

h_i: chiều cao thứ dầm ở nhịp thứ i.

- Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: (Δ_{iZ})

$$\Delta_{iZ} = -\Sigma R_{ji}Z_j = -\left[-\frac{1}{l_i}.Z_{i-1} + \frac{1}{l_i}.Z_i + \frac{1}{l_{i+1}}.Z_i - \frac{1}{l_{i+1}}.Z_{i+1}\right] = \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}$$

Trong đó: Z_i là độ lún của gối tựa thứ i, theo biểu thức thì Z_i lấy dấu dương khi chuyển vị đi xuống.

Thay tất cả các hệ số vào phương trình trên:

$$\frac{l_i}{6EJ_i}.M_{i-1} + \left(\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}\right).M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}.M_{i+1} + \frac{1}{EJ_i}.\frac{\omega_i a_i}{l_i} +$$

$$+ \frac{1}{EJ_{i+1}}.\frac{\omega_{i+1}.b_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i}).\frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{l_i}{2} + \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} = 0$$

Chọn 1 J_0 làm chuẩn (thường chọn J của nhiều nhịp có J giống nhau của dầm). Và đặt:

$\lambda_i = l_i.\dfrac{J_0}{J_i}$: *gọi là chiều dài quy ước của nhịp i.*

Thay vào phương trình:

$$\lambda_i.M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} + 6J_0\left[\frac{\omega_i a_i}{l_i.J_i} + \frac{\omega_{i+1}.b_{i+1}}{l_{i+1}.J_{i+1}}\right] +$$

$$+6EJ_o\left[\frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i}).\frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{l_{i+1}}{2}\right] + 6EJ_0\left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}\right] = 0$$

Trường hợp dầm có tiết không đổi trên toàn nhịp:$J_1 = J_2 = ... J_n = J$ = const. Lấy $J_0 = J$ và thay vào ta được:

$$l_i.M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} + 6\left[\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1}.b_{i+1}}{l_{i+1}}\right] +$$

$$+6EJ\left[\frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i}).\frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{l_{i+1}}{2}\right] + 6EJ\left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}\right] = 0$$

Cho i = $1,\overline{n}$ ta được hệ phương trình chính tắc

Giải hệ phương trình chính tắc sẽ xác định được (M_1, M_2, ..., M_n).

4. Vẽ cácbiểu đồ nội lực:

- Với biểu đồ mô men (M): mỗi nhịp của dầm ta đã biết được mômen uốn tại 2 gối tựa. Nối 2 tung độ này bằng 1 đoạn thẳng và treo biểu đồ (M_p^o) của nhịp tương ứng vào.

-Với biểu đồ lực cắt (Q), lực dọc (N): Vẽ như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực.

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.5.9.15)

1. Bậc siêu tĩnh:

$n = C_{tg} + N = 2 + 0 = 2$

2. Tạo hệ cơ bản, đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ mômen do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản: (H.5.9.16 & H.5.9.17)

3. Viết các phương trình ba mômencho các gối tựa trung gian.

i = 1: $$\lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J_0\left[\frac{\omega_1 a_1}{l_1 J_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 J_2}\right] = 0$$

i = 2: $$\lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J_0\left[\frac{\omega_2 a_2}{l_2 J_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 J_3}\right] = 0$$

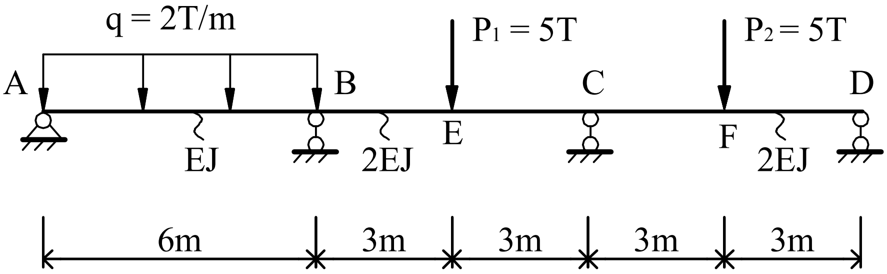
4. Xác định các đại lượng trong phương trình 3 mômen: $M_0 = M_3 = 0$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i\dfrac{J_0}{J_i} \to \lambda_1 = 6m; \lambda_2 = 3m; \lambda_3 = 3m$

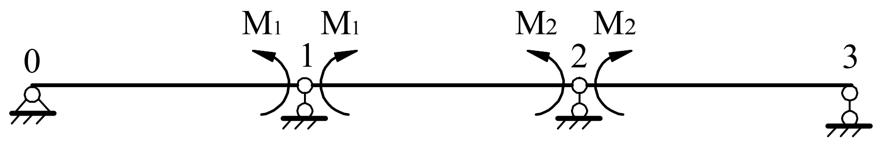
$\omega_1 = \dfrac{2}{3}l_1.f = \dfrac{2}{3}.9.6 = 36$; $a_1 = b_1 = 3$; $\omega_2 = \dfrac{7{,}5.6}{2} = 22{,}5$; $a_2 = b_2 = 3$

$\omega_3 = \dfrac{7{,}5.6}{2} = 22{,}5$; $a_3 = b_3 = 3$

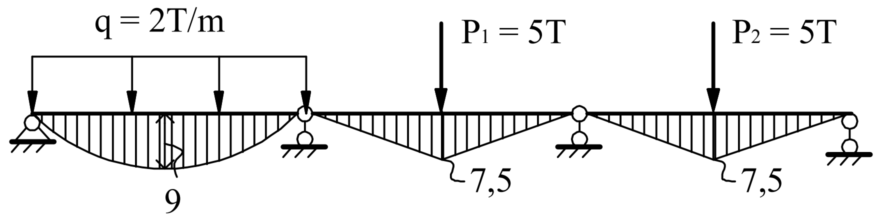
Thay vào phương trình ba mômen:



H.5.9.15

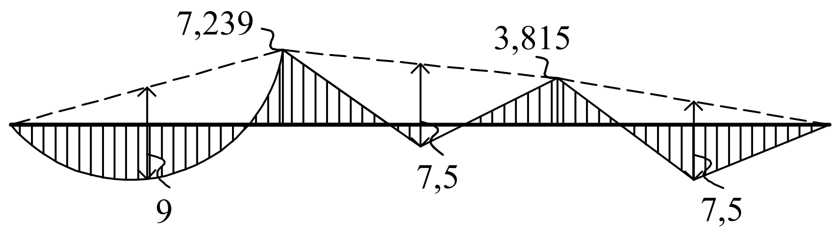


H.5.9.16



H.5.9.17

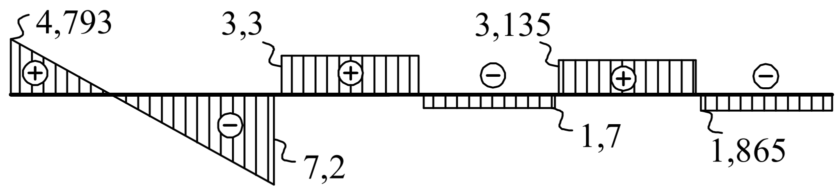
M_P^o



H.5.9.18

M

(T.m)



H.5.9.19

Q

(T)

H.5.9.20

N

i = 1 $\quad 6.0 + 18M_1 + 3M_2 + 6J\left[\dfrac{36.3}{6.J} + \dfrac{22,5.3}{6.2J}\right] = 0$

i =2 $\quad 3.M_1 + 12M_2 + 3.0 + 6J\left[\dfrac{22,5.3}{6.2J} + \dfrac{22,5.3}{6.2J}\right] = 0$

$$\begin{cases} 6M_1 + M_2 = -47,25 \\ M_1 + 4M_2 = -22,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = -7,239 < 0 \\ M_2 = -3,815 < 0 \end{cases}$$

5. Vẽ biểu đồ nội lực:
a. Biểu đồ mômen: treo biểu đồ (H.5.9.18)
b. Biểu đồ lực cắt: suy ra từ biểu đồ mômen.

Trên đoạn AB: $\quad Q^{tr} = \dfrac{-7,239 - 0}{6} + \dfrac{1}{2}.2.6 = 4,793$

$$Q^{Ph} = \dfrac{-7,239 - 0}{6} - \dfrac{1}{2}.2.6 = -7,2$$

Trên đoạn BE: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{1{,}972 - (-7{,}939)}{3} = 3{,}3$

Trên đoạn EC: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{-3{,}815 - 1{,}972}{3} = -1{,}7$

Trên đoạn CF: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{5{,}592 - (-3{,}815)}{3} = 3{,}135$

Trên đoạn FD: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{0 - 5{,}592}{3} = -1{,}864$

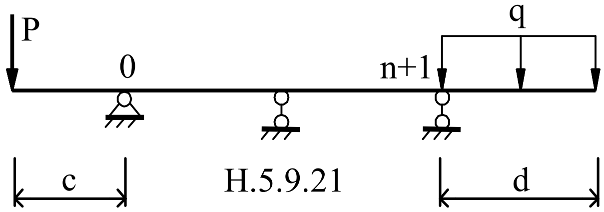
Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.9.19)

c. Biểu đồ lực dọc (N): trùng với đường chuẩn.

**** Các trường hợp khác của dầm liên tục*:**

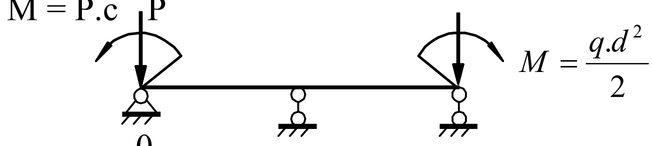
a. Dầm liên tục có thừa: (H5.9.21)

- Phần đầu thừa là tĩnh định nên có thể xác định và vẽ biểu đồ nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.



H.5.9.21

- Thực hiện cắt bỏ đầu thừa, đưa tải trọng về thành các lực tập trung tại gối tựa biên (H.5.9.22). Có hai quan niệm về mômen gối tựa này:



H.5.9.22

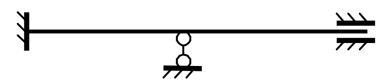
+ Xem là ngoại lực thì cần kể nó khi vẽ biểu đồ (M_P^o)

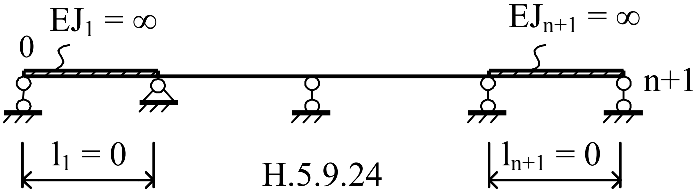
+ Xem là mômen tại các gối tựa trong phương trình 3 mômen, thì chúng là M_0 và M_{n+1}. Trong hệ trên hình (H.5.9.22) thì M_0 = -P.c và $M_{n+1} = -\dfrac{qd^2}{2}$.

Đến đây ta trở lại bài toán dầm liên tục 2 đầu khớp.

b. Dầm liên tục có đầu ngàm:(H.5.9.23)

Thay thế ngàm hoặc ngàm trượt bằng một nhịp có độ cứng EJ = ∞ có chiều dài tuỳ ý hoặc chiều dài bằng không và được liên kết với trái đất bằng số liên kết tương đương với ngàm hoặc ngàm trượt. (H.5.9.24)


H.5.9.23



H.5.9.24

Sau khi thực hiện như trên, ta đưa dầm về thành hai đầu khớp và trở lại bài toán đã biết.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ mômen cuốn của hệ trên hình vẽ (H.5.9.25). Cho biết EJ = 1080T.m^2; φ = 0,005radian; Δ_1 = 0,03m; Δ_2 = 0,02m; h_{2EJ} = 0,4m; h_{EJ} = 0,3m.

Đưa hệ về hệ tương đương 2 đầu khớp như trên hình vẽ (H.5.9.26)

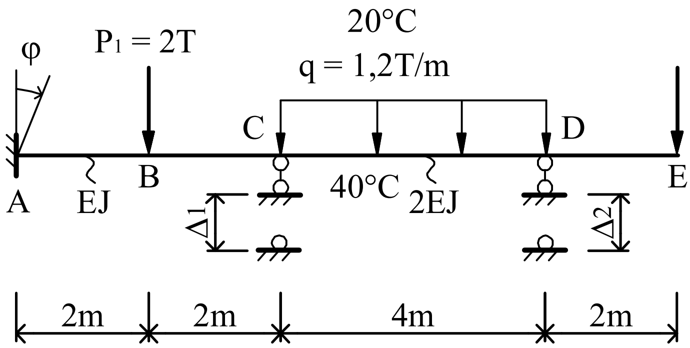
1. Bậc siêu tĩnh:

$n = C_{tg} + N = 2 + 0 = 2$ (tính trên hệ tương đương)

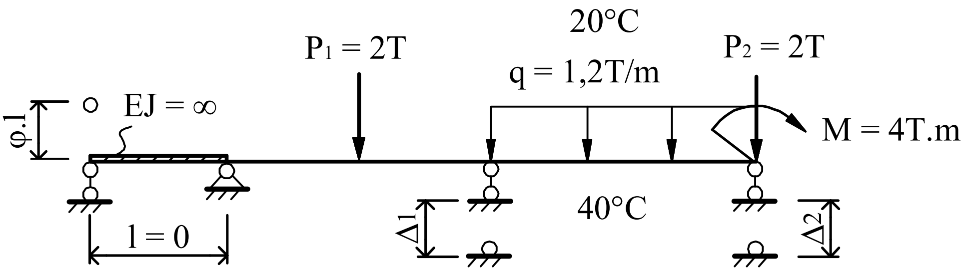
2. Tạo hệ cơ bản, đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ (M_P^o). Kết quả trên hình (H5.9.27& H5.9.28)

Ở đây ta xem M = -P.2 = -4 là mômen M_3 trong phương trình 3 mômen.

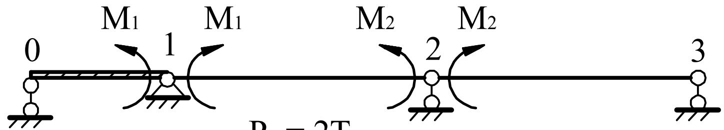
3.Viết phương trình 3 mômen cho các gối tựa trung gian:



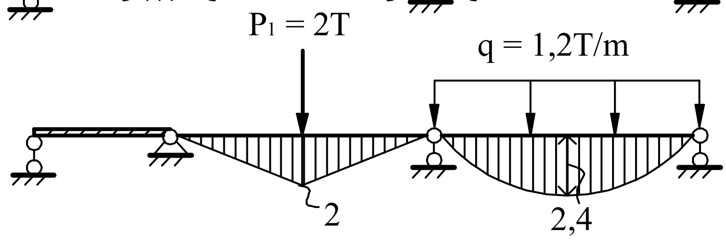
H.5.9.25



H.5.9.26

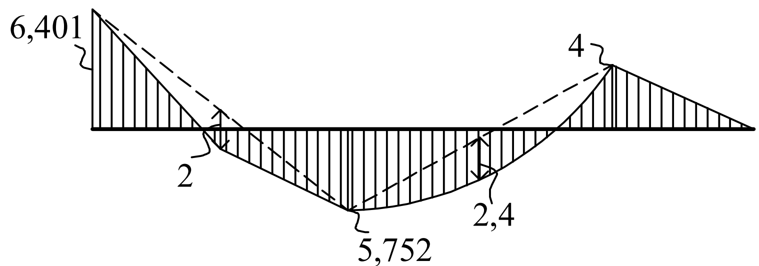


H.5.9.27



H.5.9.28

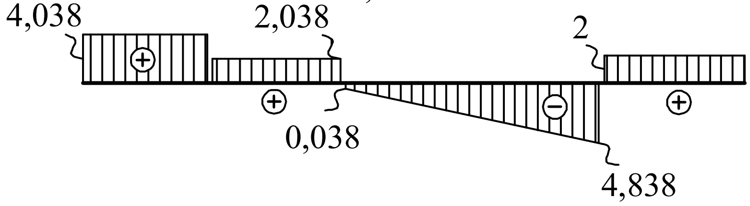
M_P^o



H.5.9.29

M

(T.m)



H.5.9.30

Q

(T)

H.5.9.31

N

i = 1

$$\lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1+\lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J_0\left[\frac{\omega_1 a_1}{l_1 J_1}+\frac{\omega_2 b_2}{l_2 J_2}\right]+$$

$$+6EJ_0\left[\frac{\alpha}{h_1}(t_{21}-t_{11}).\frac{l_1}{2}+\frac{\alpha}{h_2}(t_{22}-t_{12}).\frac{l_2}{2}\right]+6EJ_0\left[\frac{Z_0-Z_1}{l_1}+\frac{Z_2-Z_1}{l_2}\right]=0$$

i = 2

$$\lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2+\lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J_0\left[\frac{\omega_2 a_2}{l_2 J_2}+\frac{\omega_3 b_3}{l_3 J_3}\right]+$$

$$+6EJ_0\left[\frac{\alpha}{h_2}(t_{22}-t_{12}).\frac{l_2}{2}+\frac{\alpha}{h_3}(t_{23}-t_{13)}).\frac{l_3}{2}\right]+6EJ_0\left[\frac{Z_1-Z_2}{l_2}+\frac{Z_3-Z_2}{l_3}\right]=0$$

Ở đầu bài cho biết $\alpha = 1{,}2.10^{-5}(^0C^{-1}); h_{EJ} = 0{,}3m$; h_{2EJ} = 0,4m; EJ = 1080T.m^2

4. Xác định các đại lượng trong phương trình 3 mômen:

$M_0 = 0$; $M_3 = -4$; $t_{23} = 40^0C$; $t_{13} = 20^0C$

$Z_0 = -0{,}005l_1$; $Z_2 = 0{,}03$; $Z_0 = 0{,}02$; $Z_1 = 0$

$\omega_1 = 0$; $\omega_2 = \frac{1}{2}.2.4 = 4; a_2 = b_2 = 2m$; $\omega_3 = \frac{2}{3}.4.2{,}4 = 6{,}4; a_3 = b_3 = 2m$

Chọn J_0 = J, tính $\lambda_i = l_i.\frac{J_0}{J_i}$

$\rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 2$

Thay vào:

i = 1: $$0.0 + 2(0+4)M_1 + 4M_2 + 6J\left[0+\frac{4.2}{4.J}\right]+$$

$$+6EJ[0+0]+6EJ\left[\frac{-0{,}005.l_1-0}{l_1}+\frac{0{,}03-0}{4}\right]=0$$

$\rightarrow 8M_1 + 4M_2 = -12 - 0{,}015EJ = -28{,}2$

i = 2: $$4M_1 + 2(4+2)M_2 + 2.(-4) + 6J\left[\frac{4.2}{4.J}+\frac{6{,}4.2}{4.2J}\right]+$$

$$+6EJ\left[0+\frac{\alpha}{0{,}4}(40-20)\frac{4}{2}\right]+6EJ\left[\frac{0-0{,}03}{4}+\frac{0{,}02-0{,}03}{4}\right]=0$$

$\rightarrow 4M_1 + 12M_2 = 8 - 21{,}6 - 600EJ + 0{,}06EJ = 43{,}424$

$$\rightarrow \begin{cases} 8M_1 + 4M_2 = -28{,}2 \\ 4M_1 + 12M_2 = 43{,}424 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = -6{,}401 < 0 \\ M_2 = 5{,}752 > 0 \end{cases}$$

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen (M): treo biểu đồ (H5.9.29)

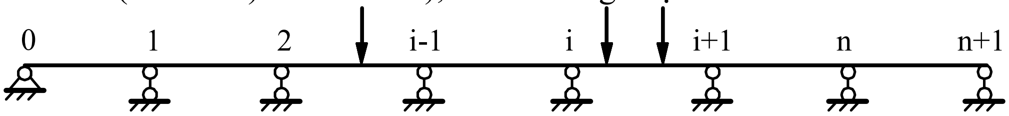
b. Biểu đồ lực cắt, lực dọc (H5.9.30 & H5.9.31)

III. Tính dầm liên tục bằng phương pháp tiêu cự mômen:

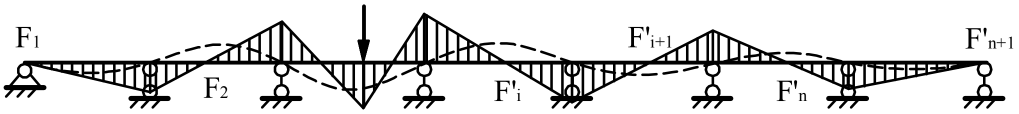
**** Mục đích:*** Là đi vận dụng khéo léo phương pháp phương trình 3 mômen để tính dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng chỉ tác dụng lên 1 nhịp mà không phải giải hệ phương trình chính tắc. Nếu trường hợp tải trọng tác dụng lên nhiều nhịp thì có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để đưa về thành tổng của nhiều bài toán, mỗi bài toán tải trọng chỉ tác dụng lên 1 nhịp.

Ví dụ: Hệ trên hình (H.5.9.32) có thể phân tích thành hai trường hợp như trên hình (H.5.9.33 & H.5.9.34)

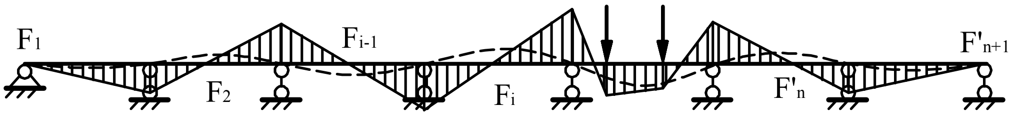
Với dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng tác dụng lên một nhịp (Ví dụ dầm trên hình (H.5.9.33) & H.5.9.34), ta có những nhận xét sau:



H.5.9.32



H.5.9.33



H.5.9.34

a. Đường đàn hồi (đường đứt nét) lượn theo hình sóng trên những nhịp kế tiếp nhau.

b. Trên những nhịp không chịu tải trọng tác dụng thì mômen uốn tại hai gối tựa liên tiếp luôn trái dấu nhau, mômen uốn tại gốc tựa gần nhịp chịu tải trọng hơn sẽ có giá trị tuyệt đối lớn hơn. Trên những nhịp này biểu đồ mômen uốn là đoạn thẳng cắt đường chuẩn tại 1 điểm gọi là *tiêu điểm mônmen*.

+ Những tiêu điểm nằm bên trái nhịp chịu tải trọng gọi là tiêu điểm trái. Ký hiệu F_i.

+ Những tiêu điểm nằm bên phải nhịp chịu tải trọng gọi là tiêu điểm phải. Ký hiệu F'_i

Ở đây i là chỉ số nhịp thứ i.

c. Ta định nghĩa: tỷ số dương và lớn hơn đơn vị của 2 mômen uốn tại 2 gối tựa liên tiếp của nhịp không chịu tải trọng tác dụng là tỷ số tiêu cự mômen.

+ Đối với nhịp nằm bên trái của nhịp chịu tải trọng:

$k_i = -\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$: gọi là tỷ số tiêu cự trái.

+ Đối với nhịp nằm bên phải của nhịp chịu tải trọng:

$k'_i = -\dfrac{M_{i-1}}{M_i}$: gọi là tỷ số tiêu cự phải

Dễ thấy nếu biết được tỷ số tiêu cự mômen thì sẽ biết được vị trí của tiêu điểm mômen và ngược lại.

d. Ta sẽ vẽ được biểu đồ mômen nếu biết được 2 yếu tố:

+ Mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng.

+ Các tỷ số tiêu cự mômen.

1. Xác định tỷ số tiêu cự :

a. Tỷ số tiêu cự trái: (k_i)

Xét 2 nhịp thứ i và (i-1) nằm bên trái của nhịp chịu tải trọng tác dụng. Viết phương trình 3 mômen cho gối (i-1):

$$\lambda_{i-1}.M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i.M_i = 0$$

($\Delta_{i-1P} = 0$ do trên các nhịp này không chịu tải trọng tác dụng)

Chia 2 vế của phương trình cho M_{i-1} ta được:

$$\lambda_{i-1}.\frac{M_{i-2}}{M_{i-1}}+2(\lambda_{i-1}+\lambda_i)+\lambda_i\frac{M_i}{M_{i-1}}=0$$

Mặt khác: $k_i=-\dfrac{M_i}{M_{i-1}},k_{i-1}=-\dfrac{M_{i-1}}{M_{i-2}}$

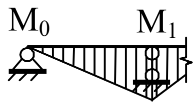
Thay vào, rút gọn ta được:

$$k_i=2+\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left[2+\frac{1}{k_{i-1}}\right] \qquad (5\text{-}27)$$

Công thức (5-12) có tính truy hồi nghĩa là có thể xác định được k_i nếu biết được k_{i-1}.

+ Nếu gối tựa đầu tiên là khớp: (H.5.9.35)

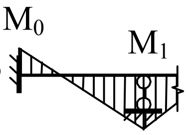
$$k_1=-\frac{M_1}{M_0}=-\frac{M_1}{0}=\infty$$



H.5.9.35

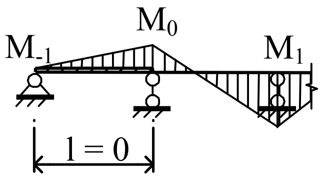
+ Nếu gối tựa đầu tiên là ngàm: (H.5.9.36)

Đưa về hệ tương đương có gối tựa đầu tiên là khớp (H.5.9.37), ta có $k_0=\infty$. Từ công thức (5-12) ta tính được:

H.5.9.36


$$k_1=2+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[2-\frac{1}{k_0}\right]$$

$$=2+\frac{0}{\lambda_1}\left[2-\frac{1}{\infty}\right]=2$$



H.5.9.37

b. Tỷ số tiêu cự phải: (k'_i)

Tương tự, ta thiết lập được:

$$k'_i=2+\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left[2-\frac{1}{k'_{i+1}}\right] \qquad (5\text{-}28)$$

Công thức truy hồi (5-13) được xác định theo chỉ số tiêu cự phải của nhịp cuối cùng:

+ Nếu gối tựa cuối cùng là khớp: $k'_{n+1}=\infty$

+ Nếu gối tựa cuối cùng là ngàm: $k'_{n+1}=2$

2. Xác định mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng tác dụng:

Giả sử tải trọng tác dụng lên nhịp thứ i, mômen cần xác định là M_{i-1}, M_i. Bằng cách phân tích phương trình 3 mômen cho 2 gối tựa thứ i và (i - 1) ta được kết quả:

$$M_{i-1}=-\frac{6J_0\omega_i}{l_i\lambda_iJ_i}.\frac{b_ik'_i-a_i}{k_ik'_i-1}=-\frac{6\omega_i}{l_i^2}.\frac{b_ik'_i-a_i}{k_ik'_i-1} \qquad (5\text{-}29)$$

$$M_i=-\frac{6J_0\omega_i}{l_i\lambda_iJ_i}.\frac{a_ik_i-b_i}{k_ik'_i-1}=-\frac{6\omega_i}{l_i^2}.\frac{a_ik_i-b_i}{k_ik'_i-1} \qquad (5\text{-}30)$$

Chú ý:

- Nếu tải trọng tác dụng lên nhịp đầu tiên và gối tựa đầu tiên là khớp:

$$M_0=0;\ M_1=-\frac{6\omega_1}{l_i^2}.\frac{a_1k_1-b_1}{k_1k'_1-1}=-\frac{6\omega_1}{l_1^2}.\frac{a_1\infty-b_1}{\infty k'_1-1}=-\frac{6\omega_1}{l_1^2}.\frac{a_1}{k'_1}$$

- Nếu tải trọng tác dụng lên nhịp cuối cùng và gối tựa cuối cùng là khớp: ($k'_{n+1} = \infty$)

$$M_{n+1} = 0;\ M_n = -\frac{6\omega_{n+1}}{l_{n+1}^2}.\frac{b_{n+1}k'_{n+1} - a_{n+1}}{k_{n+1}k'_{n+1} - 1} = -\frac{6\omega_{n+1}}{l_{n+1}^2}.\frac{b_{n+1}}{k_{n+1}}$$

3. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen:

- Trên nhịp chịu tải trọng tác dụng: dựng tung độ của 2 gối tựa của nhịp và treo biểu đồ (M_P^o) vào.

