

GIÁO TRÌNH CƠ HỌC KẾT CẤU I



CHƯƠNG MỞ ĐẦU**§ 1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU VÀ NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC****I. Đối tượng nghiên cứu và nhiệm vụ của môn học:**

1. Đối tượng nghiên cứu: là vật rắn biến dạng đàn hồi, tức là có thể thay đổi hình dạng dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài.

2. Phạm vi nghiên cứu:

Phạm vi nghiên cứu của môn Cơ học kết cấu là giống môn Sức bền vật liệu nhưng gồm nhiều cấu kiện liên kết lại với nhau. Do vậy, trong kết cấu hay dùng tên gọi là hệ kết cấu.

II. Nhiệm vụ của môn học:

Nhiệm vụ chủ yếu của môn Cơ học kết cấu là đi xác định nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình nhằm xây dựng công trình thỏa mãn các yêu cầu:

- *Điều kiện về độ bền:* Đảm bảo cho công trình không bị phá hoại dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài

- *Điều kiện về độ cứng:* Đảm bảo cho công trình không có chuyển vị và biến dạng vượt quá giới hạn cho phép nhằm đảm bảo sự làm việc bình thường của công trình.

- *Điều kiện về ổn định:* Đảm bảo cho công trình có khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của nó dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

Với yêu cầu về độ bền, cần đi xác định nội lực; với yêu cầu về độ cứng, cần đi xác định chuyển vị; với yêu cầu về ổn định, cần đi xác định lực tới hạn mà kết cấu có thể chịu được.

III. Các bài toán môn học giải quyết:

1. Bài toán kiểm tra: Ở bài toán này, ta đã biết trước hình dạng, kích thước cụ thể của các cấu kiện trong công trình và các nguyên nhân tác động.

Yêu cầu: kiểm tra công trình theo ba điều kiện trên (độ bền, độ cứng & ổn định) có đảm bảo hay không? Và ngoài ra còn kiểm tra công trình thiết kế có tiết kiệm nguyên vật liệu hay không?

2. Bài toán thiết kế: Ở bài toán này, ta mới chỉ biết nguyên nhân tác động bên ngoài. Yêu cầu: Xác định hình dạng, kích thước của các cấu kiện trong công trình một cách hợp lý mà vẫn đảm bảo ba điều kiện trên.

Để giải quyết bài toán này, thông thường, dựa vào kinh nghiệm hoặc dùng phương pháp thiết kế sơ bộ để giả thiết trước hình dạng, kích thước của các cấu kiện. Sau đó tiến hành giải bài toán kiểm tra như đã nói ở trên. Và trên cơ sở đó người thiết kế điều chỉnh lại giả thiết ban đầu của mình, tức là đi giải bài toán lặp.

IV. Vị trí của môn học:

Là môn học kỹ thuật cơ sở làm nền tảng cho các môn học chuyên ngành như: kết cấu bê tông, kết cấu thép & gỗ, kỹ thuật thi công...

Trang bị cho người làm công tác xây dựng những kiến thức hữu ích.

§2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

I. Sơ đồ công trình:

1. Khái niệm: Sơ đồ công trình là hình ảnh đơn giản hóa mà vẫn đảm bảo phản ánh được chính xác sự làm việc thực tế của công trình và phải dùng để tính toán được.

2. Các yếu tố ảnh hưởng đến việc chọn sơ đồ tính:

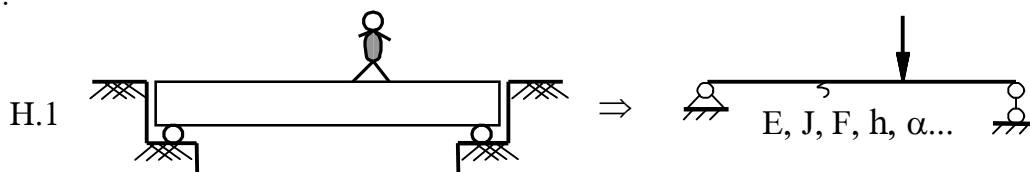
- Hình dạng, kích thước của công trình.
- Tỷ lệ độ cứng của các cấu kiện.
- Tầm quan trọng của công trình.
- Khả năng tính toán của người thiết kế.
- Tải trọng và tính chất tác dụng của nó.
- v.v.v

3. Các bước lựa chọn sơ đồ tính:

a. Bước 1: Đưa công trình thực về sơ đồ công trình:

- Thay các thanh bằng đường trục thanh.
- Thay các bản và vỏ bằng các mặt trung gian.
- Thay tiết diện, vật liệu bằng các đại lượng đặc trưng: diện tích (F), mômen quán tính (J), môđun đàn hồi (E), hệ số giãn nở vì nhiệt (α) ...
- Thay thiết bị tựa bằng các liên kết lý tưởng.
- Đưa tải trọng tác dụng lên mặt cấu kiện về trục cấu kiện.

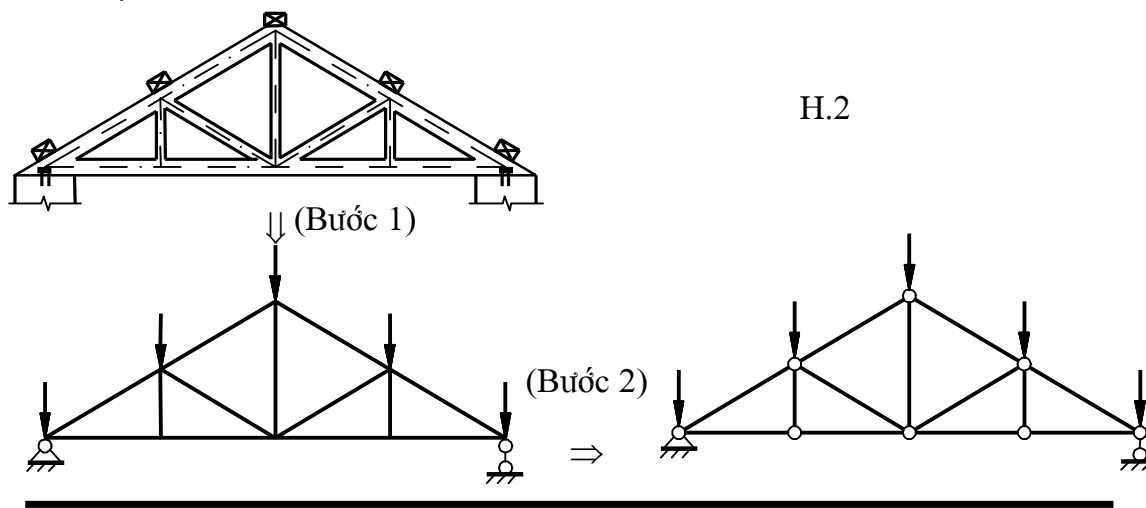
Ví dụ:



b. Bước 2: Đưa sơ đồ công trình về sơ đồ tính:

Trong một số trường hợp, sơ đồ công trình đưa về chưa phù hợp với khả năng tính toán, ta loại bỏ những yếu tố thứ yếu để đơn giản bài toán và đưa về sơ đồ tính, tính được.

Ví dụ:

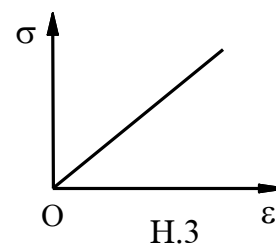


§ 3. CÁC GIẢ THIẾT ĐỂ TÍNH TOÁN VÀ NGUYÊN LÝ CỘNG TÁC DỤNG

I. Các giả thiết tính toán:

1. Điều kiện vật lý của bài toán:

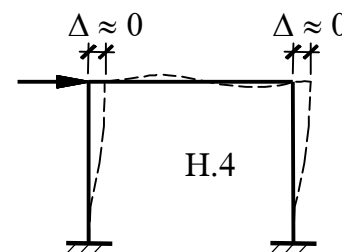
Giả thiết rằng vật liệu là đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hook, nghĩa là quan hệ giữa nội lực và biến dạng là quan hệ tuyến tính ($\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$).



Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi tuyến tính (tuyến tính vật lý). Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi phi tuyến (phi tuyến vật lý).

2. Điều kiện hình học của bài toán:

Chuyển vị và biến dạng được xem như là những đại lượng vô cùng bé. Do vậy khi tính toán, xem công trình là không có biến dạng.



Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là tuyến tính hình học. Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là phi tuyến hình học.

II. Nguyên lý cộng tác dụng:

1. Phát biểu: Một đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) do một số các nguyên nhân đồng thời tác dụng gây ra sẽ bằng tổng đại số hay tổng hình học của đại lượng S do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra.

Lấy tổng đại số khi đại lượng S là đại lượng vô hướng, lấy tổng hình học khi đại lượng S là đại lượng véc tơ.

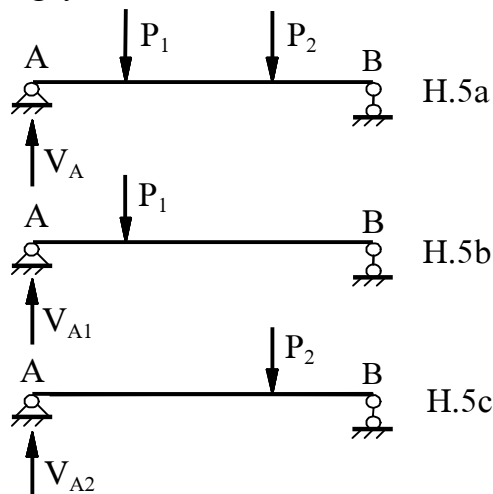
Ví dụ: Xét dầm chịu tác dụng của 2 lực P_1 & P_2 và đại lượng nghiên cứu S là phản lực V_A trên hình (H.5a)

Xét chính dầm đó nhưng chịu tác dụng riêng rẽ của 2 lực P_1, P_2 trên hình (H.5b) & (H.5c).

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A1} + \vec{V}_{A2}.$$

Và nếu xét toàn diện, thì hệ (H.5a) bằng tổng của hai hệ (H.5b) & (H.5c).



2. Biểu thức giải tích của nguyên lý cộng tác dụng:

$$S(P_1, P_2, \dots, P_n) = S(P_1) + S(P_2) + \dots + S(P_n)$$

- $S(P_1, P_2, \dots, P_n)$: là đại lượng S do các nguyên nhân P_1, P_2, \dots, P_n đồng thời tác dụng lên hệ gây ra.

- $S(P_k)$: là đại lượng S do riêng P_k tác dụng lên hệ gây ra.

Gọi \bar{S}_k là đại lượng S do riêng $P_k = 1$ gây ra. Tức là $S(P_k) = \bar{S}_k \cdot P_k$

$$\text{Vậy } S(P_1, P_2, \dots, P_n) = \bar{S}_1 \cdot P_1 + \bar{S}_2 \cdot P_2 + \dots + \bar{S}_n \cdot P_n$$

Chú ý: Nguyên lý cộng tác dụng chỉ áp dụng cho hệ tuyến tính vật lý cũng như tuyến tính hình học.

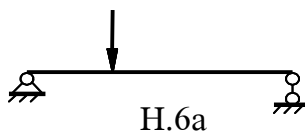
§ 4. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

I. Phân loại theo sơ đồ tính:

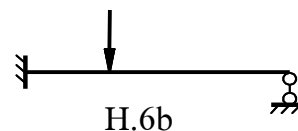
1. Hệ phẳng: khi tất cả các cấu kiện cùng thuộc một mặt phẳng và tải trọng tác dụng cũng nằm trong mặt phẳng đó.

Các loại hệ phẳng:

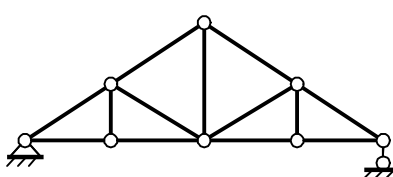
- Dầm (H.6)
- Dàn (H.7)
- Vòm (H.8)



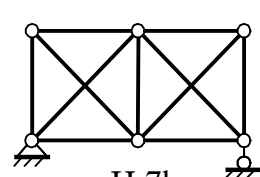
H.6a



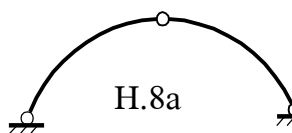
H.6b



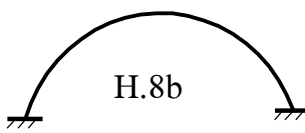
H.7a



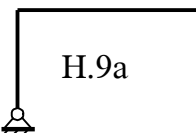
H.7b



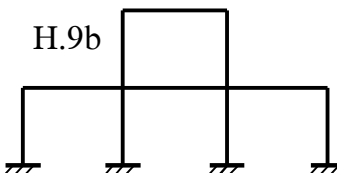
H.8a



H.8b

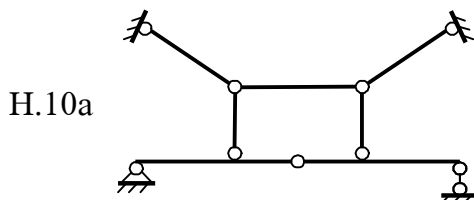


H.9a

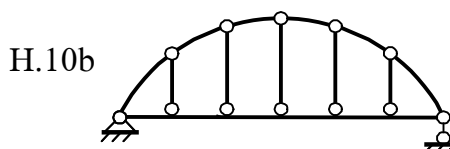


H.9b

- Khung (H.9)
- Hệ liên hợp (H.10)



H.10a

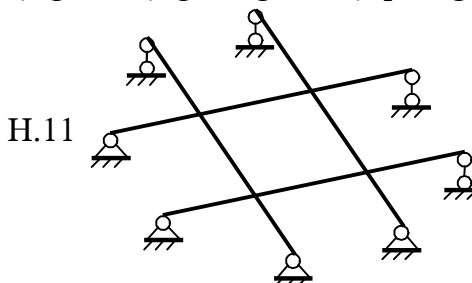


H.10b

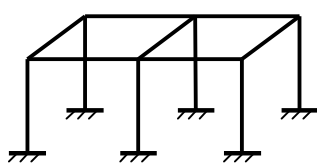
2. Hệ không gian: khi các cấu kiện không cùng nằm trong một mặt phẳng, hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng nhưng tải trọng tác dụng ra ngoài mặt phẳng đó.

Các loại hệ không gian:

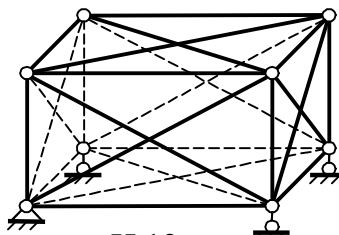
- Hệ dầm trực giao (H.11)
- Khung không gian (H.12)
- Dàn không gian (H.13)
- Bản (H.14)
- Vỏ (H.15)



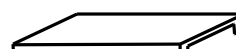
H.11



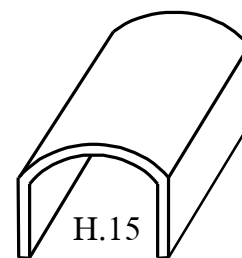
H.12



H.13



H.14



H.15

II. Phân loại theo phương pháp tính:

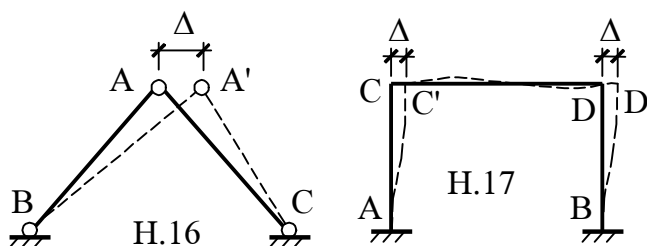
1. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện động học khi xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ, người ta chia ra hai loại hệ:

a. Hệ tĩnh định: là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học có thể xác định được toàn bộ nội lực và phản lực trong hệ. Ví dụ các hệ trên hình a từ (H.6) đến (H.10).

b. Hệ siêu tĩnh: là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học thì chưa đủ để xác định toàn bộ các nội lực và phản lực mà còn phải sử dụng thêm điều kiện động học và điều kiện vật lý. Ví dụ các hệ trên hình b từ (H.6) đến (H.10).

2. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện cân tĩnh học khi xác định biến dạng trong hệ khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức, người ta chia ra hai loại hệ:

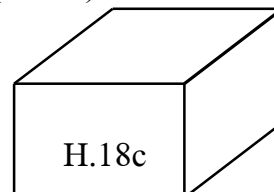
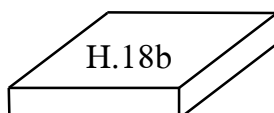
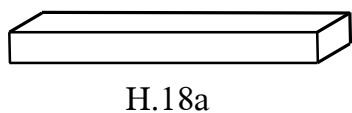
a. Hệ xác định động: là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, có thể xác định biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học (hình học). Ví dụ hệ cho trên hình (H.16).



b. Hệ siêu động: là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ bằng các điều kiện động học thì chưa thể xác định được biến dạng của hệ mà cần phải sử dụng thêm điều kiện tĩnh học. Ví dụ hệ cho trên hình (H.17).

III. Phân loại theo kích thước tương đối của các cấu kiện:

- Thanh: nếu kích thước một phương khá lớn hơn hai phương còn lại (H.18a).
- Bản: nếu kích thước của hai phương khá lớn hơn phương còn lại (H.18b).
- Khối: nếu kích thước của ba phương gần bằng nhau (H.18c)



IV. Phân loại theo khả năng thay đổi hình dạng hình học:

- Hệ biến hình.
- Hệ biến hình tức thời.
- Hệ bất biến hình.

§ 5. CÁC NGUYÊN NHÂN GÂY RA NỘI LỰC, BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ

I. Tải trọng: gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong tất cả các loại hệ.

Phân loại tải trọng:

- Theo thời gian tác dụng: tải trọng lâu dài (như trọng lượng bản thân công trình...) còn được gọi là tĩnh tải và tải trọng tạm thời (như tải trọng do gió, do con người đi lại khi sử dụng..) còn được gọi là hoạt tải.

- Theo sự thay đổi vị trí tác dụng: tải trọng bất động và tải trọng di động.

- Theo tính chất tác dụng có gây ra lực quán tính hay không: tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.

Ngoài ra, còn phân loại tải trọng theo hình thức tác dụng của tải trọng: tải trọng tập trung, tải trọng phân bố...

II. Sự thay đổi nhiệt độ: chính là sự thay đổi nhiệt độ tác dụng lên công trình khi làm việc so với lúc chế tạo ra nó.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra biến dạng và chuyển vị, không gây ra nội lực, còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

III. Chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (lún) và do chế tạo lắp ráp không chính xác.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra chuyển vị, không gây ra biến dạng và nội lực; còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

CHƯƠNG 1

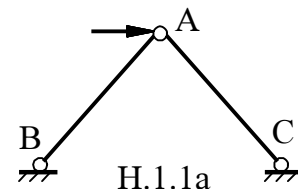
PHÂN TÍCH CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA HỆ PHẪNG

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM

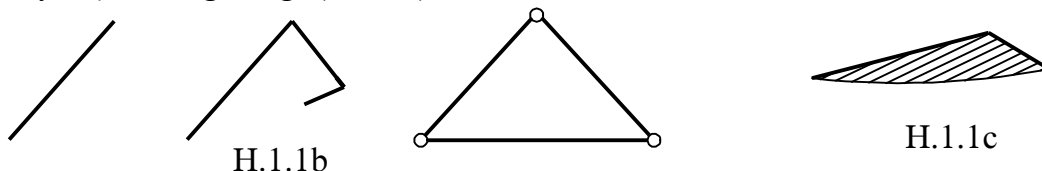
I. Hệ bất biến hình (BBH): là hệ không có sự thay đổi hình dạng hình học dưới tác dụng của tải trọng nếu xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Phân tích hệ hình vẽ (H.1.1a)

Nếu quan niệm AB, BC, trái đất là tuyệt đối cứng, tức là $l_{AB}, l_{BC}, l_{CA} = \text{const}$ thì tam giác ABC là duy nhất, nên hệ đã cho là hệ BBH.



- Một hệ BBH một cách rõ rệt gọi chung là miếng cứng (tấm cứng)
- Các loại miếng cứng: (H.1.1b)
- Ký hiệu miếng cứng: (H.1.1c)



* *Chú ý:* Do hệ BBH có khả năng chịu lực tác dụng nên nó được sử dụng làm các kết cấu xây dựng và thực tế là chủ yếu sử dụng loại hệ này.

II. Hệ không bất biến hình:

1. Hệ biến hình (BH): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng hữu hạn dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Hệ ABCD cho trên hình (H.1.2a) có thể đổ thành hệ AB'CD, nên hệ đã cho là hệ BH.

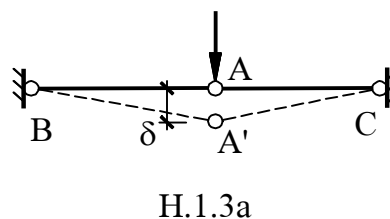
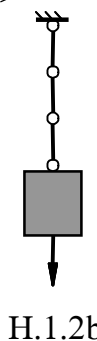
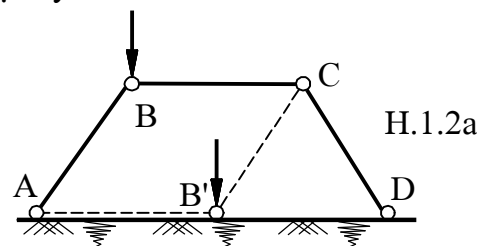
* *Chú ý:* Do hệ BH không có khả năng chịu tải trọng tác dụng nên các kết cấu xây dựng không sử dụng loại hệ này.

Hệ BH trên hình (H.1.2b) cho phép sử dụng vì theo phương đứng, tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái cân bằng.

2. Hệ biến hình tức thời (BHTT): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng vô cùng bé dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Hệ ABC có cấu tạo như trên hình (H.1.3a), khớp A có thể đi xuống một đoạn vô cùng bé δ , nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* *Chú ý:* Các kết cấu xây dựng không sử dụng hệ BHTT hay hệ gần BHTT (là hệ mà chỉ cần thay đổi một lượng vô cùng bé hình dạng hình học sẽ trở thành hệ BHTT, ví dụ hệ BA'C trên hình (H.1.3a) vì nội lực



trong hệ gần BHTT rất lớn.

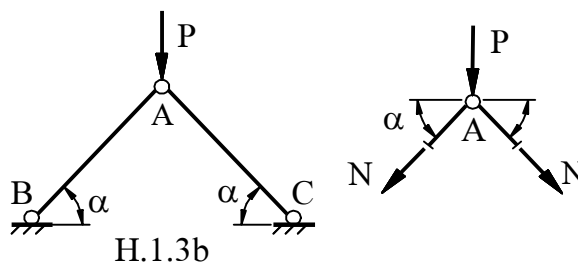
Thật vậy, xét hệ trên hình (H.1.3b).

Lực dọc trong hai thanh AB và AC là N.

$$N = -\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}$$

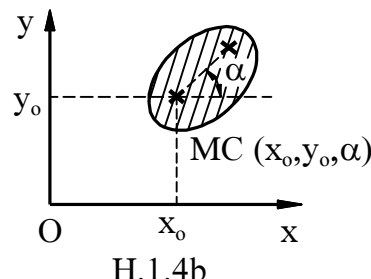
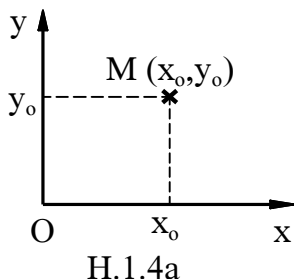
Khi $\alpha \rightarrow 0$, hệ BAC tiến đến hệ gần BHTT.

$$N = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}\right) \rightarrow \infty$$



III. Bậc tự do: là số các thông số độc lập đủ để xác định vị trí của một hệ so với một hệ cố định khác.

Trong hệ phẳng, một chất điểm có bậc tự do bằng 2 (H.1.4a); một miếng cứng có bậc tự do bằng 3 (H.1.4b).



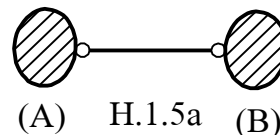
§ 2. CÁC LOẠI LIÊN KẾT VÀ TÍNH CHẤT CỦA LIÊN KẾT

I. Liên kết đơn giản: là liên kết nối hai miếng cứng với nhau.

Các loại liên kết đơn giản

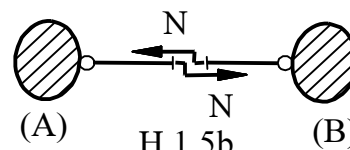
1. Liên kết thanh: (liên kết loại một)

a. Cấu tạo: Gồm một thanh thẳng không chịu tải trọng có hai khớp lý tưởng ở hai đầu. (H.1.5a)



b. Tính chất của liên kết:

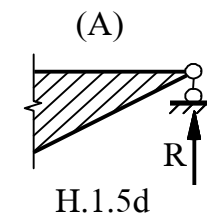
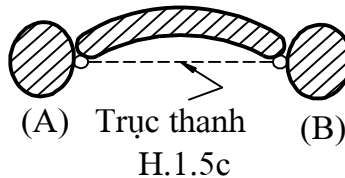
+ Về mặt động học: liên kết thanh không cho miếng cứng di chuyển theo phương dọc trục thanh, tức là khử được một bậc tự do



+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết chỉ có thể phát sinh một thành phần phản lực theo phương dọc trục thanh (H.1.5b).

* **Kết luận:** liên kết thanh khử được một bậc tự do và làm phát sinh một thành phần phản lực theo phương liên kết.

* **Trường hợp đặc biệt:** một miếng cứng có hai đầu khớp và không chịu tải trọng thì có thể như một liên kết thanh, có trục thanh là đường nối hai khớp (H.1.5c).



* **Chú ý:** liên kết thanh là mở rộng của khái niệm gối di động nối đất (H.1.5d).

2. Liên kết khớp: (liên kết loại 2)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp lý tưởng (H.1.6a).

b. Tính chất:

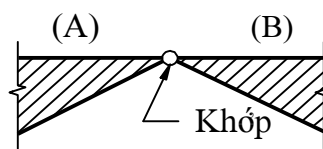
+ Về mặt động học: liên kết khớp không cho miếng cứng chuyển vị thẳng (nhưng có thể xoay), tức là khử được hai bậc tự do.

+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết có thể phát sinh một thành phần phản lực có phương chưa biết. Phản lực này thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương xác định (H.1.6b).

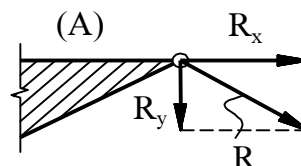
* *Kết luận:* liên kết khớp khử được hai bậc tự do và làm phát sinh hai thành phần phản lực.

* *Trường hợp đặc biệt:* hai liên kết thanh có thể xem là một liên kết khớp (khớp giả tạo), có vị trí tại giao điểm đường nối hai trục thanh (H.1.6c).

* *Chú ý:* liên kết khớp là mở rộng của khái niệm gối cố định nối đất (H.1.6d)

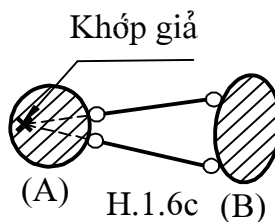


H.1.6a

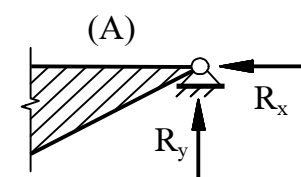


$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

H.1.6b



H.1.6c



H.1.6d

3. Liên kết hàn: (liên kết loại 3)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một mối hàn (H.1.7a).

b. Tính chất:

+ Về mặt động học: liên kết hàn không cho miếng cứng có chuyển vị, tức là khử được 3 bậc tự do.

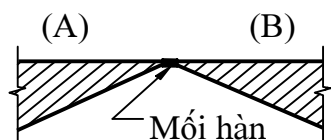
+ Về mặt tĩnh học: liên kết có thể làm phát sinh một thành phần phản lực có phương và vị trí chưa biết. Thường đưa phản lực này về tại vị trí liên kết và phân tích thành ba thành phần (M, \vec{R}_x, \vec{R}_y) (H.1.7b)

* *Kết luận:* liên kết hàn khử được ba bậc tự do và làm phát sinh ba thành phần phản lực.

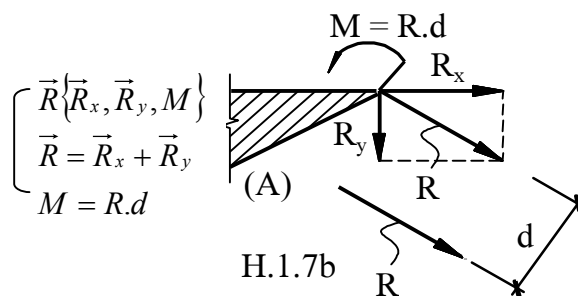
* *Chú ý:*

- Liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hoặc một liên kết thanh và một liên kết khớp được sắp xếp một cách hợp lý.

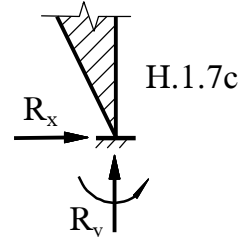
- Liên kết hàn là mở rộng của khái niệm liên kết ngàm nối đất (H.1.7c)



H.1.7a

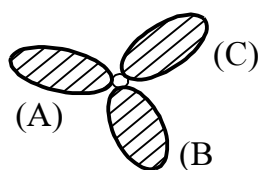


H.1.7b

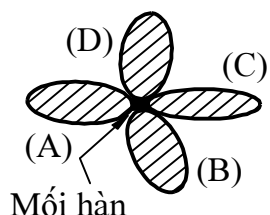


H.1.7c

II. Liên kết phức tạp: là liên kết nối nhiều miếng cứng với nhau, số miếng cứng lớn hơn hai.



H.1.8a



H.1.8b

Về mặt cấu tạo, chỉ có liên kết khớp phức tạp (H.1.8a) và hàn phức tạp (H.1.8b).