- Bên trái của nhịp chịu tải trọng: là những đoạn thẳng kế tiếp qua tung độ tại các gối tựa được xác định:

$$M_{i-1} = -\frac{M_i}{k_i}$$

- Những nhịp bên phải của nhịp chịu tải trọng: là những đoạn thẳng kế tiếp qua tung độ tại các gối tựa được xác định:

$$M_i = -\frac{M_{i-1}}{k'_i}$$

b. Biểu đồ lực cắt: Được vẽ bằng cách suy ra từ biểu đồ mômen.

c. Biểu đồ lực dọc: Thường trùng với đường chuẩn.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.5.9.38)

1. Tạo hệ cơ bản đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ (M_P^o), xác định các đại lượng:

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = 0$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3}lf = \frac{2}{3}.4.4 = \frac{32}{3}$$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i.\frac{J_0}{J_i}$

$\rightarrow \lambda_1 = 3m;\ \lambda_2 = 2m;\ \lambda_3 = \lambda_4 = 3m.$

2. Xác định các tỷ số tiêu cự mômen:

a. Tỷ số tiêu cự trái:

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left[2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right]$$

Thay $k_1 = \infty$ và tính truy hồi:

$$k_2 = 2 + \frac{3}{2}\left[2 - \frac{1}{\infty}\right] = 5\ ;\ k_3 = 2 + \frac{2}{3}\left[2 - \frac{1}{5}\right] = 3,2\ ;\ k_4 = 2 + \frac{3}{3}\left[2 - \frac{1}{3,2}\right] = 3,68$$

b. Tỷ số tiêu cự phải:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left[2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right]$$

Thay $k'_4 = \infty$ và tính truy hồi:

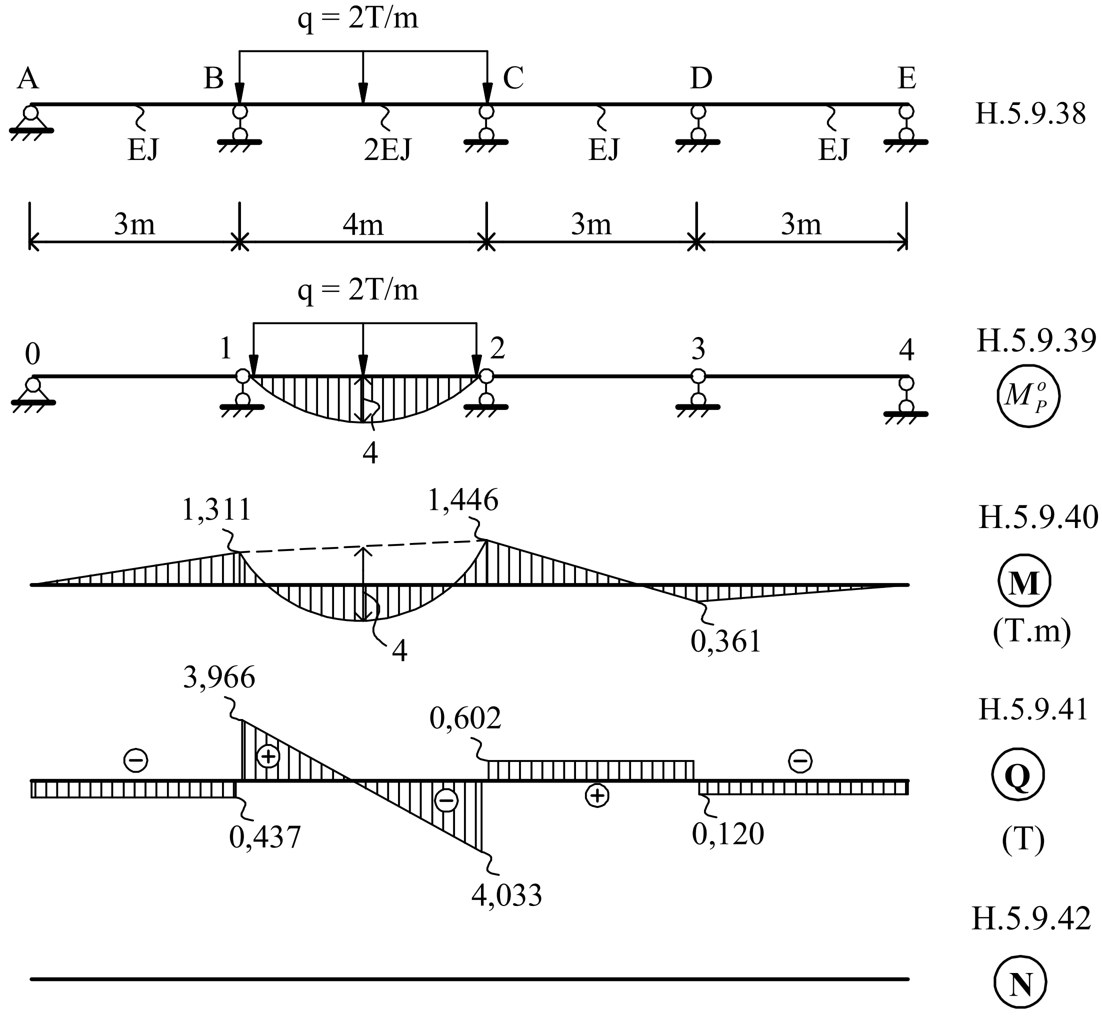
$$k'_3 = 2 + \frac{3}{3}\left[2 - \frac{1}{\infty}\right] = 4\ ;\ k'_2 = 2 + \frac{2}{3}\left[2 - \frac{1}{4}\right] = 4,625\ ;\ k'_1 = 2 + \frac{2}{3}\left[2 - \frac{1}{4,625}\right] = 3,498$$

3. Xác định mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng:

$$M_2 = -\frac{6\omega_2}{l_2^2}.\frac{b_2k'_2 - a_2}{k_2k'_2 - 1} = -\frac{6.32}{4^2.3}.\frac{2.4,625-2}{5.4,625-1} = -1,311$$

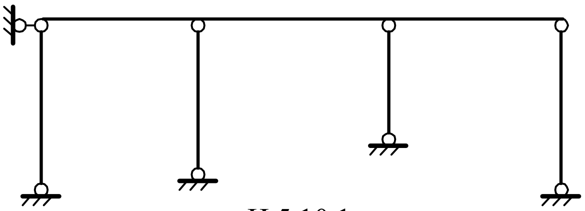
$$M_3 = -\frac{6\omega_2}{l_2^2}.\frac{a_2k_2 - b_2}{k_2k'_2 - 1} = -\frac{6.32}{4^2.3}.\frac{2.5-2}{5.4,625-1} = -1,446$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:
a. Biểu đồ mômen: Kết quả trên hình (H.5.9.40)
b. Biểu đồ lực cắt: Suy ra từ (M). (H.5.9.41).
c. Biểu đồ lực dọc: Trùng với đường chuẩn.

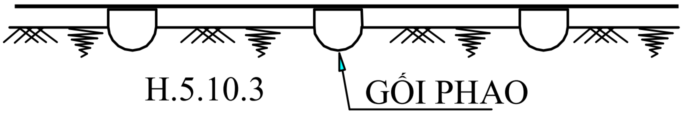


§10. TÍNH DẦM LIÊN TỤC TẠI ĐẶT TRÊN CÁC GỐI TỰA ĐÀN HỒI

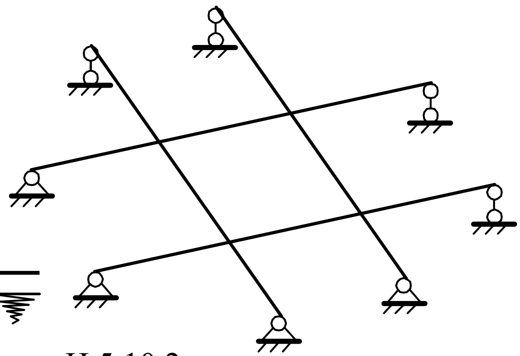
I. Khái niệm: là những dầm liên tục đặt trên các gối tựa có khả năng chuyển vị theo phương vuông góc với trục dầm như cột có chiều dài hữu hạn hệ dầm đỡ dầm đang xét (H.5.10.2), dầm trên các gối phao (H.5.10.3)...



H.5.10.1



H.5.10.3



H.5.10.2

Gọi k_i là hệ số đàn hồi của gối tựa thứ i. Về ý nghĩa, k_i là chuyển vị của gối tựa thứ i khi gối chịu lực dọc bằng đơn vị. Ví dụ, hệ số đàn hồi của cột thứ i có tiết diện F_i, chiều cao d_i sẽ là $k_i = \dfrac{1.d_i}{EF_i}$. Vậy nếu phản lực tại gối tựa thứ i là R_i thì chuyển vị tại gối tựa này là k_iR_i. Ta biểu thị các gối tựa bằng các lò xo với hệ số k_i.

III. Phương trình năm mômen:

1. Hệ cơ bản:

Không mất tính tổng quát, ta xét các nhịp thứ (i - 2), (i - 1), i, (i + 1), (i + 2) của một dầm liên tục đặt trên các gốc tựa đàn hồi như trên hình (H.5.10.4). Tương tự bài toán dầm liên tục, tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết ngăn cản chuyển vị góc xoay tương đối của 2 tiết diện 2 bên gối tựa trung gian (thay hàn bằng khớp) (H.5.10.6)

2. Hệ phương trình chính tắc:

Xét phương trình thứ i của hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{i1}M_1 + \delta_{i2}M_2 + \ldots\delta_{in}M_n + \Delta_{iP} = 0$$

Nhận xét rằng: $\delta_{ik} = \delta_{ki}; \delta_{ki}$ là chuyển vị góc xoay tương đối của 2 tiết diện ở 2 bên gối tựa thứ k do $M_i = 1$ gây ra. Với cách chọn hệ cơ bản như trên thì M_i chỉ gây ra biến dạng tại nhịp thứ (i - 1), i, (i + 1), (i + 2) (H.5.10.9) và chỉ gây ra chuyển vị góc xoay tại các gối tựa (i - 2), (i - 1), i, (i + 1), (i + 2). Điều này có ý nghĩa $\delta_{(i-2)i}, \delta_{(i-1)i}, \delta_{ii}, \delta_{(i+1)i}, \delta_{(i+2)i} \neq 0$ còn các hệ số δ_{ki} ($k \neq$ i - 2, i - 1, i, i + 1) = 0.

Vậy ta viết phương trình thứ i:

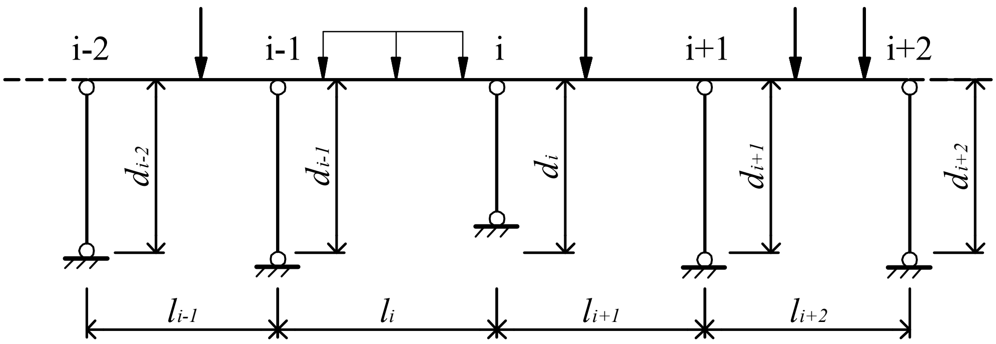
$$\delta_{i(i-2)}M_{i-2} + \delta_{i(i-1)}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i(i+1)}M_{i+1} + \delta_{i(i+2)}M_i + \Delta_{iP} = 0$$

Phương trình này gọi là phương trình năm mômen.

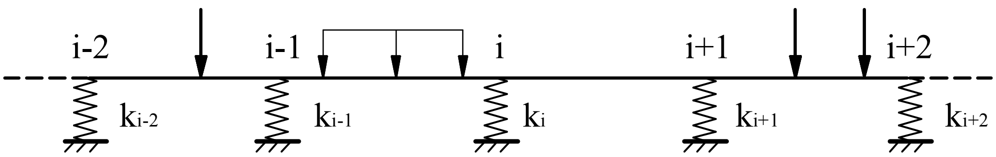
3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Các hệ số này ngoài ảnh hưởng của biến dạng uốn còn phải kể đến biến dạng dọc trục trong các gối tựa đàn hồi.

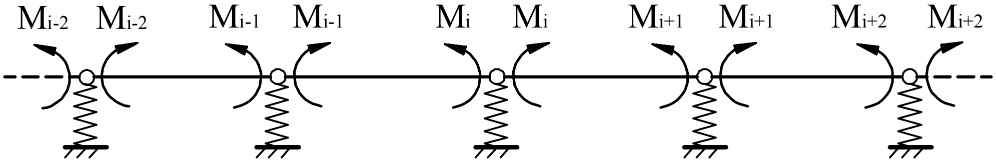
$$\delta_{ik} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_k) + \sum_m \overline{N}_{mi}.\overline{N}_{mk}.\frac{d_m}{EF_m}$$



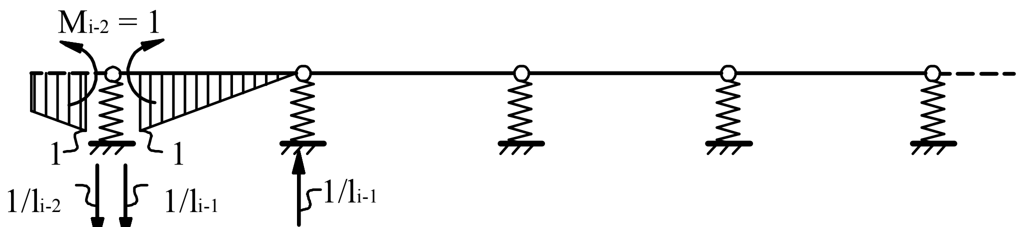
H.5.10.4



H.5.10.5

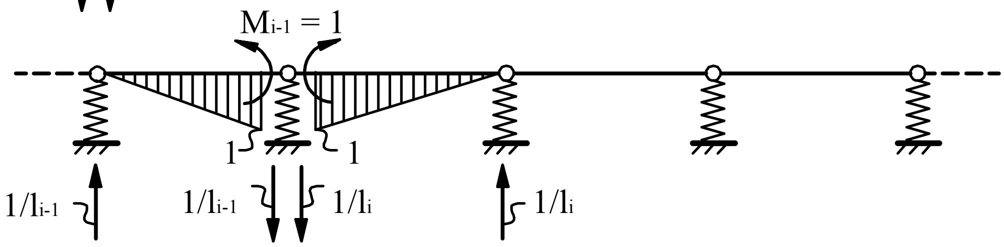


H.5.10.6



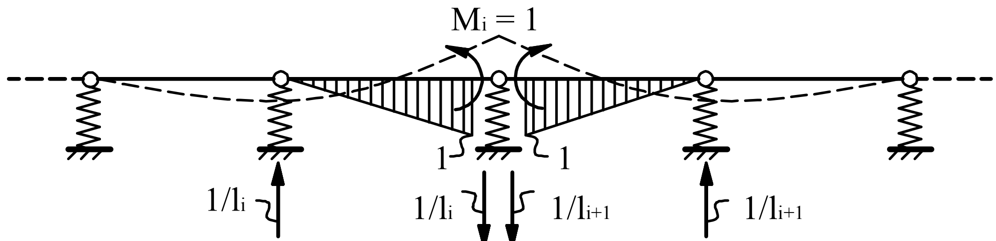
H.5.10.7

$(\overline{M}_{i-2})$



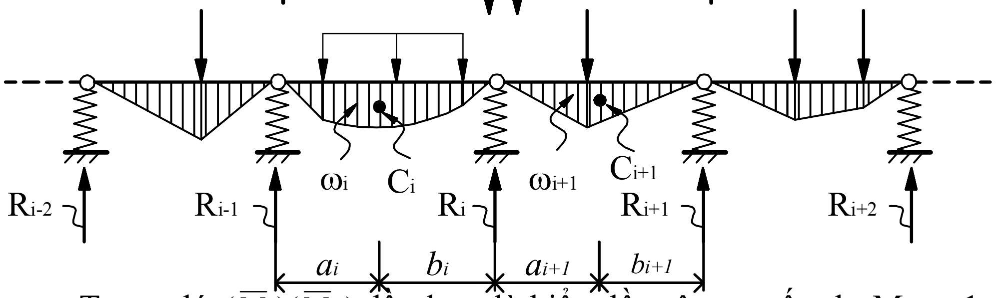
H.5.10.8

$(\overline{M}_{i-1})$



H.5.10.9

$(\overline{M}_i)$



H.5.10.10

$(\overline{M}_P^o)$

Trong đó: $(\overline{M}_i)(\overline{M}_k)$ lần lượt là biểu đồ mômen uốn do $M_i = 1$, $M_k = 1$ tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

$\overline{N}_{mi}, \overline{N}_{mk}$ lần lượt là lực dọc (phản lực) trong gối tựa thứ m do $M_i = 1$ và $M_k = 1$ tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

$$\delta_{i(i-2)} = 0 + (-\frac{1}{l_{i-1}})(-\frac{1}{l_i}).\frac{d_{i-1}}{E\mathrm{F}_{i-1}} = \frac{k_{i-1}}{l_{i-1}.l_i}$$

$$\delta_{i(i-1)} = \frac{l_i}{6EJ_i} + (\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i})(-\frac{1}{l_i}).\frac{d_{i-1}}{E\mathrm{F}_{i-1}} + (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})(-\frac{1}{l_i}).\frac{d_i}{E\mathrm{F}_i}$$

$$= \frac{l_i}{6EJ_i} - \frac{k_{i-1}}{l_i}(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}) - \frac{k_i}{l_i}(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})\delta_{ii}$$

$$\delta_{ii} = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} + (-\frac{1}{l_i})(-\frac{1}{l_i}).\frac{d_{i-1}}{E\mathrm{F}_{i-1}} + (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})^2.\frac{d_i}{E\mathrm{F}_i} + (-\frac{1}{l_{i+1}})(-\frac{1}{l_{i+1}}).\frac{d_{i+1}}{E\mathrm{F}_{i+1}}$$

$$= \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i^2} + (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})^2.k_i + (\frac{1}{l_{i+1}})^2.k_{i+1}$$

Thay chỉ số i trong hệ số $\delta_{i(i-1)}$ bằng (i-1) ta sẽ được $\delta_{i(i-1)}$.

$$\delta_{i(i+1)} = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} + \frac{k_i}{l_{i+1}}(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}) - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}})$$

Thay chỉ số i = (i + 2) trong hệ số $\delta_{i(i-2)}$ ta sẽ được $\delta_{i(i+2)}$

$$\delta_{i(i+2)} = \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}.l_{i+2}}$$

Số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc:

$$\Delta_{iP} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_P^o) + \sum_m \overline{N}_{mi}.\overline{N}_{mP}^o.\frac{d_m}{E\mathrm{F}_m}$$

(M_P^o) là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản.

(N_m^P): lực dọc (phản lực) trong gối tựa m do P gây ra trên hệ cơ bản.

$$\Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}} + (-\frac{1}{l_i})(-R_{i-1}).\frac{d_{i-1}}{E\mathrm{F}_{i-1}} +$$

$$+ (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})(-R_i)\frac{d_i}{E\mathrm{F}_i} + (-\frac{1}{l_{i+1}})(-R_{i+1}).\frac{d_{i+1}}{E\mathrm{F}_{i+1}}$$

$$\rightarrow \Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i}.R_{i-1} - (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}).k_i R_i + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}.R_{i+1}$$

Các đại lượng ω_i, a_i, b_i có ý nghĩa như trong phần phương trình 3 mômen.

Thay các hệ số ta được phương trình 5 mômen dưới dạng khai triển.

Trong trường hợp dầm có độ cứng EJ = const, chiều dài các nhịp bằng nhau (bằng l), các gối tựa có hệ số đàn hồi là như nhau thì phương trình 5 mômen có dạng:

$$\alpha M_{i-2} + (1-4\alpha)M_{i-1} + (4+6\alpha)M_i + (1-4\alpha)M_{i+1} +$$

$$+ \alpha M_{i+2} + \frac{6}{l^2}(\omega_i a_i + \omega_{i+1} b_{i+1}) + \alpha l(R_{i-1} - 2R_i + R_{i+1}) = 0$$

Trong đó: $\alpha = \frac{6EJ}{l^2}.k$

Sau khi thiết lập và giải hệ thống phương trình 5 mômen, ta sẽ xác định và vẽ biểu đồ nội lực như đã trình bày trong phần dầm liên tục.

§11. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

I. Đường ảnh hưởng cơ bản: là đường ảnh hưởng của các ẩn X_k, là các ẩn số thay thế cho các liên kết bị loại bỏ khi tạo hệ cơ bản.

1. Hệ cơ bản:

Tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết thừa và thay thế bằng các ẩn số X_k như trong phần hệ cơ bản của phương pháp lực.

2. Hệ phương trình chính tắc:

Để vẽ đường ảnh hưởng ta giả thiết trên công trình chỉ có 1 lực P = 1 di động theo 1 tọa độ z. Lực này bằng đơn vị và duy nhất tác dụng nên số hạng tự do chỉ còn Δ_{kP} và được thay bằng δ_{kP}. Do đó, hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ...\delta_{1n}X_n + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ...\delta_{2n}X_n + \delta_{2P} = 0 \\ ...... \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ...\delta_{nn}X_n + \delta_{nP} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Hệ số chính và phụ: (δ_{km}).

δ_{km} không phụ thuộc vào lực P = 1 di động và được xác định như hệ chịu tải trọng bất động: $\delta_{km} = (\overline{M}_k)(\overline{M}_m)$.

b. Số hạng tự do: (δ_{kP})

δ_{kP} do P = 1 động gây ra nên sẽ thay đổi theo tọa độ chạy z của lực P di động. Khi xác định δ_{kP} ta nên chia nhiều trường hợp của lực P = 1 di động với mỗi trường hợp P di động trên một phần tử thuộc hệ. Với mỗi trường hợp ta vẽ được một "dạng "của (M_P^o).

$$\delta_{kP} = (\overline{M}_k)(M_P^o)$$

4. Giải hệ phương trình chính tắc:

Sử dụng phương pháp hệ số ảnh hưởng. Trong phương trình này các ẩn X_k được biểu diễn qua các số hạng tự do (δ_{kP}) và hệ số ảnh hưởng:

$$\begin{cases} X_1 = \beta_{11}\delta_{1P} + \beta_{12}\delta_{2P} + ...\beta_{1n}\delta_{nP} \\ X_2 = \beta_{21}\delta_{1P} + \beta_{22}\delta_{2P} + ...\beta_{2n}\delta_{nP} \\ ... \\ X_n = \beta_{n1}\delta_{1P} + \beta_{n2}\delta_{2P} + ...\beta_{nn}\delta_{nP} \end{cases}$$

Trong đó β_{ik}: là hệ số ảnh hưởng, được xác định theo công thức sau:

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm 1}.\frac{D_{ik}}{D}$$

D là định thức của hệ số chính và phụ của hệ phương trình chính tắc:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}\delta_{12}...\delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22}...\delta_{2n} \\ ... \\ \delta_{n1}\delta_{n2}...\delta_{nn} \end{vmatrix}$$

D_{ik} là định thức được suy ra từ định thức D bằng cách loại bỏ hàng thứ i cột thứ k (hoặc hàng k cột i)

Sau khi xác định được X_k (là hàm theo tọa độ chạy z của P = 1 di động), cho z biến thiên sẽ vẽ được đ.a.h.X_k.

II. Đường ảnh hưởng phản lực, nội lực, chuyển vị:

Sau khi tìm được các đường ảnh hưởng cơ bản, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S (nội lực, phản lực, chuyển vị…) theo biểu thức sau:

$$\text{đ.a.h.}S = \overline{S}_1.(\text{đ.a.h.}X_1) + \overline{S}_2.(\text{đ.a.h.}X_2) + ... \overline{S}_n.(\text{đ.a.h.}X_n) + \text{đ.a.h.}S^o \qquad (5\text{-}31)$$

Trong đó: $\overline{S}_k$ là giá trị của S do riêng X_k = 1 gây ra trên hệ cơ bản.

đ.a.h.X_k: là các ảnh hưởng cơ bản.

đ.a.h.S^o: đường ảnh hưởng của S trên hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản chọn là tĩnh định thì đ.a.h.S^o được vẽ như trong phần cơ học kết cấu I.

* *Chú ý:* Do phương trình đường ảnh hưởng S(z) là hàm bậc cao theo z nên trong cách vẽ thực hành người ta sử dụng phương pháp điểm chia và lập thành bảng tính. Có thể tham khảo nội dung của bảng (B.5.11.1) bên dưới.

B.5.11.1 Bảng tính đ.a.h.S trong hệ siêu tĩnh

Điểm	z	đ.a.h.X_1	đ.a.h.X_2	...	đ.a.h.X_n	đ.a.h.S^o	đ.a.h.S
…	…	…	…	…	…	……	

Ví dụ: Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k của hệ trên hình vẽ (H.5.11.1). Cho EJ trong các thanh bằng hằng số trên toàn hệ.