* **Độ phức tạp của liên kết:** là số liên kết đơn giản cùng loại, tương đương với liên kết đã cho. Ký hiệu p.

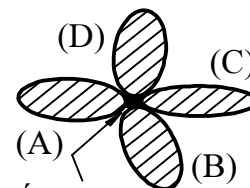
* **Công thức xác định độ phức tạp:**

$$p = D - 1$$

(1 - 1)

D: số miếng cứng quy tụ vào liên kết.

* *Ví dụ: Xác định độ phức tạp của liên kết hàn trên hình (H.1.8c)*



$$p = D - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Có nghĩa là liên kết hàn phức tạp đã cho tương đương với ba liên kết hàn đơn giản.

Mỗi hàn
H.1.8c

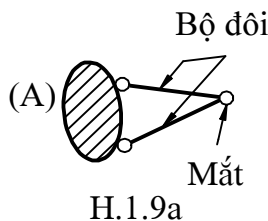
§.3 CÁCH NỐI CÁC MIÉNG CỨNG THÀNH HỆ BẤT BIẾN HÌNH

I. Nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng:

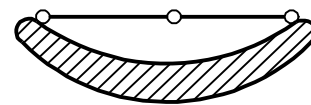
a. Điều kiện cần: để nối một điểm vào miếng cứng cần phải khử hai bậc tự do của nó. Nghĩa là cần dùng hai liên kết thanh (H.1.9a).

b. Điều kiện đủ: hai liên kết thanh không được thẳng hàng.

Hai liên kết thanh không thẳng hàng nối một điểm vào miếng cứng gọi là bộ đôi (H.1.9a).



H.1.9a

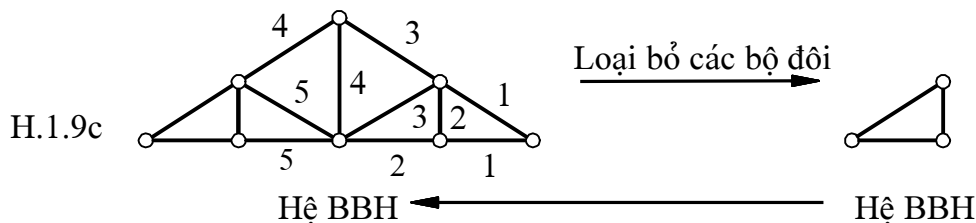


Hệ BHTT

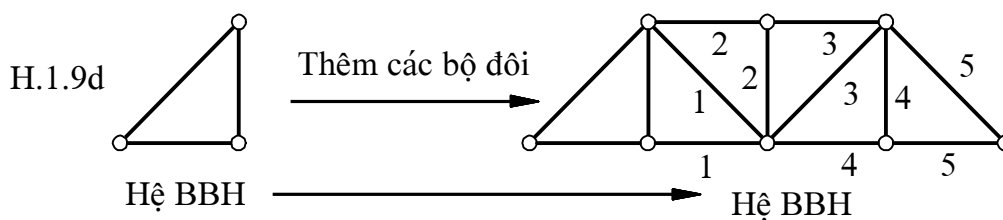
H.1.9b

* *Tính chất của bộ đôi:* khi thêm hay bớt lần lượt các bộ đôi thì tính chất động học của hệ không thay đổi. Tính chất này được sử dụng để phân tích cấu tạo hình học của hệ, và phân tích theo hai hướng sau:

+ Phương pháp thu hẹp miếng cứng: từ hệ ban đầu, lần lượt loại bỏ dần các bộ đôi để đưa về hệ đơn giản cuối cùng. Nếu hệ thu được là BBH hay BH thì hệ ban đầu cũng BBH hay BH. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9c)



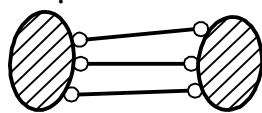
+ Phương pháp phát triển miếng cứng: từ miếng cứng ban đầu, thêm lần lượt các bộ đôi thì cuối cùng thu được miếng cứng. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9d)



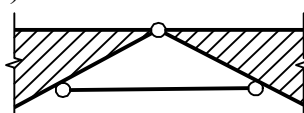
II. Cách nối hai miếng cứng:

1. Điều kiện cần: Xem một miếng cứng là cố định. Để nối miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần khử ba bậc tự do của nó, nghĩa là cần sử dụng tổ hợp các liên kết:

- + Ba liên kết thanh (H.1.10a).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp (H.1.10b).
- + Một liên kết hàn (H.1.10c).



(A) H.1.10a (B)



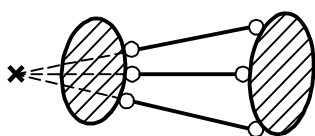
(A) H.1.10b (B)



(A) H.1.10c (B)

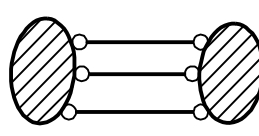
2. Điều kiện đủ:

a. Nếu sử dụng ba liên kết thanh: yêu cầu ba thanh không được đồng quy hoặc song song (H.1.10d, H.1.10e & H.1.10f).



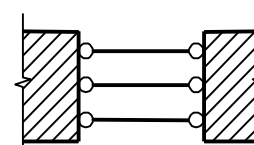
(A) (BHTT) (B)

H.1.10d



(A) (BHTT) (B)

H.1.10e

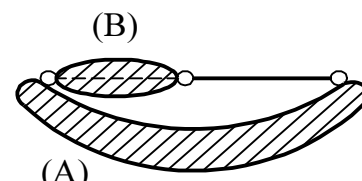


(A) (BH) (B)

H.1.10f

b. Nếu sử dụng một liên kết thanh cộng một liên kết khớp: yêu cầu khớp không được nằm trên đường trục thanh (H.1.10g).

c. Nếu sử dụng liên kết hàn: thì đó cũng là điều kiện đủ.



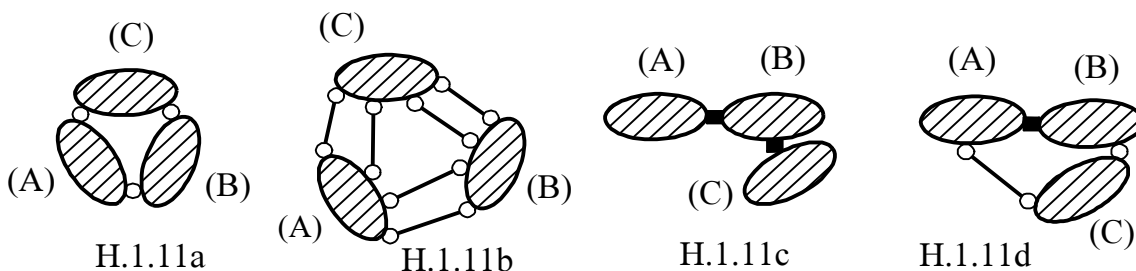
(A) Hệ BHTT

H.1.10g

III. Cách nối ba miếng cứng:

1. Điều kiện cần: xem một miếng cứng là cố định. Để nối hai miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần phải khử sáu bậc tự do, nghĩa là cần phải sử dụng tổ hợp các liên kết:

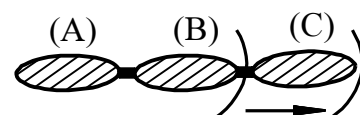
- + Ba liên kết khớp (H.1.11a).
- + Sáu liên kết thanh (H.1.11b).
- + Hai liên kết hàn (H.1.11c).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp cộng một liên kết hàn (H.1.11d).
- + v.v.v.



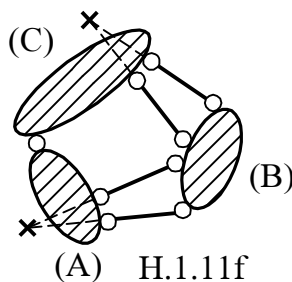
2. Điều kiện đủ:

+ Nếu các miếng cứng nối lần lượt với nhau: trở về lại bài toán nối hai miếng cứng. Ví dụ (H.1.11e).

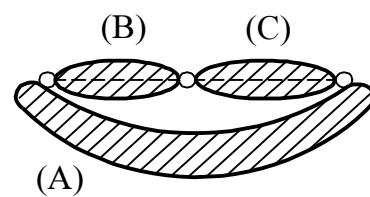
+ Nếu các miếng cứng nối đồng thời với nhau (nếu loại bỏ một miếng cứng bất kỳ, hệ còn lại bị biến hình): lúc này hệ cần sử dụng ba liên kết khớp (thực hoặc giả tạo) tương hỗ (H.1.11f). Và yêu cầu các liên kết khớp không cùng nằm trên một đường thẳng (H.1.11g).



H.1.11e



H.1.11f



Hệ BHTT
H.1.11g

IV. Cách nối nhiều miếng cứng:

1. Điều kiện cần:

a. Trường hợp hệ bất kỳ không nối đất:

Xét một hệ không nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản.

Xem một miếng cứng là cố định. Nối (D - 1) miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 3.(D-1) bậc tự do. Đó là yêu cầu.

Về khả năng: T, K, H khử được T + 2.K + 3.H bậc tự do.

Như vậy, điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H - 3.(D - 1) \geq 0 \quad (1 - 2)$$

* Các trường hợp của n:

+ n = 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ tĩnh.

+ n > 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ siêu tĩnh.

+ n < 0 thì hệ là hệ BH.

b. Trường hợp hệ bất kỳ có nối đất:

Xét một hệ nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản. Liên kết giữa hệ và trái đất gồm C liên kết đã quy về liên kết loại một.

Xem trái đất là cố định. Nối D miếng cứng còn lại vào trái đất, nghĩa là phải khử 3.D bậc tự do. Đó là yêu cầu.

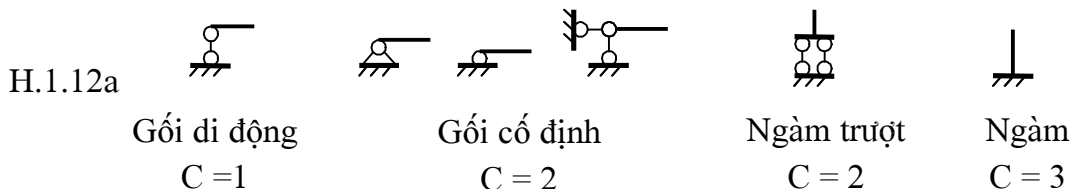
Về khả năng: T, K, H, C khử được T + 2.K + 3.H + C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D \geq 0 \quad (1 - 3)$$

* Các trường hợp của n: tương tự như trên

* Các loại liên kết nối đất (H.1.12a):



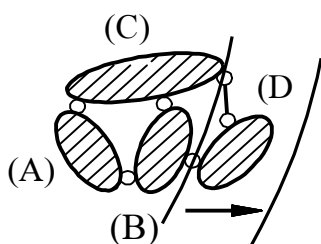
2. Điều kiện đủ:

Thường sử dụng tính chất của bộ đôi, cách nối hai hoặc ba miếng cứng nhằm thu hẹp hoặc phát triển hệ đến mức tối đa cho phép. Nếu kết quả thu được:

+ Một miếng cứng: hệ đã cho là BBH.

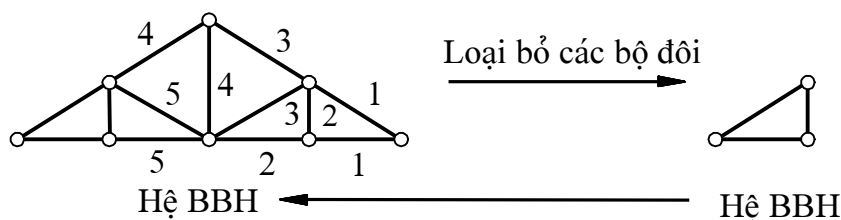
+ Hai hoặc ba miếng cứng: sử dụng điều kiện đủ của bài toán nối hai, ba miếng cứng đã biết để phân tích tiếp.

Ví dụ:



(Phát triển miếng cứng)

H.1.12b



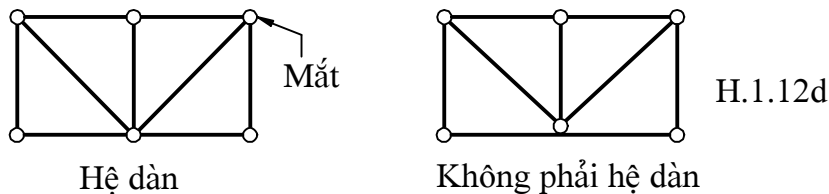
(Thu hẹp miếng cứng)

H.1.12c

* Ngoài ra còn sử dụng phương pháp tải trọng bằng không hoặc phương pháp động học để khảo sát. Xem giáo trình môn Cơ học kết cấu - Lê Thọ Trình.

V. Trường hợp đặc biệt: Hệ dàn.

Hệ dàn là hệ gồm những thanh thẳng liên kết với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.



* Đối với hệ dàn cũng cho phép áp dụng công thức (1 - 2) hoặc (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần. Tuy nhiên, trong hệ dàn, các liên kết khớp thường là khớp phức tạp cần quy đổi về khớp đơn giản. Cách làm như vậy thường dễ nhầm lẫn. Dưới đây sẽ trình bày một cách khác thuận lợi hơn mà không phải quan tâm đến độ phức tạp của các liên kết khớp.

1. Trường hợp hệ dàn không nối đất:

Xét hệ dàn không nối đất gồm D thanh dàn và M mắt.

Xem một thanh dàn là miếng cứng cố định, còn lại (D - 1) thanh. Và đi nối (M - 2) mắt còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 2.(M - 2) bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, (D - 1) thanh còn lại có khả năng khử được (D - 1) bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$n = (D - 1) - 2.(M - 2) = D - 2.M + 3 \geq 0 \quad (1 - 4)$$

2. Trường hợp hệ dàn nối đất:

Xét hệ dàn gồm D thanh dàn và M mắt. Ngoài ra hệ dàn còn nối đất bằng số liên kết tương đương C liên kết loại một. Nối M mắt vào miếng cứng cố định. Nghĩa là cần khử 2.M bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, D thanh dàn có khả năng khử được D bậc tự do. Ngoài ra các liên kết nối đất khử được C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$n = D - 2M + C \quad (1 - 5)$$

* *Chú ý:* - Các trường hợp của n và điều kiện đủ vẫn như trường hợp tổng quát.

CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13a*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 3). Có thể giải bài toán theo nhiều quan niệm khác nhau:

a. Quan niệm mỗi đoạn thanh thẳng là một miếng cứng:

Lúc này D = 5, T = 0, K = 1, H = 3, C = 4. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 0 + 2.1 + 3.3 + 4 - 3.5 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

b. Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng (quan niệm số miếng cứng tối thiểu):

Lúc này D = 2 (ab, bce), T = 0, K = 1, H = 0, C = 4. Thay vào (1 - 3)

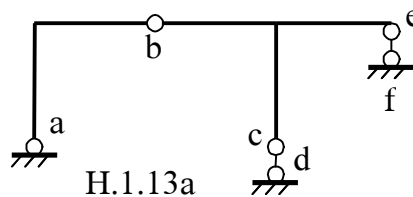
$$n = 0 + 2.1 + 3.0 + 4 - 3.2 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

c. Quan niệm trái đất là một miếng cứng:

Lúc này xem hệ là không nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 2).

Lúc này D = 3 (ab, bce và trái đất), T = 2, K = 2, H = 0. Thay vào (1 - 2)



H.1.13a

$$N = 2 + 2.2 + 3.0 - 3.(3 - 1) = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

* Nhận xét: - Có nhiều cách quan niệm miếng cứng khác nhau, và có ảnh hưởng đến số lượng miếng cứng và các liên kết.

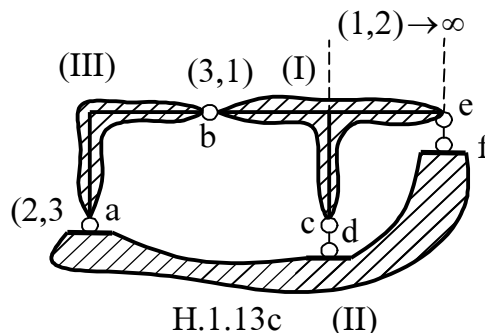
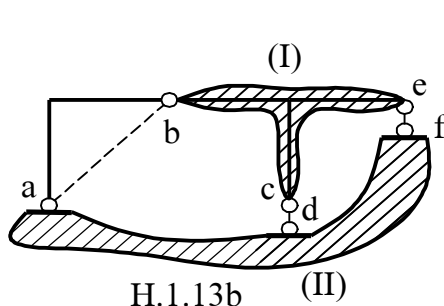
- Nên quan niệm số miếng cứng tối thiểu vì số lượng D, T, K, H sẽ ít nhất.

2. Điều kiện đủ: Có nhiều cách quan niệm.

a. Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng: trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13b). Ba thanh này không đồng quy hay song song nên hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

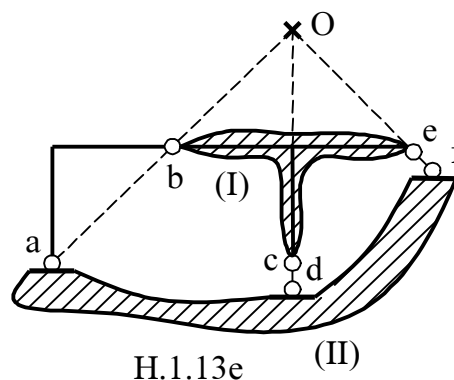
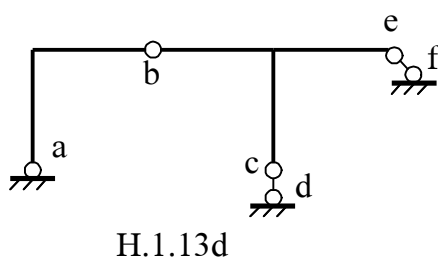
b. Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng:

Trái đất (II), bce (I) và ab (III). Ba miếng cứng này nối nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này không thẳng hàng nên hệ đã cho là hệ BBH (H.1.13c).



* Lưu ý: Khi khảo sát điều cần và đủ cho một hệ, chỉ cần sử dụng một quan niệm là đủ.

* Ví dụ 2: Nội dung giống ví dụ 1 nhưng thanh e-f nghiêng đi 45° (hình H.1.13d).



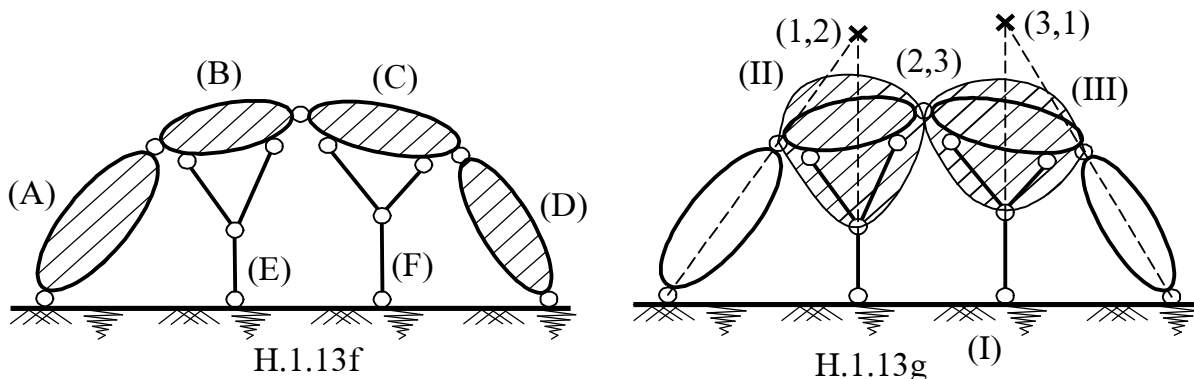
1. Điều kiện cần: không thay đổi so với ví dụ 1.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng:

Đó là trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13e). Ba thanh này đồng quy tại O nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* Ví dụ 3: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13f.

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần.



Quan niệm hệ gồm các miếng cứng: (A), (B), (C), (D), (E), (F).

Vậy $D = 6, T = 4, K = 3, C = 8, H = 0$. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 4 + 2.3 + 3.0 + 8 - 3.6 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng (I), (II) & (III) như trên hình (H.1.13g). Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2), (2,3) & (3,1) không thẳng hàng nên hệ đã cho là BBH (tĩnh định).

**Ví dụ 4: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13h).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (A), (B), (C).

Vậy $D = 3, T = 2, K = 1, H = 0, C = 5$.

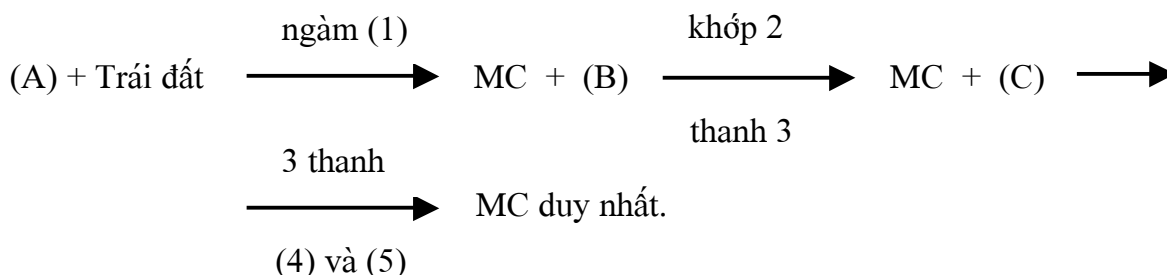
Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 2 + 2.1 + 3.0 + 5 - 3.3 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

** Ví dụ 5: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13i).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (af), (eb), (bg), (fh), (hc).

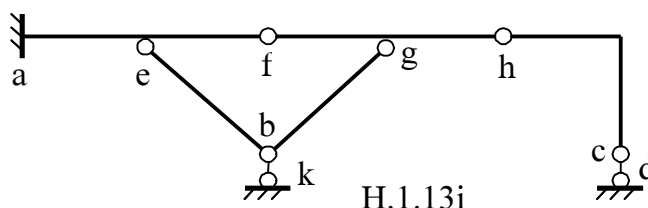
Vậy $D = 5, T = 0, K = 5, H = 0,$

$C = 5$. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D$$

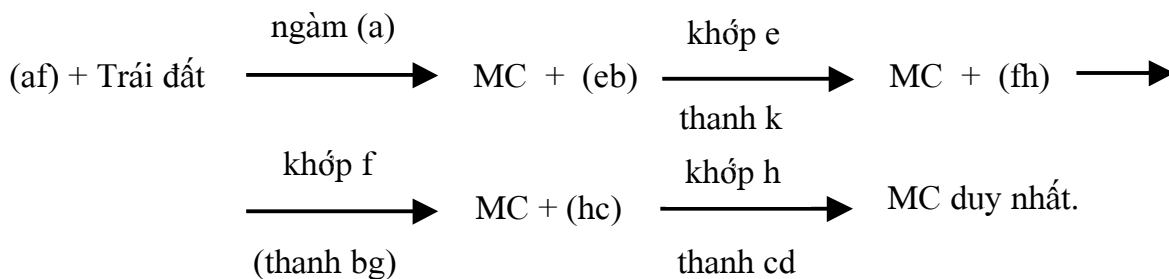
$$= 0 + 2.5 + 3.0 + 5 - 3.5 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.



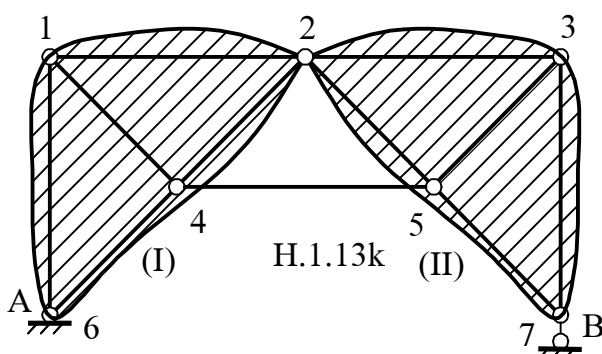
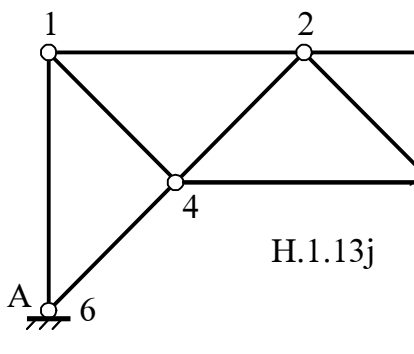
2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

* Ví dụ 6: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13j).



1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nổi đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

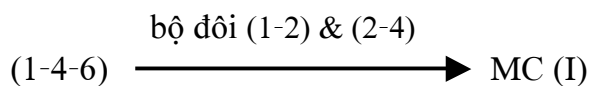
Vậy $D = 11, M = 7, C = 3$. Thay vào (1 - 5)

$$n = D - 2.M + C = 11 - 2.7 + 3 = 0$$

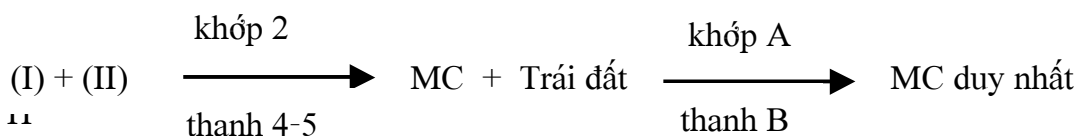
Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng (H.1.13k).



Tương tự, (2-3-7-5) là miếng cứng (II)



đã cho là hệ BHTT (hệ tĩnh định).

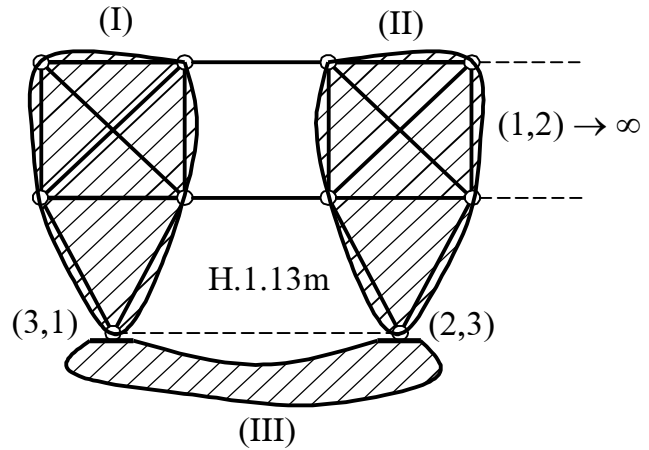
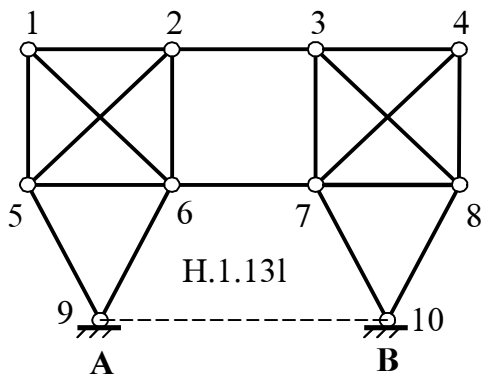
* Ví dụ 7: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13l)

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

Vậy $T = 18, M = 10, C = 4$. Thay vào (1-5)

$$n = D - 2.M + C = 18 - 2.10 + 4 = 2 > 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH và thừa liên kết.



2. Điều kiện đủ:

Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng.

+ Trái đất: (I).

+ (1, 2, 5, 6, 9): (II). Dễ thấy (II) thừa một liên kết thanh.

+ Tương tự (3, 4, 7, 8, 10) là miếng cứng (III) cũng thừa một liên kết thanh.

Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này thẳng hàng (H.1.13m).

Vậy hệ đã cho là BHTT.

CHƯƠNG MỞ ĐẦU**§ 1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU VÀ NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC****I. Đối tượng nghiên cứu và nhiệm vụ của môn học:**

1. Đối tượng nghiên cứu: là vật rắn biến dạng đàn hồi, tức là có thể thay đổi hình dạng dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài.

2. Phạm vi nghiên cứu:

Phạm vi nghiên cứu của môn Cơ học kết cấu là giống môn Sức bền vật liệu nhưng gồm nhiều cấu kiện liên kết lại với nhau. Do vậy, trong kết cấu hay dùng tên gọi là hệ kết cấu.

II. Nhiệm vụ của môn học:

Nhiệm vụ chủ yếu của môn Cơ học kết cấu là đi xác định nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình nhằm xây dựng công trình thỏa mãn các yêu cầu:

- *Điều kiện về độ bền:* Đảm bảo cho công trình không bị phá hoại dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài

- *Điều kiện về độ cứng:* Đảm bảo cho công trình không có chuyển vị và biến dạng vượt quá giới hạn cho phép nhằm đảm bảo sự làm việc bình thường của công trình.

- *Điều kiện về ổn định:* Đảm bảo cho công trình có khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của nó dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

Với yêu cầu về độ bền, cần đi xác định nội lực; với yêu cầu về độ cứng, cần đi xác định chuyển vị; với yêu cầu về ổn định, cần đi xác định lực tới hạn mà kết cấu có thể chịu được.

III. Các bài toán môn học giải quyết:

1. Bài toán kiểm tra: Ở bài toán này, ta đã biết trước hình dạng, kích thước cụ thể của các cấu kiện trong công trình và các nguyên nhân tác động.

Yêu cầu: kiểm tra công trình theo ba điều kiện trên (độ bền, độ cứng & ổn định) có đảm bảo hay không? Và ngoài ra còn kiểm tra công trình thiết kế có tiết kiệm nguyên vật liệu hay không?

2. Bài toán thiết kế: Ở bài toán này, ta mới chỉ biết nguyên nhân tác động bên ngoài. Yêu cầu: Xác định hình dạng, kích thước của các cấu kiện trong công trình một cách hợp lý mà vẫn đảm bảo ba điều kiện trên.