1. Vẽ đường ảnh hưởng cơ bản:

a. Bậc siêu tĩnh:

n = 3V - K = 3.3 - 7 = 2

b. hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: (H.5.11.2)
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Hệ số chính và phụ δ_{km}:

$$\delta_{11} = (\frac{1}{EJ}.\frac{1.3}{2}.\frac{2}{3}.1).2 = \frac{2}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ}.\frac{1.3}{2}.\frac{1}{3}.1 = \frac{1}{2EJ}$$

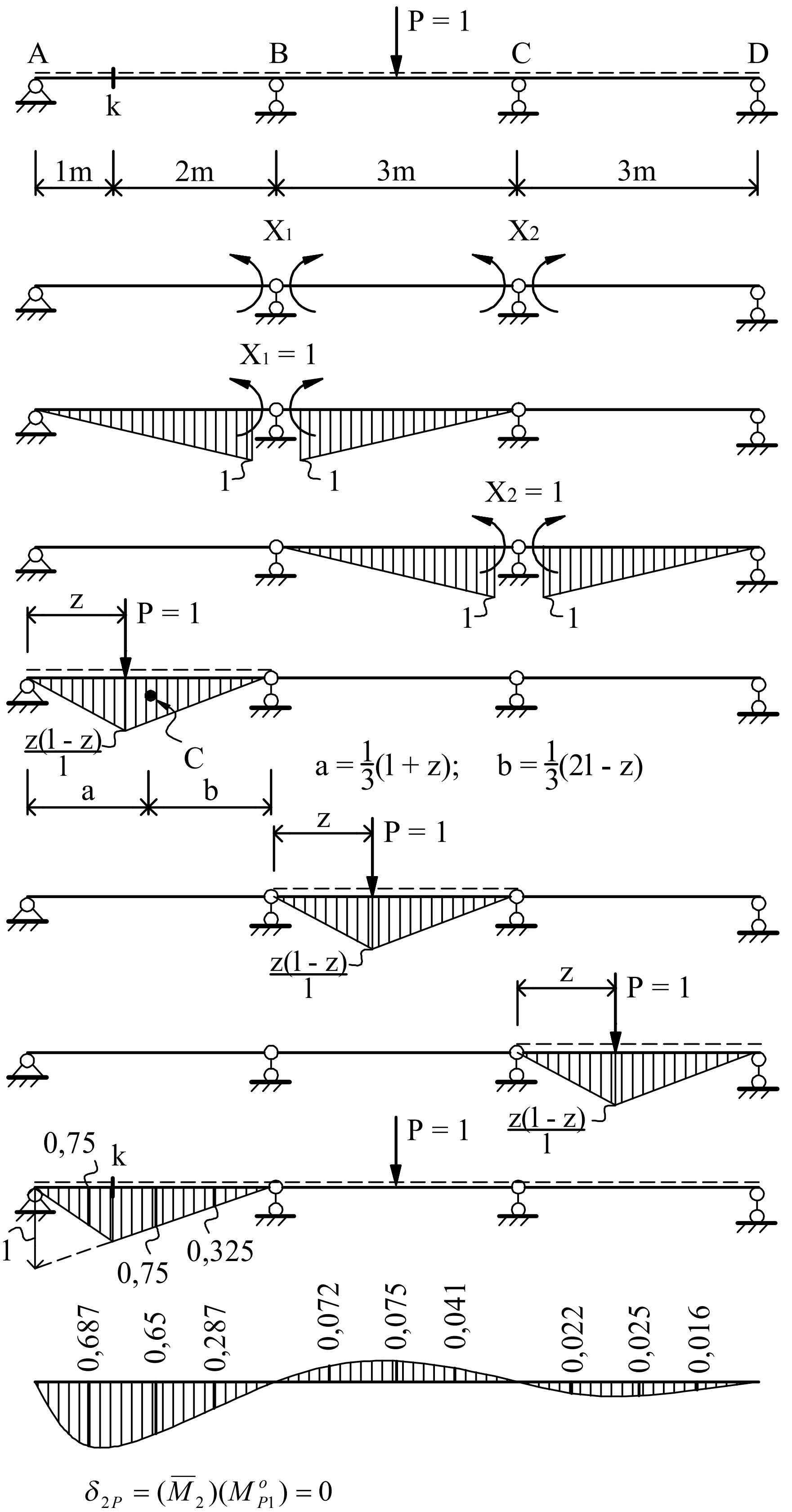
$$\delta_{22} = \frac{2}{EJ}(= \delta_{11})$$

- Xác định số hạng tự do δ_{kP}:

Chia đường xe chạy ra làm ba đoạn (phần tử) AB, BC, CD. Ứng với mỗi phần tử ta chọn gốc tọa độ tại đầu trái. Ứng với mỗi phần tử, ta vẽ được (M_P^o) tương ứng (H.5.11.5→ H.5.11.7)

+ Khi P = 1di động trên AB (z∈[0;3])

$$\delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M_{P1}^o) = \frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)}{3}.3.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\frac{(3+z)}{3} = \frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18}$$



H.5.11.1

H.5.11.2

H.5.11.3 $(\overline{M}_1)$

H.5.11.4 $(\overline{M}_2)$

H.5.11.5 (M^o_{P1})

H.5.11.6 (M^o_{P2})

H.5.11.7 (M^o_{P3})

H.5.11.8 $d.a.h.M^o_k$

H.5.11.9 đ.a.h.M_k

$$\delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M^o_{P1}) = 0$$

+ Khi P = 1di động trên BC ($z \in [0;3]$)

$$\delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M^o_{P2}) = \frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)}{3}.3.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\frac{(2.3-z)}{3} = \frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18}$$

$$\delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M^o_{P2}) = \frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18}$$

+ Khi P = 1di động trên CD (z∈[0;3])

$$\delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M^o_{P3}) = 0$$

$$\delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M^o_{P3}) = \frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18}$$

d. Giải hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} X_1 = \beta_{11}\delta_{1P} + \beta_{12}\delta_{2P} \\ X_2 = \beta_{21}\delta_{1P} + \beta_{22}\delta_{2P} \end{cases}$$

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm 1}.\frac{D_{ik}}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{EJ} & \frac{1}{2EJ} \\ \frac{1}{2EJ} & \frac{2}{EJ} \end{vmatrix} = \frac{15}{4(EJ)^2}$$

$$\beta_{11} = (-1)^3.\frac{2}{EJ}/\frac{15}{4(EJ)^2} = -\frac{8EJ}{15}$$

$$\beta_{12} = (-1)^4.\frac{1}{2EJ}/\frac{15}{4(EJ)^2} = \frac{2EJ}{15}$$

$$\beta_{21} = \beta_{12} = \frac{2EJ}{15}$$

$$\beta_{22} = (-1)^5.\frac{2}{EJ}/\frac{15}{4(EJ)^2} = -\frac{8EJ}{15}$$

Thay vào phương trình:

+ Khi P = 1di động trên AB (z∈[0;3])

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18} + \frac{2EJ}{15}.0 = -\frac{1}{33,75}.z(9-z^2)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18} - \frac{8EJ}{15}.0 = \frac{1}{135}.z(9-z^2)$$

+ Khi P = 1 di động trên BC (z∈[0;3])

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18} + \frac{2EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18}$$

$$= -\frac{1}{33,75}.z(3-z)(6-z) + \frac{1}{135}.z(9-z^2)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18} - \frac{8EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18}$$

$$= \frac{1}{135}.z(3-z)(6-z) - \frac{1}{33,75}.z(9-z^2)$$

+ Khi P = 1 di động trên CD (z∈[0;3])

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15}.0 + \frac{2EJ}{15}.\frac{1}{EJ}\frac{z(3-z)(6-z)}{18} = \frac{1}{135}.z(3-z)(6-z)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15}.0 - \frac{8EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18} = -\frac{1}{33,75}.z(3-z)(6-z)$$

Cho z biến thiên trên từng đoạn ta có thể vẽ được các đường ảnh hưởng cơ bản.

2. Đường ảnh hưởng mômen uốn tại k:

đ.a.h.M_k^o = $\overline{M}_{k1}$(đ.a.h.X_1) +$\overline{M}_{k2}$(đ.a.h.X_2) + đ.a.h.M_k^o

đ.a.h.M_k^o được vẽ trên hình (H.5.11.8)

$$\overline{M}_{k1} = \frac{1}{3}; \overline{M}_{k2} = 0$$

Ta lập bảng tính toán: Chia đường xe chạy ra làm 12 đoạn, mỗi đoạn dài 0,75m.

Phầntử	z(m)	đ.a.h.X_1	đ.a.h.X_2	$\overline{M}_{k1}$ đ.a.h.X_1	$\overline{M}_{k2}$ đ.a.h.X_2	đ.a.h.M_k^o	đ.a.h.M_k
AB	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	-0,187	0,047	-0,063	0	0,75	0,687
	1,5	-0,3	0,075	-0,1	0	0,75	0,65
	2,25	-0,263	0,066	-0,088	0	0,375	0,287
	3	0	0	0	0	0	0
BC	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	-0,216	-0,122	-0,072	0	0	0,072
	1,5	-0,225	-0,225	-0,075	0	0	-0,075
	2,25	-0,122	-0,216	-0,041	0	0	-0,041
	3	0	0	0	0	0	0
CD	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	0,066	-0,187	0,022	0	0	0,022
	1,5	0,075	-0,3	0,025	0	0	0,025
	2,25	0,047	-0,263	0,016	0	0	0,016
	3	0	0	0	0	0	0

Bảng 5.12. Bảng tính đ.a.h cơ bản và đ.a.h.M_k

§12. BIỂU ĐỒ BAO NỘI LỰC

Theo thời gian tác dụng lên công trình, tải trọng được chia thành 2 loại:

+ Tải trọng lâu dài: Nội lực do nó gây ra không đổi.

+ Tải trọng tạm thời: Nội lực do nó gây ra sẽ thay đổi.

Tải trọng tác dụng lên công trình gồm 2 loại trên nên nội lực sẽ thay đổi trong suốt quá trình tồn tại của công trình. Do đó, khi thiết kế cần phải xác định các giá trị đại số lớn nhất và nhỏ nhất của nội lực tại tất cả các tiết diện của hệ. Nếu biểu diễn nó lên trên một đồ thị sẽ được biểu đồ gọi là biểu đồ bao nội lực.

I. Định nghĩa biểu đồ bao nội lực:

Biểu đồ bao nội lực là biểu đồ mà mỗi tung độ của nó biểu thị giá trị đại số của nội lực lớn nhất hoặc nhỏ nhất do tải trọng lâu dài và tải trọng tạm thời có thể có gây ra tại tiết diện tương ứng.

II. Cách thực hiện:

Để đơn giản, ta xem tải trọng tạm thời tác dụng đồng thời lên từng nhịp của hệ và tiến hành các bước sau:

Bước 1: Vẽ biểu đồ nội lực do tải trọng lâu dài tác dụng lên toàn hệ gây ra (S_{ld})

Bước 2: Lần lượt vẽ các biểu đồ nội lực do tải trọng tạm thời gây ra sao cho mỗi trường hợp tải trọng tạm thời chỉ tác dụng lên một nhịp của hệ (S_{tt})

Bước 3: Vẽ biểu đồ bao nội lực bằng cách xác định tung độ lớn nhất (nhỏ nhất) tại các tiết diện của hệ. Biểu thức xác định có thể được viết:

$$S_{\max}^{k} = S_{ld}^{k} + \Sigma S_{tt}^{k}(+)$$

$$S_{\min}^{k} = S_{ld}^{k} + \Sigma S_{tt}^{k}(-)$$

k: chỉ tiết diện xác định tung độ biểu đồ bao.

$\Sigma S_{tt}^{k}(+)$, $\Sigma S_{tt}^{k}(-)$: lấy tổng các trường hợp nội lực tại k do tải trọng tạm thời gây ra mang dấu dương hay âm.

CHƯƠNG 6. PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ.
§1. CÁC KHÁI NIỆM.

I. Các giả thiết của phương pháp chuyển vị:

- *Giả thiết 1*: Các nút của hệ được xem là tuyệt đối cứng. Do đó, khi biến dạng, các đầu thanh qui tụ vào mỗi nút sẽ có chuyển vị thẳng và góc xoay là như nhau.

Giả thiết này làm giảm số lượng ẩn số.

- *Giả thiết 2:* Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt khi xét biến dạng của các cấu kiện bị uốn.

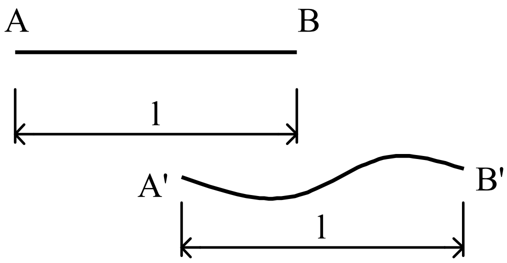
Giả thiết này không làm thay đổi số lượng ẩn số nhưng làm cho bảng tra nội lực các cấu kiện mẫu đơn giản hơn.

- *Giả thiết 3:* Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục khi xét biến dạng của các cấu kiện chịu uốn. (biến dạng dọc trục vì nhiệt độ không được phép bỏ qua)

Giả thiết này làm giảm số lượng ẩn số.

Ngoài ra, còn tuân theo giả thiết vật liệu, tuân theo định luật Hook, biến dạng và chuyển vị là những đại lượng vô cùng bé.

**** Kết luận:*** Trước và sau khi biến dạng, khoảng cách giữa 2 nút ở hai đầu thanh theo phương ban đầu của thanh là không thay đổi trừ trường hợp thanh có biến dạng dọc trục vì nhiệt độ hoặc thanh có hai đầu khớp với độ cứng EF khác vô cùng (H.6.1.1).

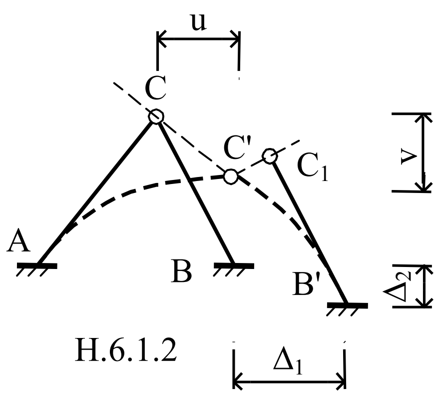


H.6.1.1

II. Hệ xác định động và hệ siêu động:

1. Hệ xác định động: là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, ta có thể xác định được các chuyển vị tại các đầu thanh chỉ bằng điều kiện động học (hình học).

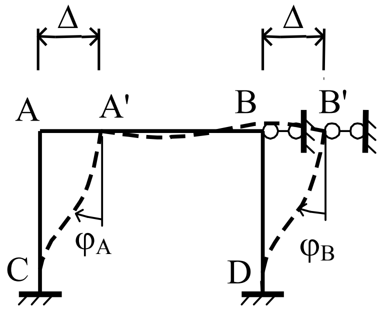
Xét hệ trên hình vẽ (H.6.1.2) khi B chịu chuyển vị cưỡng bức thì các đầu thanh quy tụ vào C chỉ tồn tại 2 thành phần chuyển vị thẳng (u, v). Ta có thể xác định được hai thành phần này chỉ bằng điều kiện động học (hình học). Vậy hệ đã cho là hệ xác định động.



H.6.1.2

2. Hệ siêu động: là những hệ khi chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức ta chưa thể xác định được tất cả các chuyển vị tại các đầu thanh chỉ bằng điều kiện động học (hình học) mà phải sử dụng thêm điều kiện cân bằng.

Ví dụ: Khi liên kết thanh chuyển vị ngang Δ (H.6.1.3), bằng điều kiện động học có thể xác định được chuyển vị thẳng tại A và B (chuyển vị ngang bằng Δ, chuyển vị đứng bằng 0). Tuy nhiên, chưa



H.6.1.3

thể xác định được góc xoay (φ_A, φ_B). Vậy hệ là hệ siêu động.

**** Chú ý:***

- Khái niệm về hệ siêu động hay xác định động là phụ thuộc vào các giả thiết chấp nhận.
- Hệ siêu động (xác định động) có thể là hệ tĩnh định hay siêu tĩnh. Ta chỉ tập trung nghiên cứu hệ siêu động đồng thời là siêu tĩnh.

III. Bậc siêu động:

1. Khái niệm: Bậc siêu động của hệ siêu động chính là số lượng các chuyển vị độc lập chưa biết của các nút và các khớp không nối đất trong hệ. Ký hiệu n.

$$n = n_1 + n_2 \qquad (6\text{-}1)$$

n_1: số chuyển vị xoay độc lập chưa biết của các nút, n_1 chính bằng số nút trong hệ.

n_2: số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút và các khớp không nối đất.

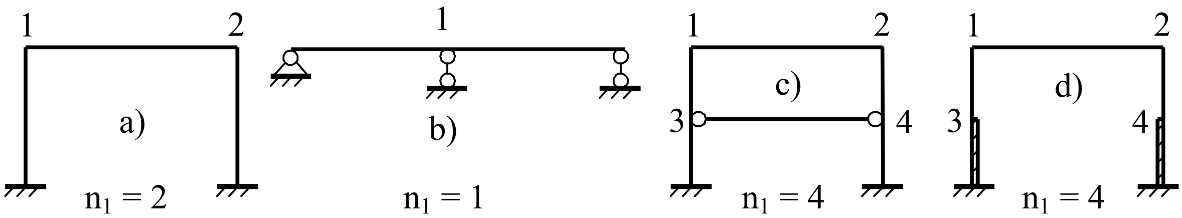
2. Cách xác định:

a. Xác định n_1: Bằng cách tính số lượng nút trong hệ. Nút là nơi giao nhau giữa các phần tử và được nối bằng liên kết hàn. Trong đó, phần tử là một cấu kiện mẫu tức là có biểu đồ nội lực cho trước và được lập sẵn thành bảng.

Đối với môn Cơ học kết cấu, phần tử là 1 đoạn thanh thẳng thỏa mãn các điều kiện:

- Độ cứng không đổi.
- Được nối với các phần tử khác hoặc trái đất chỉ bằng liên kết ở 2 đầu.

Ví dụ: Xác định n_1 của các hệ cho trên hình vẽ (H.6.1.4).

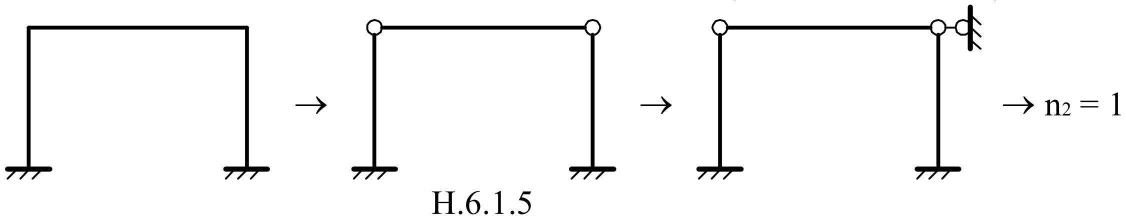


H.6.1.4

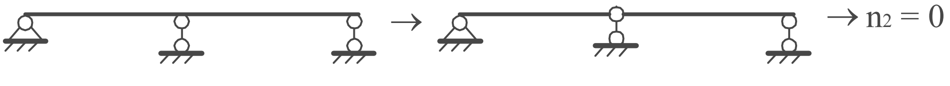
b. Xác định n_2: Bằng cách tính số lượng các chuyển vị thẳng độc lập chưa biết tại các nút và các khớp không nối đất. Để xác định, ta thay các nút, ngàm nối đất bằng các liên kết khớp để được 1 hệ mới.

Nếu hệ mới là bất biến hình thì $n_2 = 0$; nếu hệ mới là biến hình hay gần biến hình tức thời thì n_2 chính là số liên kết thanh vừa đủ thêm vào để hệ trở thành hệ bất biến hình.

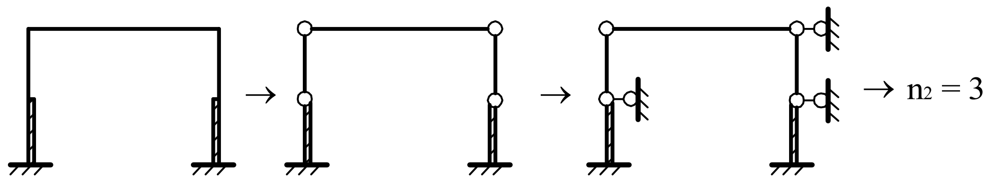
Ví dụ: Xác định n_2 của các hệ cho trên hình vẽ (H.6.1.5 → H.6.1.7).



H.6.1.5



H.6.1.6



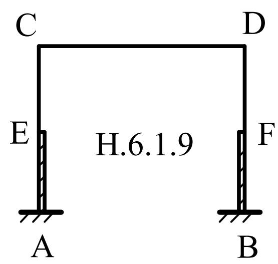
H.6.1.7

**Chú ý:* Khái niệm về bậc siêu động có thể thay đổi và phụ thuộc vào các yếu tố:

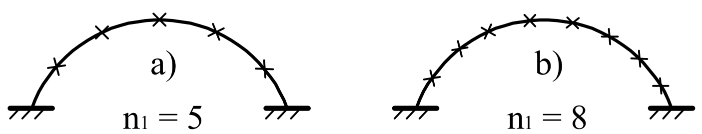
- Các giả thiết chấp nhận: chẳng hạn nếu phủ nhận giả thiết 3 thì n_1 không đổi còn n_2 tăng lên.
- Sơ đồ rời rạc hoá chấp nhận (H.6.1.8).
- Các cấu kiện mẫu mà người thiết kế sẵn có (H.6.1.9):

+ Nếu quan niệm mỗi phần tử là 1 thanh thẳng có độ cứng không đổi (AB, BC, CD, DE, EF) thì $n = n_1 + n_2 = 4 + 3 = 7$.

+ Nếu quan niệm mỗi phần tử là 1 thanh thẳng (AEC, CD, DFB) thì n = 2 + 1 = 3.



H.6.1.9



H.6.1.8

§2. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

I. Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị:

1. Định nghĩa: Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là hệ được suy ra từ hệ đã cho bằng cách đặt các liên kết phụ thêm vào hệ nhằm ngăn cản chuyển vị của các nút và các khớp không nối đất

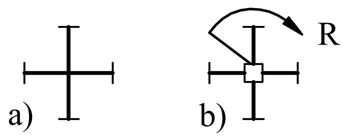
- Nếu các liên kết thêm vào khử được tất cả chuyển vị của các nút và các khớp không nối đất thì hệ cơ bản là hệ xác định động.

- Nếu các liên kết chỉ khử được 1 phần chuyển vị của các nút thì hệ cơ bản là hệ siêu động nhưng có bậc siêu động thấp hơn.

Yêu cầu: Hệ cơ bản chỉ tồn tại những cấu kiện mẫu, tức là có biểu đồ nội lực cho sẵn trong bảng.

2. Các loại liên kết phụ thêm:

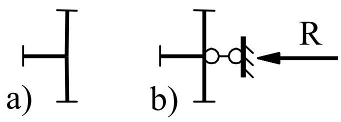
a. Liên kết mômen: Là loại liên kết chỉ ngăn cản chuyển vị góc xoay, không ngăn cản chuyển vị thẳng. Trong liên kết này chỉ phát sinh 1 thành phần phản lực mômen. Ký hiệu (H.6.2.1).



H.6.2.1

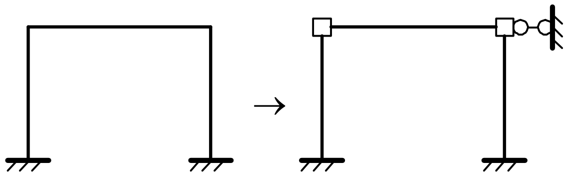
b. Liên kết lực (liên kết thanh): Liên kết này chỉ ngăn cản chuyển vị dọc theo trục thanh (trục liên kết). Trong liên kết thanh chỉ phát sinh 1 thành phần phản lực dọc theo trục thanh.

Ký hiệu: (H.6.2.2)

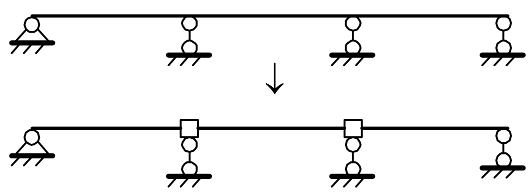


H.6.2.2

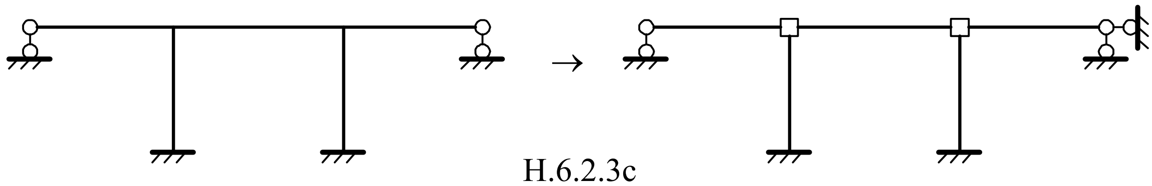
3. Các ví dụ tạo hệ cơ bản:



H.6.2.3a



H.6.2.3b



H.6.2.3c

Nhận xét:

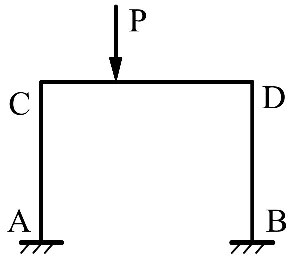
- Khác với hệ cơ bản của phương pháp lực, hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là duy nhất nếu các yếu tố ảnh hưởng đến bậc siêu động là xác định.

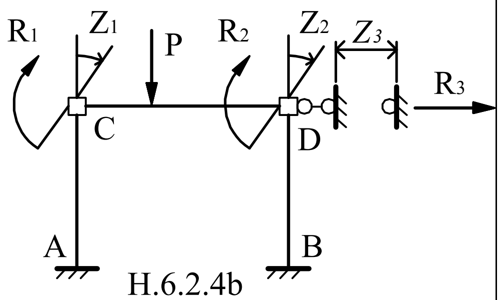
- Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị thực chất là những cấu kiện rời rạc và làm việc độc lập nhau.

II. Hệ phương trình cơ bản của phương pháp chuyển vị:

Do đặt các liên kết phụ thêm vào nên hệ cơ bản có những yếu tố khác với hệ siêu động ban đầu. Vì vậy ta cần so sánh sự khác nhau đó và bổ sung thêm các điều kiện để hệ cơ bản làm việc giống với hệ ban đầu.

Giả sử xét hệ siêu động trên hình (H.6.2.4a) và hệ cơ bản của nó (H.6.2.4b).

<table>
<tr>
<td>


H.6.2.4a
</td>
<td>


H.6.2.4b
</td>
</tr>
<tr>
<td>- Về chuyển vị:
Tại C và D có tồn tại chuyển vị ngang và góc xoay.
- Về mặt phản lực:
Tại C và D không tồn tại phản lực.</td>
<td>Tại C và D không tồn tại chuyển vị.

Tại C và D tồn tại phản lực (R_1, R_2, R_3) tại các liên kết phụ thêm.</td>
</tr>
</table>

Vậy để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu động ban đầu, trên hệ cơ bản cần:

- Tạo ra các chuyển vị cưỡng bức (Z_1, Z_2, Z_3) tương ứng với các liên kết phụ thêm vào.
- Thiết lập điều kiện phản lực tại các liên kết phụ thêm vào do các nguyên nhân (Z_1, Z_2, Z_3, P) bằng không. Các điều kiện này được viết dưới dạng:

$$\begin{cases} R_1(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_2(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_3(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \end{cases}$$

Từ điều kiện này ta có thể giải ra được (Z_1, Z_2, Z_3).

Tương tự như vậy ta mở rộng cho 1 hệ siêu động bất kỳ chịu các nguyên nhân bên ngoài (P, t, Z). Tạo hệ cơ bản bằng cách đặt n liên kết phụ thêm vào. Để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ ban đầu thì trên hệ cơ bản cần:

- Tạo ta các chuyển vị cưỡng bức (Z_1, Z_2,..., Z_n) tương ứng với các liên kết phụ thêm vào. Các chuyển vị này có chiều tùy ý, tuy nhiên thường chọn xoay theo chiều kim đồng hồ, thẳng theo chiều từ trái sang phải. Các chuyển vị này đóng vai trò là ẩn số.
- Thiết lập điều kiện phản lực tại các liên kết phụ thêm vào do các nguyên nhân (Z_1, Z_2,... Z_n, P, t, Z) = 0.

Điều kiện thứ 2 được viết:

$$\begin{cases} R_1(Z_1, Z_2, ... Z_n, P, t, Z) = 0 \\ R_2(Z_1, Z_2, ... Z_n, P, t, Z) = 0 \\ ..... \\ R_n(Z_1, Z_2, ... Z_n, P, t, Z) = 0 \end{cases} \quad (6\text{-}2)$$

Hệ phương trình này gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp chuyển vị.

III. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:

Xét phương trình thứ k của hệ phương trình cơ bản:

$R_k(Z_1, Z_2, ... Z_n, P, t, Z) = 0.$

Khai triển phương trình này theo nguyên lý cộng tác dụng:

$R_k(Z_1) + R_k(Z_2) + ... R_k(Z_n) + R_k(P) + R_k(t) + R_k(Z) = 0.$

Gọi r_{km} là phản lực tại liên kết phụ thêm thứ k do riêng chuyển vị cưỡng bức tại liên kết phụ thêm thứ m $Z_m = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Suy ra: $R_k(Z_m) = r_m.Z_m$

Gọi R_{kP}, R_{kt}, R_{kZ}: lần lượt là phản lực tại liên kết phụ thêm thứ k do nguyên nhân ngoài P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản.

Suy ra: $R_k(P) = R_{kP}$, $R_k(t) = R_{kt}$, $R_k(Z) = R_{kZ}$

Thay tất cả vào phương trình khai triển ta được:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + ...r_{kn}Z_n + R_{kP} + R_{kt} + R_{kZ} = 0$$

Cho $k = \overline{1,n}$ ta được hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:

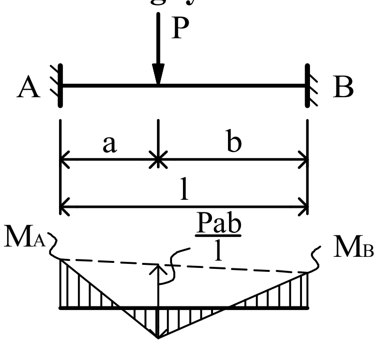
$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + ...r_{1n}Z_n + R_{1P} + R_{1t} + R_{1Z} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + ...r_{2n}Z_n + R_{2P} + R_{2t} + R_{2Z} = 0 \\ ...... \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + ...r_{nn}Z_n + R_{nP} + R_{nt} + R_{nZ} = 0 \end{cases} \qquad (6\text{-}3)$$

Trong hệ phương trình này:

- r_{kk}: gọi là hệ số chính, $r_{kk} > 0$; - r_{km}: ($k \neq m$) gọi là hệ số phụ, $r_{km} = r_{mk}$
- R_{kP}, R_{kt}, R_{kZ}: gọi là số hạng tự do.

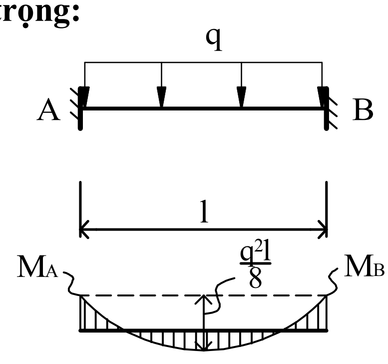
IV. Bảng tra nội lực cho một số phần tử:

1. Nguyên nhân tải trọng:



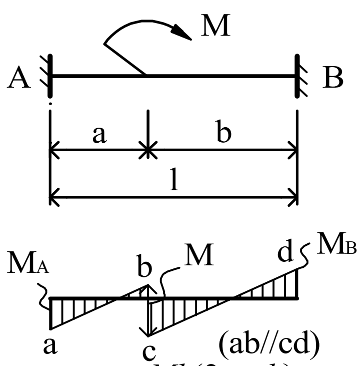
$$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_B = -\frac{Pa^2b}{l^2}$$



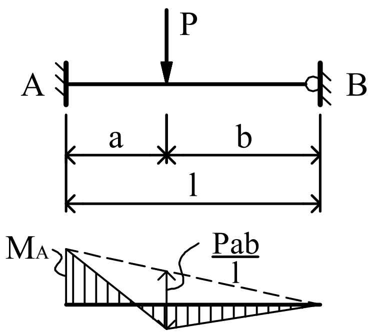
$$M_A = -\frac{ql^2}{12}$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{12}$$



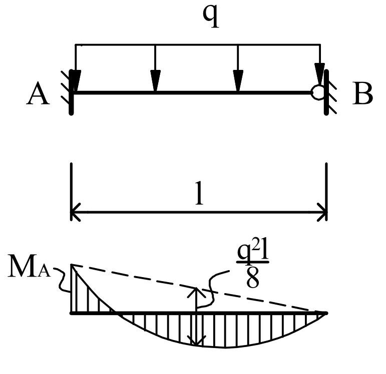
$$M_A = \frac{Mb(2a-b\}}{l^2}$$

$$M_B = -\frac{Ma(a-2b)}{l^2}$$



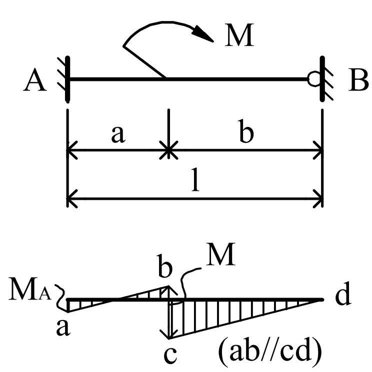
$$M_A = -\frac{Pab(2l-a)}{2l^2}$$

$$M_B = 0$$



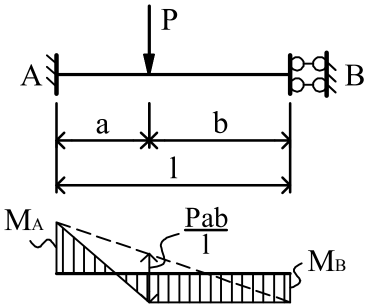
$$M_A = -\frac{ql^2}{8}$$

$$M_B = 0$$



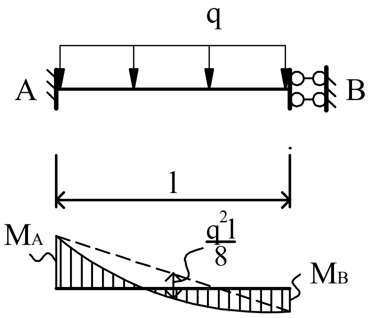
$$M_B = 0$$

$$M_A = \frac{M}{2}(1 - \frac{3b^2}{l^2})$$



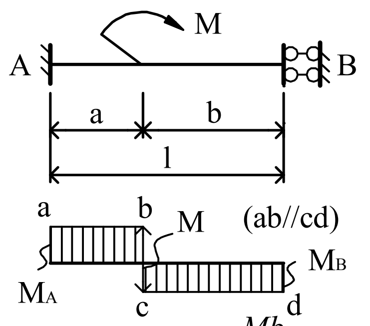
$$M_A = -\frac{Pa}{2}\left(2-\frac{a}{l}\right)$$

$$M_B = \frac{Pa^2}{2l}$$



$$M_A = -\frac{ql^2}{3}$$

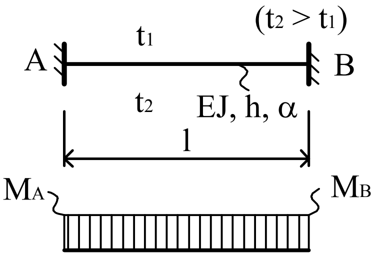
$$M_B = \frac{ql^2}{6}$$



$$M_A = -\frac{Mb}{l}$$

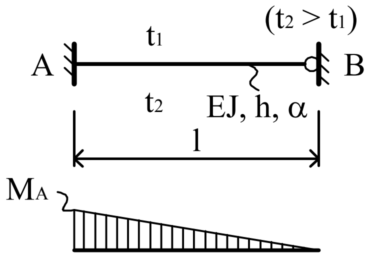
$$M_B = \frac{Ma}{l}$$

2. Nguyên nhân biến thiên nhiệt độ:



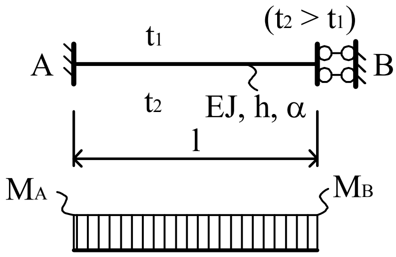
$$M_A = -\frac{\alpha}{h}EJ(t_2 - t_1)$$

$$M_B = M_A$$



$$M_A = -\frac{3}{2}\frac{\alpha}{h}EJ(t_2 - t_1)$$

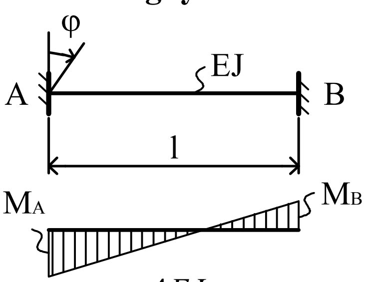
$$M_B = 0$$



$$M_A = -\frac{\alpha}{h}EJ(t_2 - t_1)$$

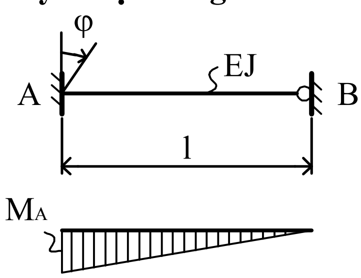
$$M_B = M_A$$

3. Nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức:



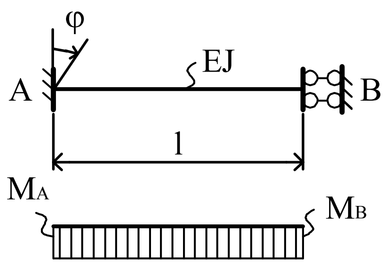
$$M_A = \frac{4EJ}{l}\varphi$$

$$M_B = -\frac{2EJ}{l}\varphi$$



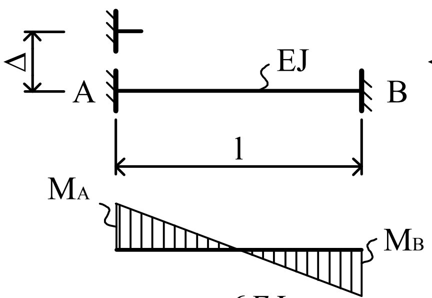
$$M_A = \frac{3EJ}{l}\varphi$$

$$M_B = 0$$



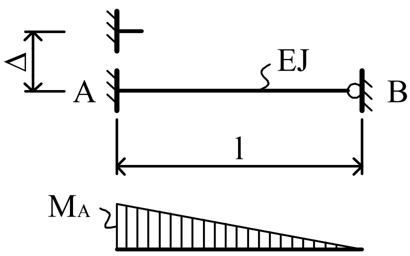
$$M_A = \frac{EJ}{l}\varphi$$

$$M_B = M_A$$



$$M_A = -\frac{6EJ}{l^2}\Delta$$

$$M_B = \frac{6EJ}{l^2}\Delta$$



$$M_A = -\frac{3EJ}{l^2}\Delta$$

$$M_B = 0$$

V. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

1. Vẽ các biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản xác định động:

a. Biểu đồ ($\overline{M}_k$): Là biểu đồ mômen uốn do riêng nguyên nhân $Z_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

a.1. Trường hợp Z_k là chuyển vị góc xoay:

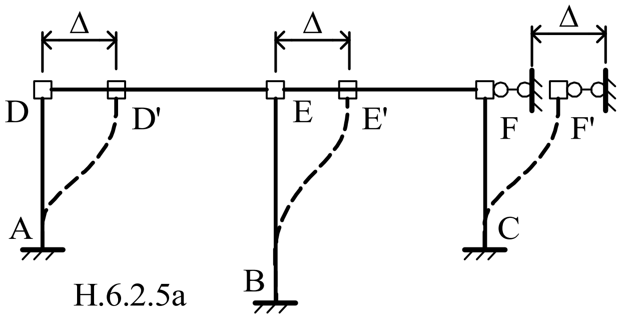
Nguyên nhân này chỉ gây ảnh hưởng cục bộ tại liên kết chịu Z_k, nghĩa là chỉ có các thanh có đầu quy tụ vào nút đó mới chịu ảnh hưởng. Do vậy biểu đồ ($\overline{M}_k$) được vẽ bằng cách rời rạc hệ cơ bản và tra bảng cho các phần tử chịu chuyển vị góc xoay tại đầu thanh.

a.2. Trường hợp Z_k là chuyển vị thẳng:

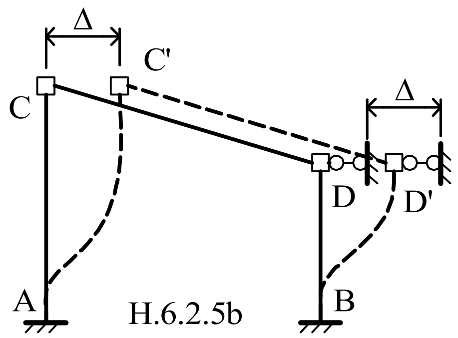
Khi một nút chuyển vị thẳng sẽ gây ra chuyển vị thẳng tại nhiều nút trong hệ, do đó sẽ gây ra nội lực trong nhiều thanh. Mặc khác chỉ có chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh mới gây ra nội lực.

a.2.1 Khi hệ chỉ gồm các thanh đứng song song:

Nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thanh, khi 1 nút nào đó chuyển vị thẳng thì các thanh ngang và nghiêng sẽ tịnh tiến nghĩa là các thanh phần chuyển vị tương đối theo phương vuông góc với trục thanh bằng không, còn các thanh đứng trong phạm vi mỗi tầng sẽ có chuyển vị tương đối như nhau theo phương vuông góc với trục thanh (H.6.2.5a & b).



H.6.2.5a



H.6.2.5b

a.2.2.Khi hệ có các thanh đứng không song song:

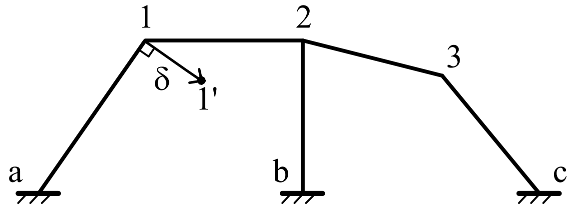
Thành phần chuyển vị thẳng cần tìm nói chung sẽ tồn tại trong tất cả các thanh, giá trị của chúng sẽ khác nhau trong mỗi thanh đứng. Các thành phần nay có thể tìm bằng cách lập sơ đồ chuyển vị.

* Cơ sở của việc lập sơ đồ: Chuyển vị thẳng tại 1 nút sẽ biết nếu như biết được ít nhất 1 chuyển vị tại 2 đầu thanh đối diện qui tụ vào nút. Xem sự phân tích trên hình (H.6.1.2)

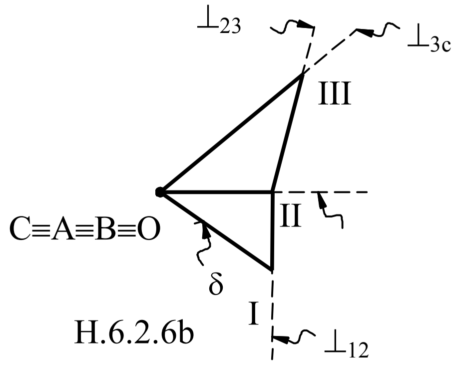
* Mục đích của việc lập sơ đồ chuyển vị là biểu diễn sự thay đổi vị trí của các đầu thanh lên sơ đồ mà trên đó ta có thể xác định được chuyển vị thẳng tương đối tại các đầu thanh. Ta tìm hiểu cách lập sơ đồ qua hệ cho trên hình vẽ (H.6.2.6a). Trong đó, giả sử nút 1 chịu chuyển vị δ.

Bước 1: Chọn 1 điểm O làm gốc và tượng trưng cho các điểm không có chuyển vị. Vậy nếu gọi A, B, C là tượng trưng cho các điểm a, b, c trên sơ đồ chuyển vị thì A, B, C trùng với O.

Bước 2: Qua O kẻ 1 đoạn OI = δ theo phương và chiều của chuyển vị nút 1, có độ lớn theo tỷ lệ xích tuỳ chọn. Điểm I là tượng trưng cho chuyển vị của nút 1 trên sơ đồ chuyển vị.



H.6.2.6a



H.6.2.6b

Bước 3: Xác định điểm II tượng trưng cho nút 2 trên sơ đồ chuyển vị.

Nút 2 có 2 đầu thanh đối diện đã biết trên sơ đồ chuyển vị là 1→ I, b → B. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 12, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 2b. Giao điểm chính là II.

Bước 4: Xác định điểm III tượng trưng cho nút 3 trên sơ đồ chuyển vị.

Tương tự bước 3, qua II kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 23, qua C kẻ dường thẳng vuông góc với thanh 3c. Giao điểm là điểm III.

Bước 5: Xác định kết quả. Để xác định chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh của thanh ik ta chỉ việc đo chiều dài của đoạn IK tương ứng trên sơ đồ chuyển vị hoặc giải các tam giác với các góc và các cạnh đã biết trên sơ đồ chuyển vị.

* Sau khi đã xác định chuyển vị thẳng, ta vẽ biểu đồ ($\overline{M}_k$) bằng cách rời rạc và tra bảng cho từng cấu kiện.

b. Biểu đồ (M_P^o): Là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản. ($\overline{M}_P^o$) được vẽ bằng cách rời rạc và tra bảng cho từng cấu kiện.

c. Biểu đồ (M_t^o): Là biểu đồ mômen uốn do biến thiên nhiệt độ gây ra trên hệ cơ bản.

Phân tích nguyên nhân này ra làm hai thành phần:

- Thành phần biểu thị sự thay đổi nhiệt độ của thớ trên và thớ dưới trong phạm vi mỗi cấu kiện và được đặc trưng bằng $\Delta t = t_2 - t_1$. Thành phần này gây ra ($M_{\Delta t}^o$).

- Thành phần biểu thị sự thay đổi nhiệt độ dọc trục thanh và được đặc trưng bằng t_c. Thành phần này gây ra (M_{tc}^o).

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$(M_t^o) = (M_{tc}^o) + (M_{\Delta t}^o)$$

- ($M_{\Delta t}^o$) là do Δt gây ra. Nhưng sự chênh lệch nhiệt độ Δt chỉ làm cho thanh bị uốn cong mà không thay đổi chiều dài. Điều này có nghĩa Δt chỉ gây ra mômen uốn trong thanh đó mà không ảnh hưởng đến các thành phần tử khác. Vậy ($\overline{M}_{\Delta t}^o$) được vẽ bằng cách rời rạc hệ và tra bảng cho cái phần tử chịu Δt.

- (M_{tc}^o) do t_c gây ra. Mặc dù t_c không làm cho thanh bị uốn cong nhưng làm thay đổi chiều dài. Điều này gây ra chuyển vị thẳng tại các nút và gây ra nội lực trong hệ. So sánh với trường hợp hệ chịu nguyên nhân Z_k là chuyển vị thẳng thì có sự tương tự nhưng ở đây sự chuyển vị của các nút do sự thay đổi chiều dài của các thanh. Vậy ta cũng đi lập sơ đồ chuyển vị (còn gọi là *giản đồ Williot*) như khi lập cho Z_k là chuyển vị thẳng nhưng cần bổ sung sự chuyển vị các nút do sự thay đổi chiều dài trong mỗi thanh.

Ta sẽ tìm hiểu cách lập sơ đồ chuyển vị qua hệ trên hình (H.6.2.7.a).

Biến dạng dọc trục của thanh ik được xác định bằng biểu thức

$\Delta l_{ik} = \alpha l_{ik} t_{cik}$

+ α hệ số dãn nở vì nhiệt

+ t_{cik}, l_{ik} là biến thiên nhiệt độ dọc trục và chiều dài thanh ik

Trong ví dụ này giả sử biến dạng trong các thanh tương ứng là Δl_{a3}, Δl_{23}, Δl_{21}, Δl_{1c} (giãn ra) và Δl_{2b}: (co ngắn lại)

Các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Chọn 1 điểm O làm chuẩn, O tượng trưng cho những điểm không có chuyển vị. Như vậy nếu gọi A, B, C, D là tượng trưng cho các điểm a, b, c, d trên sơ đồ chuyển vị thì A, B, C, D trùng với O.

Bước 2: Xác định điểm I tượng trưng cho nút 1 trên sơ đồ chuyển vị.

Ta nhận thấy nút 1 chỉ có thể chuyển vị theo phương dọc trục thanh 1c nên trên giản đồ ta dựng 1 đoạn I = Δl_{1c}.

Bước 3: Xác định điểm II tượng trưng cho nút 2 trên sơ đồ chuyển vị.

Nút 2 có 2 đầu thanh đối diện dã biết trên sơ đồ chuyển vị là b $\rightarrow$ B; 1 $\rightarrow$ I.

+ Qua 1 kẻ 1 đoạn Δl_{12} (độ giãn của thanh 12) được 2_1

+ Qua B kẻ 1 đoạn Δl_{2b} (độ co ngắn của thanh 2b) được 2_2

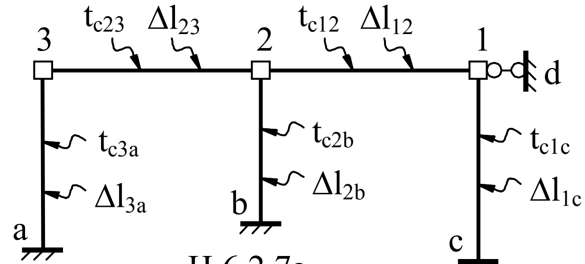
+ Qua 2_1 kẻ đường vuông góc với thanh 12.

+ Qua 2_2 kẻ đường vuông góc với thanh 2b.

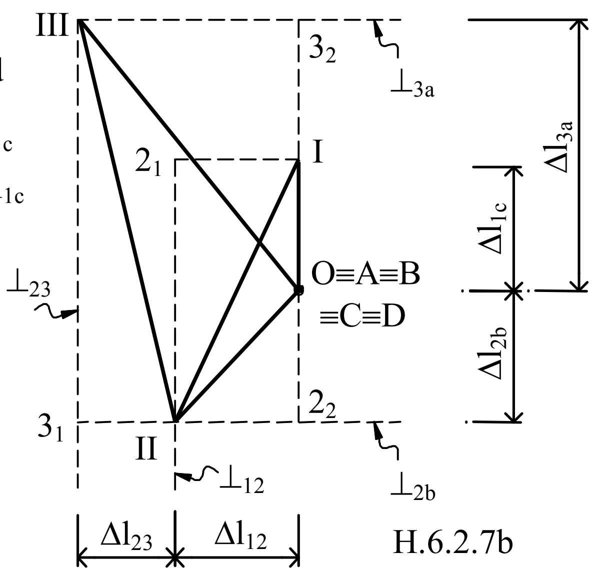
Giao điểm của 2 đường này là II.

Bước 4: Xác định điểm III tượng trưng cho nút 3 trên sơ đồ chuyển vị.

Nút 3 có 2 đầu thanh đối diện đã biết trên sơ đồ chuyển vị là 2 $\rightarrow$ II, a$\rightarrow$ A. Ta thực hiện tương tự như bước 3.



H.6.2.7a



H.6.2.7b

Bước 5: Xác định kết quả.

Muốn tìm chuyển vị tương đối theo phương vuông góc với trục thanh của thanh ik, ta chiếu đoạn IK tương ứng trên giản đồ lên phương cần tìm.

Sau khi đã xác định được chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh ta sẽ tra bảng vẽ được ($\overline{M}^o_{tc}$).

d. Biểu đồ (M_Z^o): là biểu đồ mômen uốn do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trên hệ cơ bản.

Phân tích nguyên nhân này ra làm 2 loại: chuyển vị thẳng (Δ) và chuyển vị góc xoay (φ) .

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$(M_Z^o) = (M_\varphi^o) + (M_\Delta^o)$

(M_φ^o): do nguyên nhân (φ) gây ra, vẽ tương tự biểu đồ ($\overline{M}_k$) do Z_k là chuyển vị góc xoay.

(M_Δ^o): do nguyên nhân (Δ) gây ra, vẽ tương tự biểu đồ ($\overline{M}_k$) do Z_k là chuyển cị thẳng. Tất nhiên là có thể lập sơ đồ chuyển vị nếu cần.

2. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Trường hợp liên kết k là liên kết mômen:

- Xác định r_{km}: Tách nút k trên biểu đồ mômen ($\overline{M}_m$) và xét cân bằng mômen nút.

- Xác định R_{kP}, R_{kt}, R_{kZ}. Tương tự, tách nút k trên các biểu đồ mômen tương ứng và xét cân bằng mômen nút.

b. Trường hợp liên kết k là liên kết lực:

Tương tự như ở trên bằng cách thực hiện 1 mặt cắt qua liên kết k trên biểu đồ mômen tương ứng nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận và xét cân bằng lực.

** Chú ý:*

- Chiều dương của phản lực lấy theo chiều của chuyển vị cưỡng bức đặt thêm vào trên hệ cơ bản.

- Khi liên kết k là liên kết mômen, thì chỉ cần xác định mômen quanh nút k là đủ để viết phương trình cân bằng mômen. Khi liên kết k là liên kết lực thì ta chỉ cần xác định các lực cắt hoặc lực dọc vừa đủ để tham gia phương trình cân bằng hình chiếu.

VI. Vẽ biểu đồ nội lực:

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc sẽ xác định được (Z_1, Z_2,... Z_n) và có thể giải hệ theo cách tính trực tiếp hay theo nguyên lý cộng tác dụng như phương pháp lực. Trong vẽ thực hành người ta thường sử dụng phương pháp cộng tác dụng để vẽ biểu đồ mômen:

$$(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (\overline{M}_2)Z_2 + ...(\overline{M}_n)Z_n + (M_P^o) + (M_t^o) + (M_Z^o)$$

Biểu đồ lực cắt được suy ra từ biểu đồ mômen và biểu đồ lực dọc được suy ra từ biểu đồ lực cắt như trong phương pháp lực.