Để giải quyết bài toán này, thông thường, dựa vào kinh nghiệm hoặc dùng phương pháp thiết kế sơ bộ để giả thiết trước hình dạng, kích thước của các cấu kiện. Sau đó tiến hành giải bài toán kiểm tra như đã nói ở trên. Và trên cơ sở đó người thiết kế điều chỉnh lại giả thiết ban đầu của mình, tức là đi giải bài toán lặp.

IV. Vị trí của môn học:

Là môn học kỹ thuật cơ sở làm nền tảng cho các môn học chuyên ngành như: kết cấu bê tông, kết cấu thép & gỗ, kỹ thuật thi công...

Trang bị cho người làm công tác xây dựng những kiến thức hữu ích.

§2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

I. Sơ đồ công trình:

1. Khái niệm: Sơ đồ công trình là hình ảnh đơn giản hóa mà vẫn đảm bảo phản ánh được chính xác sự làm việc thực tế của công trình và phải dùng để tính toán được.

2. Các yếu tố ảnh hưởng đến việc chọn sơ đồ tính:

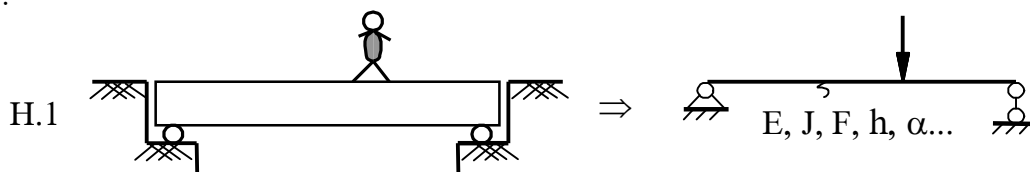
- Hình dạng, kích thước của công trình.
- Tỷ lệ độ cứng của các cấu kiện.
- Tầm quan trọng của công trình.
- Khả năng tính toán của người thiết kế.
- Tải trọng và tính chất tác dụng của nó.
- v.v.v

3. Các bước lựa chọn sơ đồ tính:

a. Bước 1: Đưa công trình thực về sơ đồ công trình:

- Thay các thanh bằng đường trục thanh.
- Thay các bản và vỏ bằng các mặt trung gian.
- Thay tiết diện, vật liệu bằng các đại lượng đặc trưng: diện tích (F), mômen quán tính (J), môđun đàn hồi (E), hệ số giãn nở vì nhiệt (α) ...
- Thay thiết bị tựa bằng các liên kết lý tưởng.
- Đưa tải trọng tác dụng lên mặt cấu kiện về trục cấu kiện.

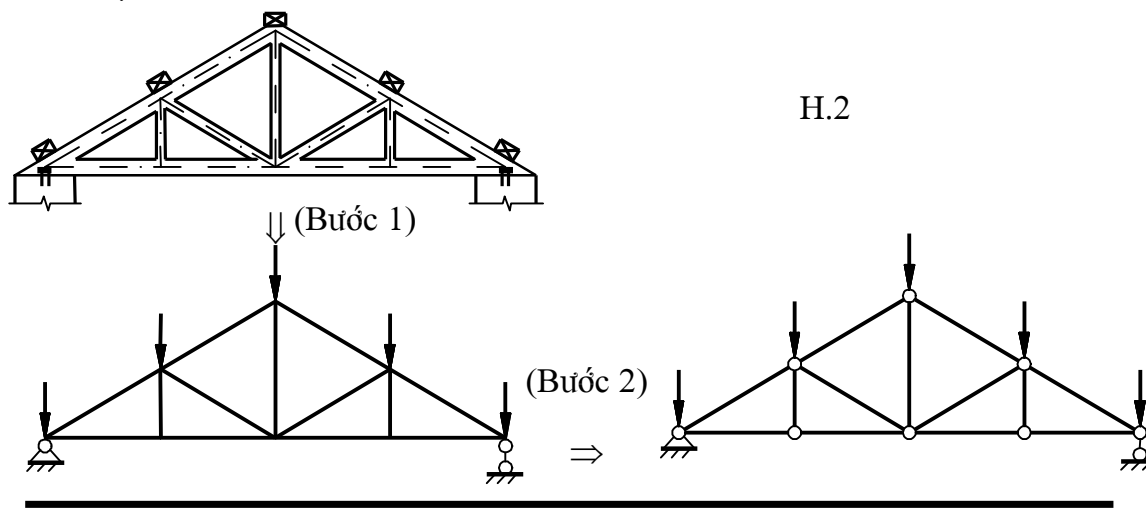
Ví dụ:



b. Bước 2: Đưa sơ đồ công trình về sơ đồ tính:

Trong một số trường hợp, sơ đồ công trình đưa về chưa phù hợp với khả năng tính toán, ta loại bỏ những yếu tố thứ yếu để đơn giản bài toán và đưa về sơ đồ tính, tính được.

Ví dụ:

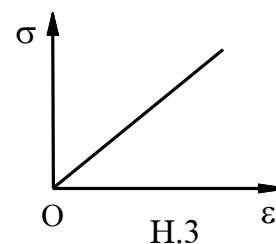


§ 3. CÁC GIẢ THIẾT ĐỂ TÍNH TOÁN VÀ NGUYÊN LÝ CỘNG TÁC DỤNG

I. Các giả thiết tính toán:

1. Điều kiện vật lý của bài toán:

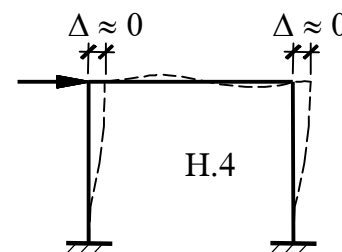
Giả thiết rằng vật liệu là đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hook, nghĩa là quan hệ giữa nội lực và biến dạng là quan hệ tuyến tính ($\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$).



Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi tuyến tính (tuyến tính vật lý). Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi phi tuyến (phi tuyến vật lý).

2. Điều kiện hình học của bài toán:

Chuyển vị và biến dạng được xem như là những đại lượng vô cùng bé. Do vậy khi tính toán, xem công trình là không có biến dạng.



Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là tuyến tính hình học. Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là phi tuyến hình học.

II. Nguyên lý cộng tác dụng:

1. Phát biểu: Một đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) do một số các nguyên nhân đồng thời tác dụng gây ra sẽ bằng tổng đại số hay tổng hình học của đại lượng S do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra.

Lấy tổng đại số khi đại lượng S là đại lượng vô hướng, lấy tổng hình học khi đại lượng S là đại lượng véc tơ.

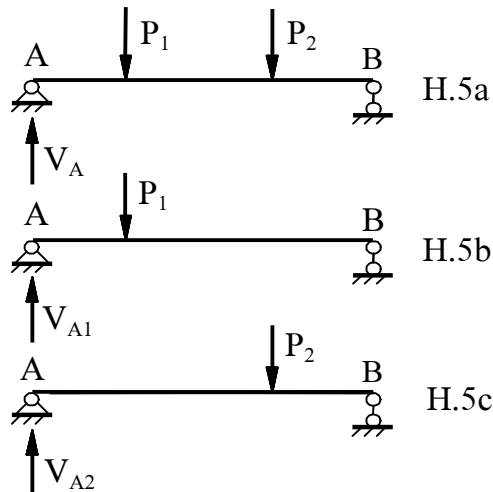
Ví dụ: Xét dầm chịu tác dụng của 2 lực P_1 & P_2 và đại lượng nghiên cứu S là phản lực V_A trên hình (H.5a)

Xét chính dầm đó nhưng chịu tác dụng riêng rẽ của 2 lực P_1, P_2 trên hình (H.5b) & (H.5c).

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A1} + \vec{V}_{A2}.$$

Và nếu xét toàn diện, thì hệ (H.5a) bằng tổng của hai hệ (H.5b) & (H.5c).



2. Biểu thức giải tích của nguyên lý cộng tác dụng:

$$S(P_1, P_2, \dots, P_n) = S(P_1) + S(P_2) + \dots + S(P_n)$$

- $S(P_1, P_2, \dots, P_n)$: là đại lượng S do các nguyên nhân P_1, P_2, \dots, P_n đồng thời tác dụng lên hệ gây ra.

- $S(P_k)$: là đại lượng S do riêng P_k tác dụng lên hệ gây ra.

Gọi \bar{S}_k là đại lượng S do riêng $P_k = 1$ gây ra. Tức là $S(P_k) = \bar{S}_k \cdot P_k$

$$\text{Vậy } S(P_1, P_2, \dots, P_n) = \bar{S}_1 \cdot P_1 + \bar{S}_2 \cdot P_2 + \dots + \bar{S}_n \cdot P_n$$

Chú ý: Nguyên lý cộng tác dụng chỉ áp dụng cho hệ tuyến tính vật lý cũng như tuyến tính hình học.

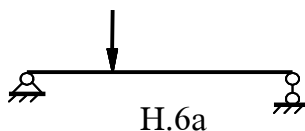
§ 4. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

I. Phân loại theo sơ đồ tính:

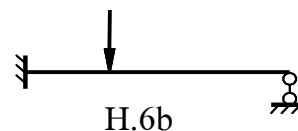
1. Hệ phẳng: khi tất cả các cấu kiện cùng thuộc một mặt phẳng và tải trọng tác dụng cũng nằm trong mặt phẳng đó.

Các loại hệ phẳng:

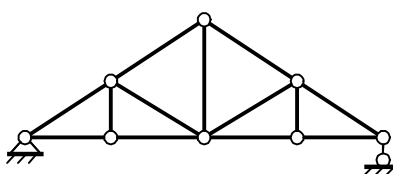
- Dầm (H.6)
- Dàn (H.7)
- Vòm (H.8)



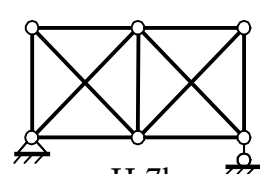
H.6a



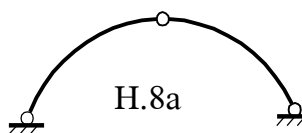
H.6b



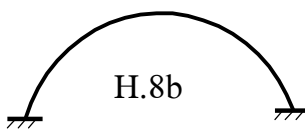
H.7a



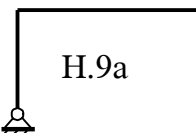
H.7b



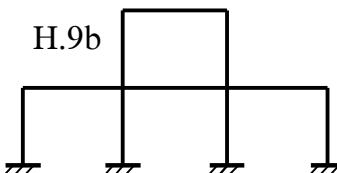
H.8a



H.8b

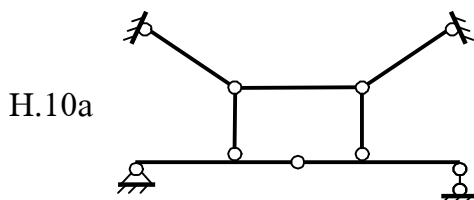


H.9a

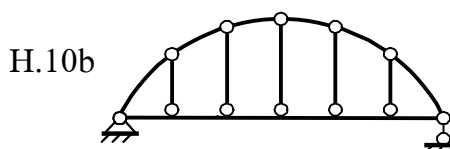


H.9b

- Khung (H.9)
- Hệ liên hợp (H.10)



H.10a

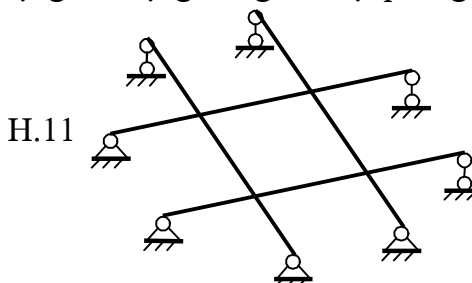


H.10b

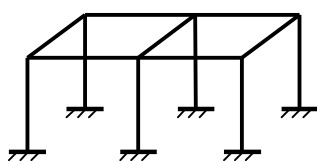
2. Hệ không gian: khi các cấu kiện không cùng nằm trong một mặt phẳng, hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng nhưng tải trọng tác dụng ra ngoài mặt phẳng đó.

Các loại hệ không gian:

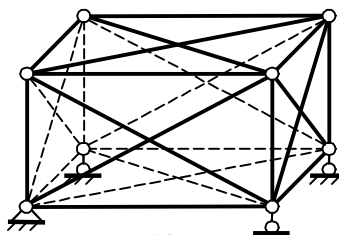
- Hệ dầm trục giao (H.11)
- Khung không gian (H.12)
- Dàn không gian (H.13)
- Bản (H.14)
- Vỏ (H.15)



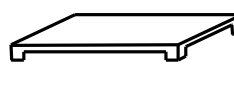
H.11



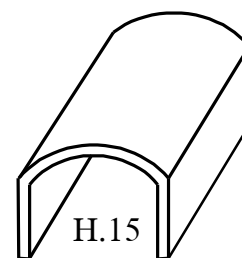
H.12



H.13



H.14



H.15

II. Phân loại theo phương pháp tính:

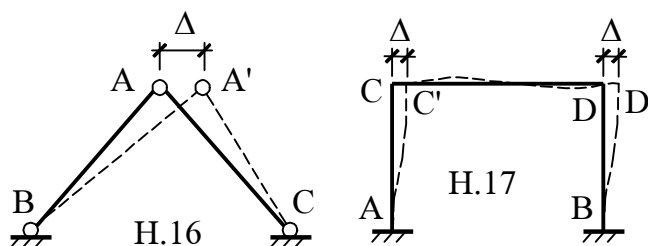
1. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện động học khi xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ, người ta chia ra hai loại hệ:

a. Hệ tĩnh định: là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học có thể xác định được toàn bộ nội lực và phản lực trong hệ. Ví dụ các hệ trên hình a từ (H.6) đến (H.10).

b. Hệ siêu tĩnh: là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học thì chưa đủ để xác định toàn bộ các nội lực và phản lực mà còn phải sử dụng thêm điều kiện động học và điều kiện vật lý. Ví dụ các hệ trên hình b từ (H.6) đến (H.10).

2. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện cân tĩnh học khi xác định biến dạng trong hệ khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức, người ta chia ra hai loại hệ:

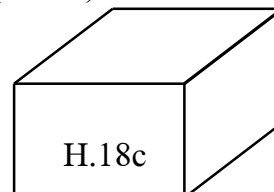
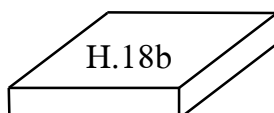
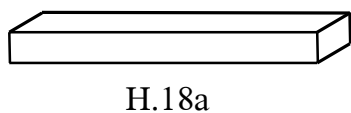
a. Hệ xác định động: là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, có thể xác định biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học (hình học). Ví dụ hệ cho trên hình (H.16).



b. Hệ siêu động: là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ bằng các điều kiện động học thì chưa thể xác định được biến dạng của hệ mà cần phải sử dụng thêm điều kiện tĩnh học. Ví dụ hệ cho trên hình (H.17).

III. Phân loại theo kích thước tương đối của các cấu kiện:

- Thanh: nếu kích thước một phương khá lớn hơn hai phương còn lại (H.18a).
- Bản: nếu kích thước của hai phương khá lớn hơn phương còn lại (H.18b).
- Khối: nếu kích thước của ba phương gần bằng nhau (H.18c)



IV. Phân loại theo khả năng thay đổi hình dạng hình học:

- Hệ biến hình.
- Hệ biến hình tức thời.
- Hệ bất biến hình.

§ 5. CÁC NGUYÊN NHÂN GÂY RA NỘI LỰC, BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ

I. Tải trọng: gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong tất cả các loại hệ.

Phân loại tải trọng:

- Theo thời gian tác dụng: tải trọng lâu dài (như trọng lượng bản thân công trình...) còn được gọi là tĩnh tải và tải trọng tạm thời (như tải trọng do gió, do con người đi lại khi sử dụng..) còn được gọi là hoạt tải.

- Theo sự thay đổi vị trí tác dụng: tải trọng bất động và tải trọng di động.

- Theo tính chất tác dụng có gây ra lực quán tính hay không: tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.

Ngoài ra, còn phân loại tải trọng theo hình thức tác dụng của tải trọng: tải trọng tập trung, tải trọng phân bố...

II. Sự thay đổi nhiệt độ: chính là sự thay đổi nhiệt độ tác dụng lên công trình khi làm việc so với lúc chế tạo ra nó.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra biến dạng và chuyển vị, không gây ra nội lực, còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

III. Chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (lún) và do chế tạo lắp ráp không chính xác.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra chuyển vị, không gây ra biến dạng và nội lực; còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

CHƯƠNG 1

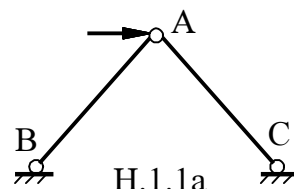
PHÂN TÍCH CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA HỆ PHẪNG

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM

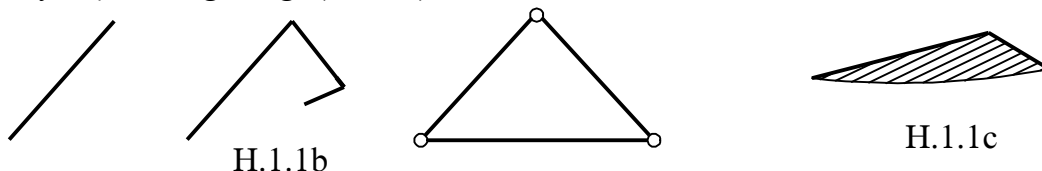
I. Hệ bất biến hình (BBH): là hệ không có sự thay đổi hình dạng hình học dưới tác dụng của tải trọng nếu xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Phân tích hệ hình vẽ (H.1.1a)

Nếu quan niệm AB, BC, trái đất là tuyệt đối cứng, tức là $l_{AB}, l_{BC}, l_{CA} = \text{const}$ thì tam giác ABC là duy nhất, nên hệ đã cho là hệ BBH.



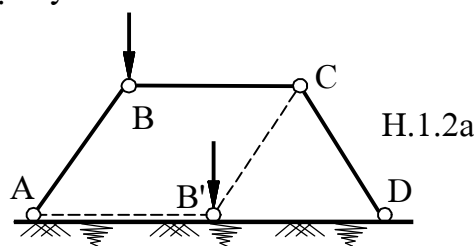
- Một hệ BBH một cách rõ rệt gọi chung là miếng cứng (tấm cứng)
- Các loại miếng cứng: (H.1.1b)
- Ký hiệu miếng cứng: (H.1.1c)



* *Chú ý:* Do hệ BBH có khả năng chịu lực tác dụng nên nó được sử dụng làm các kết cấu xây dựng và thực tế là chủ yếu sử dụng loại hệ này.

II. Hệ không bất biến hình:

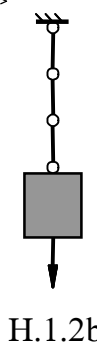
1. Hệ biến hình (BH): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng hữu hạn dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.



Ví dụ: Hệ ABCD cho trên hình (H.1.2a) có thể đổ thành hệ AB'CD, nên hệ đã cho là hệ BH.

* *Chú ý:* Do hệ BH không có khả năng chịu tải trọng tác dụng nên các kết cấu xây dựng không sử dụng loại hệ này.

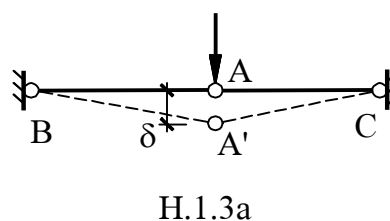
Hệ BH trên hình (H.1.2b) cho phép sử dụng vì theo phương đứng, tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái cân bằng.



2. Hệ biến hình tức thời (BHTT): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng vô cùng bé dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Hệ ABC có cấu tạo như trên hình (H.1.3a), khớp A có thể đi xuống một đoạn vô cùng bé δ , nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* *Chú ý:* Các kết cấu xây dựng không sử dụng hệ BHTT hay hệ gần BHTT (là hệ mà chỉ cần thay đổi một lượng vô cùng bé hình dạng hình học sẽ trở thành hệ BHTT, ví dụ hệ BA'C trên hình (H.1.3a) vì nội lực



trong hệ gần BHTT rất lớn.

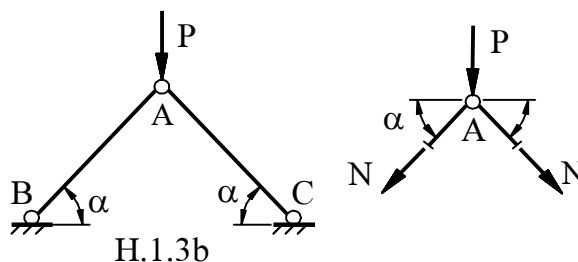
Thật vậy, xét hệ trên hình (H.1.3b).

Lực dọc trong hai thanh AB và AC là N.

$$N = -\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}$$

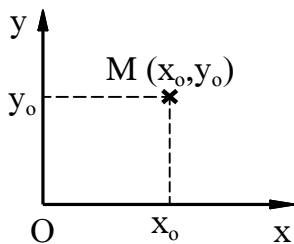
Khi $\alpha \rightarrow 0$, hệ BAC tiến đến hệ gần BHTT.

$$N = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}\right) \rightarrow \infty$$

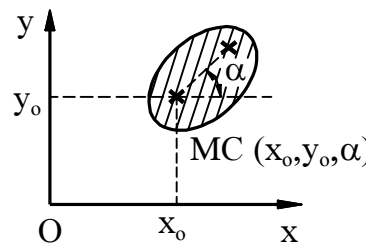


III. Bậc tự do: là số các thông số độc lập đủ để xác định vị trí của một hệ so với một hệ cố định khác.

Trong hệ phẳng, một chất điểm có bậc tự do bằng 2 (H.1.4a); một miếng cứng có bậc tự do bằng 3 (H.1.4b).



H.1.4a



H.1.4b

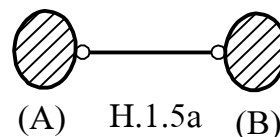
§ 2. CÁC LOẠI LIÊN KẾT VÀ TÍNH CHẤT CỦA LIÊN KẾT

I. Liên kết đơn giản: là liên kết nối hai miếng cứng với nhau.

Các loại liên kết đơn giản

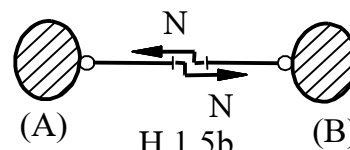
1. Liên kết thanh: (liên kết loại một)

a. Cấu tạo: Gồm một thanh thẳng không chịu tải trọng có hai khớp lý tưởng ở hai đầu. (H.1.5a)



b. Tính chất của liên kết:

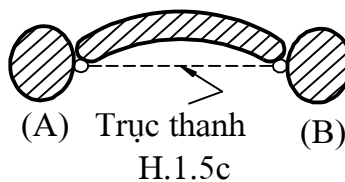
+ Về mặt động học: liên kết thanh không cho miếng cứng di chuyển theo phương dọc trục thanh, tức là khử được một bậc tự do



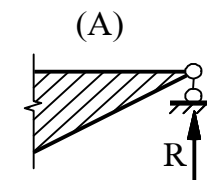
+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết chỉ có thể phát sinh một thành phần phản lực theo phương dọc trục thanh (H.1.5b).

* **Kết luận:** liên kết thanh khử được một bậc tự do và làm phát sinh một thành phần phản lực theo phương liên kết.

* **Trường hợp đặc biệt:** một miếng cứng có hai đầu khớp và không chịu tải trọng thì có thể như một liên kết thanh, có trục thanh là đường nối hai khớp (H.1.5c).



H.1.5c



H.1.5d

* **Chú ý:** liên kết thanh là mở rộng của khái niệm gối di động nối đất (H.1.5d).

2. Liên kết khớp: (liên kết loại 2)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp lý tưởng (H.1.6a).

b. Tính chất:

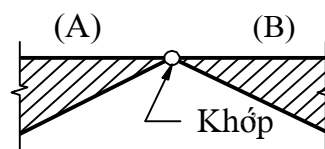
+ Về mặt động học: liên kết khớp không cho miếng cứng chuyển vị thẳng (nhưng có thể xoay), tức là khử được hai bậc tự do.

+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết có thể phát sinh một thành phần phản lực có phương chưa biết. Phản lực này thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương xác định (H.1.6b).

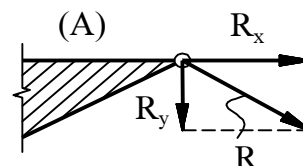
* *Kết luận:* liên kết khớp khử được hai bậc tự do và làm phát sinh hai thành phần phản lực.

* *Trường hợp đặc biệt:* hai liên kết thanh có thể xem là một liên kết khớp (khớp giả tạo), có vị trí tại giao điểm đường nối hai trục thanh (H.1.6c).

* *Chú ý:* liên kết khớp là mở rộng của khái niệm gối cố định nối đất (H.1.6d)

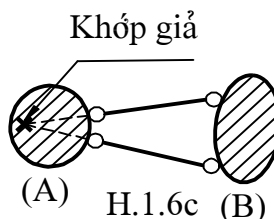


H.1.6a

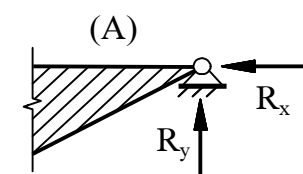


$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

H.1.6b



H.1.6c



H.1.6d

3. Liên kết hàn: (liên kết loại 3)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một mối hàn (H.1.7a).

b. Tính chất:

+ Về mặt động học: liên kết hàn không cho miếng cứng có chuyển vị, tức là khử được 3 bậc tự do.

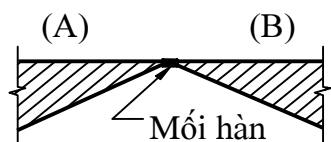
+ Về mặt tĩnh học: liên kết có thể làm phát sinh một thành phần phản lực có phương và vị trí chưa biết. Thường đưa phản lực này về tại vị trí liên kết và phân tích thành ba thành phần $(M, \vec{R}_x, \vec{R}_y)$ (H.1.7b)

* *Kết luận:* liên kết hàn khử được ba bậc tự do và làm phát sinh ba thành phần phản lực.

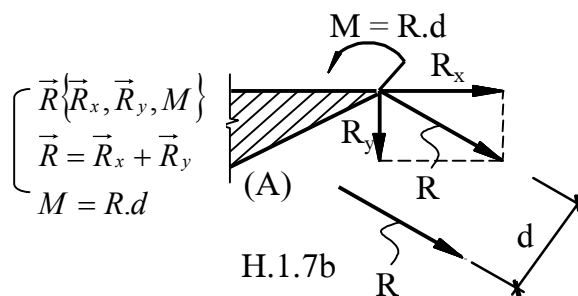
* *Chú ý:*

- Liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hoặc một liên kết thanh và một liên kết khớp được sắp xếp một cách hợp lý.

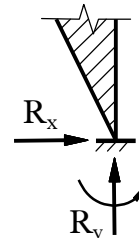
- Liên kết hàn là mở rộng của khái niệm liên kết ngàm nối đất (H.1.7c)



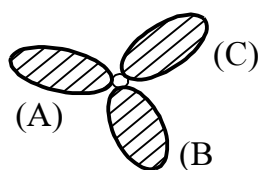
H.1.7a



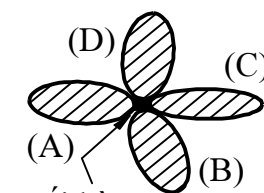
H.1.7b



II. Liên kết phức tạp: là liên kết nối nhiều miếng cứng với nhau, số miếng cứng lớn hơn hai.



H.1.8a



H.1.8b

Về mặt cấu tạo, chỉ có liên kết khớp phức tạp (H.1.8a) và hàn phức tạp (H.1.8b).

* **Độ phức tạp của liên kết:** là số liên kết đơn giản cùng loại, tương đương với liên kết đã cho. Ký hiệu p.

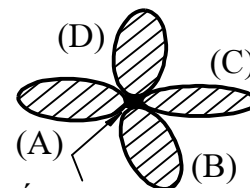
* **Công thức xác định độ phức tạp:**

$$p = D - 1$$

(1 - 1)

D: số miếng cứng quy tụ vào liên kết.

* *Ví dụ:* Xác định độ phức tạp của liên kết hàn trên hình (H.1.8c)



$$p = D - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Có nghĩa là liên kết hàn phức tạp đã cho tương đương với ba liên kết hàn đơn giản.

Mỗi hàn
H.1.8c

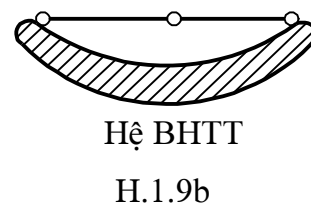
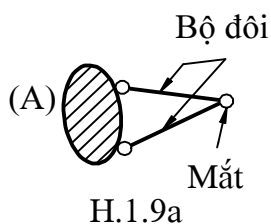
§.3 CÁCH NỐI CÁC MIÉNG CỨNG THÀNH HỆ BẤT BIẾN HÌNH

I. Nói một điểm (mắt) vào một miếng cứng:

a. **Điều kiện cần:** để nối một điểm vào miếng cứng cần phải khử hai bậc tự do của nó. Nghĩa là cần dùng hai liên kết thanh (H.1.9a).

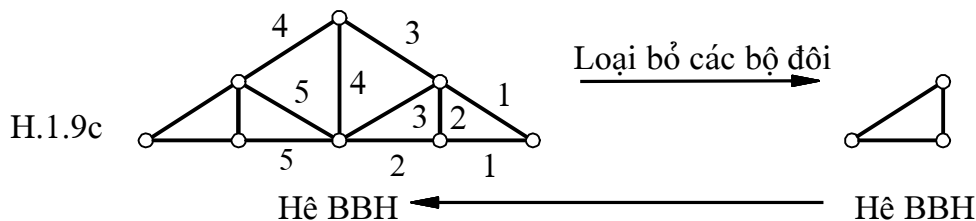
b. **Điều kiện đủ:** hai liên kết thanh không được thẳng hàng.

Hai liên kết thanh không thẳng hàng nối một điểm vào miếng cứng gọi là bộ đôi (H.1.9a).

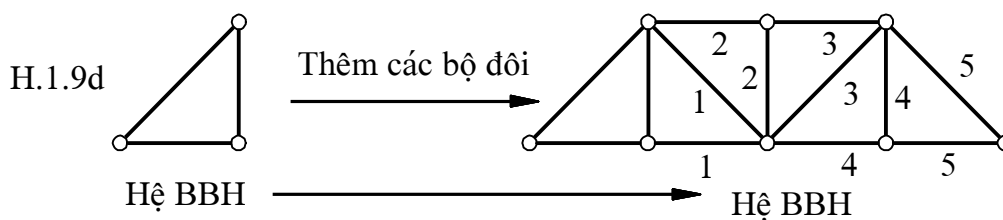


* *Tính chất của bộ đôi:* khi thêm hay bớt lần lượt các bộ đôi thì tính chất động học của hệ không thay đổi. Tính chất này được sử dụng để phân tích cấu tạo hình học của hệ, và phân tích theo hai hướng sau:

+ Phương pháp thu hẹp miếng cứng: từ hệ ban đầu, lần lượt loại bỏ dần các bộ đôi để đưa về hệ đơn giản cuối cùng. Nếu hệ thu được là BBH hay BH thì hệ ban đầu cũng BBH hay BH. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9c)



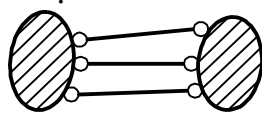
+ Phương pháp phát triển miếng cứng: từ miếng cứng ban đầu, thêm lần lượt các bộ đôi thì cuối cùng thu được miếng cứng. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9d)



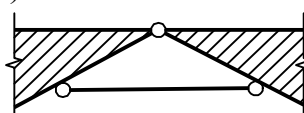
II. Cách nối hai miếng cứng:

1. Điều kiện cần: Xem một miếng cứng là cố định. Để nối miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần khử ba bậc tự do của nó, nghĩa là cần sử dụng tổ hợp các liên kết:

- + Ba liên kết thanh (H.1.10a).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp (H.1.10b).
- + Một liên kết hàn (H.1.10c).



(A) H.1.10a (B)



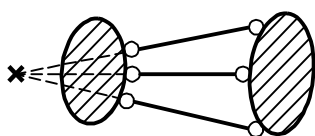
(A) H.1.10b (B)



(A) H.1.10c (B)

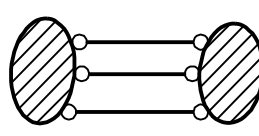
2. Điều kiện đủ:

a. Nếu sử dụng ba liên kết thanh: yêu cầu ba thanh không được đồng quy hoặc song song (H.1.10d, H.1.10e & H.1.10f).



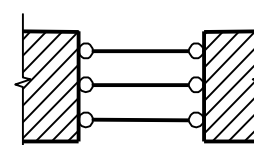
(A) (BHTT) (B)

H.1.10d



(A) (BHTT) (B)

H.1.10e

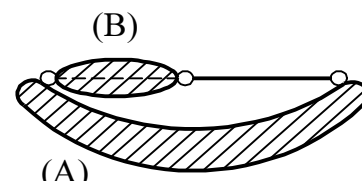


(A) (BH) (B)

H.1.10f

b. Nếu sử dụng một liên kết thanh cộng một liên kết khớp: yêu cầu khớp không được nằm trên đường trục thanh (H.1.10g).

c. Nếu sử dụng liên kết hàn: thì đó cũng là điều kiện đủ.



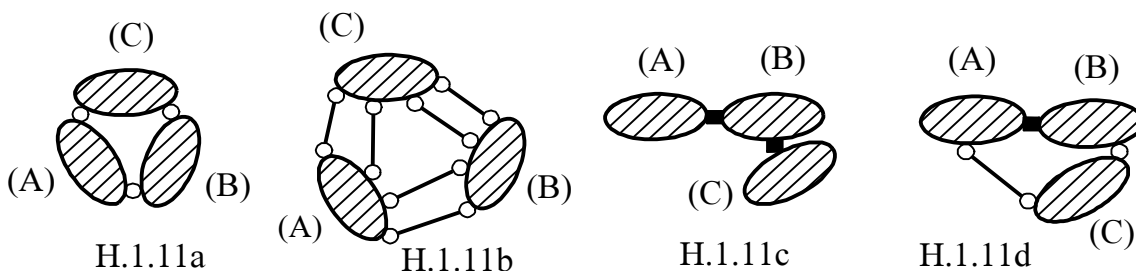
(A) Hệ BHTT

H.1.10g

III. Cách nối ba miếng cứng:

1. Điều kiện cần: xem một miếng cứng là cố định. Để nối hai miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần phải khử sáu bậc tự do, nghĩa là cần phải sử dụng tổ hợp các liên kết:

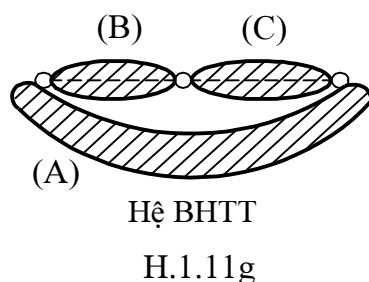
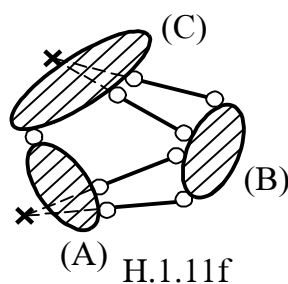
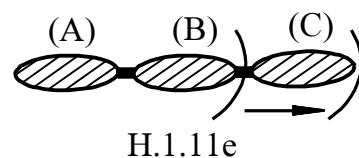
- + Ba liên kết khớp (H.1.11a).
- + Sáu liên kết thanh (H.1.11b).
- + Hai liên kết hàn (H.1.11c).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp cộng một liên kết hàn (H.1.11d).
- + v.v.v.



2. Điều kiện đủ:

+ Nếu các miếng cứng nối lần lượt với nhau: trở về lại bài toán nối hai miếng cứng. Ví dụ (H.1.11e).

+ Nếu các miếng cứng nối đồng thời với nhau (nếu loại bỏ một miếng cứng bất kỳ, hệ còn lại bị biến hình): lúc này hệ cần sử dụng ba liên kết khớp (thực hoặc giả tạo) tương hỗ (H.1.11f). Và yêu cầu các liên kết khớp không cùng nằm trên một đường thẳng (H.1.11g).



IV. Cách nối nhiều miếng cứng:

cứng:

1. Điều kiện cần:

a. Trường hợp hệ bất kỳ không nối đất:

Xét một hệ không nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản.

Xem một miếng cứng là cố định. Nối (D - 1) miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 3.(D-1) bậc tự do. Đó là yêu cầu.

Về khả năng: T, K, H khử được T + 2.K + 3.H bậc tự do.

Như vậy, điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H - 3.(D - 1) \geq 0 \quad (1 - 2)$$

* Các trường hợp của n:

+ n = 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ tĩnh.

+ n > 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ siêu tĩnh.

+ n < 0 thì hệ là hệ BH.

b. Trường hợp hệ bất kỳ có nối đất:

Xét một hệ nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản. Liên kết giữa hệ và trái đất gồm C liên kết đã quy về liên kết loại một.

Xem trái đất là cố định. Nối D miếng cứng còn lại vào trái đất, nghĩa là phải khử 3.D bậc tự do. Đó là yêu cầu.

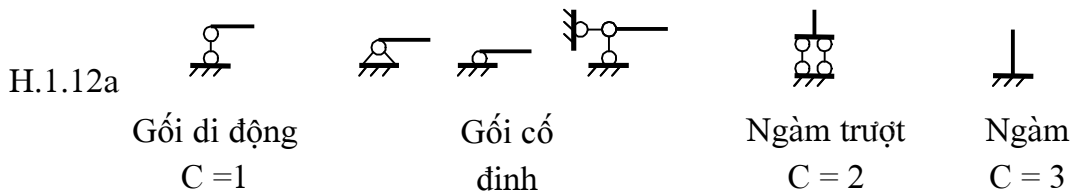
Về khả năng: T, K, H, C khử được T + 2.K + 3.H + C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D \geq 0 \quad (1 - 3)$$

* Các trường hợp của n: tương tự như trên

* Các loại liên kết nối đất (H.1.12a):



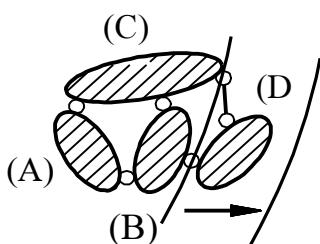
2. Điều kiện đủ:

Thường sử dụng tính chất của bộ đôi, cách nối hai hoặc ba miếng cứng nhằm thu hẹp hoặc phát triển hệ đến mức tối đa cho phép. Nếu kết quả thu được:

+ Một miếng cứng: hệ đã cho là BBH.

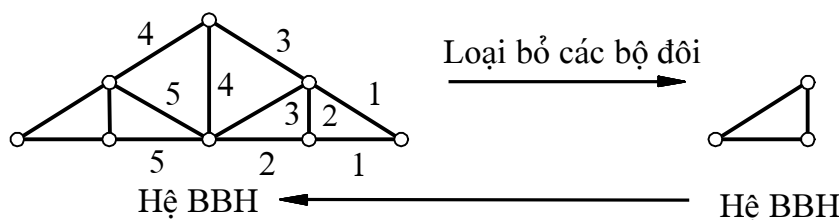
+ Hai hoặc ba miếng cứng: sử dụng điều kiện đủ của bài toán nối hai, ba miếng cứng đã biết để phân tích tiếp.

Ví dụ:



(Phát triển miếng cứng)

H.1.12b



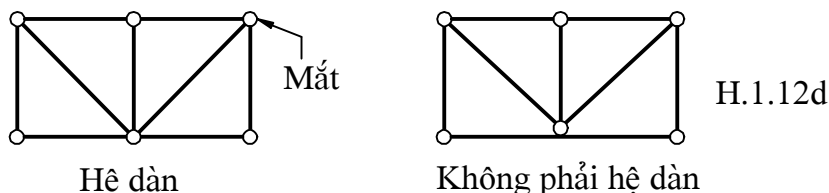
(Thu hẹp miếng cứng)

H.1.12c

* Ngoài ra còn sử dụng phương pháp tải trọng bằng không hoặc phương pháp động học để khảo sát. Xem giáo trình môn Cơ học kết cấu - Lê Thọ Trình.

V. Trường hợp đặc biệt: Hệ dàn.

Hệ dàn là hệ gồm những thanh thẳng liên kết với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.



* Đối với hệ dàn cũng cho phép áp dụng công thức (1 - 2) hoặc (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần. Tuy nhiên, trong hệ dàn, các liên kết khớp thường là khớp phức tạp cần quy đổi về khớp đơn giản. Cách làm như vậy thường dễ nhầm lẫn. Dưới đây sẽ trình bày một cách khác thuận lợi hơn mà không phải quan tâm đến độ phức tạp của các liên kết khớp.

1. Trường hợp hệ dàn không nối đất:

Xét hệ dàn không nối đất gồm D thanh dàn và M mắt.

Xem một thanh dàn là miếng cứng cố định, còn lại (D - 1) thanh. Và đi nối (M - 2) mắt còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 2.(M - 2) bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, (D - 1) thanh còn lại có khả năng khử được (D - 1) bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$n = (D - 1) - 2.(M - 2) = D - 2.M + 3 \geq 0 \quad (1 - 4)$$

2. Trường hợp hệ dàn nối đất:

Xét hệ dàn gồm D thanh dàn và M mắt. Ngoài ra hệ dàn còn nối đất bằng số liên kết tương đương C liên kết loại một. Nối M mắt vào miếng cứng cố định. Nghĩa là cần khử 2.M bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, D thanh dàn có khả năng khử được D bậc tự do. Ngoài ra các liên kết nối đất khử được C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$\boxed{} \quad (1 - 5)$$

* *Chú ý:* - Các trường hợp của n và điều kiện đủ vẫn như trường hợp tổng quát.

CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13a*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 3). Có thể giải bài toán theo nhiều quan niệm khác nhau:

a. Quan niệm mỗi đoạn thanh thẳng là một miếng cứng:

Lúc này D = 5, T = 0, K = 1, H = 3, C = 4. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 0 + 2.1 + 3.3 + 4 - 3.5 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

b. Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng (quan niệm số miếng cứng tối thiểu):

Lúc này D = 2 (ab, bce), T = 0, K = 1, H = 0, C = 4. Thay vào (1 - 3)

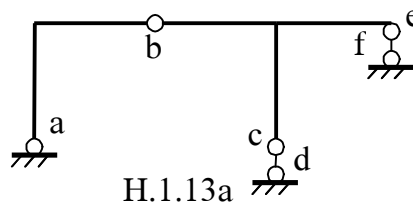
$$n = 0 + 2.1 + 3.0 + 4 - 3.2 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

c. Quan niệm trái đất là một miếng cứng:

Lúc này xem hệ là không nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 2).

Lúc này D = 3 (ab, bce và trái đất), T = 2, K = 2, H = 0. Thay vào (1 - 2)



H.1.13a

$$N = 2 + 2.2 + 3.0 - 3.(3 - 1) = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

* Nhận xét: - Có nhiều cách quan niệm miếng cứng khác nhau, và có ảnh hưởng đến số lượng miếng cứng và các liên kết.

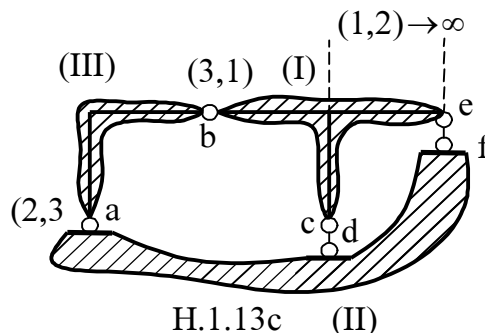
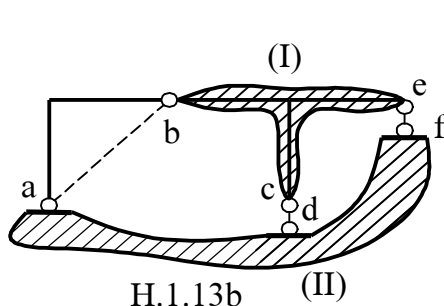
- Nên quan niệm số miếng cứng tối thiểu vì số lượng D, T, K, H sẽ ít nhất.

2. Điều kiện đủ: Có nhiều cách quan niệm.

a. Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng: trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13b). Ba thanh này không đồng quy hay song song nên hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

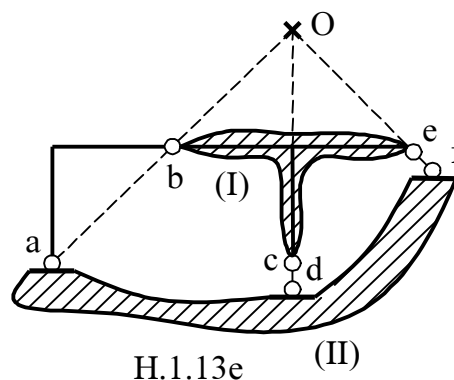
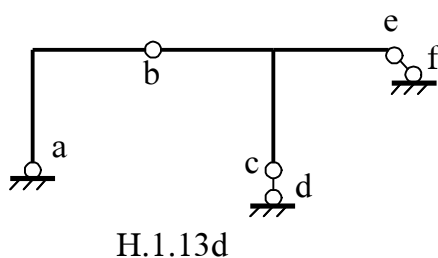
b. Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng:

Trái đất (II), bce (I) và ab (III). Ba miếng cứng này nối nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này không thẳng hàng nên hệ đã cho là hệ BBH (H.1.13c).



* Lưu ý: Khi khảo sát điều cần và đủ cho một hệ, chỉ cần sử dụng một quan niệm là đủ.

* Ví dụ 2: Nội dung giống ví dụ 1 nhưng thanh e-f nghiêng đi 45° (hình H.1.13d).



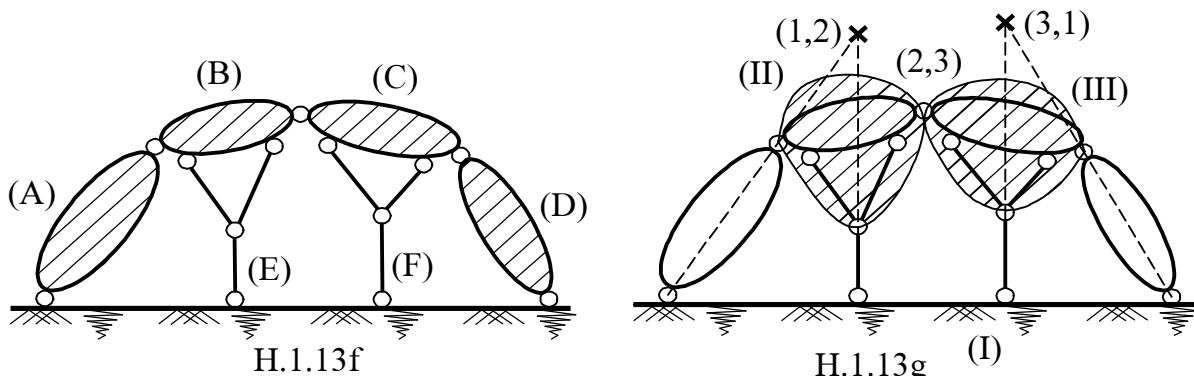
1. Điều kiện cần: không thay đổi so với ví dụ 1.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng:

Đó là trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13e). Ba thanh này đồng quy tại O nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* Ví dụ 3: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13f.

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần.



Quan niệm hệ gồm các miếng cứng: (A), (B), (C), (D), (E), (F).

Vậy $D = 6, T = 4, K = 3, C = 8, H = 0$. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 4 + 2.3 + 3.0 + 8 - 3.6 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng (I), (II) & (III) như trên hình (H.1.13g). Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2), (2,3) & (3,1) không thẳng hàng nên hệ đã cho là BBH (tĩnh định).

**Ví dụ 4: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13h).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (A), (B), (C).

Vậy $D = 3, T = 2, K = 1, H = 0, C = 5$.

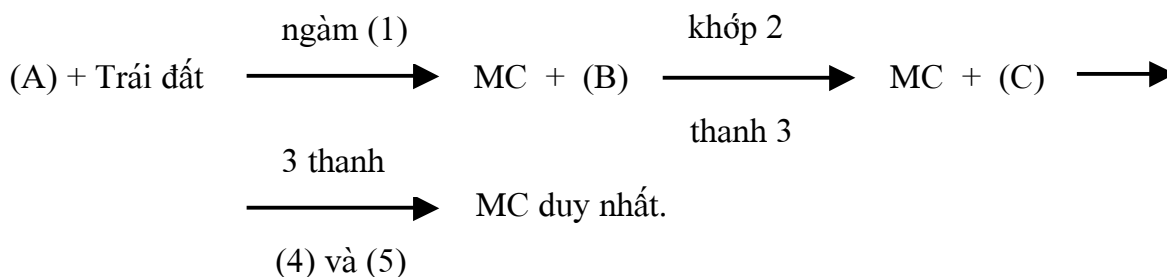
Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 2 + 2.1 + 3.0 + 5 - 3.3 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

** Ví dụ 5: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13i).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (af), (eb), (bg), (fh), (hc).

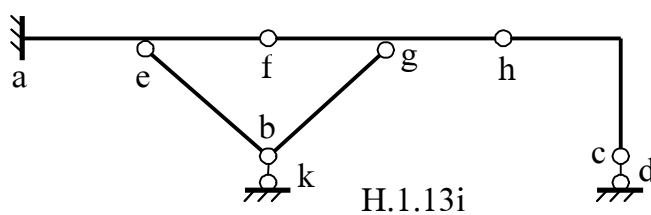
Vậy $D = 5, T = 0, K = 5, H = 0,$

$C = 5.$ Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D$$

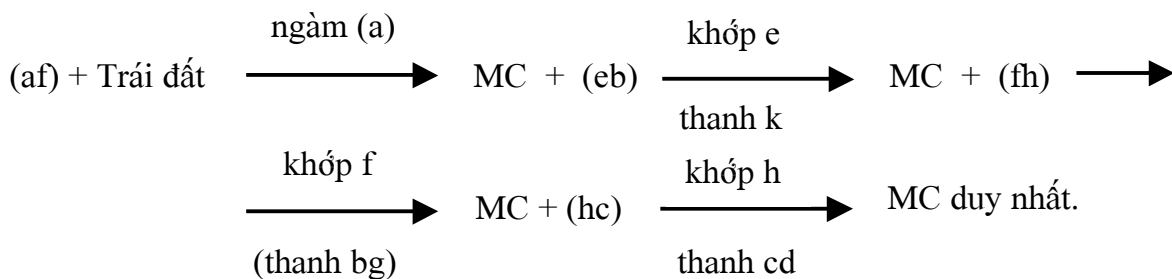
$$= 0 + 2.5 + 3.0 + 5 - 3.5 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.



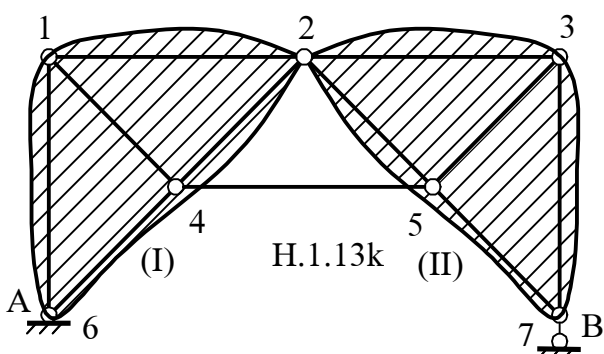
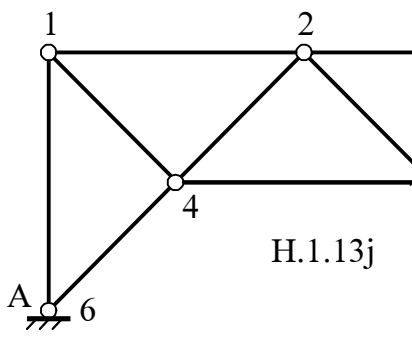
2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

* Ví dụ 6: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13j).



1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nổi đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

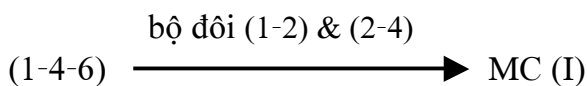
Vậy $D = 11, M = 7, C = 3.$ Thay vào (1 - 5)

$$n = D - 2.M + C = 11 - 2.7 + 3 = 0$$

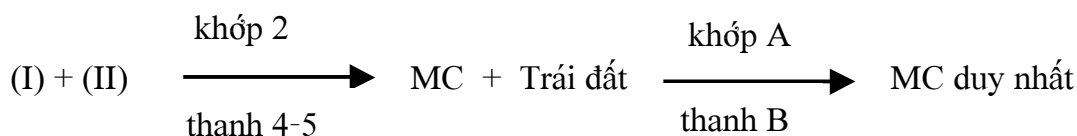
Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng (H.1.13k).



Tương tự, (2-3-7-5) là miếng cứng (II)



Hệ đã cho là hệ BHTT (hệ tĩnh định).

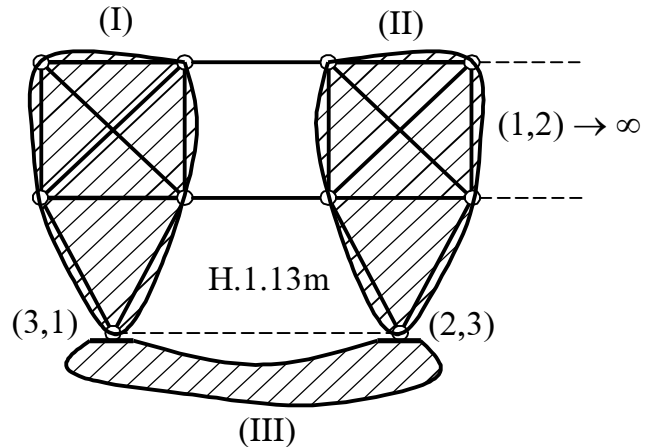
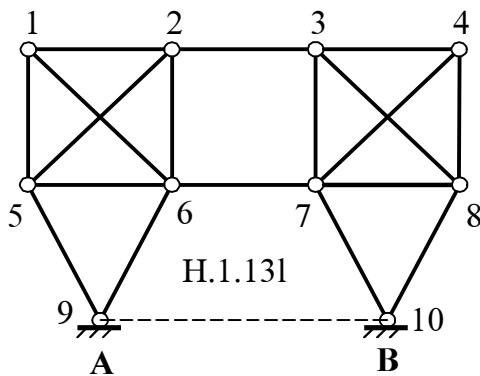
* Ví dụ 7: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13l)

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

Vậy $T = 18, M = 10, C = 4$. Thay vào (1-5)

$$n = D - 2.M + C = 18 - 2.10 + 4 = 2 > 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH và thừa liên kết.



2. Điều kiện đủ:

Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng.

+ Trái đất: (I).

+ (1, 2, 5, 6, 9): (II). Dễ thấy (II) thừa một liên kết thanh.

+ Tương tự (3, 4, 7, 8, 10) là miếng cứng (III) cũng thừa một liên kết thanh.

Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này thẳng hàng (H.1.13m).

Vậy hệ đã cho là BHTT.

CHƯƠNG 2

XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ PHẪNG TĨNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM.

I. Nội lực:

1. Khái niệm: Nội lực là độ biến thiên lực liên kết của các phần tử bên trong cấu kiện khi cấu kiện chịu tác dụng của ngoại lực và các nguyên nhân khác.

* *Chú ý:* Khái niệm về nội lực và phản lực là có thể đồng nhất với nhau nếu quan niệm tiết diện là một liên kết hàn hoặc liên kết tương đương nối hai miếng cứng ở hai bên tiết diện. Vì vậy, sau này ta có thể đồng nhất việc xác định nội lực với việc xác định phản lực trong các liên kết.

2. Các thành phần nội lực: Môn Cơ học kết cấu chủ yếu xác định 3 thành phần nội lực:

- Mômen uốn. Ký hiệu M .

- Lực cắt. Ký hiệu Q .

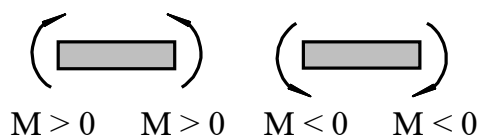
- Lực dọc. Ký hiệu N .

3. Quy ước dấu các thành phần nội lực:

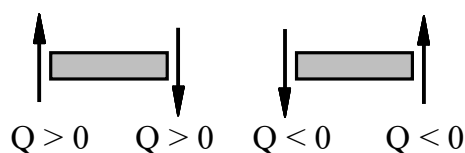
- Mômen uốn quy ước xem là dương khi nó làm căng thớ dưới và ngược lại (H.1a).

- Lực cắt quy ước xem là dương khi nó làm cho phần hệ xoay thuận chiều kim đồng hồ và ngược lại (H.1b).

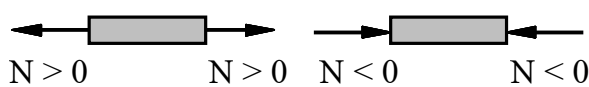
- Lực dọc quy ước xem là dương khi nó gây kéo và ngược lại (H.1c).



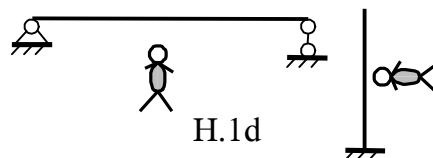
H.1a



H.1b



H.1c



H.1d

*

Chú ý:

- Cách quy ước dấu nội lực là giống môn Sức bền vật liệu.

- Quy ước chọn vị trí người đứng quan sát có hướng nhìn từ dưới lên đối với thanh ngang; từ phải sang trái đối với thanh đứng và thanh xiên khi xét dấu nội lực (H.1d).

4. Cách xác định nội lực (phản lực):

Nội lực (phản lực) được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Các bước tiến hành như sau:

* *Bước 1:* Thực hiện một mặt cắt qua tiết diện cần xác định nội lực (qua liên kết cần xác định phản lực). Mặt cắt phải chia hệ thành hai phần độc lập. Giữ lại một phần bất kỳ.

* *Bước 2:* Thay thế tác dụng của phần hệ bị loại bỏ bằng các thành phần nội lực (phản lực) tương ứng. Các thành phần này có chiều chưa biết, có thể giả thiết có chiều dương, và chúng cũng là các đại lượng cần tìm.

* *Bước 3:* Thiết lập các điều kiện cân bằng dưới dạng các biểu thức giải tích. Xem bảng các điều kiện cân bằng.

Dạng điều kiện cân bằng	Dạng hệ lực		
	Hệ lực đồng quy tại O	Hệ lực song song	Hệ lực bất kỳ
Dạng I	$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0.$ Yêu cầu: Trục X không được song song với trục Y		$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0; \Sigma M_A = 0.$ Yêu cầu: Trục X không được song song với trục Y
Dạng II	$\Sigma X = 0; \Sigma M_A = 0.$ Yêu cầu: Trục X không được vuông góc với OA.	$\Sigma X = 0; \Sigma M_A = 0.$ Yêu cầu: Trục X không được vuông góc với phương các lực	$\Sigma X = 0; \Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0;$ Yêu cầu: Trục X không được vuông góc với AB.
Dạng III	$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0.$ Yêu cầu: A, B, O không được thẳng hàng	$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0.$ Yêu cầu: A, B không được song song với phương các lực	$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0; \Sigma M_C = 0.$ Yêu cầu: A, B, C không được thẳng hàng

Bảng 1. Bảng các điều kiện cân bằng.