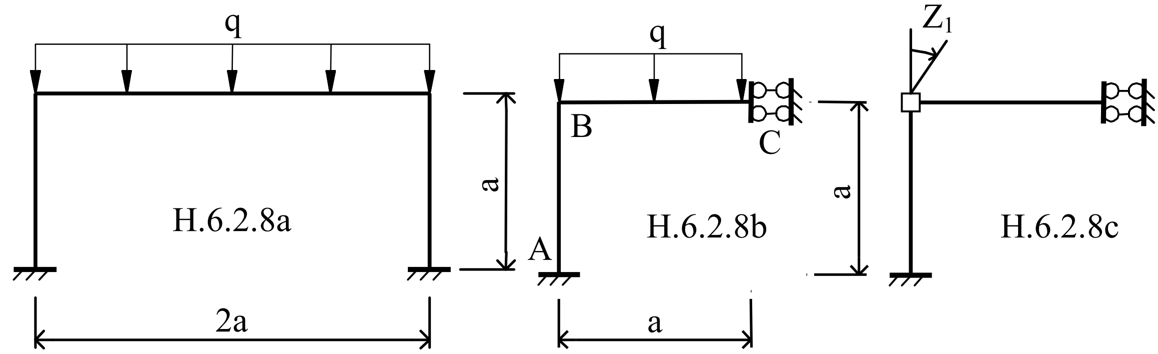
CÁC VÍ DỤ VỀ PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.6.2.8a). Cho biết độ cứng trong các thanh là EJ = const và chỉ xét biến dạng uốn.

* Hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng, ta lập sơ đồ tính một nữa hệ tương đương như trên hình (H.6.2.8b) và đi giải bài toán trên một nửa hệ tương đương.

1. Bậc siêu động:

$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$

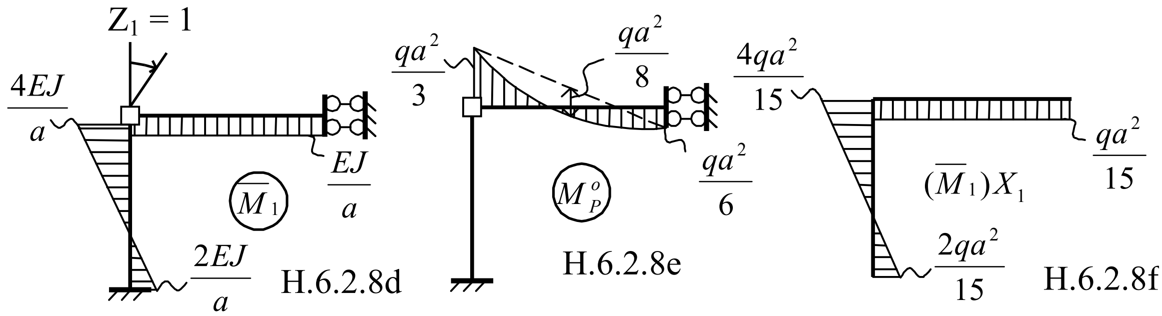


H.6.2.8a H.6.2.8b H.6.2.8c

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:
- Hệ cơ bản: (H.6.2.8c)
- Hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:
- Vẽ các biểu đồ ($\overline{M}_1$), (M_P^o): kết quả trên hình vẽ (H.6.2.8d & H.6.2.8e).

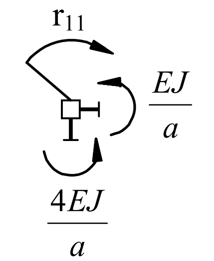


H.6.2.8d H.6.2.8e H.6.2.8f

- Xác định các hệ số:

* r_{11}: Tách nút B trên ($\overline{M}_1$) và xét cân bằng nút.

Kết quả $r_{11} = \dfrac{5EJ}{a}$

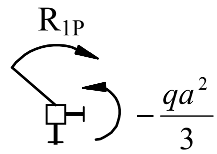


* R_{1P}: Tách nút B trên (M_P^o) và xét cân bằng nút.

Kết quả $R_{1P} = -\dfrac{qa^2}{3}$

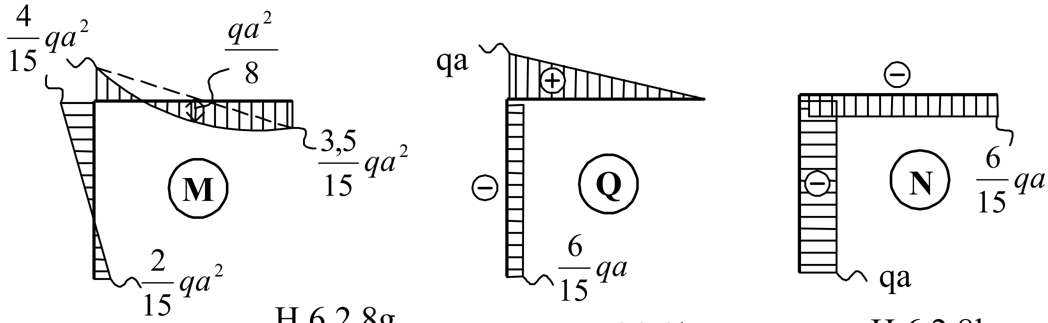
Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\frac{5EJ}{a}Z_1 - \frac{qa^2}{3} = 0 \rightarrow Z_1 = \frac{qa^3}{15EJ} > 0$$



4. Vẽ các biểu đồ nội lực:
a. Biểu đồ mômen:

$$(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (M_P^o)$$



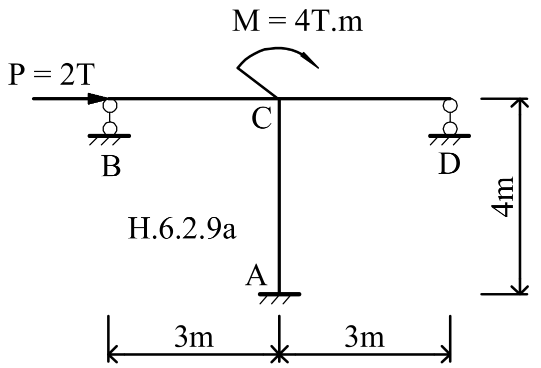
H.6.2.8g H.6.2.8k H.6.2.8l

b. Biểu đồ lực cắt: được suy ra từ biểu đồ mômen. Kết quả trên hình vẽ (H.6.2.8k).

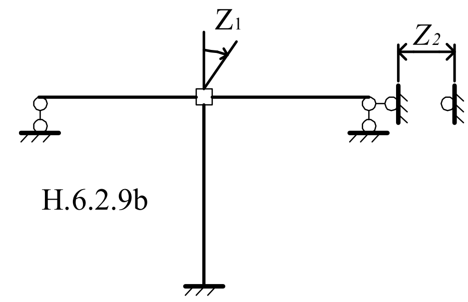
c. Biểu đồ lực dọc: suy ra từ biểu đồ lực cắt. Kết quả trên hình vẽ (H.6.2.8l).

Sau khi đã có kết quả trên 1 nửa hệ, ta suy ra kết quả trên toàn hệ theo tính chất của hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng.

Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.6.2.9a). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là 2EJ, trong các thanh nganggg là EJ. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.



H.6.2.9a



H.6.2.9b

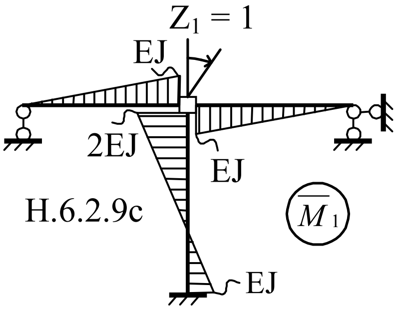
1. Bậc siêu động:

$n = n_1 + n_2 = 1 + 1 = 2$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: (H.6.2.9b)
- Hệ phương trình chính tắc:

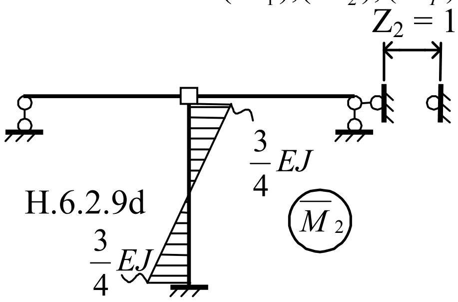
$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$



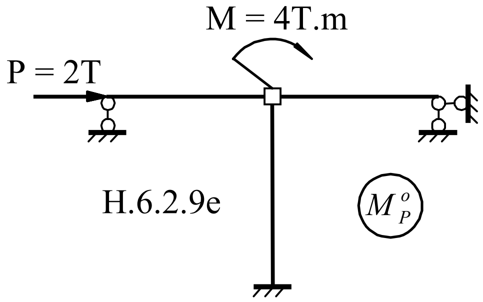
H.6.2.9c

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\overline{M}_1),(\overline{M}_2),(M_P^o)$: kết quả trên hình vẽ (H.6.2.9c → H.6.2.9e).



H.6.2.9d



H.6.2.9e

- Xác định các hệ số:

* r_{11}: Tách nút C trên $(\overline{M}_1)$, $r_{11} = 4EJ$

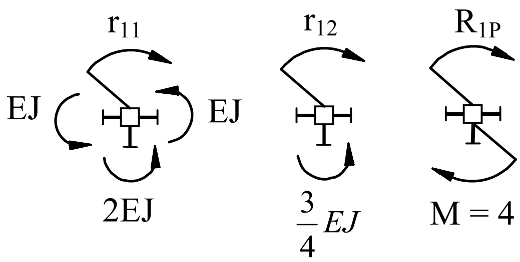
* $r_{12} = r_{21}$: Tách nút C trên $(\overline{M}_2)$

$r_{12} = r_{21} = 0,75EJ$

* r_{22} cắt 1 phần hệ trên $(\overline{M}_2)$ (H.6.2.9g).

Q được suy ra từ $(\overline{M}_2)$. $Q = Q^{tr}$ trên đoạn AC:

$$Q = \frac{0,75EJ - (-0,75EJ)}{4} = 0,375EJ$$



H.6.2.9f

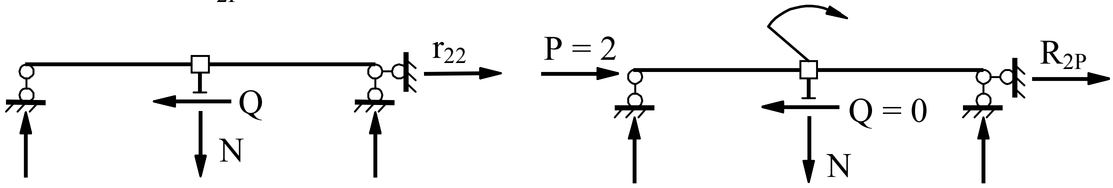
Chiếu lên phương X → $r_{22} = Q = 0,375EJ$

* R_{1P}: tách nút C trên (M_P^o)

→ R_{1P} = - M = -4

* R_{2P}: cắt 1 phần hệ trên (M_P^o) (H.6.2.9h). Chiếu lên phương X

→ R_{2P} = -P = -2



H.6.2.9g H.6.2.9h

Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} 4EJ.Z_1 - 0,75EJ.Z_2 - 4 = 0 \\ -0,75EJ.Z_1 + 0,375EJ.Z_2 - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z_1 = 3,2/EJ \\ Z_2 = 11,733/EJ \end{cases}$$

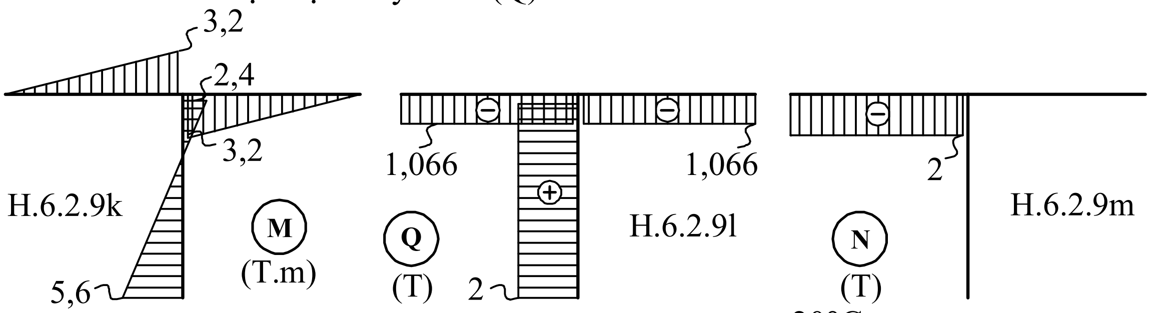
4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen: $(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (\overline{M}_2)Z_2 + (M_P^o)$

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.6.2.9k)

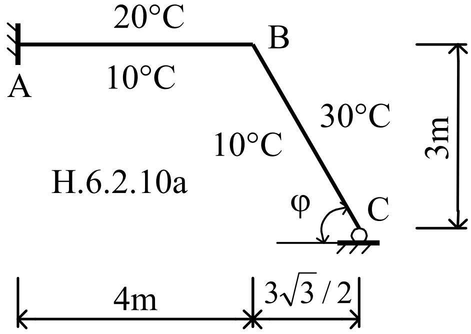
b. Biểu đồ lực cắt: Suy ra từ (M)

c. Biểu đồ lực dọc: Suy ra từ (Q).



H.6.2.9k H.6.2.9l H.6.2.9m

Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình vẽ (H.6.2.10a). Cho biết độ cứng trong các thanh là như nhau EJ = 2000T.m^2; h = 0,4m; $\alpha = 1,2.10^5.{}^0C^{-1}$. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.



H.6.2.10a

* Chiều dài trong thanh BC:

$$l_{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos 30^0} = 3(m)$$

1. Bậc siêu động:

$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.6.2.10b)
- Hệ phương trình chính tắc:

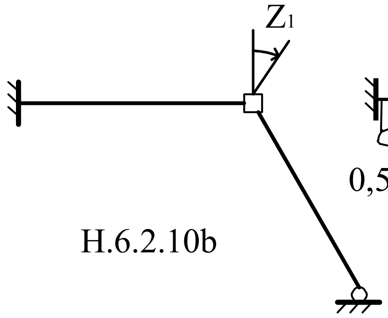
$r_{11}.Z_1 + R_{1t} = 0$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

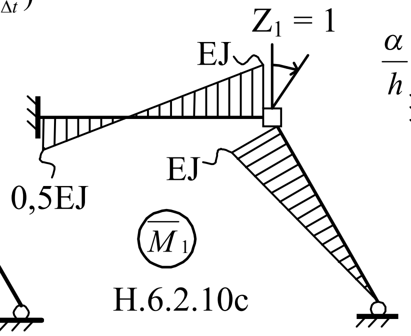
a. Vẽ các biểu đồ $(\overline{M}_1), (M_t^o)$

+ $(\overline{M}_1)$ do $Z_1 = 1$ gây ra trên hệ cơ bản (H.6.2.10c)

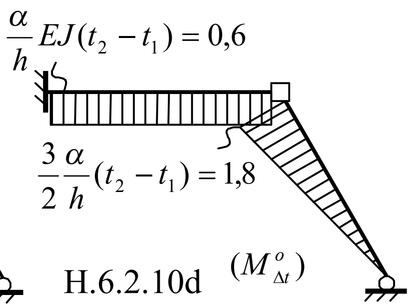
$+(M_t^o) = (M_{tc}^o) + (M_{\Delta t}^o)$



H.6.2.10b



H.6.2.10c



H.6.2.10d

*$(M_{\Delta t}^o)$ Rời rạc hệ và tra bảng cho các cấu kiện chịu nguyên nhân biến thiên nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới (H.6.2.10d)

*(M_{tc}^o) : do biến thiên nhiệt độ dọc trục gây ra chuyển vị thẳng tại nút. Ta sẽ đi xác định chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh bằng sơ đồ chuyển vị *(giản đồ Williot)*

+ Biến thiên chiều dài trong các thanh:

$$\Delta l_{AB} = \alpha . l_{AB} . t_{cAB} = 1,2.10^{-5}.4.\frac{10+20}{2} = 0,72mm \quad \text{(dãn dài ra)}$$

$$\Delta l_{BC} = \alpha . l_{BC} . t_{cBC} = 1,2.10^{-5}.3.\frac{10+30}{2} = 0,72mm$$

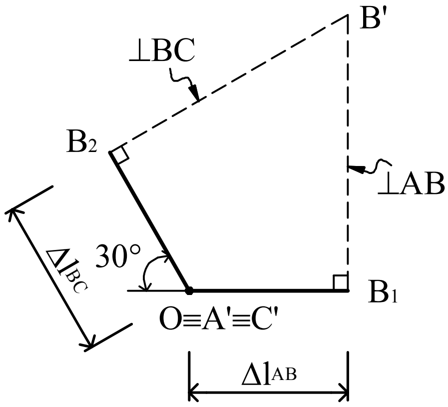
(dãn dài ra)

+ Lập sơ đồ chuyển vị: (H.6.2.10e)

+ Chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với thanh AB là chiếu đoạn A'B' lên phương cần tìm chuyển vị. Đo bằng đoạn B_1B'.

+ Tương tự đối với thanh BC là bằng đoạn $B'B_2$. Bằng quan hệ hình học dễ thấy:

$$\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = \frac{\Delta l_{BC}}{tg15^0} = \frac{0,72}{tg15^0} = 2,687(mm)$$



H.6.2.10e

+ Rời rạc hệ và tra bảng theo các chuyển vi thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh (H.6.2.10f).

b. Xác định các hệ số:

* r_{11}: r_{11} = 2EJ

* $R_{1t} = R_{1tc} + R_{1\Delta t}$

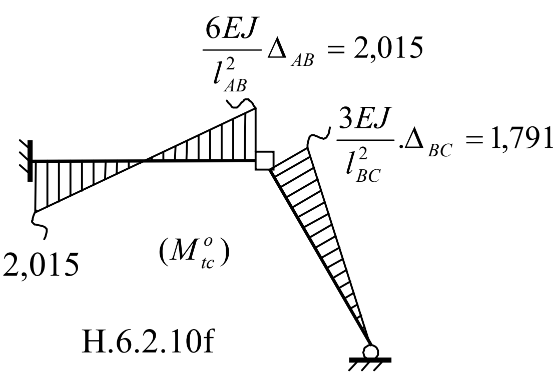
+ $R_{1\Delta t}$: $R_{1\Delta t} = 1,2$

+ R_{1tC}: $R_{1tc} = 0,224$

→ $R_{1t} = 1,424$

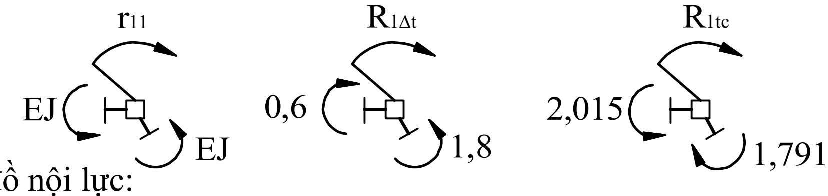
Thay vào phương trình:

$$2EJ.Z_1 + 1,424 = 0 \rightarrow Z_1 = \frac{-0,712}{EJ} < 0$$



H.6.2.10f

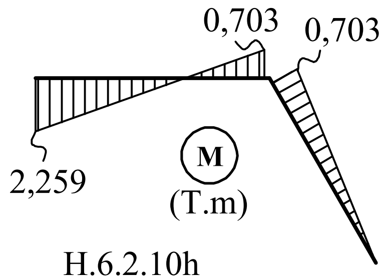
H.6.2.10g



4. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (M^o_{tc}) + (M^o_{\Delta t})$ (Xem H.9.10h)

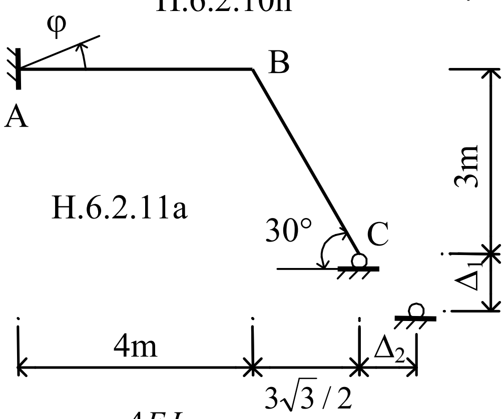
b. Biểu đồ lực cắt (Q), và biểu đồ lực dọc (N), vẽ tương tự các ví dụ trước.



H.6.2.10h

Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho như trên hình vẽ (H.6.1.2.11a). Các số liêu bài toán tương tự ví dụ 3. Cho φ = 0,005rad; $\Delta_1 = \Delta_2 = 0{,}02$m.

Hệ có sơ đồ giống ví dụ 3 nhưng chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức thay vì nhiệt độ nên trong phương trình chính tắc chỉ khác số hạng tự do (dùng R_{1Z}, thay vì R_{1t}). Vậy ta cần xác định số hạng tự do.



H.6.2.11a

+ Vẽ biểu đồ:

$$(M^o_Z) = (M^o_\varphi) + (M^o_\Delta)$$

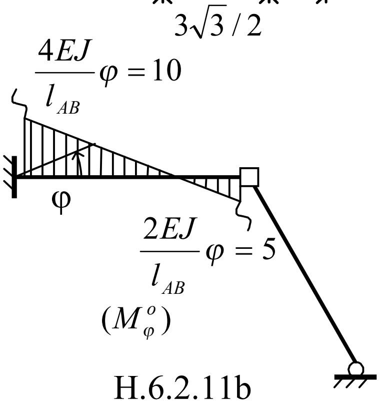
* Biểu đồ (M^o_φ): (H.6.2.11b)

* Biểu đồ(M^o_Δ): Lập sơ đồ chuyển vị.

Từ sơ đồ chuyển vị (H.6.2.11c), xác định được chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh:

$$\Delta_{AB} = A'B' = \Delta_1.\sin 45^0 + \Delta_2.tg60^0 = 0{,}05464(m)$$

$$\Delta_{BC} = B'C' = \frac{\Delta_2}{\cos 60^0} = 0{,}04(m)$$



H.6.2.11b

* Rời rạc hệ, tra bảng, vẽ được (M^o_Δ)

+ Xác định số hạng tự do:

* $R_{1Z} = R_{1\varphi} - R_{1\Delta}$

Từ (M^o_φ) xác định được $R_{1\varphi} = -5$

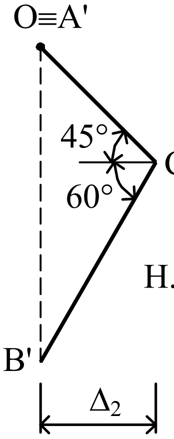
Từ (M^o_Δ) xác định được $R_{1\Delta} = 26{,}666 - 40{,}98 = -14{,}314$

Suy ra $R_{1Z} = -19{,}314$

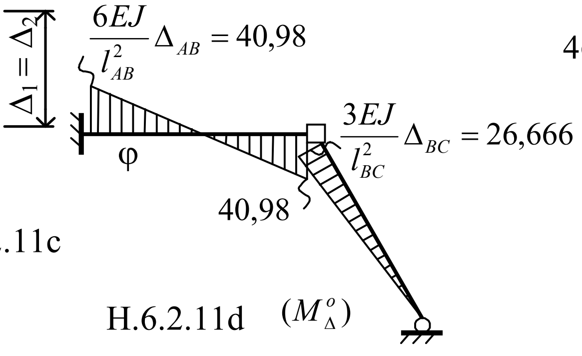
Thay vào phương trình chính tắc, giải ra được: $Z_1 = 9{,}657/EJ > 0$

Vẽ biểu đồ $(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (M^o_\varphi) + (M^o_\Delta)$

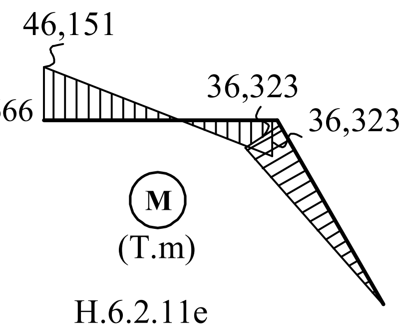
Biểu đồ lực cắt và lực dọc vẽ tương tự các ví dụ trước.



H.6.2.11c



H.6.2.11d



H.6.2.11e

§3. XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU ĐỘNG.

1. Chuyển vị tại các nút:

Đó chính là các chuyển vị Z_k tương ứng tìm được khi giải hệ phương trình chính tắc.

2. Chuyển vị tại các tiết diện bên trong phần tử:

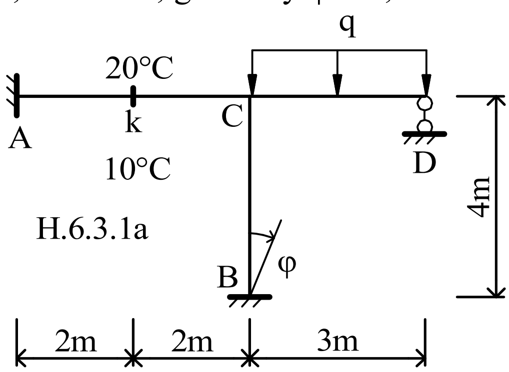
Có thể được xác định theo 1 trong 3 cách sau:

a. Ngay từ đầu, coi tiết diện có chuyển vị cần tìm như 1 nút của hệ. Như vậy, ta đưa bài toán xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ về bài toán tìm chuyển vị tại nút và thực hiện như đã nêu ở trên. Biện pháp này đơn giản nhưng làm tăng số lượng ẩn số.

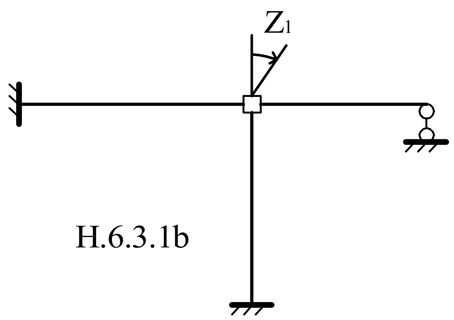
b. Sau khi giải bài toán, đã biết được nội lực và chuyển vị ở 2 đầu mỗi phần tử, ta có thể xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ bên trong phần tử theo các phương pháp đã biết như phương pháp thông số ban đầu, cách xác định chuyển vị trong chương chuyển vị…

c. Sau khi xác định được nội lực trong hệ siêu động, ta xem hệ là hệ siêu tĩnh với nội lực đã biết và áp dụng cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh như đã biết trong chương phương pháp lực. Trong tính toán thường sử dụng cách này.

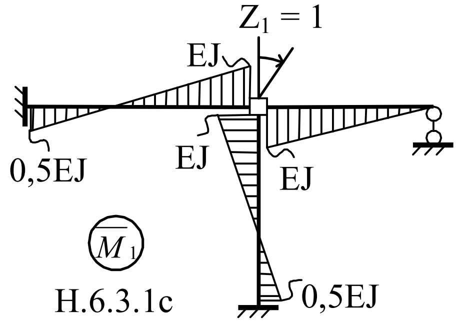
Ví dụ: Xác định độ võng tại tiết diện k của hệ trên hình vẽ (H.6.3.1a). Cho EJ trên toàn hệ bằng $1000T.m^2$, chiều cao tiết diện các thanh h = 0,3m; hệ số dãn nở vì nhiệt $\alpha = 1,2.10^{5}.^{0}C^{-1}$; góc xoay $\varphi = 0,005$rad.