* *Bước 4:* Giải hệ phương trình các điều kiện cân bằng sẽ xác định được các thành phần nội lực (phản lực). Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều của nội lực (phản lực) đúng chiều đã giả định và ngược lại.

* *Ví dụ:* Xác định các thành phần phản lực và nội lực tại tiết diện k (H.2a).

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_C\}$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A + P = 0 \Rightarrow H_A = -P = -2(T) < 0.$$

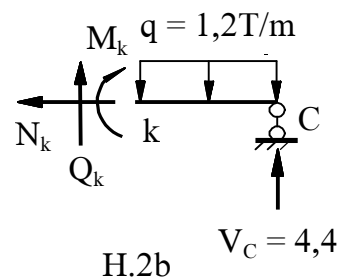
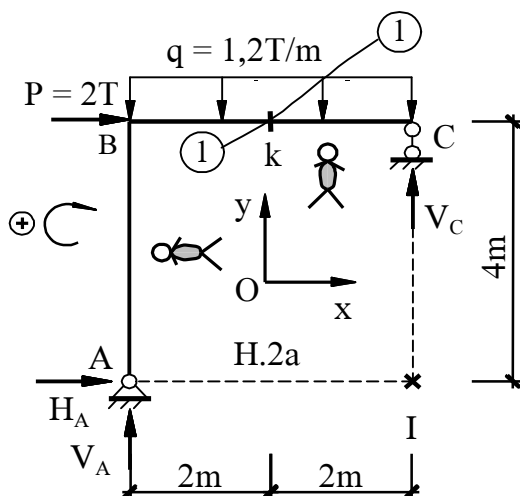
$$\Sigma M_I = 0 \Rightarrow 4.V_A + 4.P - 4.q.2 = 0.$$

$$\Rightarrow 4.V_A + 4.2 - 4.1,2.2 = 0 \Rightarrow V_A = 0,4(T) > 0.$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -4.V_C + 4.P + 4.q.2 = 0$$

$$\Rightarrow -4.V_C + 4.2 + 4.1,2.2 = 0 \Rightarrow V_C = 4,4(T) > 0$$

* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A + V_C - 4.q = 0 \Leftrightarrow 0,4 + 4,4 - 4.1,2 = 0$ (đúng)



2. Xác định nội lực tại tiết diện k: $\{M_k, Q_k, N_k\}$

Thực hiện mặt cắt (1-1), giữ lại và xét cân bằng phần bên phải (H.2b).

$$\Sigma M_k = 0 \Rightarrow M_k + 2.q.1 - 2.V_C = 0$$

$$\Rightarrow M_k = 2.V_C - 2.q.1 = 2.4,4 - 2.1,2.1 = 6,4(T.m) > 0.$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow Q_k - 2.q + V_C = 0$$

$$\Rightarrow Q_k = 2.q - V_C = 2.1,2 - 4,4 = -2(T) < 0.$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow N_k = 0(T)$$

II. Biểu đồ nội lực:

1. Khái niệm: Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của nội lực dọc theo chiều dài cấu kiện.

2. Các thành phần của biểu đồ nội lực:

- Đường chuẩn: là hệ trục dùng để dựng các tung độ.
- Tung độ: tung độ của biểu đồ nội lực tại một vị trí nào đó là biểu thị cho nội lực tại tiết diện tương ứng.
- Đường biểu đồ: là đường nối các tung độ.

3. Các quy ước khi vẽ biểu đồ nội lực:

- Đường chuẩn: thường chọn là đường trục thanh.
- Tung độ phải dựng vuông góc với đường chuẩn.
- Biểu đồ mômen: tung độ dương dựng về phía dưới, tung độ âm dựng lên trên đường chuẩn. Điều này có nghĩa là tung độ dựng về phía thó căng.
- Biểu đồ lực cắt: tung độ dương dựng lên trên đường chuẩn và ngược lại.
- Biểu đồ lực dọc: tung độ dương thường dựng lên trên đường chuẩn và ngược lại.

- Ghi ký hiệu \oplus , \ominus vào miềm dương (âm) của biểu đồ lực cắt và lực dọc.
- Ghi tên và đơn vị trên các biểu đồ đã vẽ được.

4. Cách vẽ biểu đồ nội lực:

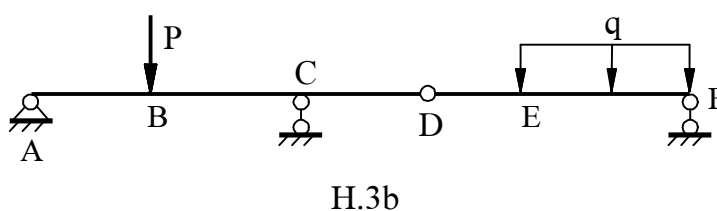
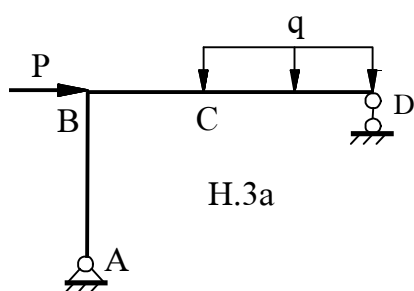
Theo môn Cơ học kết cấu, vẽ biểu đồ nội lực tiến hành theo các bước sau:

* *Bước 1:* Xác định các thành phần phản lực (nếu cần).

* *Bước 2:* Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng.

- Tiết diện đặc trưng: là những tiết diện chia hệ thành những đoạn thanh thẳng sao cho trên đoạn thanh đó hoặc là không chịu tải trọng hoặc là chỉ chịu tải trọng phân bố liên tục.

Như vậy, vị trí các tiết diện đặc trưng thường là: ở nút (nơi giao nhau các thanh), ở vị trí lực tập trung, ở hai đầu tải trọng phân bố, tại vị trí các gối tựa.... Ví dụ, với hệ cho trên hình (H.3a & H.3b), vị trí các tiết diện đặc trưng là nơi ghi ký hiệu bằng các chữ hoa A, B, C, E, F.



- Xác định nội lực: tiến hành theo nguyên tắc đã trình bày. Tuy nhiên, sau khi phân tích các điều kiện cân bằng, ta thấy có thể xác định như sau:

+ Mômen uốn tại tiết diện k (M_k): có giá trị được xác định bằng tổng mômen của tải trọng tác dụng lên phần hệ giữ lại lấy đối với trọng tâm tiết diện k.

+ Lực cắt tại tiết diện k (Q_k): có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các tải trọng tác dụng lên phần hệ được giữ lại lên phương vuông góc với tiếp tuyến trục thanh tại tiết diện k (phương của Q_k).

+ Lực dọc tại tiết diện k (N_k): có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các tải trọng tác dụng lên phần hệ được giữ lại lên phương tiếp tuyến với trục thanh tại tiết diện k (phương của N_k).

- Dấu của các đại lượng trong biểu thức xác định nội lực:

+ Tải trọng gây căng thớ dưới tại tiết diện k sẽ cho M_k mang dấu dương và ngược lại.

+ Tải trọng tác dụng lên phần bên trái có chiều hướng lên hay phần bên phải có chiều hướng xuống sẽ cho Q_k mang dấu dương và ngược lại.

+ Tải trọng gây kéo tại tiết diện k sẽ cho N_k mang dấu dương và ngược lại.

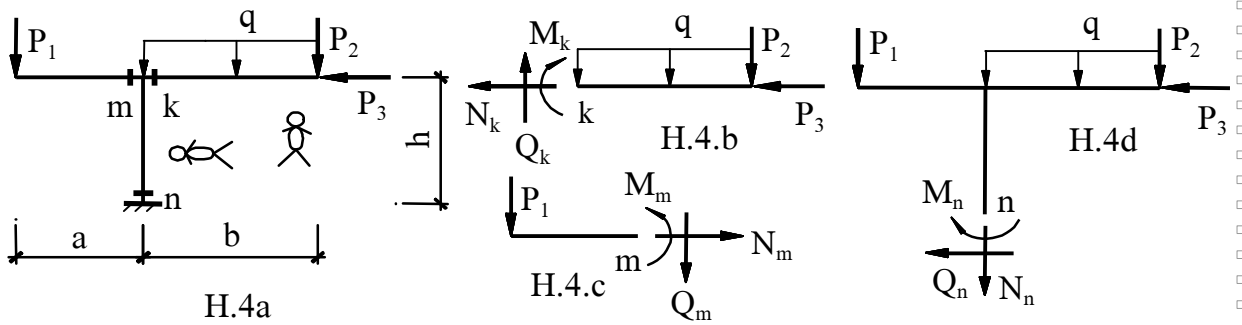
* *Bước 3:* Vẽ biểu đồ nội lực.

Sử dụng các liên hệ vi phân để vẽ. Chi tiết sẽ được trình bày sau bước 4.

* *Bước 4:* Kiểm tra lại kết quả.

Giống môn học Sức bền vật liệu.

* *Ví dụ:* Xác định nội lực tại các tiết diện k, m, n của hệ cho trên hình (H.4a).



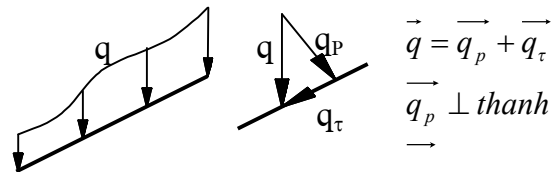
$$\begin{aligned}
 M_m &= -P_1 \cdot a & M_n &= P_1 \cdot a - P_2 \cdot b + P_3 \cdot h - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} \\
 Q_m &= -P_1 & Q_n &= -P_3 \\
 N &= 0 & N_n &= -P_1 - P_2 - a \cdot b
 \end{aligned}$$

Sử dụng các liên hệ vi phân để vẽ biểu đồ nội lực:

1. Mối liên hệ giữa nội lực và tải trọng:

$$q_p = -\frac{dQ}{ds}; q_\tau = \frac{dN}{ds}; Q = \frac{dM}{ds}$$

Mối liên hệ vi phân cho ta thấy tải trọng q kém Q & N một bậc về mặt toán học; kém M hai bậc về mặt toán học.

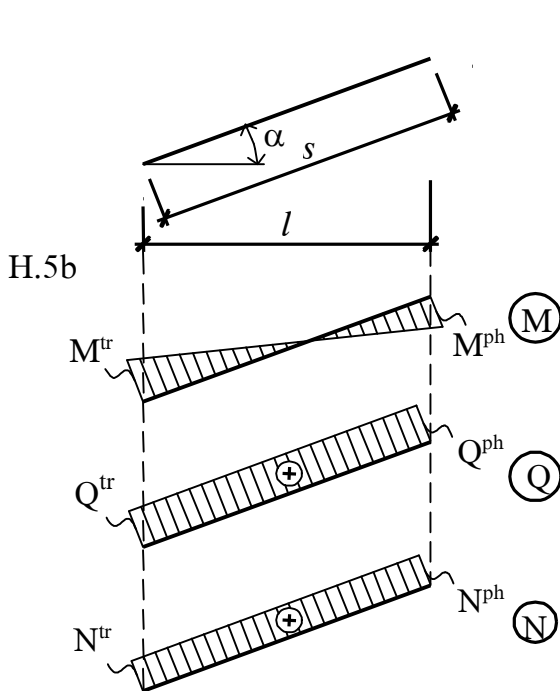


H.5a

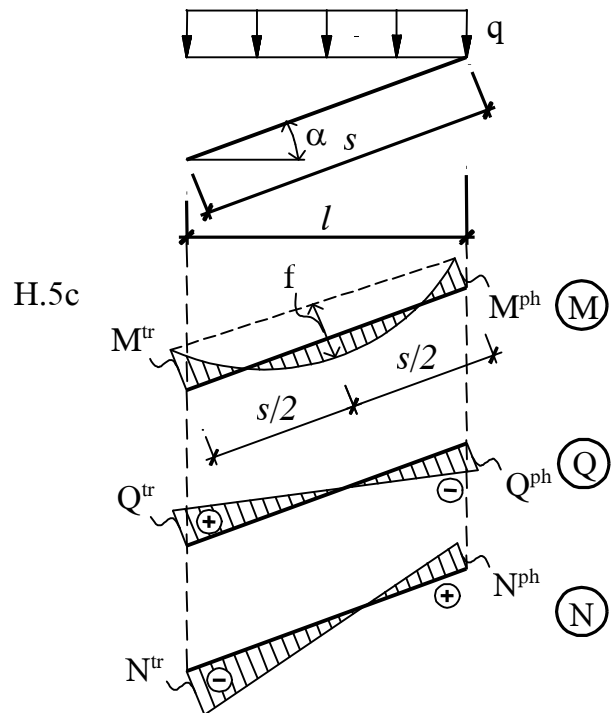
Mặc khác, với một hệ đã cho thì bậc của tải trọng trên mỗi đoạn thanh là hoàn toàn xác định, nghĩa là dạng đường biểu đồ (M), (Q), (N) cũng hoàn toàn xác định.

2. Trường hợp trên đoạn thanh không chịu tải trọng tác dụng: (H.5b)

Tức là $q = 0$. Như vậy, (Q) & (N) trên đoạn này sẽ song song với đường chuẩn;



H.5b



H.5c

(M) sẽ là đoạn đường thẳng được vẽ qua hai điểm.

Mối quan hệ nội lực ở 2 đầu đoạn thanh: $Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s}$; $N^{ph} = N^{tr}$

3. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải phân bố đều: (H.5c)

Tức là $q = \text{const}$. Như vậy, (Q) & (N) trên đoạn này sẽ là đoạn đường thẳng được vẽ qua hai điểm; (M) sẽ là đường parabol được vẽ qua ba điểm.

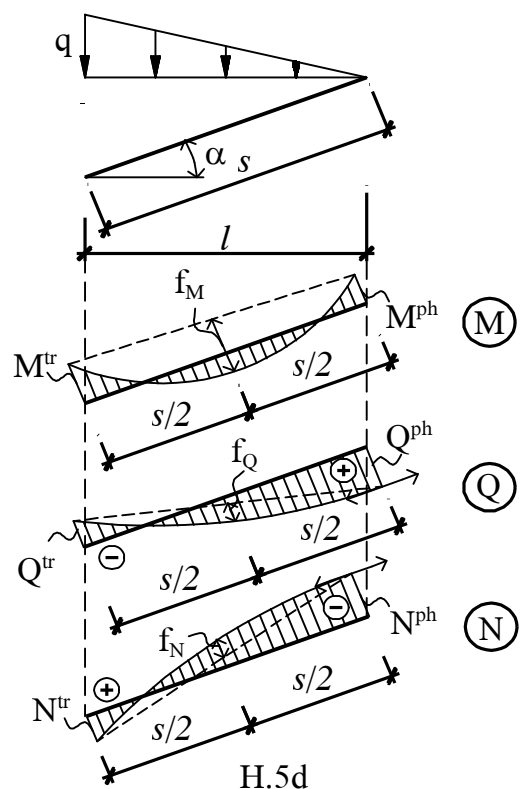
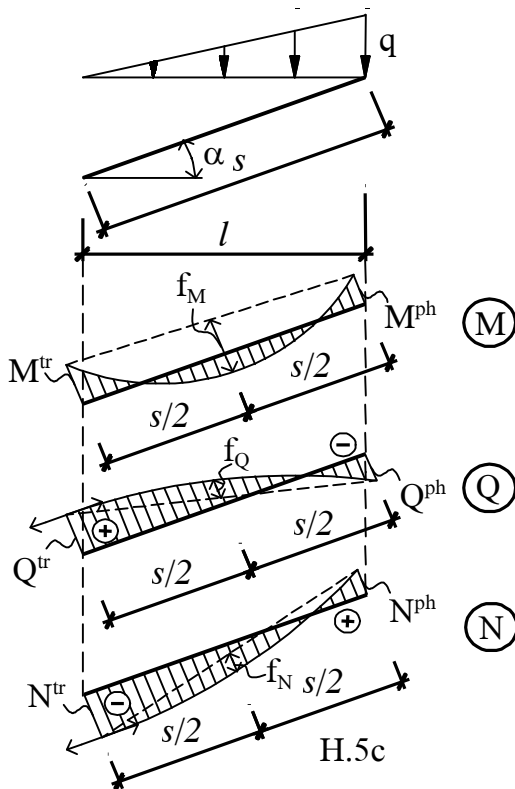
$f = \frac{q.l^2}{8}$ (gọi là tung độ treo); f treo vuông góc với đường chuẩn và theo chiều q.

Mối quan hệ giữa mômen và lực cắt tại hai đầu thanh:

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} + \frac{1}{2}.q.l.\cos\alpha; Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} - \frac{1}{2}.q.l.\cos\alpha$$

4. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải trọng phân bố hình tam giác: (H.5c & H.5d)

Tức là q có dạng bậc nhất. Như vậy, (Q) & (N) trên đoạn này sẽ là đoạn đường parabol được vẽ qua ba điểm; (M) sẽ là đường bậc ba, cho phép vẽ qua ba điểm.



- $f_M = \frac{q.l^2}{16}$; f_M treo vuông góc với đường chuẩn và treo theo chiều q.

- $f_Q = \frac{q.l}{8}.\cos\alpha$, f_Q treo vuông góc với đường chuẩn và có chiều sao cho tại vị trí

$q = 0$, tiếp tuyến với đường biểu đồ song song với đường chuẩn.

- $f_N = \frac{q.l}{8}.\sin\alpha$, f_N treo vuông góc với đường chuẩn và có chiều sao cho tại vị trí

$q = 0$, tiếp tuyến với đường biểu đồ song song với đường chuẩn.

* Mối quan hệ giữa mômen và lực cắt tại hai đầu thanh:

- Khi tải phân bố tam giác có đáy bên phải (H.5c):

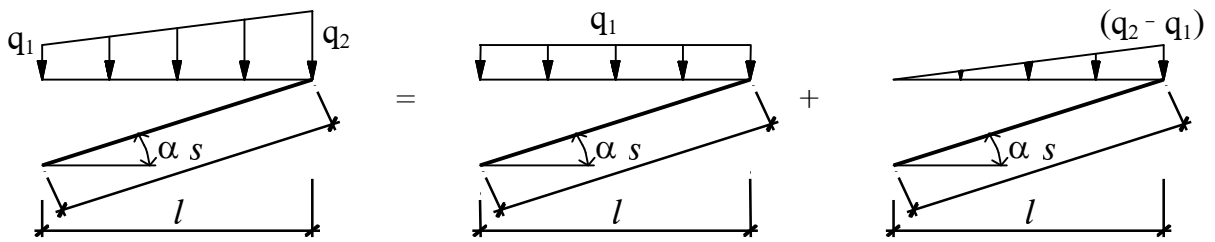
$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} + \frac{1}{6}q.l.\cos\alpha; Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} - \frac{1}{3}q.l.\cos\alpha;$$

- Khi tải phân bố tam giác có đáy bên trái (H.5d):

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} + \frac{1}{3}q.l.\cos\alpha; Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} - \frac{1}{6}q.l.\cos\alpha;$$

5. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải trong phân bố hình thang:

Dạng đường của các biểu đồ không thay đổi so với trường hợp tải phân bố hình tam giác. Có thể đưa về thành tổng của hai bài toán đã biết (H.5e).

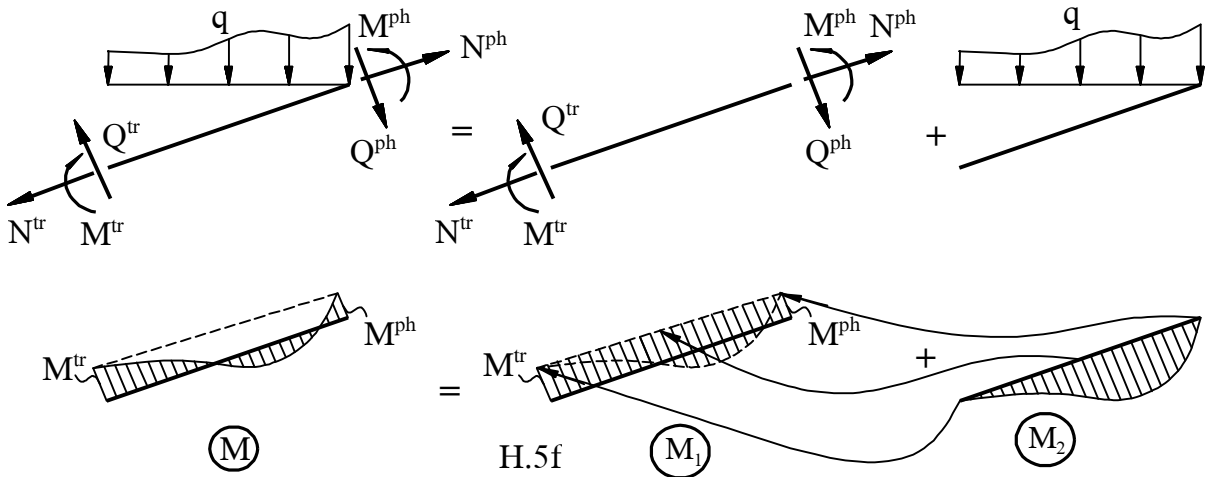


H.5e

6. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải trọng phân bố quy luật bất kỳ:

Dùng cách treo biểu đồ (H.5f).

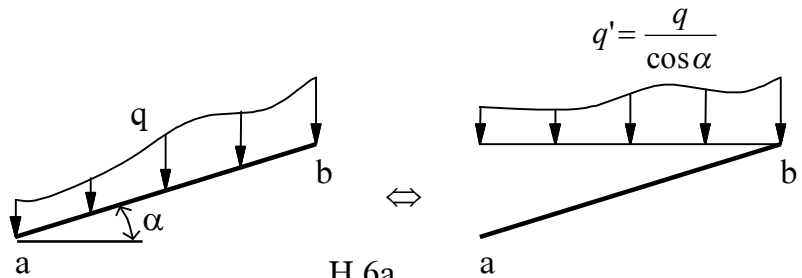
- Đối với (Q), (N), cách thực hiện tương tự.



H.5f

* Các chú ý:

- Trường hợp tải trọng phân bố theo chiều dài xiên của trục thanh, có thể đưa về theo phương ngang bằng cách chia tải trọng đó cho $\cos\alpha$ (H.6a).

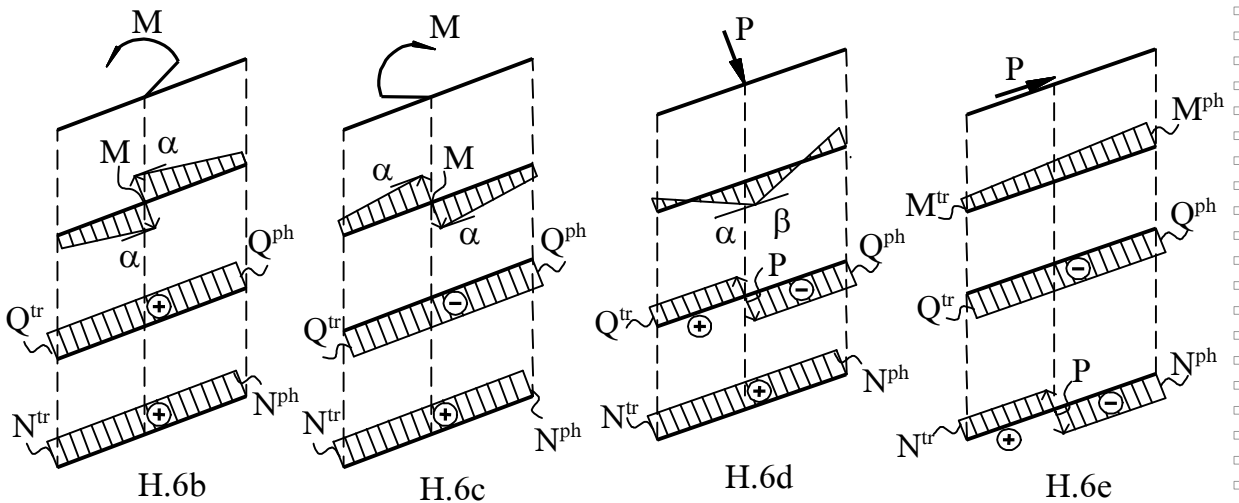


H.6a

- Tại vị trí chịu tải trọng tập trung, nội lực có sự thay đổi:

+ Mômen tập trung (H.6b & H.6c)

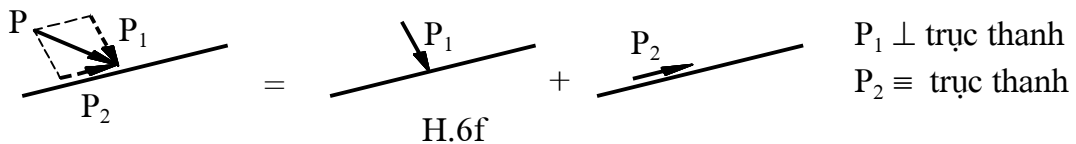
+ Lực tập trung có phương vuông góc với trục thanh (H.6d).



$$Q^{tr} = Q^{ph} = \operatorname{tg}\alpha; N^{tr} = N^{ph}$$

+ Lực tập trung có phương trùng trục thanh (H.6e).

+ Lực tập trung có phương bất kỳ: có thể đưa về tổng của hai bài toán (H.6f).



§ 2. DẦM, KHUNG ĐƠN GIẢN.

I. Dầm đơn giản:

1. Phân tích cấu tạo hệ:

a. **Định Nghĩa:** Dầm đơn giản là hệ gồm một thanh thẳng nối với trái đất bằng số liên kết tương đương với ba liên kết loại một để tạo thành hệ BBH.

b. Phân loại:

- Dầm đơn giản hai đầu khớp. (H.7a)
- Dầm đơn giản có đầu thừa. (H.7b)
- Dầm công xôn. (H.7c)



2. Xác định các thành phần phản lực:

Trong hệ dầm đơn giản, tồn tại ba thành phần phản lực. Cách xác định đã được trình bày trong phần xác định phản lực. Tuy nhiên, để tránh việc giải hệ phương trình toán học, nên thiết lập sao cho trong mỗi phương trình chỉ có một ẩn số. Cách thực hiện như sau:

- Nếu hai ẩn còn lại đồng quy tại một điểm I, phương trình cần thiết lập là tổng mômen toàn hệ đối với điểm I bằng không. ($\sum M_I = 0$)

- Nếu hai ẩn còn lại song song nhau, phương trình cần thiết lập là tổng hình chiếu toàn hệ lên phương vuông góc phương hai ẩn song song bằng không. ($\sum Z = 0$, Z có phương vuông góc với phương hai ẩn song song)

- Nếu hai ẩn còn lại là một lực và một mômen, phương trình cần thiết lập là tổng hình chiếu lên phương vuông góc của ẩn lực bằng không. ($\sum Z = 0$, Z có phương vuông góc với phương ẩn lực)

* Minh họa:

1. Xác định phản lực của hệ cho trên

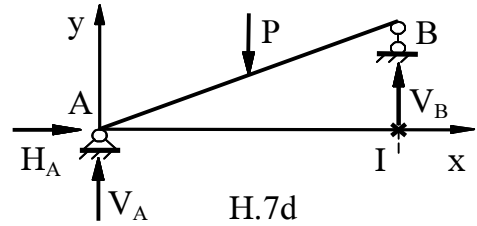
hình (H.7d):

Các thành phần phản lực gồm $\{V_A, H_A, V_B\}$

- $H_A: \sum X = 0 \Rightarrow f_1(H_A) = 0 \Rightarrow H_A.$

- $V_A: \sum M_I = 0 \Rightarrow f_2(V_A) = 0 \Rightarrow V_A.$

- $V_B: \sum M_A = 0 \Rightarrow f_3(V_B) = 0 \Rightarrow V_B.$



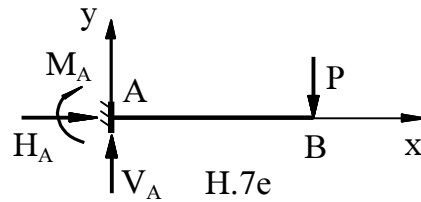
2. Xác định phản lực của hệ cho trên hình (H.7e):

Các thành phần phản lực gồm $\{V_A, H_A, M_A\}$

- $H_A: \sum X = 0 \Rightarrow f_4(H_A) = 0 \Rightarrow H_A.$

- $M_A: \sum M_A = 0 \Rightarrow f_5(M_A) = 0 \Rightarrow M_A.$

- $V_A: \sum Y = 0 \Rightarrow f_6(V_A) = 0 \Rightarrow V_A.$



3. Xác định và vẽ các biểu đồ nội lực:

- Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng: đã trình bày

- Dựng tung độ biểu đồ tại các tiết diện đặc trưng.

- Vẽ biểu đồ nội lực trên từng đoạn thanh theo các liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực.

4. Kiểm tra lại biểu đồ nội lực: đã trình bày.

CÁC VÍ DỤ VỀ DẦM ĐƠN GIẢN

* Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình (H.8a)

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_B\}$

- $\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$

- $\sum M_A = 0$

$\Rightarrow 8.V_B - 6.30 - 10.4.2 = 0$

$\Rightarrow V_B = 32,5 (> 0)$

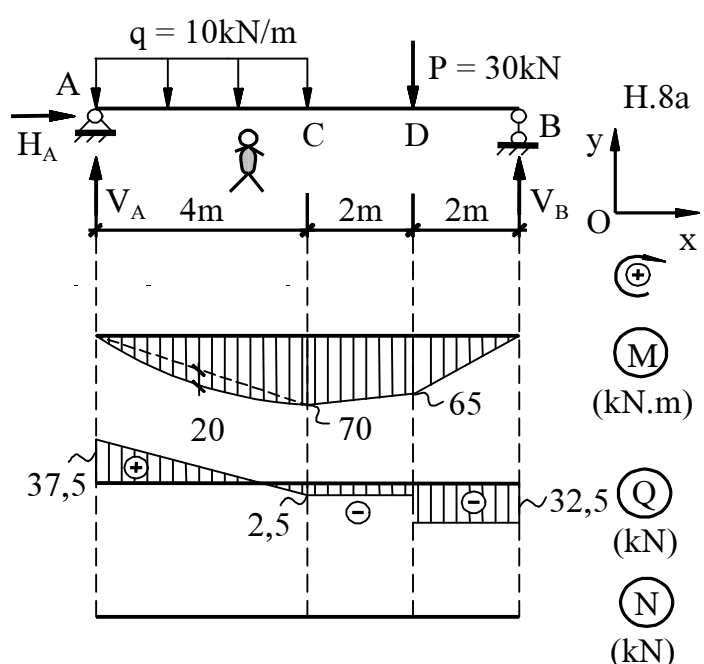
- $\sum M_B = 0$

$\Rightarrow 8.V_A - 2.30 - 10.4.6 = 0$

$\Rightarrow V_A = 37,5 (> 0)$

* Kiểm tra: $\sum Y = 0$

$\Leftrightarrow -q.4 - P + V_A + V_B = 0$



$\Leftrightarrow -4.10 - 30 + 37,5 + 32,5 = 0$ (đúng)

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = +V_A = 37,5$; $N_A = H_A = 0$.

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -V_B = -32,5$; $N_B = 0$.

Tại C: $M_C = V_A.4 - q.4.2 = 37,5.4 - 10.4.2 = 150 - 80 = 70$.

$Q_C = V_A - q.4 = 37,5 - 10.4 = 2,5$; $N_C = 0$.

Tại D: $M_D = +V_B.2 = 32,5.2 = 65$.

Tại D có lực tập trung nên biểu đồ (Q) có bước nhảy.

$Q_{DC} = +V_A - q.4 = -2,5$; $Q_{DB} = -V_B = 32,5$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AC có q phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{10.4^2}{8} = 20$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

* Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình (H.9a)

Quy tải trọng phân bố đều về tác dụng trên đường nằm ngang:

$$q^{td} = \frac{q}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = 2,309.$$

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{M_A, H_A, V_B\}$

$\{M_A, H_A, V_B\}$

$-\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A = 0$.

$-\Sigma M_I = 0$

$\Rightarrow M_A + M - 2.P - q^{td}.2.1 = 0$.

$\Rightarrow M_A + 3,5 - 2.3 - 2,309.2.1 = 0$.

$\Rightarrow M_A = +7,118 (> 0)$

$-\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_B - P - q^{td}.2 = 0$

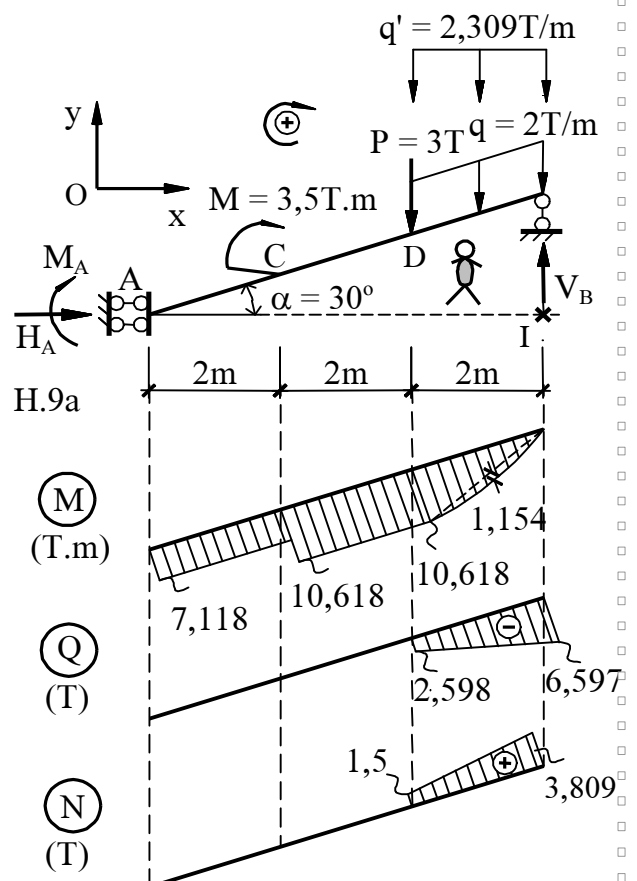
$\Rightarrow V_B - 3 - 2,309.2 = 0$

$\Rightarrow V_B = +7,618 (> 0)$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

- Tại A: $M_A = 7,118$; $Q_A = 0$;

$N_A = 0$.



- Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -V_B \cdot \cos\alpha$
 $= -7,618 \cdot \cos 30^\circ = -6,597$.
 $N_B = V_B \cdot \sin\alpha = 7,618 \cdot \sin 30^\circ = 3,809$.
- Tại C: $M_{CA} = 7,118$; $M_{CD} = M_A + M = 7,118 + 3,5 = 10,618$.
 $Q_{CA} = Q_{CD} = 0$, $N_{CA} = N_{CD} = 0$.
- Tại D: $M_D = M_A + M = 10,618$; $Q_{DC} = 0$; $Q_{DB} = -P \cdot \cos\alpha = -3 \cdot \cos 30^\circ = -2,598$.
 $N_{CD} = 0$; $N_{DB} = P \cdot \sin\alpha = 3 \cdot \sin 30^\circ = 1,5$

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn DB có q^{td} phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q^{td} \cdot l^2}{8} = \frac{2,309 \cdot 2^2}{8} = 1,154$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: TỰ KIỂM TRA.

* Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.10

* Nhận xét rằng nếu ta giữ lại phần bên

phải khi xét cân bằng một phần hệ thì không cần quan tâm đến phản lực.

1. Xác định nội lực tại các tiết diện

đặc trưng:

Tại C: $M_C = 0$; $Q_C = P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ$

$$Q_C = 2 \cdot (1 + \sin 45^\circ) = 3,414;$$

$N_C = -P_2 \cdot \cos 45^\circ = -2 \cdot \cos 45^\circ = -1,414$.

Tại B: $M_{BC} = -(P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot 2 =$

$$= -2 \cdot (1 + \sin 45^\circ) \cdot 2 = -6,828;$$

$M_{BA} = M_{BC} + M = -3,828$;

$Q_B = P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ = 3,414$;

$N_B = -P_2 \cdot \cos 45^\circ = -1,414$.

Tại A: $M_A = -(P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot 4 + M +$

$$+ 2 \cdot q \cdot 1 = -(2 + 2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 =$$

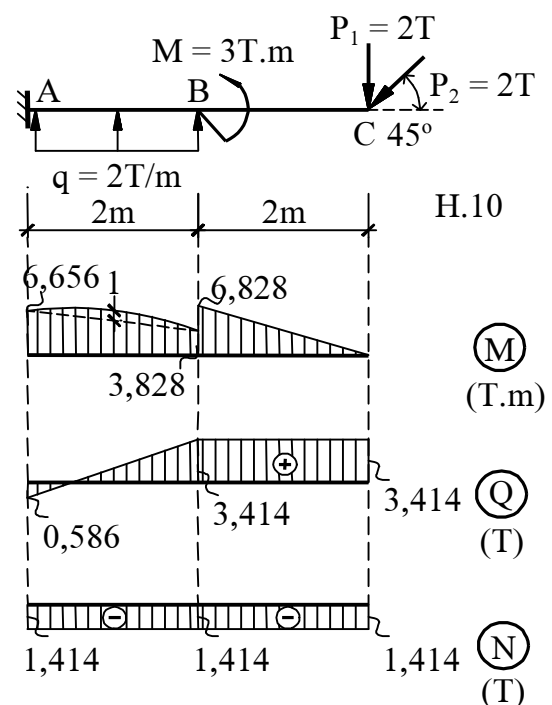
$$= -6,656;$$

$Q_A = P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot q = 2 + 2 \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot 2 = -0,586$; $N_A = -P_2 \cdot \cos 45^\circ = -1,414$.

2. Vẽ biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen:

- Trên đoạn AB có tải trọng q phân bố đều, có tung độ treo:



$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.2^2}{8} = 1$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

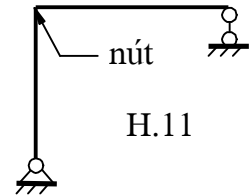
c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

II. Khung đơn giản:

1. Định nghĩa: Khung đơn giản là hệ gồm một thanh gãy khúc nối với trái đất bằng các liên kết tương đương ba liên kết loại một tạo thành hệ BBH.



2. Xác định các thành phần phản lực: Gồm ba thành phần và được xác định như trường hợp dầm đơn giản.

2. Xác định và vẽ các biểu đồ nội lực:

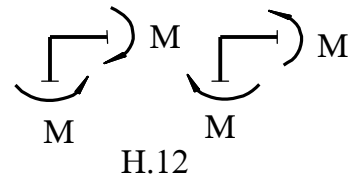
Tương tự trường hợp dầm đơn giản.

3. Kiểm tra lại các biểu đồ nội lực. (đã trình bày)

* *Chú ý:*

Nút khung có tính chất: tổng mômen ngoại lực và nội lực tại các đầu thanh quy tụ vào nút khung bằng không (cân bằng mômen nút). Thường sử dụng tính chất này để kiểm tra sự cân bằng mômen nút cho kết quả tính toán.

Trường hợp đặc biệt: một nút có hai đầu thanh quy tụ và không chịu mômen ngoại lực, mômen nội lực tại hai đầu thanh đó bằng nhau về giá trị và cùng làm căng thớ bên trong hay bên ngoài.



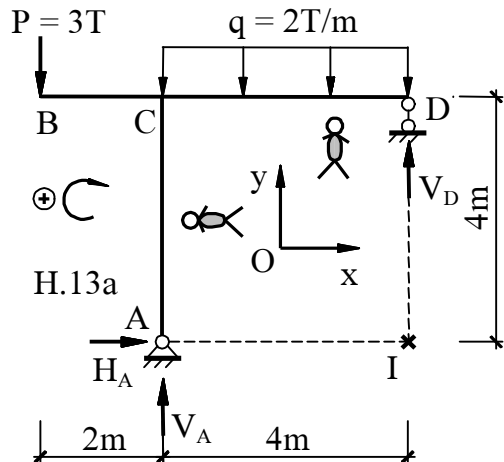
CÁC VÍ DỤ VỀ KHUNG ĐƠN GIẢN

* *Ví dụ 1:* Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.13a

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_D\}$

$$\begin{aligned} - \Sigma X = 0 &\Rightarrow H_A = 0. \\ - \Sigma M_I = 0 &\Rightarrow 4.V_A - 4.q.2 - 6.P = 0 \\ &\Rightarrow 4.V_A - 4.2.2 - 6.3 = 0. \\ &\Rightarrow V_A = 8,5 (> 0) \\ - \Sigma M_A = 0 &\Rightarrow -4.V_D + 4.q.2 - 2.P = 0 \\ &\Rightarrow -4.V_D + 4.2.2 - 2.3 = 0. \\ &\Rightarrow V_D = 2,5 (> 0) \end{aligned}$$

* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0$



$$\Leftrightarrow -q \cdot 4 - P + V_A + V_D = 0$$

$$\Leftrightarrow -2.4 - 3 + 8,5 + 2,5 = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = -H_A = 0$; $N_A = -V_A = -8,5$.

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -P = -3$; $N_B = 0$.

Tại C: $M_{CA} = -3 \cdot H_A = 0$; $M_{CB} = -2 \cdot P = -6$; $M_{CD} = -2 \cdot P - 3 \cdot H_A = -6$;

$$Q_{CA} = -H_A = 0$$
; $Q_{CB} = -P = -3$; $Q_{CD} = -P + V_A = -3 + 8,5 = 5,5$.

$$N_{CA} = -V_A = -8,5$$
; $N_{CB} = 0$; $N_{CD} = -H_A = 0$.

Kiểm tra sự cân bằng mômen nút C (H.13b).

Tại D: $M_D = 0$, $Q_D = -V_D = -2,5$; $N_D = 0$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn CD có q phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{2 \cdot 4^2}{8} = 4$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

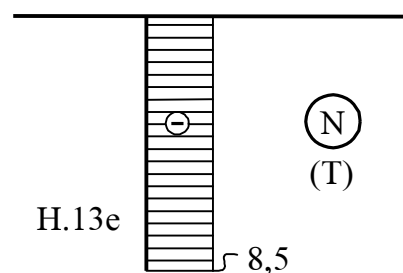
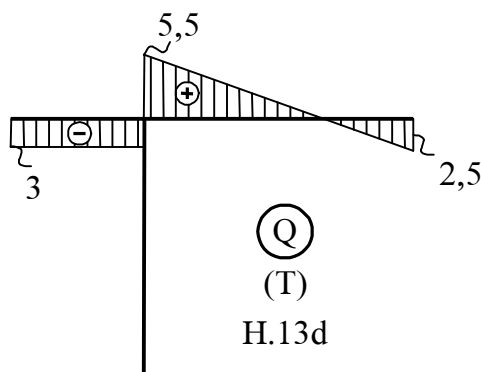
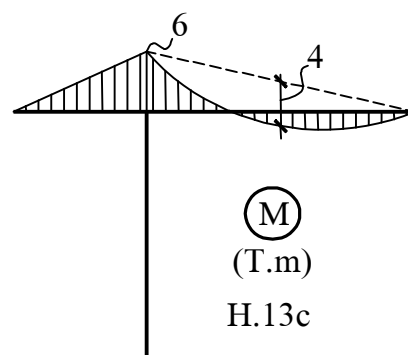
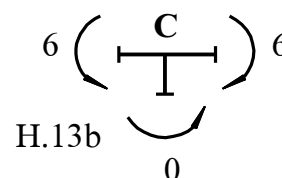
b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.



* Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.14a.

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, V_C, H_B\}$

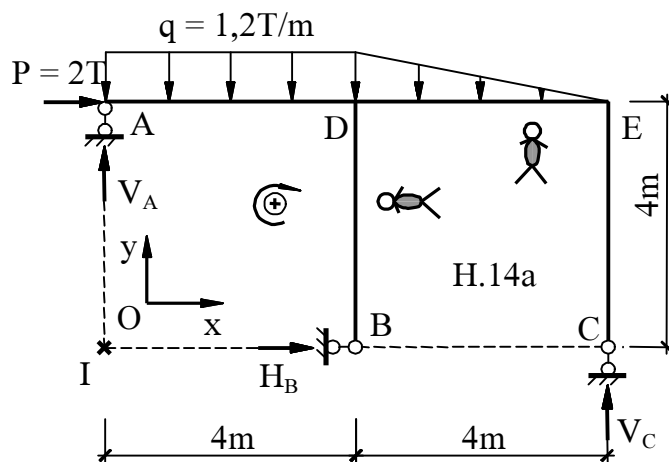
$$-\Sigma X = 0 \Rightarrow H_B = -P$$

$$\Rightarrow H_B = -2 (< 0).$$

$$-\Sigma M_I = 0 \Rightarrow -8 \cdot V_C + 4 \cdot P +$$

$$+ 4 \cdot q \cdot 2 + \frac{4 \cdot q}{2} \left[\frac{4}{3} + 4 \right] = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -8.V_C + 4.2 + 4.1,2.2 + \\ &+ \frac{4.1,2}{2} \cdot \left[\frac{4}{3} + 4 \right] = 0 \\ &\Rightarrow V_C = 3,8 (> 0) \\ -\Sigma M_C = 0 &\Rightarrow 8.V_A + 4.P - \\ 4.q.6 - \frac{4.q}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 4 \right] &= 0 \\ &\Rightarrow 8.V_A + 4.2 - \\ 4.1,2.6 - \frac{4.1,2}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 4 \right] &= 0. \\ &\Rightarrow V_A = 3,4 (> 0) \end{aligned}$$



* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_C - 4.q - \frac{4.q}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 3,4 + 3,8 - 4.1,2 - \frac{4.1,2}{2} = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A = 3,4$; $N_A = -P = -2$.

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -H_B = -(-2) = 2$; $N_B = 0$

Tại D: $M_{DA} = 4.V_A - 4.q.2 = 4.3,4 - 4.1,2.2 = 4$.

$M_{DB} = -4.H_B = -4.(-2) = 8$.

$M_{DE} = 4.V_A - 4.q.2 - 4.H_B = 4.3,4 - 4.1,2.2 - 4.(-2) = 12$

* Kiểm tra cân bằng mômen nút D: (tự kiểm tra)

$Q_{DA} = V_A - 4.q = 3,4 - 4.1,2 = -1,4$

$Q_{DB} = -H_B = -(-2) = 2$; $Q_{DE} = V_A - 4.q = -1,4$.

$N_{DA} = -P = -2$; $N_{DB} = 0$; $N_{DE} = -P - H_B = 0$.

Tại E: $M_{ED} = 0$; $M_{EC} = 0$; $Q_{ED} = -V_C = -3,8$; $Q_{EC} = 0$.

$N_{ED} = 0$; $N_{EC} = -V_C = -3,8$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AD có q phân bố đều nên có tung độ treo:

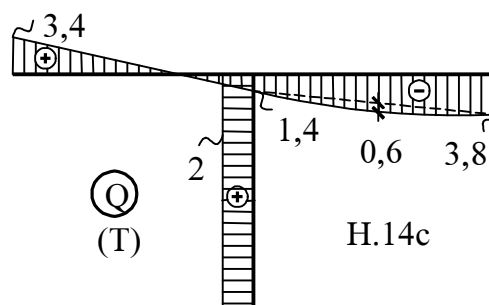
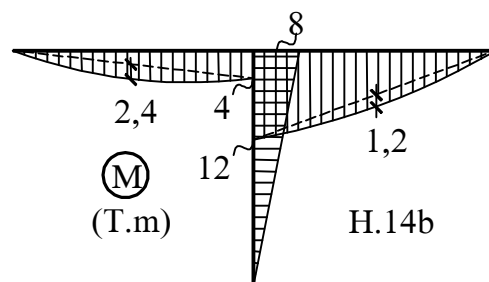
$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{1,2.4^2}{8} = 2,4$$

- Trên đoạn DE có q phân bố tam giác nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{16} = \frac{1,2.4^2}{16} = 1,2$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):



- Trên đoạn DE có q phân bố tam giác nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l}{8} \cdot \cos \alpha = \frac{1,2 \cdot 4}{8} \cdot 1 = 0,6$$

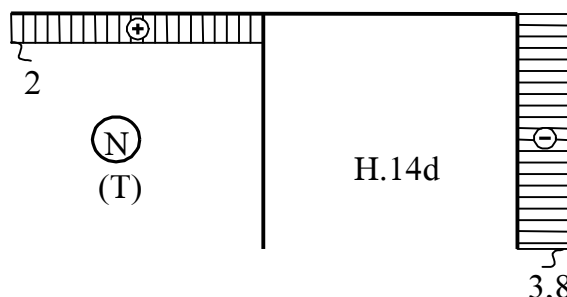
- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Trên đoạn DE có q phân bố tam giác nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l}{8} \cdot \sin \alpha = \frac{1,2 \cdot 4}{8} \cdot 0 = 0$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.



4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ:

Tự kiểm tra.

* Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.15a

Quy tải trọng phân bố đều về tác dụng trên đường nằm ngang:

$$q^{td} = \frac{q}{\cos \alpha} = \frac{1,2}{\cos 30^\circ} = 1,346.$$

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_C\}$

$$-\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$-\Sigma M_I = 0$$

$$\Rightarrow 6 \cdot V_A - 4 \cdot q^{td} \cdot 4 + 2 \cdot P = 0$$

$$\Rightarrow 6 \cdot V_A - 4 \cdot 1,346 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0.$$

$$\Rightarrow V_A = 2,922 (> 0)$$

$$-\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -6 \cdot V_C + 4 \cdot q^{td} \cdot 2 + 8 \cdot P = 0 \Rightarrow -6 \cdot V_C + 4 \cdot 1,346 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 0.$$

$$\Rightarrow V_C = 4,461 (> 0)$$

$$* \text{Kiểm tra: } \Sigma Y = 0 \Leftrightarrow -q^{td} \cdot 4 - P + V_A + V_C = 0$$

$$\Leftrightarrow -1,346 \cdot 4 - 2 + 2,922 + 4,461 = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A \cdot \cos \alpha = 2,922 \cdot \cos 30^\circ = 2,530$; $N_A = -V_A \cdot \sin \alpha = -1,461$.

Tại B: $M_B = 2 \cdot V_C - 4 \cdot P = 2 \cdot 4,461 - 4 \cdot 2 = 0,922$.

$$Q_{BA} = V_A \cdot \cos \alpha - 4 \cdot q^{td} \cdot \cos \alpha = -2,132; Q_{BC} = P - V_C = -2,461.$$

$$N_{BA} = -V_A \cdot \sin \alpha +$$

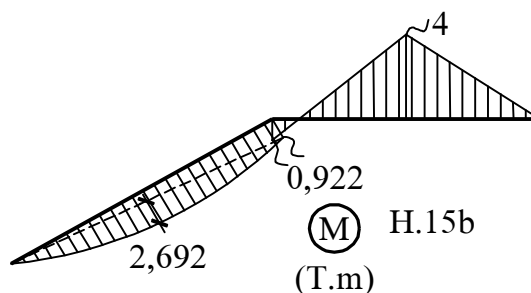
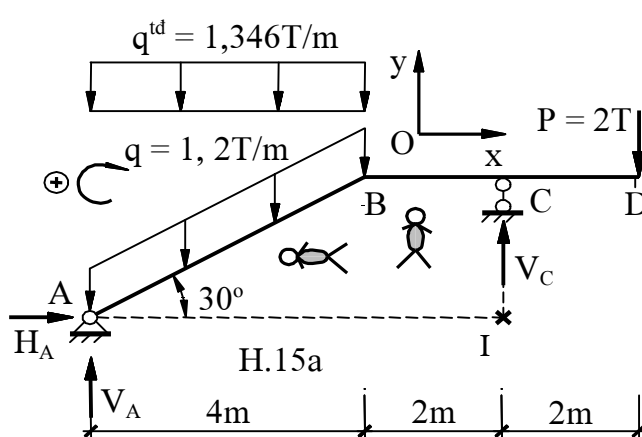
$$4 \cdot q^{td} \cdot \sin \alpha = 1,231; N_{BC} = 0.$$

Tại C: $M_C = -2 \cdot P = -2 \cdot 2 = -4$;

$$Q_{CB} = -V_C + P = -$$

$$2,461;$$

$$Q_{CD} = P = 2; N_C = 2.$$



Tại D: $M_D = 0; Q_D = P = 2; N_D = 0$.

Kiểm tra sự cân bằng mômen nút B: Tự kiểm tra

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AB có q^{td} phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q^{td} \cdot l^2}{8} = \frac{1,346 \cdot 4^2}{8} = 2,692 .$$

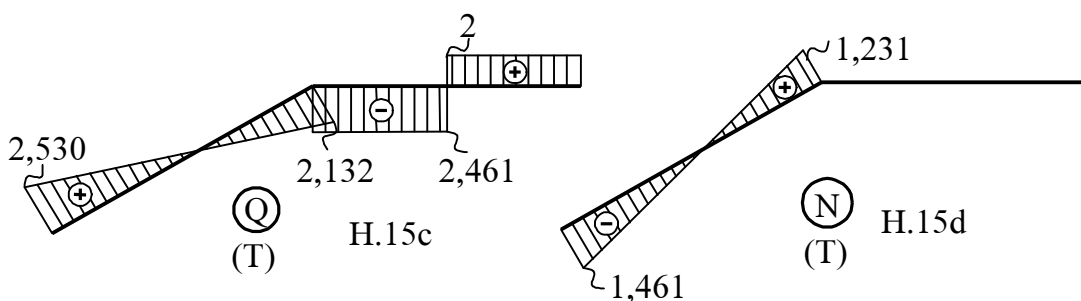
- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

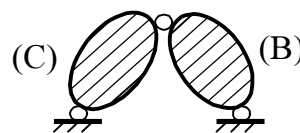


4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

§3. HỆ BA KHỚP.

I. Phân tích cấu tạo hệ:

1. Định nghĩa: Hệ ba khớp là hệ gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp và liên kết với trái đất bằng hai khớp (gối cố định) để tạo thành hệ BBH.



H.16

2. Tính chất của hệ ba khớp:

- Trong hệ luôn tồn tại thành phần phản lực nằm ngang ngay cả khi tải trọng chỉ tác dụng theo phương thẳng đứng.

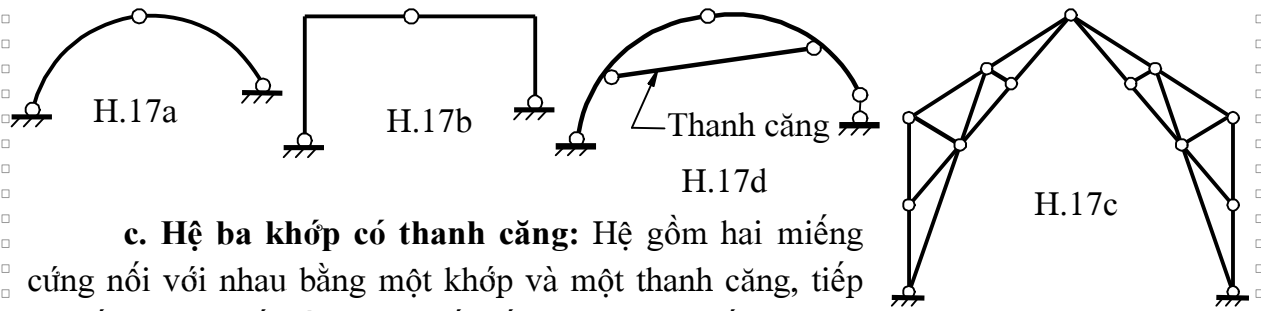
- Nội lực trong hệ ba khớp (mômen uốn và lực cắt) nói chung là nhỏ hơn trong hệ đơn giản cùng nhịp, cùng chịu tải trọng.

3. Phân loại hệ ba khớp:

a. Vòm ba khớp: Khi các miếng cứng của hệ là những thanh cong (H.17a). Trong vòm ba khớp, nói chung phát sinh đầy đủ ba thành phần nội lực.

b. Khung ba khớp: Khi các miếng cứng của hệ là các thanh gãy khúc (H.17b). Trong khung ba khớp, nói chung phát sinh đầy đủ ba thành phần nội lực.

c. Dàn ba khớp: Khi các miếng cứng của hệ là những dàn phẳng tĩnh định (H.17c). Trong dàn ba khớp, các thanh chỉ tồn tại lực dọc.



c. Hệ ba khớp có thanh căng: Hệ gồm hai miêng cứng nối với nhau bằng một khớp và một thanh căng, tiếp đó nối với trái đất bằng một gối cố định và một gối di động để tạo thành hệ BBH (H.17d). Thanh căng có tác dụng tiếp nhận lực xô ngang.

4. Ưu, nhược điểm của hệ ba khớp:

a. Ưu điểm:

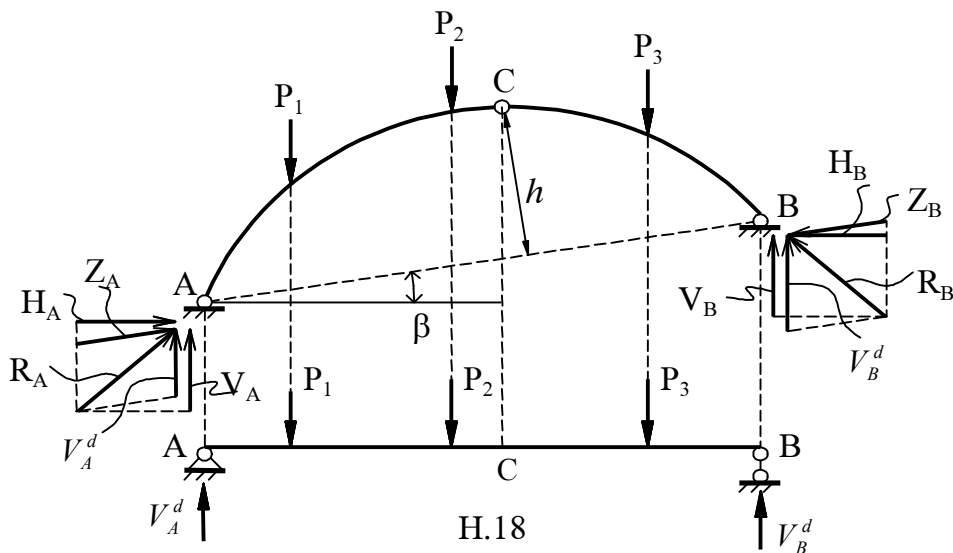
- Tiết kiệm vật liệu.
- Có thể vượt qua được những nhịp lớn.
- Hình dáng kiến trúc đẹp.

b. Nhược điểm:

- Khó thi công.
- Trong hệ luôn tồn tại thành phần lực xô ngang nên kết cấu móng phức tạp. Để khắc phục điều này, có thể sử dụng hệ ba khớp có thanh căng.

II. Xác định phản lực:

Xét hệ vòm ba khớp như trên hình vẽ (H.18). Gọi \vec{R}_A, \vec{R}_B là phản lực tại gối tựa A, B. \vec{R}_A, \vec{R}_B có phương bất kỳ, có thể phân tích chúng thành hai thành phần theo hai phương xác định.



1. Phân tích theo phương AB và phương thẳng đứng:

$$\vec{R}_A \left\{ \vec{Z}_A \ \& \ \vec{V}_A^d \right\}; \quad \vec{R}_B \left\{ \vec{Z}_B \ \& \ \vec{V}_B^d \right\}$$

a. Xác định \vec{V}_A^d & \vec{V}_B^d :

- $\sum M_B = 0 \Rightarrow f_1(V_A) = 0 \Rightarrow V_A$.
- $\sum M_A = 0 \Rightarrow f_2(V_B) = 0 \Rightarrow V_B$.