H.6.3.1a



H.6.3.1b



H.6.3.1c

1. Vẽ biểu đồ mômen uốn:

a. Bậc siêu động:

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$$

b. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.6.3.1b)
- Hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}.Z_1 + R_{1P} + R_{1t} + R_{1Z} = 0$$

c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\overline{M}_1), (M_P^o), (M_t^o), (M_Z^o)$

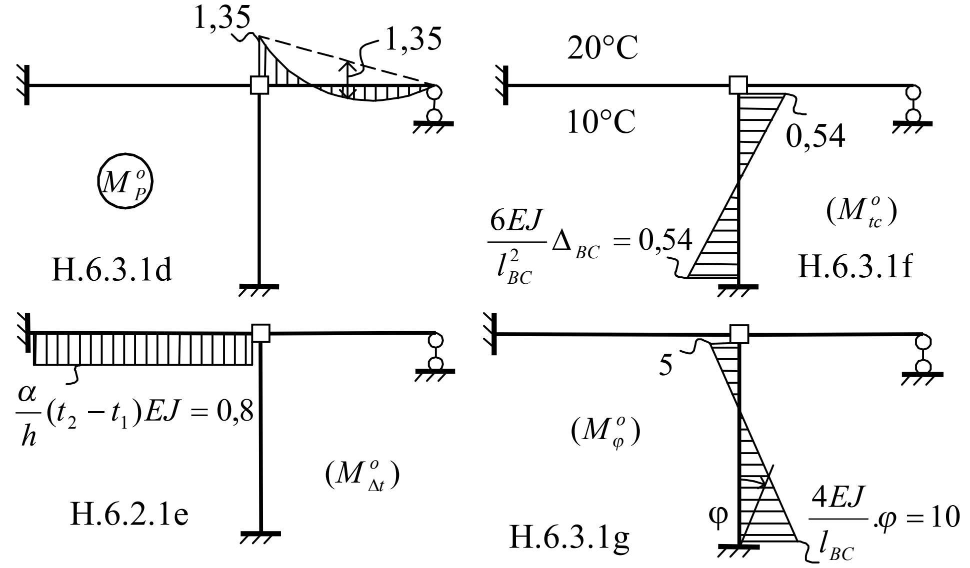
+ $(M_t^o) = (M_{tc}^o) + (M_{\Delta t}^o)$

* (M_{tc}^o) : nguyên nhân t_c trong thanh AC chỉ gây ra chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc trục thanh của thanh BC. Dễ thấy:

$$\Delta l_{BC} = \alpha . l_{AC} . t_{CAC} = 1,2.10^{-5}.4.\frac{10+20}{2} = 0,72mm$$

+ $(M_Z^o) = (M_\varphi^o) + (M_\Delta^o)$

Ở đây (M_Δ^o) không tồn tại.



H.6.3.1d H.6.3.1f

H.6.2.1e H.6.3.1g

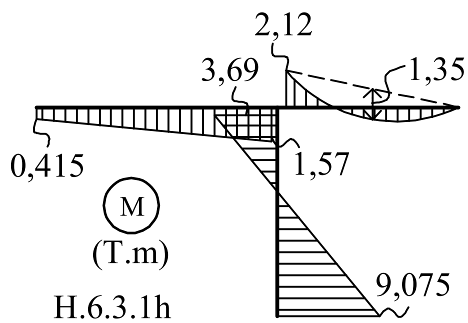
- Xác định các hệ số: Từ các biểu đồ đã vẽ, tính được:

  * r_{11} = 3EJ; R_{1P} = -1,35;
  * $R_{1t} = R_{1tC} + R_{1\Delta t}$ =
    -0,54 - 0,8 = -1,34
  * $R_{1Z} = R_{1\varphi}$ = 5

Thay vào hệ phương trình:

$3EJ.Z_1 - 1,35 - 1,34 + 5 = 0$

$\rightarrow Z_1 = -\frac{0,77}{EJ}$



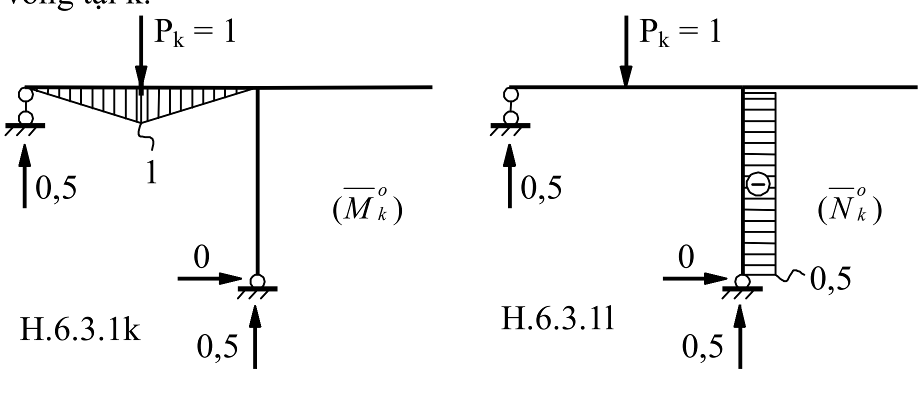
H.6.3.1h

d. Vẽ biểu đồ mômen:

$$(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (M_P^o) + (M_{tC}^o) + (M_{\Delta t}^o) + (M_\varphi^o)$$

2. Xác định độ võng tại k:

- Trạng thái "m" đã được giải với biểu đồ (M) ở trên
- Trạng thái "k" tạo trên hệ cơ bản của phương pháp lực và xác định $(\overline{M}_k^o)$, $(\overline{N}_k^o), (\overline{R}_{jk}^o)$
- Độ võng tại k:



H.6.3.1k H.6.3.1l

$$y_k = (\overline{M}_k^o)(M) - \Sigma\overline{R}_{jk}^o.Z_{jm} + \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(M_k^o) + \Sigma\alpha t_c\Omega(\overline{N}_k^o)$$

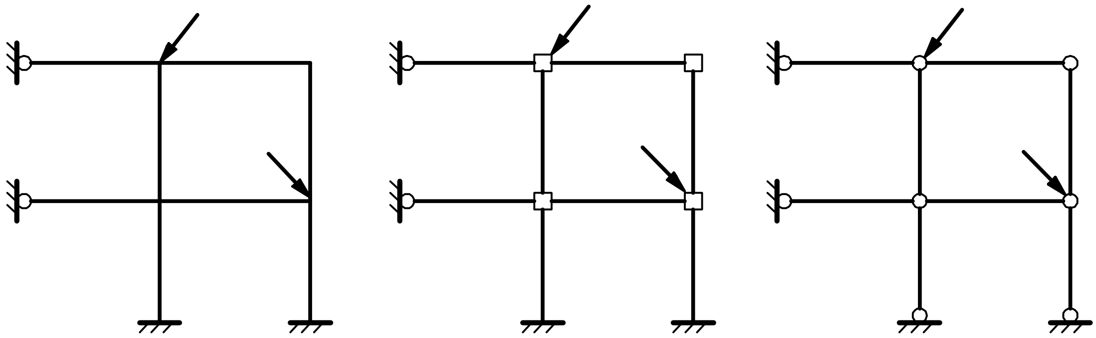
$$= \frac{1}{EJ}.\frac{1.4}{2}.\frac{0,415 + 1,57}{2} - 0 + \frac{\alpha}{0,3}(10 - 20).\frac{1.4}{2} + 0$$

$$= \frac{1,985}{EJ} - \frac{200\alpha}{3} = 0,1925(mm) > 0$$

Chuyển vị cùng chiều với P_k.

§4: TÍNH HỆ CÓ NÚT KHÔNG CHUYỂN VỊ THẲNG CHỈ CHỊU TẢI TRỌNG LÀ CÁC LỰC TẬP TRUNG TẠI NÚT

Chẳng hạn hệ cho trên hình (H.6.4.1) là thỏa mãn yêu cầu bài toán.



H.6.4.1 H.6.4.2 H.6.4.3

Với những loại hệ này thì khi tạo hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị ta chỉ đặt thêm các liên kết mômen. Mặc khác, tải trọng chỉ là những lực tập trung tại nút nên biểu đồ (M_P^o) không tồn tại và do đó R_{kP} cũng không tồn tại.

Vậy hệ phương trình chính tắc tổng quát cho trường hợp này:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + ...r_{1n}Z_n = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + ...r_{2n}Z_n = 0 \\ \qquad ... \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + ...r_{nn}Z_n = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình thuần nhất, đẳng cấp và người ta chứng minh chỉ có nghiệm duy nhất $Z_1 = Z_2 = ... Z_n = 0$

Suy ra biểu đồ mômen của hệ:

$(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (\overline{M}_2)Z_2 + ...(\overline{M}_n)Z_n + (M_P^o)$ sẽ không tồn tại

Suy ra biểu đồ lực cắt của hệ không tồn tại.

Nội lực trong hệ chỉ tồn tại lực dọc, hệ làm việc như 1 hệ dàn với các nút và các ngàm được thay bằng các khớp lý tưởng (H.6.4.1c)

Kết luận: Khi tính hệ có nút không chuyển vị thẳng và chỉ chịu tải trọng là các lực tập trung tại nút, ta có thể thay thế các nút và ngàm bằng các liên kết khớp và tính toán như 1 hệ dàn thông thường.

§ 5. TÍNH HỆ SIÊU ĐỘNG CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

Cũng tương tự như phương pháp lực, ta chỉ nghiên cứu cách vẽ đường ảnh hưởng.

I. Đường ảnh hưởng cơ bản: Là ảnh hưởng của các ẩn Z_k khi P = 1di động trên hệ cơ bản gây ra:

1. Hệ phương trình chính tắc:

Tương tự phương pháp lực, số hạng tự do được thay bằng r_{kP}:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + ...r_{1n}Z_n + r_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + ...r_{2n}Z_n + r_{2P} = 0 \\ \qquad\qquad ... \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + ...r_{nn}Z_n + r_{nP} = 0 \end{cases}$$

2. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Hệ số chính và phụ (r_{km}): Các hệ số này là không thay đổi và được xác định như trường hợp tải trọng bất động.

b. Số hạng tự do (r_{kP}): Là phản lực tại liên kết k do P = 1di động trên hệ gây ra. Điều này có nghĩa là r_{kP} sẽ thay đổi theo các vị trí của P.

Do hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị thực chất là những cấu kiện làm việc độc lập nhau nên người ta đã lập sẵn bảng tra nội lực, phản lực tại các đầu thanh (Xem bảng B.6.5.1 $\rightarrow$ 3). Dựa vào bảng tra đó ta có thể xác định được r_{kP} theo các vị trí của P = 1.

c. Giải hệ phương trình chính tắc:

Tương tự phương pháp lực, ta sử dụng phương pháp hệ số ảnh hưởng:

$$\begin{cases} Z_1 = \beta_{11}r_{1P} + \beta_{12}r_{2P} + ...\beta_{1n}r_{nP} \\ Z_2 = \beta_{21}r_{1P} + \beta_{22}r_{2P} + ...\beta_{2n}r_{nP} \\ \qquad\qquad ... \\ Z_n = \beta_{n1}r_{1P} + \beta_{n2}r_{2P} + ...\beta_{nn}r_{nP} \end{cases}$$

β_{ik} là hệ số ảnh hưởng: $\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm1}.\dfrac{D_{ik}}{D}$

D là định thức hệ số chính và phụ của hệ phương trình chính tắc:

$D = |r_{ik}|$ với i, k $\in$ [1; n]

D_{ik} là định thức suy ra từ định thức D bằng cách loại bỏ hàng i cột k (hoặc hàng k cột i).

Sau khi xác định được Z_k, cho P = 1 di động, sẽ vẽ được đ.a.h.Z_k.

II. Đường ảnh hưởng của nội lực, phản lực và chuyển vị:

Sau khi xác định được đường ảnh hưởng Z_k, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S (nội lực, phản lực, hay chuyển vị) tại 1 tiết diện bất kỳ theo biểu thức:

đ.a.h.S = $\overline{S}_1$(đ.a.h.Z_1) + $\overline{S}_2$(đ.a.h.Z_2) +... $\overline{S}_n$(đ.a.h.Z_n) + đ.a.h.S^0

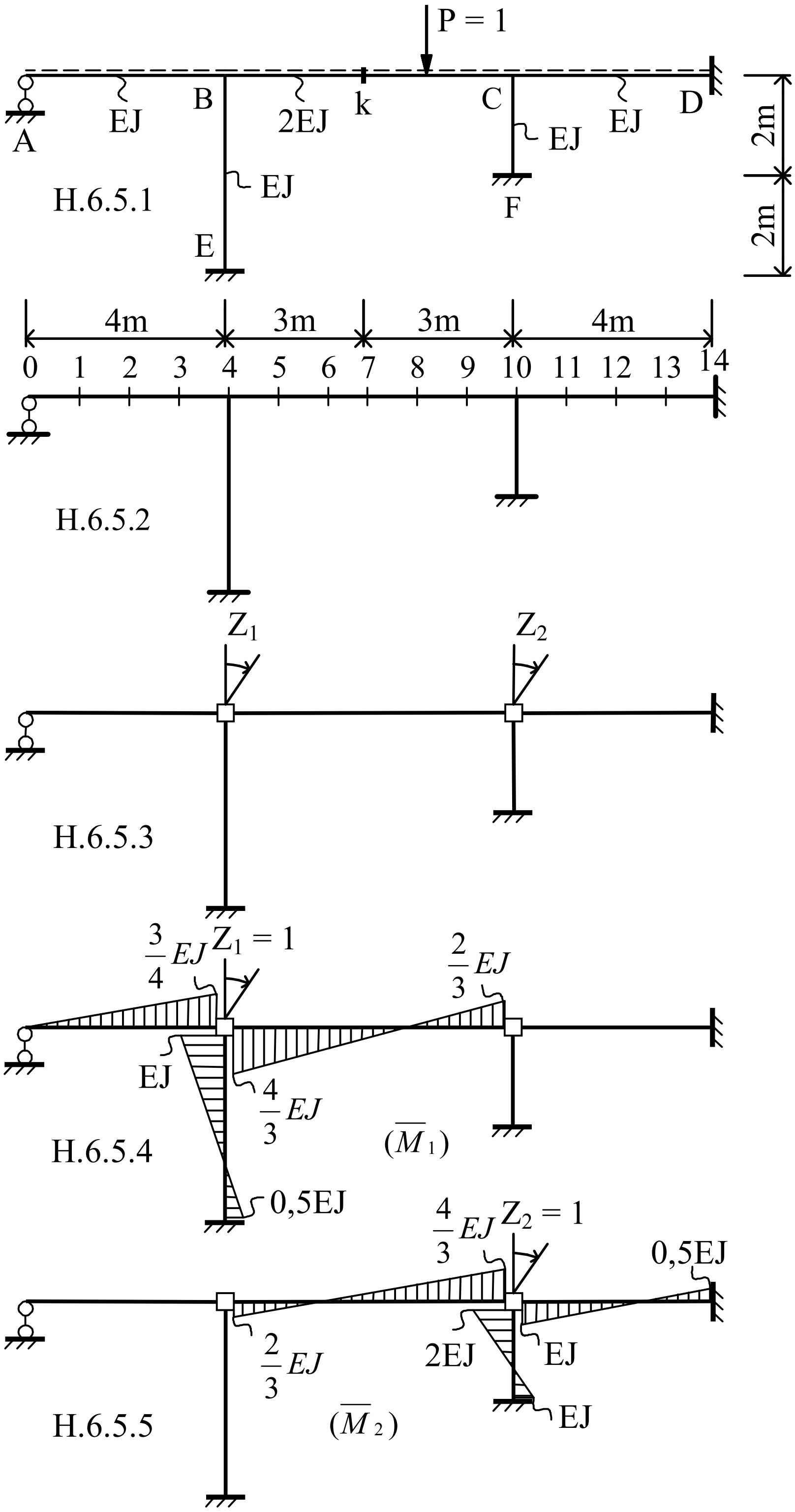
- $\overline{S}_k$ là giá trị của đại lượng S do Z_k = 1 gây ra trên hệ cơ bản.

- đ.a.h.S^0 là đ.a.h.S do P = 1 di động trên hệ cơ bản gây ra. (đ.a.h này có thể vẽ theo bảng tra B.6.5.1 $\rightarrow$ 3)

* *Chú ý:* Quá trình tính toán có thể lập thành bảng tương tự như đã nêu trong phương pháp lực.

Ví dụ: Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn đ.a.h.M_k của hệ cho trên hình (H.6.5.1)

Chia đường xe chạy ra làm 14 đoạn, mỗi đoạn dài 1m và đánh số thứ tự các điểm chia như trên hình (H.6.5.2)



1.Bậc siêu động: $n = n_1 + n_2 = 2 + 0 = 2$

- Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:
- Hệ cơ bản (H.6.5.3)

2. Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Vẽ biểu đồ $(\overline{M}_1),(\overline{M}_2)$

$$r_{11} = \left[\frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3}\right]EJ = \frac{37}{12}EJ$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{2}{3}EJ$$

$$r_{22} = \left[\frac{4}{3} + 2 + 1\right]EJ = \frac{13}{3}EJ$$

- Xác định số hạng tự do:

+ Khi P = 1di động trên AB, sơ đồ cấu kiện mẫu ta có

$$r_{1P} = -M_A = \frac{1}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)l$$

$$r_{2P} = 0$$

Lần lượt cho ξ = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1 ta sẽ có các giá trị tương ứng của r_{1P} khi P = 1 di động trên AB.

+ Khi P = 1di động trên BC: tương tự.

$$r_{1P} = M_A = -\xi(1-\xi)^2 l$$

$$r_{2P} = -M_B = \xi^2(1-\xi)l$$

Lần lượt cho $\xi = 0;\ \frac{1}{6};\ \frac{2}{6};\frac{3}{6};\frac{4}{6};\frac{5}{6};1$(ứng với điểm chia trên BC) ta sẽ tìm được các giá trị tương ứng của r_{1P}, r_{2P} khi P di động.

+ Khi P = 1di động trên CD: tương tự.

$$r_{1P} = 0$$

$$r_{2P} = M_A = -\xi(1-\xi)^2 l$$

Cho ξ các giá trị 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1 ta sẽ tìm được các số hạng tự do trên đoạn này.

4. Giải hệ phương trình chính tắc:

- Xác định các hệ số ảnh hưởng

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm1}.\frac{D_{ik}}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{37}{12}EJ & \frac{2}{3}EJ \\ \frac{2}{3}EJ & \frac{13}{3}EJ \end{vmatrix} = \frac{465}{36}(EJ)^2$$

$$D_{11} = \frac{13}{3}EJ; D_{12} = D_{21} = \frac{2}{3}EJ; D_{22} = \frac{37}{12}EJ$$

$$\rightarrow \beta_{11} = -\frac{156}{465}/EJ; \beta_{12} = \beta_{21} = \frac{24}{465}/EJ; \beta_{22} = -\frac{111}{465}/EJ$$

- Giải hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} Z_1 = \beta_{11} r_{1P} + \beta_{12} r_{2P} \\ Z_2 = \beta_{21} r_{1P} + \beta_{22} r_{2P} \end{cases}$$

Thực hiện tính toán theo các biểu thức trên. Kết quả được thể hiện trong bảng: (B.6.5.3)

5. Vẽ đường ảnh hưởng M_k:

đ.a.h.M_k = $\overline{M}_{k1}$(đ.a.h.Z_1) + $\overline{M}_{k2}$ (đ.a.h.Z_2) + đ.a.h.M_k^o

- $\overline{M}_{k1}$ lấy trên ($\overline{M}_1$) tại tiết diện k

$$\overline{M}_{k1} = \frac{EJ}{3}$$

- Tương tự: $\overline{M}_{k2} = -\frac{EJ}{3}$

- đ.a.hM_k^o là đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k do P = 1 di động gây ra trên hệ cơ bản. Ở bài toán này P = 1 chỉ gây ra ảnh hưởng đến k khi nó di động trên BC. Tra sơ đồ cấu kiện mẫu ta sẽ xác định được. Kết quả trong bảng (B.6.5.4)

B.6.5.4 Bảng tính các tung độ đường ảnh hưởng Z_k & M_k

Thanh	Điểm	r_{1P}	r_{2P}	Tung độ (đ.a.h.Z_i). EJ		đ.a.h.M_k^o	đ.a.hM_k
				Z_1	Z_2		
AB	0	0	0	0	0	0	0
	1	0,6562	0	-0,220	0,034	0	-0,084
	2	0,75	0	-0,252	0,039	0	-0,096
	3	0,4687	0	-0,157	0,024	0	-0,060
	4	0	0	0	0	0	0
BC	4	0	0	0	0	0	0
	5	-0,694	0,139	0,240	-0,069	0,083	0,186
	6	-0,888	0,444	0,321	-0,152	0,333	0,491
	7	-0,75	0,75	0,290	-0,217	0,75	0,919
	8	-0,444	0,888	0,195	-0,235	0,333	0,476
	9	-0,139	0,694	0,082	-0,173	0,083	0,168
	10	0	0	0	0	0	0
CD	10	0	0	0	0	0	0
	11	0	-0,562	-0,029	0,134	0	-0,054
	12	0	-0,5	-0,026	0,119	0	-0,048
	13	0	-0,1875	-0,009	0,044	0	-0,018
	14	0	0	0	0	0	0

CHƯƠNG 9 TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÚNG DẦN

Cách tính hệ siêu tĩnh bằng phương pháp chuyển vị hay phương pháp lực cho ta các kết quả có độ chính xác cao. Tuy nhiên, việc tính theo các phương pháp này có gây ra những khó khăn nhất định đặc biệt là khi số lượng các ẩn số càng lớn nhưng với những công cụ tính toán thông thường.

Để giải quyết khó khăn này, người ta tìm cách giải bài toán với kết quả gần đúng bằng những cách tính đơn giản và kết quả gần đúng đó là chấp nhập được khi thiết kế kết cấu. Một trong các cách tính đó là phương pháp tính đúng dần.

Đặc điểm của phương pháp này là ta chỉ cần thực hiện phép tính theo một trình tự nhất định, lặp đi lặp lại nhiều lần cho đến khi thỏa mãn yêu cầu độ chính xác là được.

Nội dung của phương pháp tính đúng dần nói chung được trình bày dưới dạng phân phối mômen hay phân phối biến dạng theo hình thức này hoặc hình thức khác.

Sau đây, ta đi tìm hiểu 2 phương pháp đúng dần, đó là phương pháp H.Cross và phương pháp G.Kani.

§ 1. PHƯƠNG PHÁP H.CROSS

I. Khái niệm:

Phương pháp H.Cross là hình thức khác của phương pháp chuyển vị, trong đó việc giải hệ phương trình chính tắc được thực hiện theo phương pháp đúng dần mang ý nghĩa vật lý.

* Ưu điểm của phương pháp:

- Tính toán đơn giản.

- Chỉ yêu cầu phải giải 1 số lượng phương trình rất ít so với số lượng các phương trình theo phương pháp "chính xác" và có trường hợp không cần phải giải hệ phương trình.

* Nhược điểm của phương pháp: Chỉ áp dụng có hiệu quả cho những hệ có nút không chuyển vị thẳng.

II. Quy ước cách đọc tên và xét dấu của nội lực:

1. Quy ước khi đọc tên của nội lực:

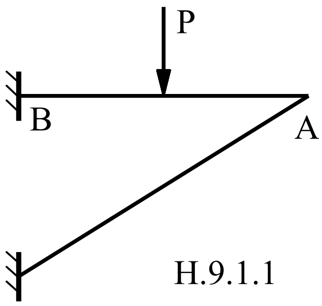
Ta dùng ký hiệu cho nội lực tương ứng như đã biết nhưng kèm theo hai chỉ số:

- Chỉ số thứ thứ nhất biểu thị vị trí của tiết diện chứa thành phần nội lực.

- Chỉ số thứ hai kết hợp với chỉ số thứ nhất biểu thị thanh chứa nội lực đó.

Ví dụ: M_{AB}: mômen tại tiết diện A thuộc thanh AB.

Q_{AC}: đọc là lực cắt tại tiết diện A thuộc thanh AC.

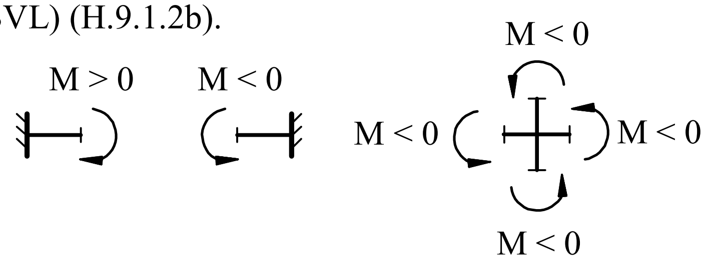


H.9.1.1

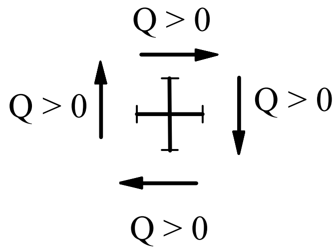
2. Quy ước dấu:

- Mômen uốn tại nút được xem là dương khi nó làm cho thớ giữa của thanh quay theo chiều kim đồng hồ và ngược lại. Xem ví dụ trên hình (H.9.1.2a).

- Lực cắt được xem là dương làm cho thành phần thanh chịu lực quay theo chiều kim đồng hồ và xem là âm khi nó quay ngược chiều kim đồng hồ (giống SBVL) (H.9.1.2b).



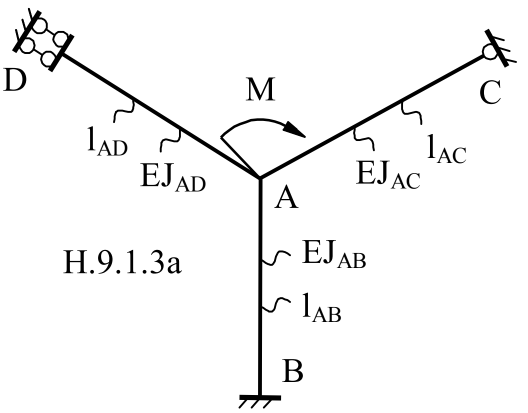
H.9.1.2a



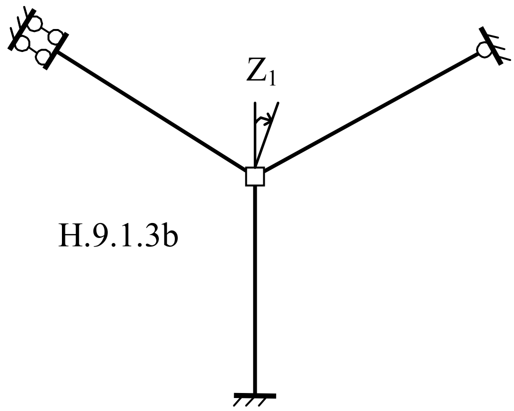
H.9.1.2b

III. Sự phân phối mômen xung quanh một nút:

Xét một hệ chỉ gồm có một nút không có chuyển vị thẳng và chịu mômen tập trung tại nút như trên hình (H.9.1.3a). Ta đi xác định mômen uốn M_{AB}, M_{AC}, M_{AD} tại các đầu thanh quy tụ tại nút A và mômen M_{BA}, M_{CA}, M_{DA} tại các đầu đối diện với nút A.