Trong trường hợp tải trọng chỉ tác dụng theo phương thẳng đứng, dễ thấy rằng các thành phần V_A^d, V_B^d giống như các phản lực trong dầm đơn giản tương ứng. Vì vậy các phản lực này gọi là phản lực dầm và được ký hiệu như ở trên.

b. Xác định \vec{Z}_A, \vec{Z}_B :

Cắt qua C, giữ lại phần bên trái và viết phương trình cân bằng mômen đối với C.

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -Z_A \cdot h + M_C^r = 0 \Rightarrow Z_A = \frac{M_C^r}{h}.$$

Trong đó, M_C^r là tổng mômen của các lực tác dụng lên phần hệ bên trái C, không kể Z_A . Trong biểu thức xác định M_C^r , các ngoại lực làm cho phần hệ xoay thuận chiều kim đồng hồ quanh C lấy dấu dương.

Tương tự, xét cân bằng mômen cho phần hệ bên phải C $\Rightarrow Z_A = \frac{M_C^{ph}}{h} \cdot M_C^{ph}$ là tổng mômen của các lực tác dụng lên phần hệ bên phải C, không kể Z_B . Trong biểu thức xác định M_C^{ph} , các ngoại lực làm cho phần hệ xoay ngược chiều kim đồng hồ quanh C, lấy dấu dương.

- Các thành phần \vec{Z}_A, \vec{Z}_B gọi là phản lực vòm.

2. Phân tích theo phương thẳng đứng và phương ngang:

$$\vec{R}_A \{ \vec{V}_A \text{ \& } \vec{H}_A \}; \vec{R}_B \{ \vec{V}_B \text{ \& } \vec{H}_B \}$$

a. Xác định \vec{H}_A, \vec{H}_B :

Từ quan hệ hình học trên hình vẽ. $H_A = Z_A \cdot \cos\beta$; $H_B = Z_B \cdot \cos\beta$.

- H_A, H_B gọi là các lực xô.

- Trong trường hợp tải trọng tác dụng theo phương đứng, dễ thấy $H_A = H_B = H$, nên $Z_A = Z_B = Z$.

b. Xác định \vec{V}_A, \vec{V}_B :

Từ quan hệ hình học trên hình vẽ.

$$V_A = V_A^d + Z_A \cdot \sin\beta; V_B = V_B^d - Z_B \cdot \sin\beta.$$

Hay $V_A = V_A^d + H_A \cdot \tan\beta; V_B = V_B^d - H_B \cdot \tan\beta.$

3. Xác định các phản lực toàn phần \vec{R}_A, \vec{R}_B :

$$\vec{R}_A = \vec{V}_A + \vec{Z}_A = \vec{V}_A + \vec{H}_A$$

$$\vec{R}_B = \vec{V}_B + \vec{Z}_B = \vec{V}_B + \vec{H}_B$$

Về giá trị (độ lớn): $R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2}; R_B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2}$

* Chú ý:

- $\beta > 0$ nếu gối B cao hơn gối A và ngược lại.

- Có thể xác định được $\{ \vec{V}_A, \vec{H}_A, \vec{V}_B \text{ \& } \vec{H}_B \}$ thông qua giải hệ phương trình:

+ Viết phương trình cân bằng mômen toàn hệ đối với gối B:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow f_1(V_A, H_A) = 0 \text{ (a)}$$

+ Tách qua C, viết phương trình cân bằng mômen của nửa hệ bên trái đối với C:

$$\Sigma M_C^r = 0 \Rightarrow f_2(V_A, H_A) = 0 \text{ (b)}$$

Giải hệ phương trình (a), (b) sẽ được $\{V_A, H_A\}$

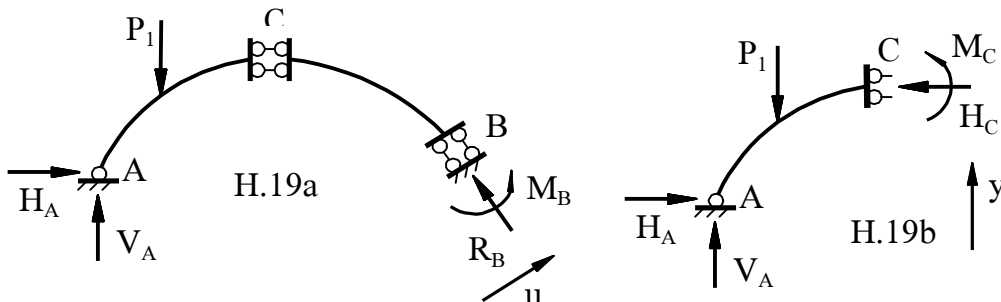
+ Tương tự

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow f_3(V_B, H_B) = 0 \text{ (c)}$$

$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow f_4(V_B, H_B) = 0 \text{ (d)}$$

Giải hệ phương trình (c), (d) sẽ được $\{V_B, H_B\}$

- Nếu hệ ba khớp sử dụng các khớp giả tạo, phân tích các phản lực xuất hiện tại các liên kết để viết phương trình cân bằng hợp lý. Xem ví dụ hệ trên hình (H.19).



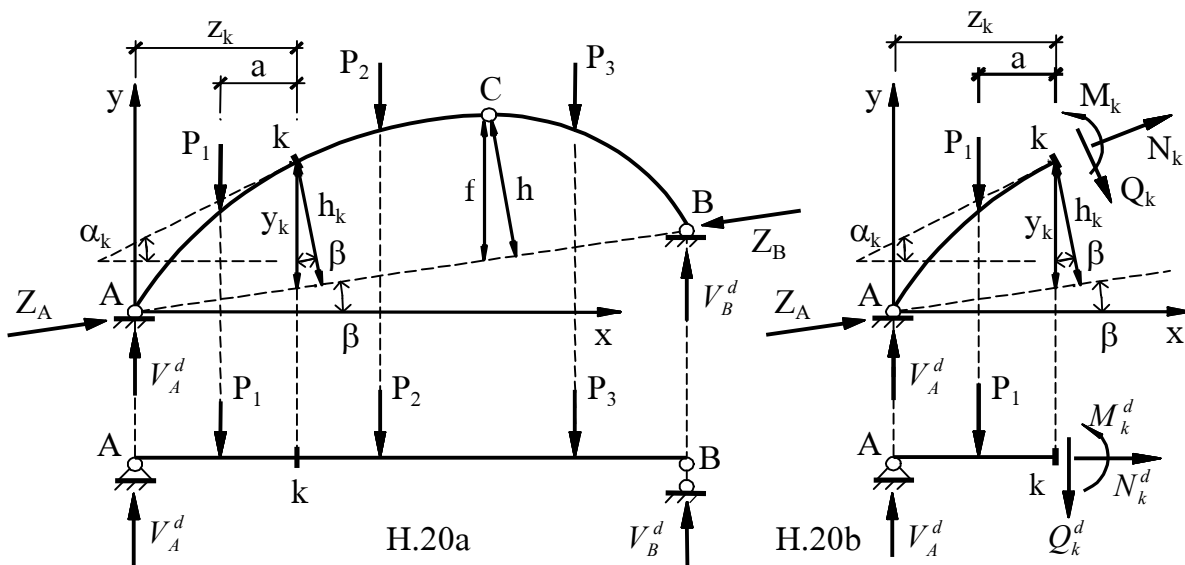
$$-\Sigma U = 0 \Rightarrow f_1(V_A, H_A) = 0 \text{ (1)}$$

$$-\Sigma Y^r = 0 \Rightarrow f_2(V_A, H_A) = 0 \text{ (2)}$$

Giải hệ (1), (2) xác định được (V_A, H_A) . Và để xác định (R_B, M_B) , phân tích phản lực để thiết lập cặp phương trình tương tự.

III. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng và vẽ biểu đồ nội lực:

Ở đây đi trình bày cho hệ vòm và khung ba khớp.



1. Biểu thức mômen uốn (M_k):

Giả sử cần xác định mômen uốn tại tiết diện k của vòm ba khớp chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng như trên hình vẽ. (H.20a)

Dùng mặt cắt qua k, giữ lại và xét cân bằng phần bên trái.

$$M_k = V_A^d \cdot z_k - P_1 \cdot a - Z_A \cdot h_k \text{ (a)}$$

Gọi M_k^d là mômen uốn tại tiết diện k trên dầm đơn giản cùng nhịp, cùng chịu tải trọng.

Dễ thấy

$$M_k^d = V_A^d \cdot z_k - P_1 \cdot a \quad (b)$$

Ta biết: $Z_A = \frac{H_A}{\cos \beta} = \frac{H_B}{\cos \beta} = \frac{H}{\cos \beta}$; mà $y_k = \frac{h_k}{\cos \beta}$

Suy ra $Z_A \cdot h_k = H \cdot y_k \quad (c)$

Từ (a), (b), (c) suy ra: $M_k = M_k^d - H \cdot y_k$.

Biểu thức chứng tỏ rằng mômen uốn trong vòm ba khớp nhỏ hơn mômen uốn trong dầm đơn giản cùng nhịp, cùng chịu tải trọng một lượng $H \cdot y_k$. Và nếu khéo chọn hình dạng của vòm (y_k) sao cho $M_k^d = H \cdot y_k$ thì mômen uốn tại mọi tiết diện đều bằng không. Lúc này trong vòm chỉ tồn tại lực dọc nên tiết kiệm vật liệu.

2. Biểu thức lực cắt (Q_k):

Tương tự như trên nhưng đi thiết lập phương trình hình chiếu lên phương Q_k (phương vuông góc với tiếp tuyến trục vòm tại tiết diện k).

$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot (\sin \alpha_k - \text{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k)$$

Trong đó

- Q_k^d : lực cắt tại tiết diện k trong dầm đơn giản tương ứng cùng nhịp, cùng chịu tải trọng.
- Q_k : lực cắt trong vòm tại tiết diện k.
- α : góc hợp bởi tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện k với phương ngang.

3. Biểu thức lực dọc (N_k):

Tương tự như xác định lực cắt nhưng đi thiết lập phương trình hình chiếu lên phương N_k (phương của tiếp tuyến trục vòm tại tiết diện k).

$$N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot (\cos \alpha_k + \text{tg} \beta \cdot \sin \alpha_k)$$

* Chú ý:

- $\beta > 0$ khi gờ B cao hơn gờ A và ngược lại.
- $\alpha_k > 0$ khi $y'(z_k) > 0$ và ngược lại.
- $y_k = y(z_k) - z_k \cdot \text{tg} \beta$.
- Khi $\beta = 0$ (gờ A & B cùng cao độ)

$$\begin{aligned} M_k &= M_k^d - H \cdot y_k \\ Q_k &= Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k \\ N_k &= -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k \end{aligned}$$

- Các biểu thức trên được thiết lập cho tải trọng tác dụng theo phương thẳng đứng.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

- Đối với khung ba khớp: Tiến hành giống hệ dầm, khung đơn giản.

- Đối với vòm ba khớp: Sau khi chọn và xác định nội lực tại các tiết diện trên kết cấu. Các tiết diện thường chọn là các tiết diện đặc trưng và một số tiết diện trung gian để tăng tính chính xác. Biểu đồ nội lực được vẽ gần đúng bằng cách nối các tung độ liên tiếp bằng các đoạn thẳng.

Quá trình tính toán có thể lập thành bảng sau: (Bảng tham khảo)

Tiết diện	z_k	y_k	$tg\alpha_k = y'(z_k)$	$\sin\alpha_k$	$\cos\alpha_k$	M_k^d	Q_k^d	M_k	Q_k	N_k
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Bảng 2. Bảng phân tích nội lực trong vòm ba khớp.

* *Chú ý:* Có thể chọn đường chuẩn là đường nằm ngang khi vẽ biểu đồ nội lực.

* *Chú thích:* Đối với hệ dàn vòm ba khớp, cách tính được thực hiện như sau:

- + Xác định phản lực tại các gối tựa theo cách đã trình bày ở trên.
- + Nội lực trong các thanh dàn chỉ là lực dọc. Xem cách xác định trong bài hệ dàn.

CÁC VÍ DỤ VỀ HỆ BA KHỚP.

* *Ví dụ 1:* Xác định nội lực tại tiết diện k của vòm ba khớp cho trên hình vẽ (H.21)

Cho biết phương trình trục vòm

là parabol $y(z) = \frac{1}{5}(l - z).z; l = 10m$

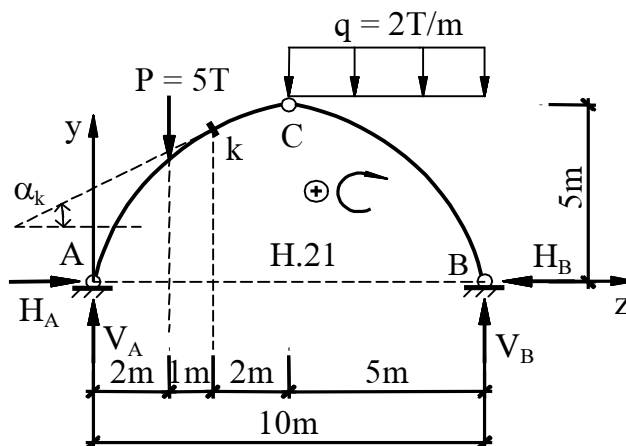
1. Các số liệu suy ra từ đề bài:

- $z_k = 3m; y_k = y(3) = 4,2m; \beta = 0.$

- $tg\alpha_k = y'(3) = \frac{1}{5}(l - 2.z)|_{z=3} = 0,8.$

$$\Rightarrow \sin\alpha_k = \frac{tg\alpha_k}{\sqrt{1+tg\alpha_k^2}} = \frac{0,8}{\sqrt{1+0,8^2}} = 0,624$$

$$\Rightarrow \cos\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1+tg\alpha_k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0,8^2}} = 0,780$$



2. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A^d, V_B^d, Z_A, Z_B, V_A, V_B, H_A, H_B\}$

Do $\beta = 0$ và tải trọng chỉ tác dụng theo phương thẳng đứng nên

$$V_A^d = V_A, V_B^d = V_B, Z_A = Z_B = H_A = H_B.$$

a. Xác định V_A, H_A :

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 10.V_A - 5.8 - 5.2.2,5 = 0 \Rightarrow V_A = 6,5 (> 0).$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 5.V_A - 5.H_A - 5.3 = 0 \Rightarrow 5.H_A = 5.6,5 - 5.3 \Rightarrow H_A = 3,5 (> 0).$$

b. Xác định V_B, H_B :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -10.V_B + 5.2 + 5.2.7,5 = 0 \Rightarrow V_B = 8,5 (> 0).$$

$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow -5.V_B + 5.H_B + 5.2.2,5 = 0 \Rightarrow 5.H_B = 5.8,5 - 5.2.2,5.$$

$$\Rightarrow H_B = 3,5 (> 0).$$

* Kiểm tra: $\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0 \Rightarrow 3,5 - 3,5 = 0$ (đúng)

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P - 5 \cdot q = 0 \Rightarrow 6,5 - 8,5 - 5 - 5 \cdot 2 = 0 \text{ (đúng)}$$

* Kết luận: $V_A = V_A^d = 6,5$; $V_B = V_B^d = 8,5$; $Z_A = Z_B = H_A = H_B = H = 3,5$.

3. Xác định nội lực tại các tiết k:

$$M_k = M_k = M_k^d - H \cdot y_k = 6,5 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 3,5 \cdot 4,2 = -0,2 \text{ (} M_k^d = 6,5 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \text{)}.$$

$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k = (6,5 - 5) \cdot 0,780 - 3,5 \cdot 0,624 = -1,014.$$

$$N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k = -(6,5 - 5) \cdot 0,624 - 3,5 \cdot 0,780 = -3,666.$$

* Ví dụ 2: Nội dung và hình vẽ giống ví dụ 1 nhưng P nghiêng 1 góc 45° (H.22a)

Các số liệu suy ra từ bài toán giống ví dụ trên.

1. Xác định các thành phần phản lực:

$$\{V_A^d, V_B^d, Z_A, Z_B, V_A, V_B, H_A, H_B\}$$

Do $\beta = 0$ nên

$$V_A^d = V_A, V_B^d = V_B, Z_A = H_A, Z_B = H_B$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 10 \cdot V_A - P \cdot \sin 45^\circ \cdot 8 + P \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 - 5 \cdot q \cdot 2,5 = 0.$$

$$\Rightarrow 10 \cdot V_A - 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 8 + 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 - 5 \cdot 2 \cdot 2,5 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 4,197 (> 0)$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 5 \cdot V_A - 5 \cdot H_A - P \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 - P \cdot \cos 45^\circ \cdot (5 - 3,2) = 0.$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 4,197 - 5 \cdot H_A - 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 - 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot (5 - 3,2) = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 0,802.$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -10 \cdot V_B + P \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 + P \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 + 5 \cdot q \cdot 7,5 = 0.$$

$$\Rightarrow 10 \cdot V_B + 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 + 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 + 5 \cdot 2 \cdot 7,5 = 0.$$

$$\Rightarrow V_B = 9,338 (> 0).$$

$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow$$

$$-5 \cdot V_B + 5 \cdot H_B + 5 \cdot q \cdot 2,5 = 0.$$

$$\Rightarrow -5 \cdot 9,338 + 5 \cdot H_B + 5 \cdot 2 \cdot 2,5 = 0$$

$$\Rightarrow H_B = 4,338.$$

* Kiểm tra: $\Sigma X = 0$

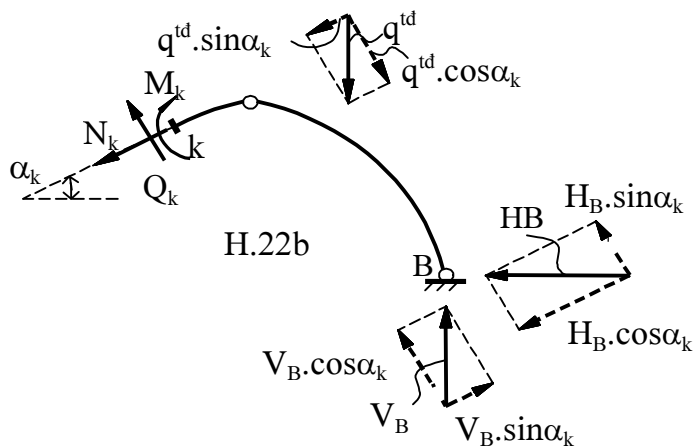
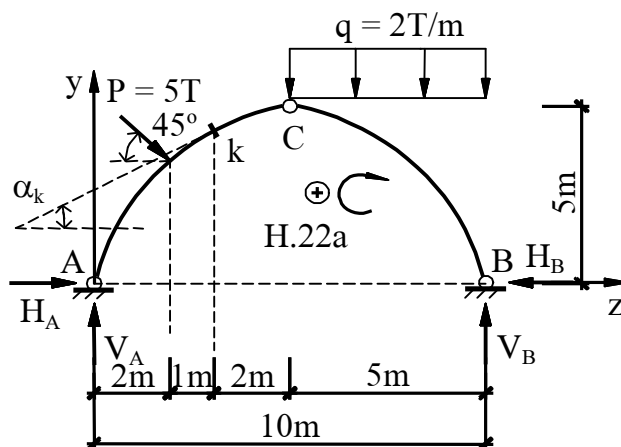
$$\Rightarrow H_A - H_B + P \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow 0,802 - 4,338 - 5 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

(đúng)

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Rightarrow V_A + V_B - P \cdot \sin 45^\circ - 5 \cdot q = 0.$$



$$\Rightarrow 4,197 + 9,338 - 5 \cdot \sin 45^\circ - 2,5 = 0 \text{ (đúng)}$$

* Kết luận: $V_A = V_A^d = 4,197$; $V_B = V_B^d = 9,338$; $Z_A = H_A = 0,802$; $Z_B = H_B = 3,338$.

2. Xác định nội lực tại tiết diện k:

Vì có tải trọng tác dụng không theo phương thẳng đứng nên không sử dụng các biểu thức thiết lập sẵn ở trên. Ở đây, cần phải đi thiết lập các phương trình cân bằng như trong trường hợp tổng quát xác định nội lực.

$$+ M_k = 7 \cdot V_B - 4,2 \cdot H_B - 5 \cdot q \cdot 4,5 = 7 \cdot 9,338 - 4,2 \cdot 4,338 - 5 \cdot 2 \cdot 4,5 = 2,146.$$

$$+ Q_k = -V_B \cdot \cos \alpha_k + 5 \cdot q \cdot \cos \alpha_k - H_B \cdot \sin \alpha_k$$

$$= -9,338 \cdot 0,780 + 5 \cdot 2 \cdot 0,780 - 4,338 \cdot 0,624 = -2,190.$$

$$+ N_k = V_B \cdot \sin \alpha_k - 5 \cdot q \cdot \sin \alpha_k - H_B \cdot \cos \alpha_k = 9,338 \cdot 0,624 - 5 \cdot 2 \cdot 0,624 - 4,338 \cdot 0,78 =$$

$$= -3,797.$$

* Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ vòm ba khớp. Phương trình của trục vòm có dạng parabol $y(z) = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot z \cdot (l - z)$; cho $f = 4m$, $l = 10m$ (H.23a)

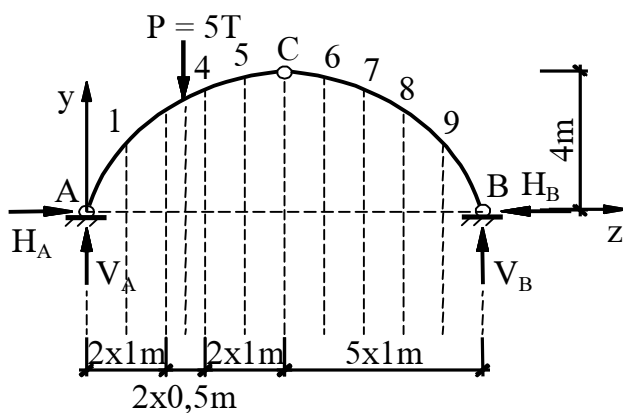
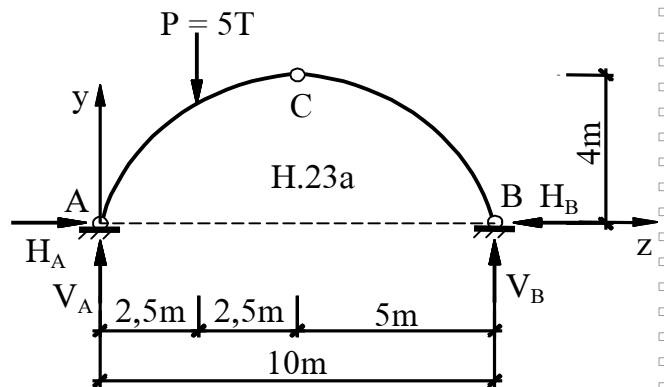
Nội lực trong hệ vòm ba khớp có hai gối A, B cùng cao độ và chịu tải trọng tác dụng theo phương thẳng đứng được xác định bằng biểu thức:

$$M_k = M_k^d - H \cdot y_k.$$

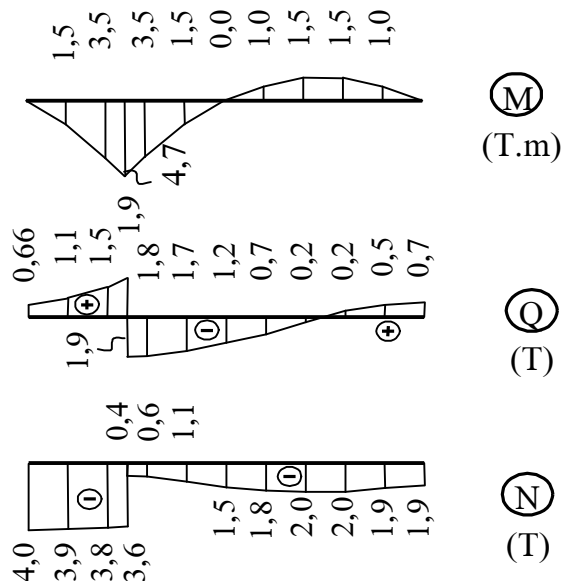
$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k.$$

$$N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k.$$

Để vẽ biểu đồ nội lực, ta sẽ tính nội lực tại các tiết diện A, 1, 2, 3, 4, 5, C, 6, 7, 8, 9 và B. Kết quả tính toán thể hiện trong bảng tính (B.3). Các biểu đồ nội lực thể hiện trên hình vẽ (H.23b).



H.23b



Tiết diện	z_k (m)	y_k (m)	$\text{tg}\alpha_k = y'(z_k)$	$\sin\alpha_k$	$\cos\alpha_k$	M_k^d (T.m)	Q_k^d (T)	M_k (T.m)	Q_k (T)	N_k (T)
A	0	0	1,60	0,848	0,529	0	3,75	0	0,66	-4,01
1	1,0	1,44	1,28	0,788	0,615	3,75	3,75	1,50	1,08	-3,92
2	2,0	2,56	0,96	0,721	0,692	7,50	3,75	3,50	1,47	-3,78
3 ^{tr}	2,5	3,00	0,80	0,624	0,781	9,37	3,75	4,69	1,95	-3,56
3 ^{ph}	2,5	3,00	0,80	0,624	0,781	9,37	-1,25	4,69	-1,95	-0,44
4	3,0	3,36	0,64	0,539	0,642	8,75	-1,25	3,50	-1,88	-0,65
5	4,0	3,84	0,32	0,305	0,952	7,50	-1,25	1,50	-1,68	-1,10
C	5,0	4,00	0	0	1,000	6,25	-1,25	0	-1,25	-1,56
6	6,0	3,84	-0,32	-0,305	0,952	5,00	-1,25	-1,00	-0,71	-1,87
7	7,0	3,36	-0,64	-0,539	0,842	3,75	-1,25	-1,50	-0,81	-2,00
8	8,0	2,56	-0,96	-0,721	0,692	2,50	-1,25	-1,50	-0,25	-2,00
9	9,0	1,44	-1,28	-0,788	0,615	1,25	-1,25	-1,00	0,46	-1,95
B	10	0	-1,60	-0,848	0,529	0	-1,25	0	0,67	-1,89

B3. Bảng minh họa tính toán

* Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.24a).

1. Xác định các thành phần

phản lực: $\{V_A, H_A, V_B, H_B\}$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -1.H_A + 5.V_A -$$

$$- 4.q.5 - 3.P + M = 0$$

$$\Rightarrow -1.H_A + 5.V_A -$$

$$- 4.2.5 - 3.4 + 3,2 = 0$$

$$\Rightarrow -H_A + 5.V_A - 48,8 = 0 \text{ (a)}$$

$$\Sigma M_C^r = 0 \Rightarrow -4.H_A + 2.V_A -$$

$$- 4.q.2 = 0$$

$$\Rightarrow -4.H_A + 2.V_A - 4.2.2 = 0.$$

$$\Rightarrow -4.H_A + 2.V_A - 16 = 0 \text{ (b)}$$

Từ (a), (b) giải ra $V_A = 9,955$; $H_A = 0,977$.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -1.H_B - 5.V_B + 2.P + M = 0$$

$$\Rightarrow -1.H_B - 5.V_B + 2.4 + 3,2 = 0$$

$$\Rightarrow -H_B - 5.V_B + 11,2 = 0 \text{ (c)}$$

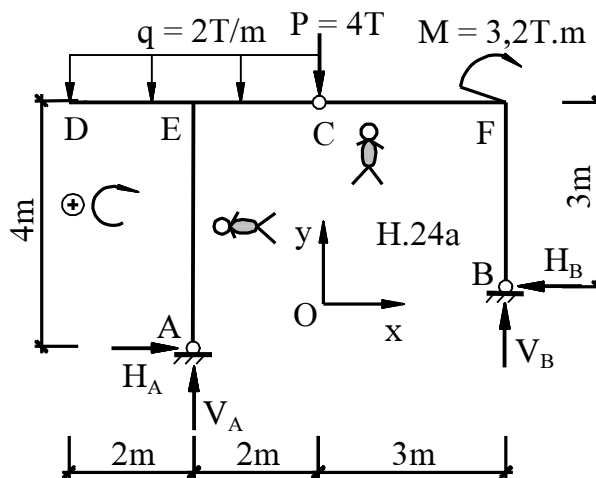
$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow 3.H_B - 3.V_B + M = 0$$

$$\Rightarrow 3.H_B - 3.V_B + 3,2 = 0. \text{ (d)}$$

Từ (c), (d) giải ra $V_B = 2,044$; $H_B = 0,977$.

* Kiểm tra:

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0 \text{ (đúng)}$$



$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P - 4.q = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = -H_A = -0,977$; $N_A = -V_A = -9,955$.

Tại D: $M_D = 0$; $Q_D = 0$; $N_D = 0$.

Tại E: $M_{ED} = -2.q.1 = -2.2.1 = -4$; $M_{EA} = -4.H_A = -4.0,977 = -3,911$.

$$M_{EC} = -2.q.1 - 4.H_A = -2.2.1 - 4.0,977 = -7,908.$$

$$Q_{ED} = -2.q = -2.2 = -4$$
; $Q_{EA} = -H_A = -0,977$;

$$Q_{EC} = -2.q + V_A = -2.2 + 9,955 = 5,955.$$

$$N_{ED} = 0$$
; $N_{EA} = -V_A = -9,955$; $N_{EC} = -H_A = -0,977$.

Tại C: $M_C = 0$; $Q_{CE} = V_A - 4.q = 9,955 - 2.4 = 1,955$; $Q_{CF} = -V_B = -2,044$.

$$N_C = -H_A = -0,977.$$

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = H_B = 0,977$; $N_B = -V_B = -2,044$.