H.9.1.3a



H.9.1.3b

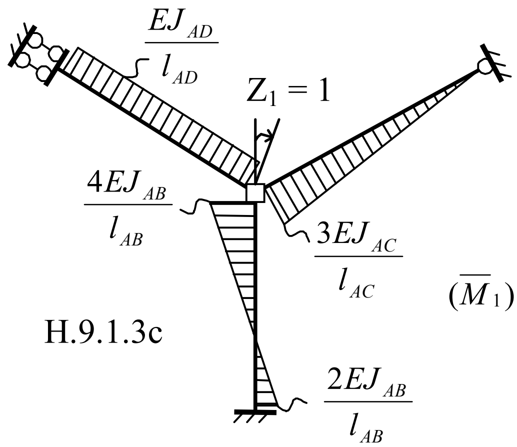
Chọn cách giải hệ bằng phương pháp chuyển vị:

- Chọn hệ cơ bản trên hình (H.9.1.3b), hệ phương trình chính tắc có dạng:

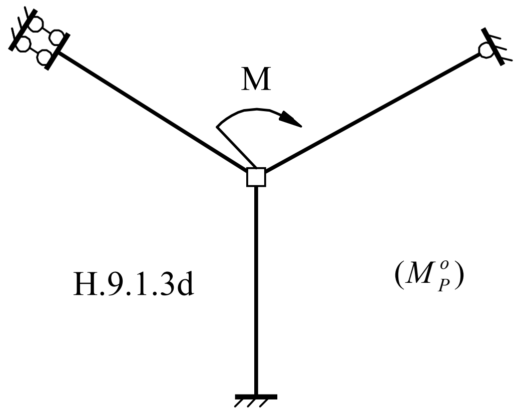
$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

- Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

+ Các biểu đồ $(\overline{M}_1)$ và (M_P^o) vẽ trên hình (H.9.1.3.c & H.9.1.3d).



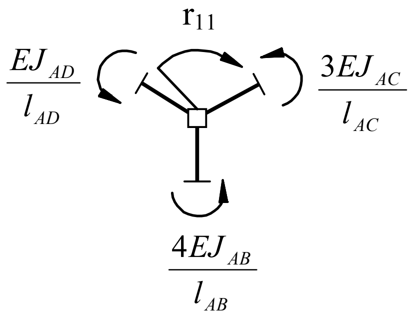
H.9.1.3c

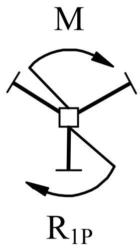


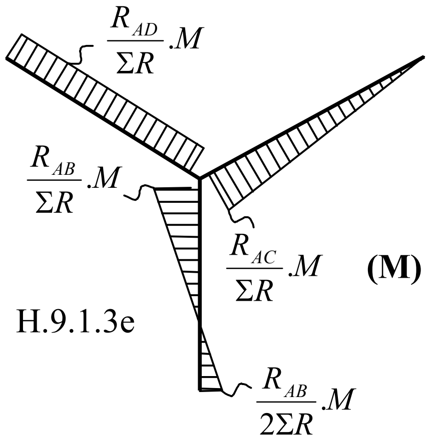
H.9.1.3d

* r_{11}:

$$r_{11} = \frac{4.EJ_{AB}}{l_{AB}} + \frac{3.EJ_{AC}}{l_{AC}} + \frac{EJ_{AD}}{l_{AD}}$$







H.9.1.3e

Gọi: $R_{AB} = \dfrac{EJ_{AB}}{l_{AB}}$ - độ cứng đơn vị quy ước của thanh AB (thanh có đầu đối diện là ngàm).

$R_{AC} = \dfrac{3}{4}\dfrac{EJ_{AC}}{l_{AC}}$ - độ cứng đơn vị quy ước của thanh AC (thanh có đầu đối diện là khớp).

$R_{AD} = \dfrac{1}{4}\dfrac{EJ_{AD}}{l_{AD}}$ - độ cứng đơn vị quy ước của thanh AD (thanh có đầu đối diện là ngàm trượt song song với trục thanh).

Suy ra: $r_{11} = 4.(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}) = 4\sum R$

* R_{1P}:

$R_{1P} = -M$.

Thay vào phương trình chính tắc:

$$4.(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}).Z_1 - M = 0 \Rightarrow Z_1 = \frac{M}{4(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD})} = \frac{M}{4\Sigma R}$$

- Vẽ biểu đồ mômen (M):

$(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + M_P^o$. Kết quả thể hiện trên hình (H.9.1.3e).

Từ đây, ta xác định được giá trị mômen uốn tại các đầu thanh quy tụ tại nút A:

$$M_{AB} = \frac{R_{AB}}{\Sigma R}.M, \qquad M_{AC} = \frac{R_{AC}}{\Sigma R}.M, \qquad M_{AD} = \frac{R_{AD}}{\Sigma R}.M$$

- Các mômen uốn M_{AB}, M_{AC}, M_{AD} là do mômen M phân phối vào nút A nên gọi là mômen phân phối. Và nếu xét dấu theo qui ước H.Cross thì:

$$M_{AB} = -\frac{R_{AB}}{\Sigma R}.M, \qquad M_{AC} = -\frac{R_{AC}}{\Sigma R}.M, \qquad M_{AD} = -\frac{R_{AD}}{\Sigma R}.M$$

- Mômen uốn tại các đầu thanh đối diện với nút A:

$M_{BA} = +\dfrac{1}{2}.M_{AB}$; $M_{CA} = 0.M_{AC}$; $M_{DA} = -1.M_{AD}$.

Các mômen này gọi là mômen truyền.

♦ *Tổng quát:* Khi nút A gồm nhiều thanh quy tụ, ta có:

+ Mômen phân phối tại đầu A thuộc thanh AX:

$M_{AX} = -\gamma_{AX}.M$.

+ Mômen truyền:

$M_{XA} = \beta_{XA}.M_{AX}$.

Trong đó: γ_{AX} - hệ số phân phối của thanh AX.

$$\gamma_{AX} = \frac{R_{AX}}{\Sigma R}.$$

R_{AX}: là độ cứng đơn vị quy ước của thanh AX, phụ thuộc vào liên kết đầu đối diện với nút.

$\sum R$: tổng độ cứng đơn vị quy ước của các thanh quy tụ tại nút A.

β_{XA}: hệ số truyền của thanh AX.

* *Chú ý:* Mômen M tập trung tại nút trong các biểu thức trên được lấy dấu dương khi xoay cùng chiều kim đồng hồ và ngược lại.

B.9.1.1 Bảng độ cứng đơn vị vi ước và các hệ số truyền

Liên kết đầu đối diện nút	R_{AX}	β_{XA}
- Khớp	$\frac{3}{4}\frac{EJ}{1}$	0
- Ngàm trượt	$\frac{1}{4}\frac{EJ}{1}$	-1
- Ngàm	$\frac{EJ}{1}$	+1/2
- Tự do	0	0

Ví dụ 1: Xác định mômen phân phối và mômen truyền của hệ cho trên hình (H.9.1.4a). Cho biết độ cứng trong tất cả các thanh là EJ = const.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước:

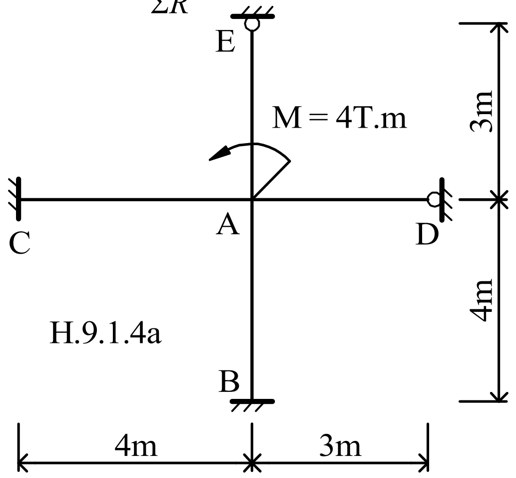
$$R_{AB} = \frac{EJ}{l_{AB}} = \frac{EJ}{4};\ R_{AC} = \frac{EJ}{l_{AC}} = \frac{EJ}{4};$$

$$R_{AD} = \frac{3}{4}.\frac{EJ}{l_{AD}} = \frac{3}{4}.\frac{EJ}{3} = \frac{EJ}{4};\ R_{AE} = \frac{3}{4}.\frac{EJ}{l_{AE}} = \frac{3}{4}.\frac{EJ}{3} = \frac{EJ}{4}$$

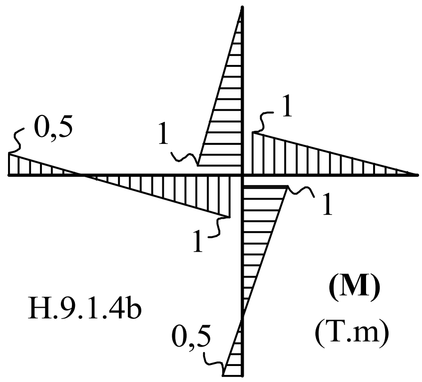
2. Xác định hệ số phân phối và mômen phân phối:

- Hệ số phân phối:

$$\gamma_{AX} = \frac{R_{AX}}{\Sigma R}.$$



H.9.1.4a



H.9.1.4b

$$\rightarrow \gamma_{AB} = \frac{\frac{EJ}{4}}{4\frac{EJ}{4}} = 0,25;\ \gamma_{AC} = \frac{\frac{EJ}{4}}{4\frac{EJ}{4}} = 0,25;\ \gamma_{AD} = \frac{\frac{EJ}{4}}{4\frac{EJ}{4}} = 0,25;\ \gamma_{AE} = \frac{\frac{EJ}{4}}{4\frac{EJ}{4}} = 0,25$$

Mômen phân phối: $M_{AX} = -\gamma_{AX}.M$.

$\rightarrow M_{AB} = -\,0{,}25.(-4) = 1$; $M_{AC} = -\,0{,}25.(-4) = 1$;

$M_{AD} = -\,0{,}25.(-4) = 1$; $M_{AE} = -\,0{,}25.(-4) = 1$

3. Xác định hệ số truyền và mômen truyền:

- Hệ số truyền: $\beta_{BA} = \beta_{CA} = \dfrac{1}{2}$; $\beta_{DA} = \beta_{EA} = 0$.

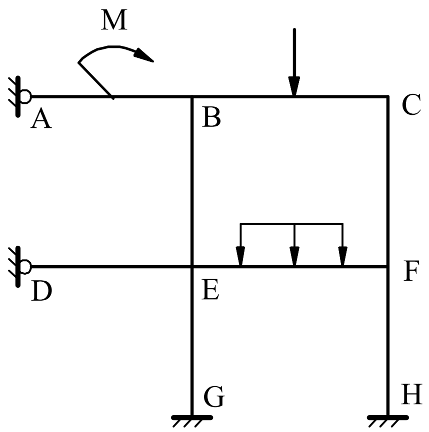
- Mômen truyền: $M_{XA} = \beta_{XA}.M_{AX}$.

$\rightarrow M_{BA} = \dfrac{1}{2}.1 = 0{,}5$; $M_{CA} = \dfrac{1}{2}.1 = 0{,}5$; $M_{DA} = M_{EA} = 0$.

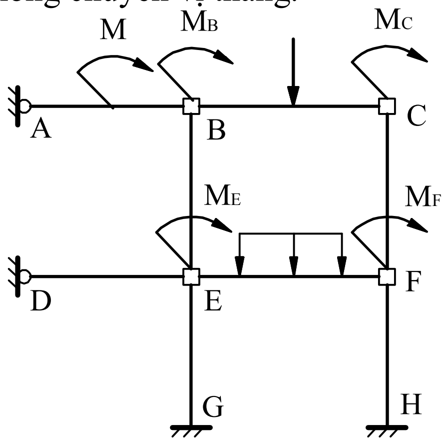
Kết quả tính toán có thể được vẽ trên biểu đồ (M) (H.9.1.4b)

IV. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng:

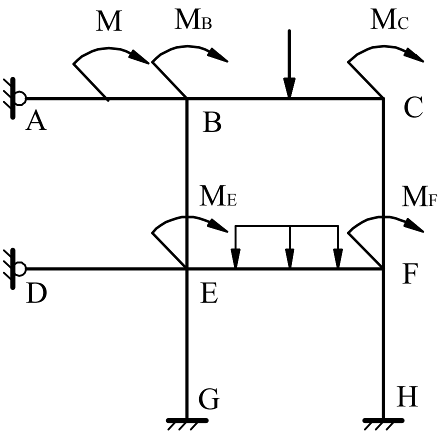
Ta phân tích cách tính hệ trên hình (H.9.1.5a). Tuy nhiên, cách lập luận vẫn mang tính tổng quát cho hệ bất kỳ có nút không chuyển vị thẳng.



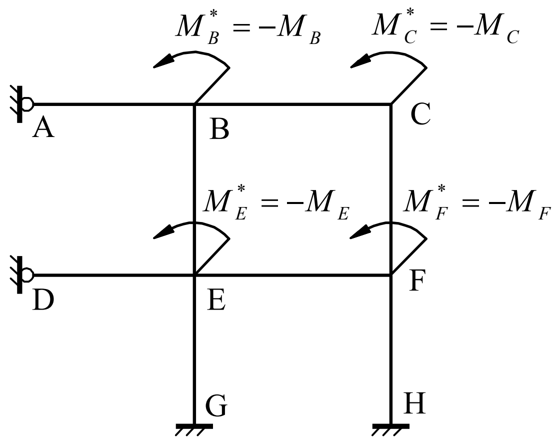
H.9.1.5a



H.9.1.5b

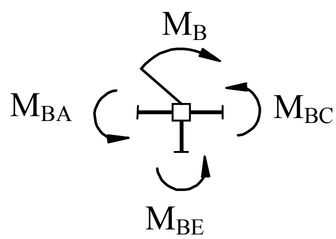


H.9.1.5c



H.9.1.5d

Giả sử ngăn cản chuyển vị xoay của tất cả các nút bằng cách đặt thêm vào mỗi nút một liên kết mômen, ta sẽ thu được một hệ mới chính là hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị (H.9.1.5b). Tại mỗi nút bị chốt, sẽ phát sinh những phản lực mômen gọi là ngẫu lực chèn. Ngẫu lực chèn phải cân bằng với mômen uốn tại các dầu thanh quy tụ tại nút đó.



Ví dụ: Với nút B:

$$M_B + M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0.$$

Suy ra: $M_B = -(M_{BA} + M_{BE} + M_{BC})$.

Vậy ngẫu lực chèn tại một nút sẽ bằng tổng đại số mômen uốn tại các đầu thanh quy tụ tại mỗi nút đang xét do tải trọng gây ra trên hệ có nút bị chốt nhưng trái dấu.

Nhận xét:.- Các ngẫu lực chèn chính là R_{kP} của phương pháp chuyển vị.

Tiếp tục biến đổi nút bị chốt bằng cách thay các liên kết mômen bằng các ngẫu lực chèn tương ứng tại mỗi nút ta sẽ được hệ tương đương trên hình (H.9.1.5c). Hệ này khác với hệ ban đầu là hệ có thêm các ngẫu lực chèn tại các nút.

Xét một hệ phụ lấy từ hệ ban đầu, trong đó chỉ chịu các ngẫu lực đặt tại các nút. Các ngẫu lực này có giá trị bằng ngẫu lực chèn nhưng ngược chiều và được gọi là mômen nút cứng (H.9.1.5d).

Theo nguyên lý cộng tác dụng thì:

Hệ ban đầu H.9.1.5a	=	Hệ ban đầu + ngẫu lực chèn tại các nút cứng (H.9.1.5c)	+	Hệ ban đầu chỉ chịu mômen nút cứng (H.9.1.5d)

Như vậy, thay vì đi giải bài toán với hệ trên hình (H.9.1.5.a), ta đi giải bài toán trên hình (H.9.5.1b) hoặc (H.9.5.1c) và (H.9.5.1d).

- Đối với hệ trên hình (H.9.5.1c) ta dễ dàng xác định được nội lực, đó chính là nội lực do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là biểu đồ $(\overline{M}_P^o)$ của phương pháp chuyển vị.

- Đối với hệ trên hình (H.9.5.1d), ta tìm cách tính đúng dần. Cách thực hiện như sau:

+ Lần lượt tháo từng chốt. Khi tháo từng chốt thì mômen nút cứng sẽ phân phối vào nút đó và truyền vào các nút lân cận như đã trình bày trong bài toán sự phân phối mômen xung quanh một nút. Và nút này sẽ xoay đến vị trí cân bằng mới.

+ Chốt lại nút này và chuyển sang nút khác và thực hiện tương tự.

Quá trình cứ tiến hành như vậy và lặp lại nhiều lần cho đến khi ta tháo tất cả các chốt thì các nút không xoay nữa (mômen tại các nút đã cân bằng).Thực chất vẫn chưa cân bằng nhưng giá trị của mômen uốn không cân bằng là không đáng kể. Lúc này, ta dừng quá trình thực hiện và trạng thái đó là trạng thái cần tìm.

Mômen uốn tại các đầu thanh tương ứng chính là tổng đại số mômen phân phối và mômen truyền tích luỹ trong các chu trình.

- Muốn tìm mômen uốn tại các đầu thanh nào của hệ đã cho ban đầu, ta lấy tổng đại số mômen do tải trọng gây ra trên hệ có các nút bị chốt với mômen uốn do mômen nút cứng gây ra trên các đầu thanh tương ứng.

Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm liên tục trên hình (H.9.1.6.a). Cho biết độ cứng trong tất cả các thanh là EJ = const.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh:

$$R_{AB} = \frac{3}{4}\frac{EJ}{l_{AB}} = \frac{3EJ}{16};\ R_{BC} = \frac{EJ}{l_{BC}} = \frac{EJ}{3}.$$

$$R_{CD} = \frac{EJ}{l_{CD}} = \frac{EJ}{4};\ R_{DE} = \frac{3}{4}\frac{EJ}{l_{DE}} = \frac{EJ}{4}.$$

2. Xác định hệ số phân phối từng đầu thanh quy tụ vào nút:

- Tại nút B:

$$\gamma_{BA} = \frac{\frac{3EJ}{16}}{(\frac{3EJ}{16} + \frac{EJ}{3})} = 0,36\,;\gamma_{BC} = \frac{\frac{EJ}{3}}{(\frac{3EJ}{16} + \frac{EJ}{3})} = 0,64.$$

- Tại nút C:

$$\gamma_{CB} = \frac{\frac{EJ}{3}}{(\frac{EJ}{3} + \frac{EJ}{4})} = 0,577\,;\gamma_{CD} = \frac{\frac{EJ}{4}}{(\frac{EJ}{3} + \frac{EJ}{4})} = 0,429.$$

- Tại nút D:

$$\gamma_{DC} = \frac{\frac{EJ}{4}}{(\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4})} = 0,5\,;\gamma_{DE} = \frac{\frac{EJ}{4}}{(\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4})} = 0,5.$$

3. Xác định mômen nút cứng M^* tại các đầu thanh do tải trọng gây ra:

Tra bảng cho các phần tử chịu tải trọng và xét dấu theo qui ước H.Cross.

M^*_{BA} = -2,25(T.m); M^*_{BC} = 0,9(T.m); M^*_{CB} = -0,9(T.m);

M^*_{CD} = 1(T.m); M^*_{DC} = -1(T.m); M^*_{DE} = 1,35(T.m).

4. Phân phối và truyền mômen:

Quá trình phân phối và truyền mômen được lập thành bảng. Bảng có thể được lập như sau:

* Hàng thứ nhất ghi ký hiệu các nút và các đầu thanh có liên kết ngàm.
* Hàng thứ hai ghi ký hiệu những đầu thanh quy tụ tại nút tương ứng. Nút có bao nhiêu thanh quy tụ thì có bấy nhiêu cột.
* Hàng thứ ba ghi các hệ số phân phối tương ứng với các đầu thanh quy tụ vào nút.
* Hàng thứ tư ghi trị số mômen nút cứng tại các đầu thanh.
* Các hàng tiếp theo ghi kết quả phân phối và truyền mômen lần lượt tương ứng với các nút được tháo chốt.

Với ví dụ trên quá trình được thực hiện như sau:

Chu trình 1:

- Tháo chốt nút B:

+ Mômen không cân bằng:

M^*_B = -2,25 + 0,9 = -1,35(T.m).

+ Mômen phân phối: Mômen truyền:

M_{BA} = (-0,36).(-1,35) = 0,486(T.m) M_{AB} = 0.

M_{BC} = (-0,64).(-1,35) = 0,864(T.m) $M_{CB} = \frac{1}{2}.0,864 = 0,432$

- Chốt nút B, tháo chốt nút C:

+ Mômen không cân bằng:

M^*_C = -0,9 + 1 + 0,432 = 0,532(T.m).

+ Mômen phân phối: Mômen truyền:

M_{CB} = (-0,571).0,532) = -0,3037(T.m) M_{BC} = -0,1519(T.m)

M_{CD} = (-0,429).0,532 = -0,2282(T.m) M_{DC} = -0,1141(T.m)

- Chốt nút C, tháo chốt nút D:
  + Mômen không cân bằng:
    M_D^*= -1 + 0,35 - 0,1141 = 0,2359(T.m).
  + Mômen phân phối: Mômen truyền:

M_{DC} = (-0,5).0,2359) = -0,1179(T.m) M_{CD} = -0,0589(T.m)

M_{DE} = (-0,5).0,2359 = -0,1179 (T.m) M_{ED} = 0.

Chu trình 2:

- Tháo chốt nút B:

+ Mômen không cân bằng:
  M_B^*= -0,1519(T.m).

* Nhận xét: Khi tháo chốt ở các nút trong chu kỳ thứ (i) nào đó thì nguyên nhân làm cho nút không cân bằng là các mômen truyền từ các nút khác tới trong chu trình thứ (i-1) chứ không phải do mômen phân phối.

+ Mômen phân phối: Mômen truyền:

M_{BA} = (-0,36).(-0,1519) = 0,0546(T.m) M_{AB} = 0.

M_{BC} = (-0,64).(-0,1519) = 0,0972(T.m) M_{CB} = 0,0486(T.m)

- Chốt nút B, tháo chốt nút C:
  + Mômen không cân bằng:
    M_C^*= 0,0486 - 0,0589 = -0,0103(T.m).
  + Mômen phân phối: Mômen truyền:

M_{CB} = (-0,571).(-0,0103) = 0,0058(T.m) M_{BC} = 0,0029(T.m)

M_{CD} = (-0,429).(-0,0103) = 0,0044(T.m) M_{DC} = 0,0022(T.m)

- Chốt nút C, tháo chốt nút D:
  + Mômen không cân bằng:
    M_D^*= 0,0022(T.m).
  + Mômen phân phối: Mômen truyền:

M_{DC} = (-0,5).0,0022= -0,0011(T.m) $M_{CD} = \frac{1}{2}$.(-0,0011) = -0,0005(T.m)

M_{DE} = (-0,5).0,0022= -0,0011 (T.m) M_{ED} = 0.

Chu trình 3:

- Tháo chốt nút B
  + Mômen không cân bằng:
    M_B^*= 0,0029(T.m).
  + Mômen phân phối: Mômen truyền:

M_{BA} = -0,36.0,0029 = -0,0010(T.m) M_{AB} = 0.

M_{BC} = -0,64.0,0029 = -0,0018(T.m) M_{CB} = -0,0009(T.m)

- Chốt nút B, tháo chốt nút C:
  + Mômen không cân bằng:
    M_C^*= -0,0009 - 0,0005 = -0,0014(T.m).
  + Mômen phân phối: Mômen truyền:

M_{CB} = (-0,571).(-0,0014) = 0,0008(T.m) M_{BC} = 0,0004(T.m)

M_{CD} = (-0,429).(-0,0014) = 0,0006(T.m) M_{DC} = 0,0003(T.m)

- Chốt nút C, tháo chốt nút D:
  + Mômen không cân bằng:

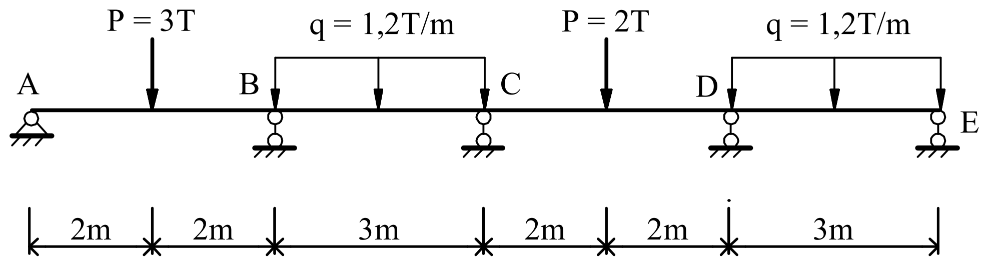
$M_D^* = 0,0003$(T.m).

+ Mômen phân phối: Mômen truyền:

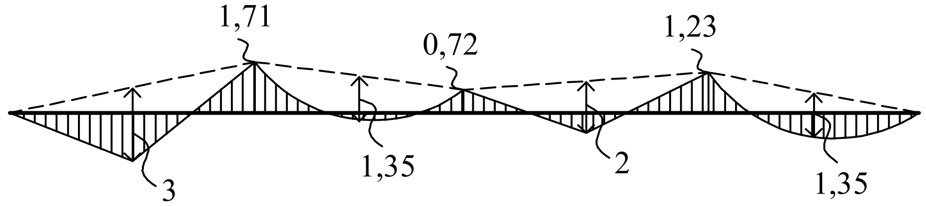
$M_{DC} = (-0,5).0,0003 = -0,00015$(T.m) $M_{CD} = -0,00007$(T.m)

$M_{DE} = (-0,5).0,0003 = -0,00015$(T.m) $M_{DC} = 0$.

Các mômen phân phối đã khá nhỏ, ta có thể dùng quá trình tại đây. Kết quả tính toán ta thể hiện trên bảng (B.9.1.2).



H.9.1.6a



M

(T.m)

H.9.1.6b

Nút (Ngàm)	A	B		C		D		E
Đầu	AB	BA	BC	CB	CD	DC	DE	ED
γ		0,36	0,64	0,571	0,429	0,5	0,5	
M^*		-2,25	0,9	-0,9	1	-1	1,35	
B	0	*0,486*	*0,864*	0,432				
C			-0,1519	*-0,3037*	*-0,2282*	-0,1141		
D					-0,0589	*-0,1179*	*0,1179*	0
B	0	*0,05476*	*-0,0972*	0,0486				
C			0,0029	*0,0058*	*0,0044*	0,0022		
D					-0,0005	*-0,0011*	*-0,0011*	0
B	0	*-0,0010*	*-0,0018*	-0,0009				
C			0,0004	*0,0008*	*0,0006*	0,0003		
D					-0,00007	*-0,00015*	*-0,00015*	0
M_{cc}	**0**	**-1,7102**	**1,7108**	**-0,7174**	**0,7173**	**-1,230**	**1,230**	**0**

B.9.1.2 Bảng phân phối mômen.

Mômen uốn tại các đầu thanh trong hệ ban đầu sẽ bằng mômen uốn trong hệ có các nút bị chốt ghi ở hàng thứ 4 trên bảng cộng với mômen uốn trong hệ chịu các mômen nút cứng đặt tại nút cứng là tổng cá giá trị ghi từ hàng thứ 5 trở xuống.

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

Sau khi đã biết mômen uốn tại các đầu thanh ta vẽ được biểu đồ (M) theo cách đã biết như phương pháp treo biểu đồ chẳng hạn (H.9.1.6b).

6. Kiểm tra cân bằng nút:

Nút B: $-1,7102 + 1,7108 = 0,0006 \approx 0$.

Nút C: $-0,7174 + 0,7173 = -0,0001 \approx 0$.

Nút D: -0,1230 + 0,1230 = 0.

* Chú ý:

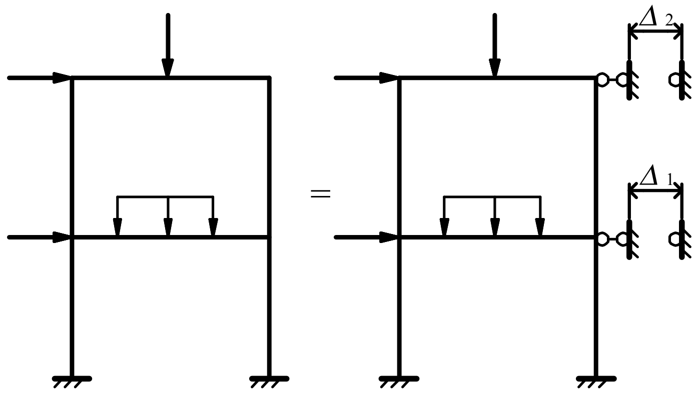
- Ta luôn kiểm tra kết quả trong quá trình tính toán:
    + Tổng hệ số phân phối xung quanh một nút bằng đơn vị.
    + Tổng mômen phân phối bằng mômen nút cứng nhưng trái dấu.
- Theo kinh nghiệm, ta nên tháo chốt nút có mômen không cân bằng lớn nhất làm nút khởi đầu.
- Trong trường hợp hệ chịu tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ hay chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa, cũng tính tương tự với cách tính trên, riêng ở bước xác định mômen nút cứng M^*, ta thực hiện giống như lúc vẽ biểu đồ (M_Z^o), (M_t^o) của phương pháp chuyển vị.

V. Tính hệ có nút chuyển vị thẳng:

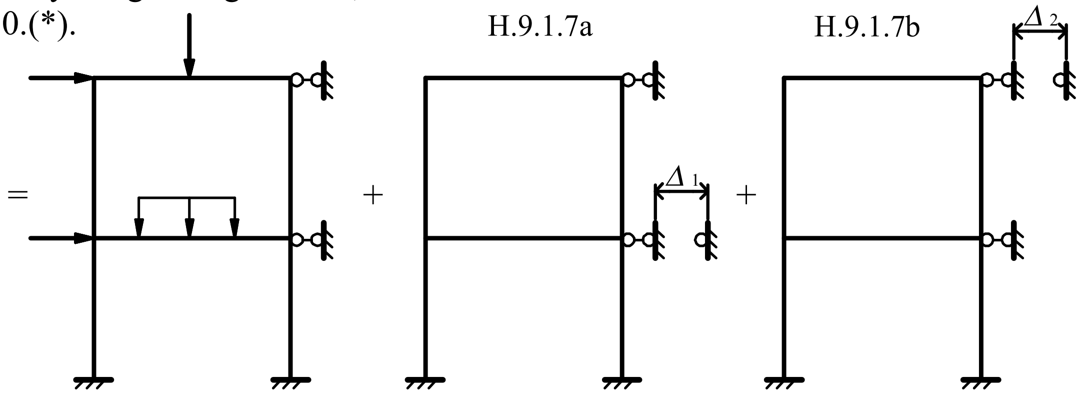
Để đơn giản, ta đi tìm hiểu cách tính hệ trên hình (H.9.1.7a).Tuy nhiên, cách lập luận vẫn tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ.

Đưa hệ đã cho về hệ có nút không chuyển vị thẳng bằng cách đặt thêm hai liên kết thanh vào ngang mức hai tầng (H.9.1.7b).

Để hệ mới làm việc giống hệ ban đầu, ta cần gây ra các chuyển vị cưỡng bức Δ_1, Δ_2 tương ứng với vị trí và phương của liên kết thanh mới thêm vào và thiết lập điều kiện phản lực trong các liên kết thanh này bằng không: $R_1 = 0$; $R_2 = 0$.(*).



H.9.1.7a H.9.1.7b



H.9.1.7c H.9.1.7d H.9.1.7e

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta đưa hệ trên hình (H.9.1.7b) về ba hệ thành phần:

- Hệ có nút không chuyển vị thẳng và chịu tải trọng (H.9.1.7c).
- Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng nhưng tại liên kết đặt thêm vào tại tầng một chịu chuyển vị cưỡng bức Δ_1(H.9.1.7d).
- Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng, nhưng tại liên kết đặt thêm vào tầng hai chịu chuyển vị cưỡng bức Δ_2 (H.9.1.7e).

Viết lại điều kiện (*):

$$\begin{cases} R_1(P,\Delta_1,\Delta_2)=0 \\ R_2(P,\Delta_1,\Delta_2)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_{1P}+R_{1\Delta 1}+R_{1\Delta 2}=0 \\ R_{2P}+R_{2\Delta 1}+R_{2\Delta 2}=0 \end{cases}$$

Trong đó:

R_{kP}: phản lực tại liên kết k đặt thêm vào do tải trọng gây ra trong hệ có nút không chuyển vị thẳng.

$R_{k\Delta m}$: phản lực tại liên kết k thêm vào do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m có giá trị bằng Δ_m gây ra.

Mặc khác, các chuyển vị Δ_m là chưa biết, để thuận lợi cho việc tính toán, ta biểu thị:

$$\Delta_m = k_m.\delta_m$$

δ_m: chuyển vị tại liên kết m, δ_m có thể chọn tuỳ ý (thường chọn bằng đơn vị), còn k_m chưa biết giữ vai trò ẩn số.

Nếu gọi r_{km} là phản lực tại liên kết k do δ_m gây ra thì $R_{k\Delta m} = r_{km}.k_m$.

Thay vào hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} R_{1P}+r_{11}k_1+r_{12}k_2=0 \\ R_{2P}+r_{21}k_1+r_{212}k_2=0 \end{cases}$$

Biểu đồ mômen cuối cùng trong hệ:

$$(M)=(M_P)+(M_{\Delta 1})+(M_{\Delta 2})=(M_P)+k_1.(\overline{M}_1)+k_2.(\overline{M}_2).$$

- $(\overline{M}_m)$ là biểu đồ mômen uốn do chuyển vị δ_m gây ra trên hệ có nút không chuyển vị thẳng; (M_P^o) là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ có nút không chuyển vị thẳng.

+ Biểu đồ (M_P) ta dễ dàng vẽ được theo hệ có nút không có chuyển vị thẳng và chỉ chịu tải trọng như ở phần phương pháp chuyển vị.

+ Biểu đồ $(\overline{M}_m)$ cũng thực hiện như vẽ biểu đồ (M_P) nhưng ở đây nguyên nhân tác dụng là chuyển vị cưỡng bức là δ_m.

Vấn đề còn lại là đi xác định k_1, k_2. Cách thực hiện như sau:

- Sau khi vẽ được biểu đồ (M_P), $(\overline{M}_m)$, ta sẽ xác định được r_{km}, R_{kP} bằng cách thực hiện mặt cắt, tách ra một hệ và xét cân bằng như lúc xác định các hệ số của phương pháp chuyển vị tại liên kết thanh đặt thêm vào. Sau đó giải hệ trên ta sẽ được k_1, k_2.

Trong trường hợp tổng quát, hệ có n nút chuyển vị độc lập:

- Phương trình thứ i của hệ xác định các k_i:

$$R_{iP}+r_{i1_1}k_1+r_{i_12}k_2.........r_{in}k_n=0; i=\overline{1,n}.$$

- Và $(M)=(M_P)+(\overline{M}_1).k_1+............(\overline{M}_n).k_n.$

* *Chú ý:*

- Trường hợp hệ có thanh đứng không song song hay chịu tác dụng của nguyên nhân biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa, nguyên tắc tính toán vẫn không thay đổi. Tuy nhiên, cần chú ý vận dụng sơ đồ chuyển vị hay giản đồ *Williot* khi xác định các mômen nút cứng.

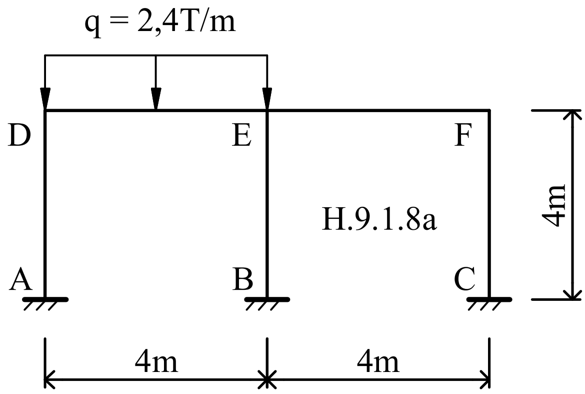
- Nếu chọn $\delta_k = \delta_m$ thì $r_{km} = r_{mk}$.

Ví dụ : Vẽ biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.9.1.8a). Cho biết độ cứng trong các thanh đứng là EJ, trong các thanh ngang là 2EJ.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh:

$$R_{AD} = R_{BE} = R_{CF} = \frac{EJ}{4};$$

$$R_{DE} = R_{EF} = \frac{2EJ}{4} = \frac{EJ}{2}.$$



2. Xác định hệ số phân phối:

Nút D:

$$\gamma_{DA} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,3333;$$

$$\gamma_{DE} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,6666.$$

Nút E:

$$\gamma_{ED} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{2}} = 0,4; \gamma_{EF} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{2}} = 0,4; \gamma_{EB} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{2}} = 0,2.$$

Nút F: $\gamma_{FC} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,3333; \gamma_{FE} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,6666.$

3. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng. (H.9.1.8b)

- Xác định mômen nút cứng:

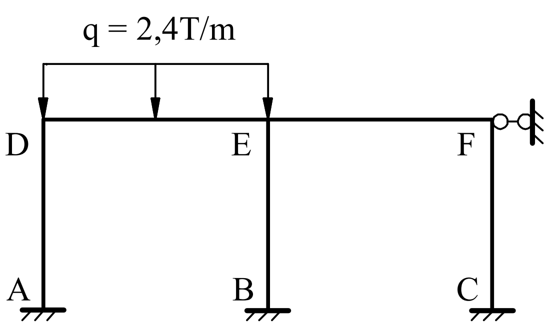
$$M^*_{DE} = -M^*_{ED} = \frac{ql^2}{12} = \frac{2,4.4^2}{12} = 3,2(T.m).$$

- Lập bảng phân phối mômen (B.9.1.3)

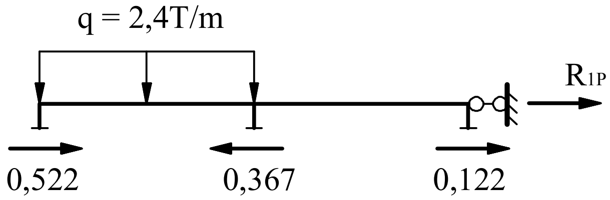
- Dựa vào kết quả của bảng tính, ta có thể vẽ được (M^o_P).

- Xác định phản lực R_{1P}: Thực hiện cắt ra khỏi hệ 1 phần như trên hình vẽ (H.9.1.8c). Lực cắt tại các đầu thanh bị cắt được suy ra từ biểu đồ mômen (M^o_P).

$\rightarrow R_{1P} = 0,367 - 0,522 - 0,122 = -0,277.$



H.9.1.8b



H.9.1.8c

Nút (Ngàm)	**A**	**B**	**D**		**E**			**F**		**C**
Đầu thanh	AD	BE	DA	DE	ED	EB	EF	FE	FC	CF
γ			0,3333	0,666	0,4	0,2	0,4	0,6666	0,3333	
M^*				3,2	-3,2					
D	-0,533		*-1,066*	*-2,133*	-1,066					
E		0,426		0,853	*1,706*	*0,853*	*1,706*	0,853		
F							-0,284	*-0,568*	*-0,284*	-0,142
D	-0,142		*-0,284*	*-0,568*	-0,284					
E		0,056		0,113	*0,227*	*0,113*	*0,227*	0,113		
F							-0,037	*-0,075*	*-0,037*	-0,018
D	-0,018		*-0,037*	*-0,075*	-0,037					
E		0,007		0,014	*0,029*	*0,014*	*0,029*	0,014		
F							-0,004	*-0,009*	*-0,004*	-0,002
D	-0,022		*-0,004*	*-0,009*	-0,004					
M_{cc}	**-0,695**	**0,489**	**-1,395**	**1,395**	**-2,629**	**0,98**	**1,637**	**0,328**	**-0,325**	**-0,162**

B.9.1.3 Bảng phân phối mômen do tải trọng

4. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu chuyển vị cưỡng bức:

- Hệ số phân phối và hệ số truyền đã xác định ở mục 3.
- Xác định mômen nút cứng:

Chốt tất cả các nút và tra bảng cho các phần tử chịu chuyển vị cưỡng bức (H.9.1.8d):

$$M_{DA}^* = M_{EB}^* = M_{FC}^* = \frac{6EJ}{l^2}.\delta_1$$

Nếu chọn $\delta = \dfrac{l^2}{6EJ}$ thì $M_{DA}^* = M_{EB}^* = M_{FC}^* = 1$

Suy ra được: $M_{AD}^* = M_{BE}^* = M_{CF}^* = 1/2$.

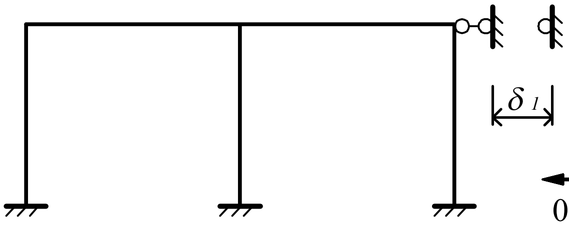
- Lập bảng phân phối mômen (B.9.1.4)
- Dựa vào kết quả của bảng tính, ta có thể vẽ được ($\overline{M}_1$).
- Xác định phản lực r_{11}:

Thực hiện cắt ra khỏi hệ 1 phần như trên hình vẽ (H.9.1.8d). Lực cắt tại các đầu thanh bị cắt được suy ra từ biểu đồ mômen ($\overline{M}_1$).

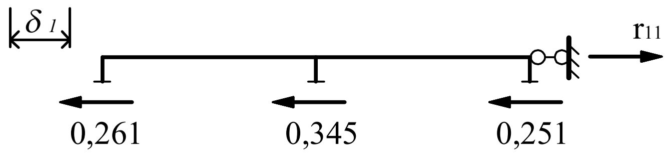
$\rightarrow r_{11} = 0,261 + 0,345 + 0,251 = 0,857$.

5. Thay tất cả vào phương trình xác định k:

$$r_{11}k_1 + R_{1P} = 0 \rightarrow 0,877.k_1 - 0,277 = 0 \rightarrow k_1 = 0,323.$$



H.9.1.8d



H.9.1.8e

Nút (Ngàm)	A	B	D		E			F		C
Đầu thanh	AD	BE	DA	DE	ED	EB	EF	FE	FC	CF
γ			0,333	0,666	0,4	0,2	0,4	0,666	0,333	
M^*	0,5	0,5	1			1			1	0,5
D	-0,166		*-0,333*	*-0,666*	-0,333					
E		-0,066		-0,133	*-0,266*	*-0,133*	*-0,266*	-0,133		
F								*-0,577*	*-0,288*	-0,144
D	0,022		*0,044*	*0,088*	0,044					
E		0,024		0,048	*0,097*	*0,048*	*0,097*	0,048		
F							-0,015	*-0,031*	*-0,015*	-0,007
D	-0,008		*-0,015*	*-0,031*	-0,015					
E		0,003		0,006	*0,012*	*0,006*	*0,012*	0,006		
F							-0,002	*-0,004*	*-0,002*	-0,001
M_{cc}	**0,348**	**0,461**	**0,696**	**-0,688**	**-0,461**	**0,921**	**-0,462**	**-0,687**	**0,659**	**0,348**

B.9.1.4 Bảng phân phối mômen do δ_1

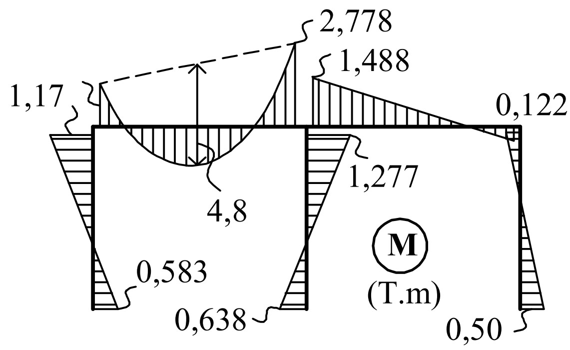
6. Xác định mômen uốn tại các đầu thanh của hệ ban đầu:

Đầu thanh	AD	BE	DA	DE	ED	EB	EF	FE	FC	CF
M_P^o	-0,695	0,489	-1,395	1,395	-2,629	0,98	1,637	0,328	-0,325	-0,162
$\overline{M}_1$	0,348	0,461	0,696	-0,688	-0,461	0,921	-0,462	-0,687	0,659	0,348
$\overline{M}_1.k_1$	0,112	0,149	0,225	-0,222	-0,149	0,297	-0,149	*-0,222*	*0,213*	0,112
M_{cc}	**-0,583**	**0,638**	**-1,170**	**1,173**	**-2,778**	**1,277**	**1,488**	**0,106**	**-0,112**	**-0,50**

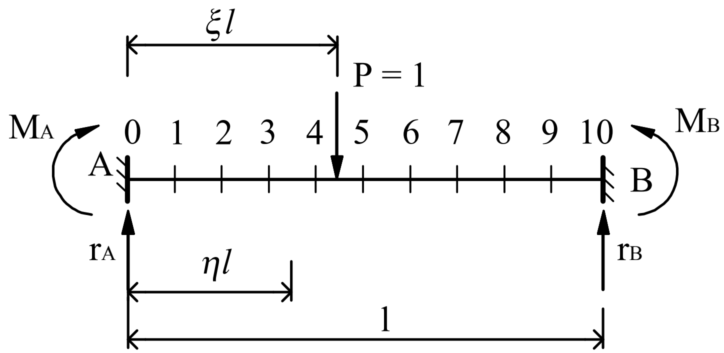
B.9.1.5 Bảng xác định mômen trên hệ.

Sau khi đã xác định được mômen uốn tại các đầu thanh, ta có thể vẽ được biểu đồ (M). Xem hình (H.9.1.8f).

Sau khi đã vẽ được biểu đồ (M), tiến hành biểu đồ lực cắt (Q) và lực dọc theo nguyên tắc đã biết.



H.9.1.8f



$M_A = -\xi(1 - \xi)^2 l$; $M_B = -\xi^2(1 - \xi)l$

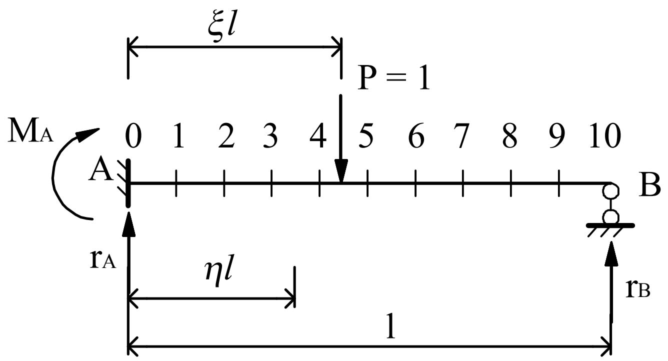
$r_A = (1 - \xi)^2(1 + 2\xi)$; $r_B = \xi^2(3 - 2\xi)l$

$M_k = (1 - \xi)^2[\eta(1 + 2\xi) - \xi]l$ khi $\eta \le \xi$

$M_k = \xi^2[(1 - \eta)(3 - 2\xi) - (1 - \xi)]l$ khi $\eta \ge \xi$

ξ		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Mômen uốn tại tiết diện η =	0,0	0	-0,0810.1	-0,1280.1	-0,1470.1	-0,1440.1	-0,1250.1	-0,0960.1	-0,0630.1	-0,0320.1	-0,0090.1	0
	0,1	0	0,08092.1	-0,0384.1	-0,0686.1	-0,0792.1	-0,0750.1	-0,0608.1	-0,0414.1	-0,0216.1	-0,0062.1	0
	0,2	0	0,0134.1	0,0512.1	0,0118.1	-0,0144.1	-0,0250.1	-0,0256.1	-0,0198.1	-0,0112.1	-0,0034.1	0
	0,3	0	0,0106.1	0,0408.1	0,0882.1	0,0504.1	0,0250.1	0,0096.1	0,0234.1	-0,0008.1	-0,0006.1	0
	0,4	0	0,0078.1	0,0302.1	0,0666.1	0,1152.1	0,0750.1	0,0448.1	0,0018.1	0,0096.1	0,0022.1	0
	0,5	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,0800.1	0,0450.1	0,0200.1	0,0050.1	0
	0,6	0	0,0022.1	0,0096.1	0,0234.1	0,0448.1	0,0750.1	0,1152.1	0,0666.1	0,0302.1	0,0078.1	0
	0,7	0	-0,0006.1	-0,0008.1	0,0018.1	0,0096.1	0,0250.1	0,0504.1	0,0882.1	0,0408.1	0,0106.1	0
	0,8	0	-0,0034.1	-0,0112.1	0,0198.1	-0,0256.1	-0,0250.1	-0,0144.1	0,0118.1	0,0512.1	0,0134.1	0
	0,9	0	-0,0062.1	-0,0216.1	0,0414.1	-0,0608.1	-0,0750.1	-0,0792.1	-0,0686.1	-0,0384.1	0,0892.1	0
	1,0	0	-0,0090.1	-0,0320.1	0,0630.1	-0,0960.1	-0,1250.1	-0,1400.1	-0,1470.1	-0,1284.1	-0,0810.1	0

B.6.5.1



$M_A = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)l$; $M_B = 0$

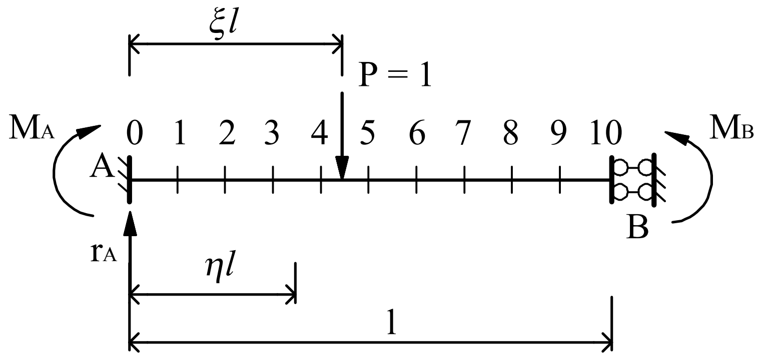
$r_A = \frac{1}{2}(2-3\xi^2+\xi^3)$; $r_B = \frac{1}{2}\xi^2(3-\xi)l$

$M_k = \frac{1}{2}\xi^2(3-\xi)(1-\eta)l - (\xi-\eta)l$ khi $\eta \le \xi$

$M_k = \frac{1}{2}\xi^2(3-\eta)(1-\eta)l$ khi $\eta \ge \xi$

	ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Mômen uốn tại tiết diện η =	0,0	0	-0,08550.l	-0,1440.l	-0,17850.l	-0,1920.l	-0,18750.l	-0,1680.l	-0,13650.l	-0,0960.l	-0,04950.l	0
	0,1	0	0,01305.l	-0,0496.l	-0,09065.l	-0,1128.l	-0,11875.l	-0,1112.l	-0,09285.l	-0,0664.l	-0,03455.l	0
	0,2	0	0,01160.l	0,0448.l	-0,00280.l	-0,0336.l	-0,05000.l	-0,0544.l	-0,04920.l	-0,0368.l	-0,01960.l	0
	0,3	0	0,01015.l	0,0392.l	0,08505.l	0,0456.l	0,01875.l	0,0024.l	-0,00550.l	-0,0072.l	-0,00465.l	0
	0,4	0	0,00780.l	0,0336.l	0,07290.l	0,1248.l	0,08750.l	0,0592.l	0,03810.l	0,0224.l	0,01030.l	0
	0,5	0	0,00725.l	0,0280.l	0,06075.l	0,1040.l	0,15625.l	0,1160.l	0,08175.l	0,0520.l	0,02525.l	0
	0,6	0	0,00580.l	0,0224.l	0,04860.l	0,0832.l	0,12500.l	0,1728.l	0,12540.l	0,0816.l	0,04020.l	0
	0,7	0	0,00435.l	0,0168.l	0,03645.l	0,0624.l	0,09735.l	0,1296.l	0,16905.l	0,1112.l	0,05515.l	0
	0,8	0	0,00290.l	0,0112.l	0,02130.l	0,0416.l	0,06250.l	0,0864.l	0,11270.l	0,1408.l	0,07010.l	0
	0,9	0	0,00145.l	0,0056.l	0,01215.l	0,0208.l	0,03125.l	0,0432.l	0,05635.l	0,0704.l	0,08505.l	0
	1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

B.6.5.2



$M_A = -\frac{1}{2}\xi(2-\xi)l$; $M_B = \frac{1}{2}\xi^2 l$

$r_A = 1$; $r_B = 0$

$M_k = -\frac{1}{2}\xi(2-\xi)l + \eta l$ khi $\eta \le \xi$

$M_k = \frac{1}{2}\xi^2 l$ khi $\eta \ge \xi$

ξ		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Mômen uốn tại tiết diện η =	0,0	0	-0,0950.1	-0,1800.1	-0,2550.1	-0,3200.1	-0,3750.1	-0,4200.1	-0,4550.1	-0,4800.1	-0,4950.1	-0,50.1
	0,1	0	0,0050.1	-0,0800.1	-0,1550.1	-0,2200.1	-0,2750.1	-0,3200.1	-0,3550.1	-0,3800.1	-0,3950.1	-0,40.1
	0,2	0	0,0050.1	0,0200.1	-0,0550.1	-0,1200.1	-0,1750.1	-0,2200.1	-0,2550.1	-0,2800.1	-0,2950.1	-0,30.1
	0,3	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	-0,0200.1	-0,0750.1	-0,1200.1	-0,1500.1	-0,1800.1	-0,1950.1	-0,20.1
	0,4	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,0250.1	-0,0200.1	0,0550.1	-0,0800.1	-0,0950.1	-0,10.1
	0,5	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,0800.1	0,0450.1	0,0200.1	0,0050.1	0,00
	0,6	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,1450.1	0,1200.1	0,1050.1	0,10.1
	0,7	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,2200.1	0,2050.1	0,20.1
	0,8	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,3200.1	0,3050.1	0,30.1
	0,9	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,3200.1	0,4050.1	0,40.1
	1,0	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,3200.1	0,4050.1	0,50.1

B.6.5.3