Tại F: $M_{FB} = 3.H_B = 3.0,977 = 2,91$; $M_{FC} = -3.H_B - M = -3.0,977 - 3,2 = -6,11$.

$$Q_{FB} = H_B = 0,977$$
; $Q_{FC} = -V_B = -2,044$.

$$N_{FB} = -V_B = -2,044$$
; $N_{FC} = -H_B = -0,977$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối

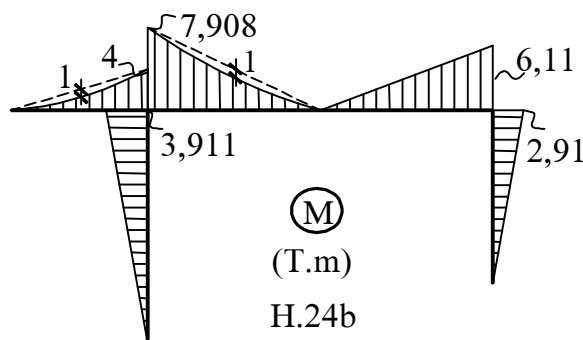
cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn DE & EC có q phân bố đều nên có tung độ treo:

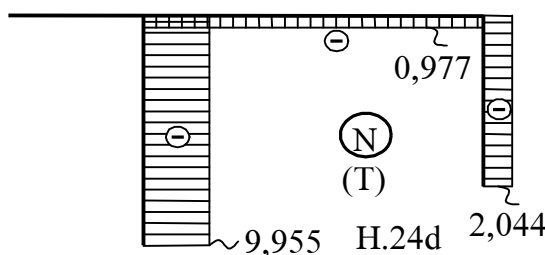
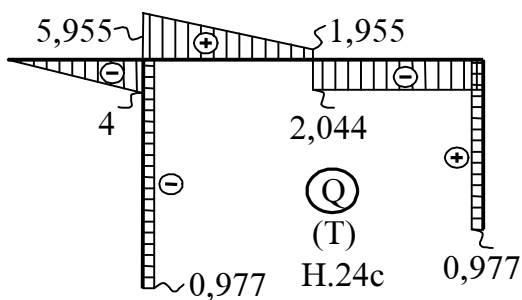
$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.2^2}{8} = 1$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.



b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.



c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

Phân tích trường hợp hệ ba khớp có thanh cứng:

1. Trường hợp tải trọng không tác dụng lên thanh cứng: Trong thanh cứng chỉ xuất hiện lực dọc.

a. Xác định phản lực:

- Các thành phần V_A, V_B, H_A : Xác định như trong trường hợp dầm, khung đơn giản.
- Thành phần lực dọc N_{DE} : Dùng mặt cắt qua khớp C và thanh căng. Xét cân bằng mômen của một phần bất kỳ đối với khớp C.

$$\Sigma M_C^{tr} = 0 \text{ hay } \Sigma M_C^{ph} = 0$$

*Nhận xét:

- V_A, V_B đóng vai trò như V_A^d, V_B^d .
- N_{ED} đóng vai trò như Z_A, Z_B .
- Hệ giống hệ ba khớp A^*CB^* .

b. Xác định nội lực:

Theo nguyên tắc chung xác định nội lực đã trình bày.

*Chú ý: Nếu thanh căng là miếng cứng gãy khúc: Lực xuất hiện trong thanh căng là lực đi qua hai khớp ở hai đầu, ngược chiều nhau, bằng nhau về giá trị.

2. Trường hợp tải trọng tác dụng lên

thanh căng: Trong thanh căng xuất hiện cả ba thành phần nội lực M, Q, N .

a. Xác định phản lực:

- Các thành phần V_A, V_B, H_A : giống như trong dầm, khung đơn giản.
- Các thành phần tại khớp D, E: được xác định qua hai bước.

+ Bước 1: Tách riêng ED ra khỏi hệ và xét cân bằng nó.

Phân tích phản lực tại D và E theo hai phương: phương DE (Z_D, Z_E) và phương đứng (V_D, V_E).

Viết các phương trình cân bằng mômen đối với D và E sẽ giải ra được V_D, V_E .

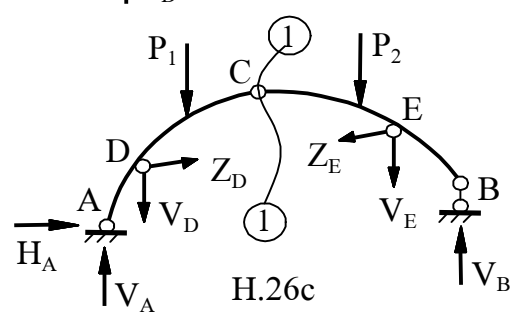
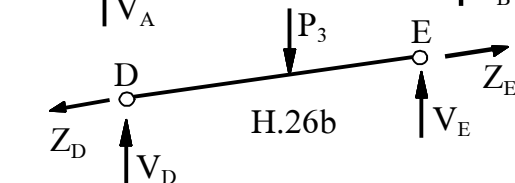
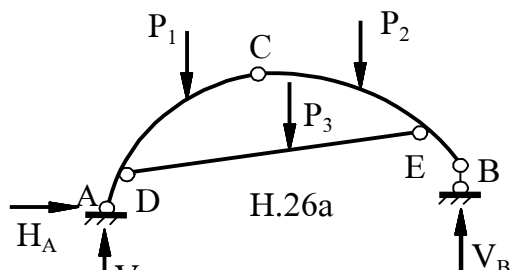
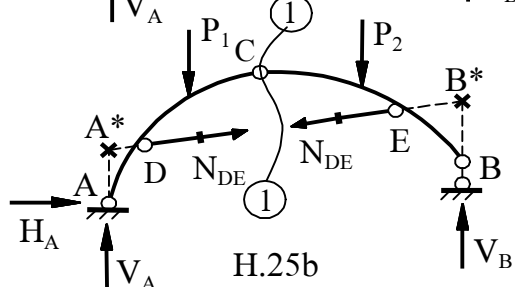
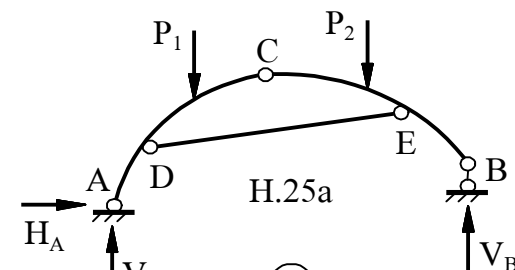
+ Bước 2: Xét cân bằng của phần hệ ABC (sau khi đã tách bỏ thanh DE).

Truyền phản lực tại D và E tại hai đầu thanh căng vào (có chiều ngược lại).

Thực hiện mặt cắt qua khớp C. Giữ lại và xét cân bằng từng phần của hệ.

$$\Sigma M_C^{tr} = 0 \Rightarrow Z_D \text{ và } \Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow Z_E.$$

b. Xác định & vẽ biểu đồ nội lực: Theo nguyên lý chung.



* Ví dụ 5: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (h.27a).

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_B\}$

- $\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$

- $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 8.V_A - 3.4 - 2.4.6 = 0 \Rightarrow V_A = 7,5.(> 0)$

- $\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow -8.V_B + 3.4 + 2.4.2 = 0$

$\Rightarrow V_B = 3,5 (> 0).$

* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0$

$\Leftrightarrow -q.4 - P + V_A + V_B = 0$

$\Leftrightarrow -2.4 - 3 + 7,5 + 3,5 = 0$

(đúng)

* Xác định lực dọc trong

thanh DE: N_{DE}

$\Sigma M_C^{ph} = 0$

$\Rightarrow 2.N_{DE} - 4.V_B = 0$

$\Rightarrow N_{DE} = 1,75$

(> 0, gây kéo)

2. Xác định nội lực tại các

tiết diện đặc trưng:

Trong thanh DE chỉ tồn tại

lực dọc $N_{DE} = 1,75.$

Tại A: $M_A = 0; Q_A = V_A = 7,5; N_A = 0.$

Tại F: $M_{FA} = 2.V_A - 2.q.1 = 11; M_{FD} = -2.N_{DE} = -3,5.$

$M_{FC} = 2.V_A - 2.q.1 - 2.N_{ED} = 7,5.$

$Q_{FA} = V_A - 2.q = 7,5 - 2.2 = 3,5; N_{FA} = 0.$

$Q_{FD} = -N_{ED} = -1,75; N_{FD} = 0.$

$Q_{FC} = V_A - 2.q = 3,5; N_{FC} = -N_{DE} = -1,75.$

Tại C: $M_C = 0; Q_{CF} = -V_B + P = -3,5 + 3 = -0,5; Q_{CG} = -V_B = -3,5.$

$N_C = -N_{ED} = -1,75.$

Tại G: $M_{GC} = 2.V_B - 2.N_{DE} = 3,5.2 - 1,75.2 = 3,5; M_{GE} = 2.N_{ED} = 3,5.$

$M_{GB} = 2.V_B = 7.$

$Q_{GC} = -V_B = -3,5; N_{GC} = -N_{ED} = -1,75; Q_{GE} = N_{ED} = 1,75; N_{GE} = 0.$

$Q_{GB} = -V_B = -3,5; N_{GB} = 0.$

Tại D: $M_D = 0; Q_{DF} = -N_{ED} = -1,75; N_{DF} = 0.$

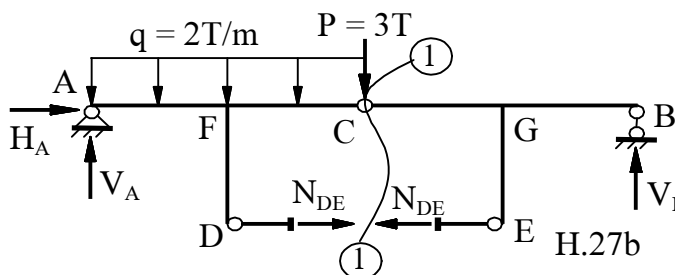
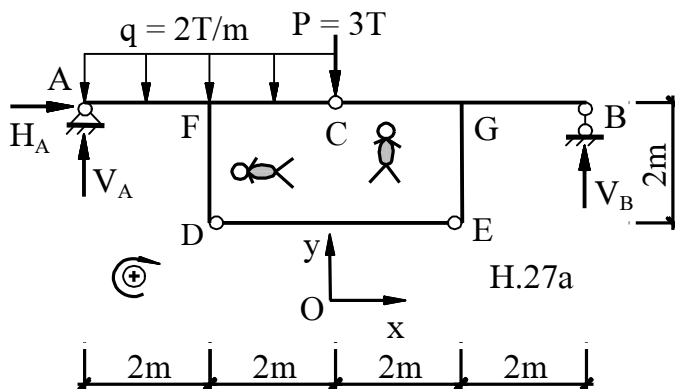
Tại E: $M_E = 0; Q_{EG} = N_{ED} = 1,75; N_{EG} = 0;$

Kiểm tra sự cân bằng mômen nút F & G: dễ thấy thỏa mãn.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AF & FC có q phân bố đều nên có tung độ treo:

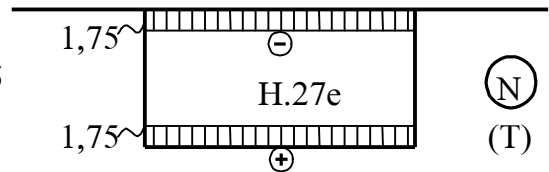
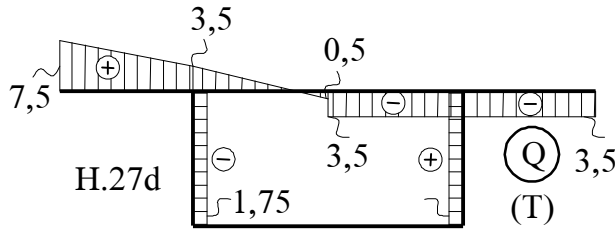
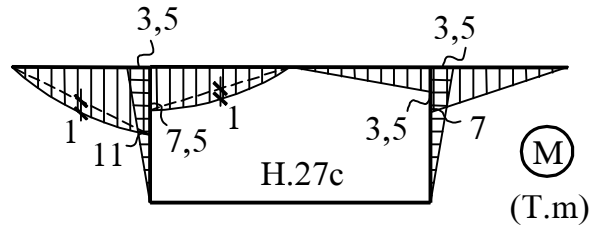


$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{2.2^2}{8} = 1$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.



c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

Ví dụ 5: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.28a)

1. Xác định các thành phần phản lực:

- Dễ thấy $V_A = V_B = 6$; $H_A = 0$.

- Xác định các phản lực tại vị trí miếng cứng nối thanh cứng.

Tách thanh cứng GH. Các thành phần phản lực gồm: (V_G, H_G, V_H, H_H).

+ Xét cân bằng thanh cứng GH:

Dễ thấy $V_G = V_H = 6$.

+ Xét cân bằng phần hệ bên dưới:

Dùng mặt cắt 1 - 1, xét cân bằng phần bên trái:

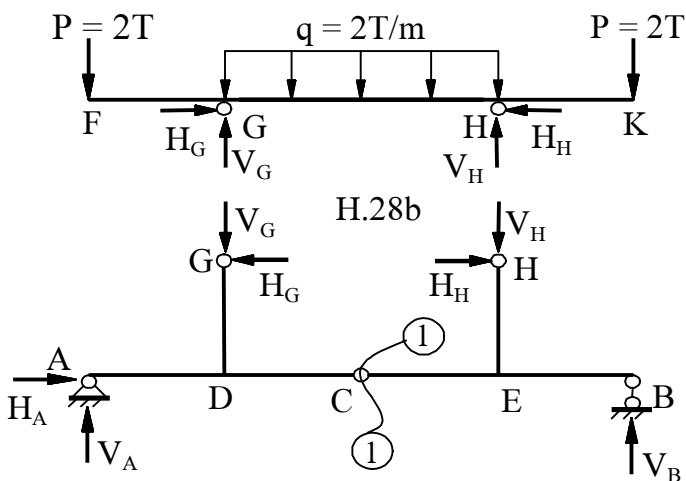
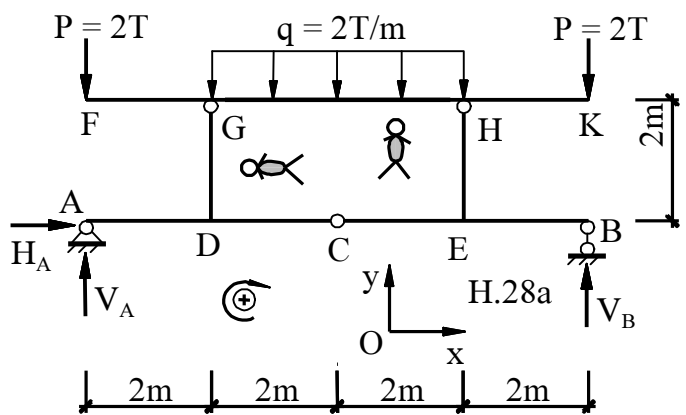
$$\sum M_C^{tr} = 0 \Rightarrow 4.V_A - 2.V_G - 2.H_G = 0 \Rightarrow H_G = 6.$$

Tương tự, xét cân bằng phần bên phải:

$$\sum M_C^{ph} = 0 \Rightarrow H_H = 6.$$

6.

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:



Để thuận lợi cho việc xác định nội lực, ta tách riêng hệ ra làm hai phần độc lập như lúc xác định phản lực liên kết trong các thanh cứng.

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A = 6$; $N_A = 0$.

Tại F: $M_F = 0$; $Q_F = P = -2$; $N_F = 0$.

Tại G: $M_{GF} = -2.P = -2.2 = -3$; $M_{GH} = -2.P = -4$; $M_{GD} = 0$.

$Q_{GF} = -P = -2$; $Q_{GH} = V_G - P = 6 - 2 = 4$; $Q_{GD} = -H_D = -6$.

$N_{GF} = 0$; $N_{GH} = -H_G = -6$; $N_{GD} = -V_G = -6$.

Tại D: $M_{DA} = 2.V_A = 2.6 = 12$; $M_{DH} = 2.H_G = 2.6 = 12$; $M_{DC} = 2.V_A - 2.H_G = 0$.

$Q_{DA} = V_A = 6$; $Q_{DG} = -H_G = -6$; $Q_{DC} = V_A - V_G = 0$.

$N_{DA} = 0$; $N_{DG} = -V_G = -6$; $N_{DC} = H_G = 6$.

Tại C: $M_C = 0$; $Q_C = V_A - V_G = 0$; $N_C = H_G = 6$.

Tương tự cho các tiết diện còn lại.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối

cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn GH có q phân bố đều

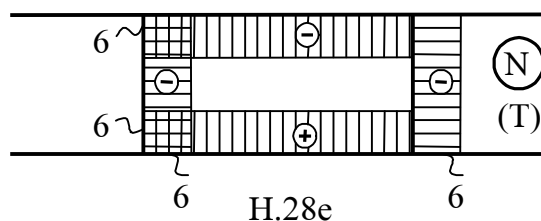
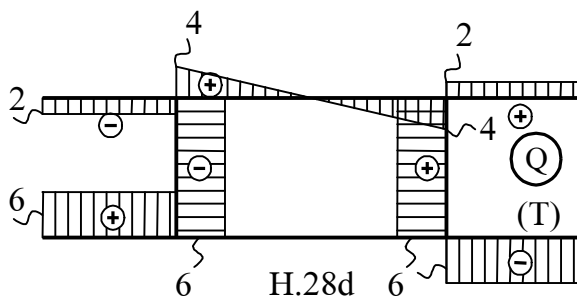
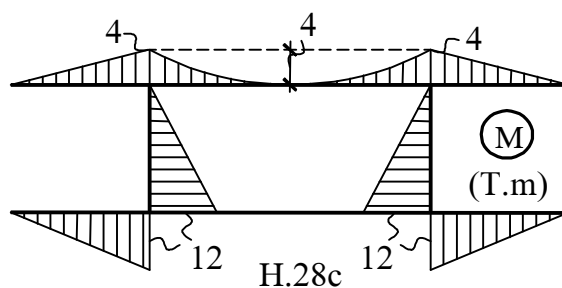
nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.4^2}{8} = 4$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.



c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

IV. Trục hợp lý của vòm ba khớp:

1. Đặt vấn đề: Mômen uốn tại tiết diện k trong vòm ba khớp được xác định bằng biểu thức:

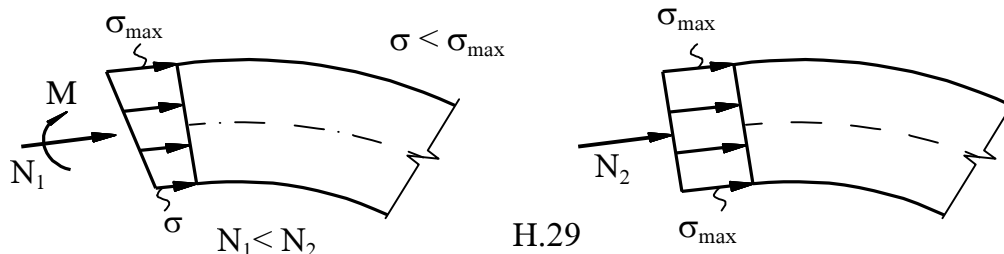
$$M_k(z) = M_k^d - H.y_k.$$

Nếu ta khéo chọn hình dạng của vòm (y_k) sao cho $H.y_k = M_k^d$ thì $M_k(z) = 0$. Và

$$Q_k(z) = 0 \text{ vì } Q_k(z) = \frac{dM_k(z)}{dz} = 0.$$

Lúc này trong vòm chỉ tồn tại lực dọc N_k nên tiết kiệm vật liệu chế tạo vòm. Thật vậy, bằng cách so sánh sự phân bố ứng suất pháp trên tiết diện vòm trong hai trường hợp.

+ Trường hợp $M = 0$, ứng suất phân bố đều. Vật liệu tại mọi tiết diện được sử dụng như nhau nên phát huy hết khả năng làm việc của vật liệu. Nghĩa là tiết kiệm vật liệu.



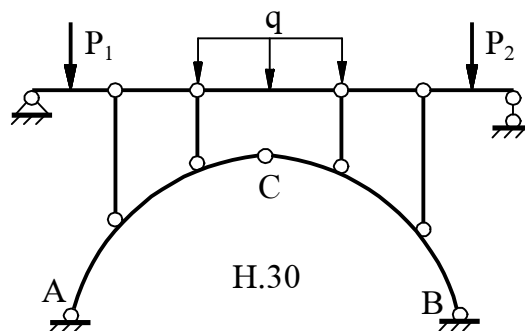
Ngoài ra, lực dọc trong vòm thường gây nén nên nếu chỉ có $N \neq 0$, ta có thể sử dụng những loại vật liệu chịu nén tốt nhưng rẽ tiền như bê tông, gạch, đá...

**Kết luận*: Trục hợp lý của vòm là trục được chọn sao cho mômen uốn tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không.

2. Các dạng trục vòm hợp lý:

a. Trường hợp tải trọng thẳng đứng không phụ thuộc vào hình dạng của vòm:

Khi mà sự thay đổi của trọng lượng bản thân và các tác dụng bên ngoài khi trục vòm thay đổi là không đáng kể. Ví dụ hệ trên hình H.30, các lực P_1, P_2, q truyền qua hệ thống các thanh đứng lên vòm là không thay đổi khi trục vòm thay đổi.



Như vậy, M_k^d sẽ không thay đổi. Suy ra:

$$y_k = \frac{M_k^d}{H} \quad (a)$$

b. Trường hợp tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng trục vòm:

Lúc này không thể sử dụng biểu thức (a) vì M_k^d phụ thuộc vào y_k . Do y_k thay đổi thì tải trọng thay đổi nên M_k^d sẽ thay đổi.

Lấy vi phân hai lần biểu thức (a)

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q}{H} \quad (b)$$

Giải phương trình (b) sẽ xác định được y_k nhưng nói chung là rất phức tạp.

c. Trường hợp tải trọng tác dụng vuông góc với trục vòm: Như các công trình làm việc trong môi trường chất lỏng, chất khí.

Đi khảo sát cân bằng một đoạn vô cùng bé của trục vòm hợp lý.

Lấy tổng mômen đối với tâm O

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow N \cdot \rho - (N + dN) \cdot \rho = 0 \Rightarrow dN = 0$$

$\Rightarrow N = \text{const.}$

Lấy tổng hình chiếu lên phương U:

$$\sum U = 0 \Rightarrow N \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + N \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - q \cdot ds = 0$$

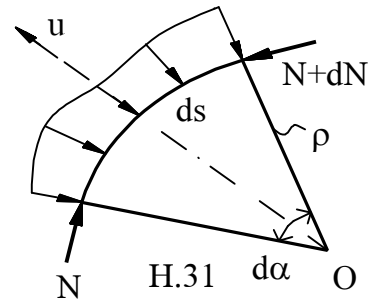
Do $d\alpha$ là VCB nên $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$

$$\Rightarrow N \cdot d\alpha - q \cdot ds = 0.$$

Mặt khác: $ds = \rho \cdot d\alpha$. Nên $\rho = \frac{N}{q}$.

Trường hợp $q = \text{const}$ (phân bố đều)

$$\Rightarrow \rho = \text{const} \text{ (cung tròn)}$$



H.31

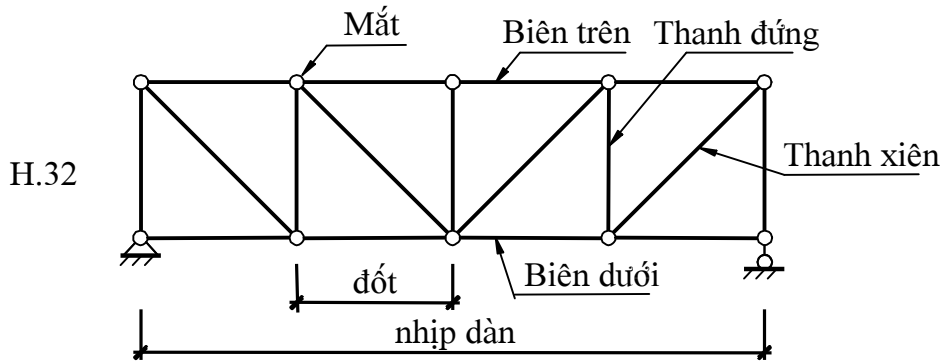
§ 4. HỆ DÀN

I. Phân tích hệ:

1. Định nghĩa: là hệ gồm các thanh thẳng liên kết với nhau chỉ bằng các khớp lý tưởng ở hai đầu mỗi thanh để tạo thành hệ BBH.

2. Cấu tạo của dàn:

- Khoảng cách giữa hai gối tựa gọi là nhịp dàn.
- Các khớp của dàn gọi là các mắt dàn.
- Các thanh dàn nằm trên đường biên dàn gọi là các thanh biên (gồm biên trên và biên dưới).
- Các thanh dàn nằm bên trong biên gọi là các thanh bụng (gồm thanh đứng và thanh xiên).
- Khoảng cách giữa hai mắt dàn thuộc cùng một đường biên gọi là đốt.



2. Các giả thiết để tính dàn:

- Mắt dàn phải nằm tại giao điểm của trục các thanh dàn và là khớp lý tưởng (có thể xoay tự do, không ma sát).
- Bỏ qua trọng lượng bản thân của các thanh dàn.
- Tải trọng chỉ tác dụng lên mắt dàn.

Vậy các thanh dàn làm việc như các liên kết thanh, nghĩa là chỉ tồn tại lực dọc.

4. Đặc điểm của hệ dàn:

- Tiết kiệm vật liệu.
- Trọng lượng bản thân bé.
- Có thể vượt qua được những nhịp lớn.
- Khó thi công, lắp dựng.

II. Xác định nội lực trong các thanh dàn:

Có nhiều phương pháp khác nhau. Ở đây chỉ trình bày phương pháp giải tích và phương pháp đồ giải.

1. Phương pháp giải tích:

a. Phương pháp tách mắt: Nội dung của phương pháp là đi khảo sát sự cân bằng của từng mắt được tách ra khỏi dàn. Thực ra, đây là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt với hệ lực khảo sát là hệ lực đồng quy.

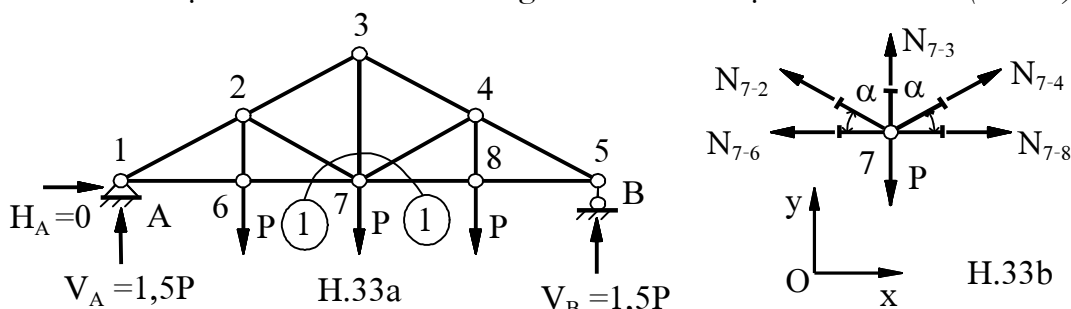
Các bước tiến hành như sau:

- Xác định các thành phần phản lực (nếu cần).
- Lần lượt tách các mắt ra khỏi dàn bằng các mặt cắt quanh mắt.
- Thay thế tác dụng của thanh dàn bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Lúc đầu, các lực dọc chưa biết, giả thiết có chiều dương (vẽ hướng ra ngoài mắt).
- Khảo sát sự cân bằng của từng mắt: Lực tác dụng lên mắt gồm ngoại lực tập trung (nếu có) và lực dọc trong các thanh dàn. Đây là hệ lực đồng quy nên thường sử dụng hai phương trình hình chiếu theo hai phương không song song.

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases}$$

- Khảo sát cân bằng cho tất cả các mắt, sẽ được hệ thống các phương trình. Giải hệ phương trình sẽ xác định được các lực dọc cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì lực dọc gây kéo (đúng chiều đã giả định) và ngược lại.

* Minh họa: Tách và xét cân bằng mắt số 7 của hệ dàn trên hình (H.33a).



Hai phương trình cân bằng hình chiếu theo hai phương có thể thiết lập:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{7-8} + N_{7-4} \cdot \cos\alpha - N_{7-6} - N_{7-2} \cdot \cos\alpha = 0.$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{7-3} + N_{7-2} \cdot \sin\alpha + N_{7-4} \cdot \sin\alpha - P = 0.$$

* Để tránh giải hệ phương trình toán học, ta đi thiết lập điều kiện cân bằng sao cho trong mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số. Cách tiến hành như sau:

- Tách mắt theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có tối đa hai ẩn số chưa biết.
- Để tìm lực dọc trong thanh chưa biết thứ nhất, ta thiết lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương vuông góc với thanh chứa lực dọc chưa biết thứ hai.

* Minh họa: Trở lại ví dụ cho trên hình

(H.33a) ta có thể tách mắt theo thứ tự: 1 → 6

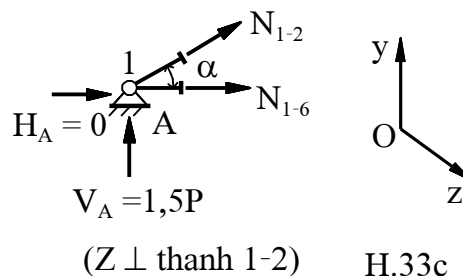
→ 2 → 3... Chặn hạn, tách mắt 1:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{1-2} \cdot \sin\alpha + 1,5 \cdot P = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-2} = -\frac{1,5}{\sin\alpha} (< 0, \text{ gây nén}).$$

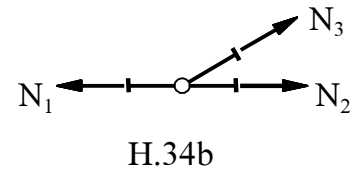
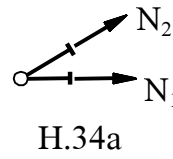
$$\sum Z = 0 \Rightarrow N_{1-6} \cdot \sin\alpha - 1,5 \cdot P \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-6} = \frac{1,5 \cdot P \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} (> 0, \text{ gây kéo}).$$



* Các hệ quả rút ra từ phương pháp tách mắt:

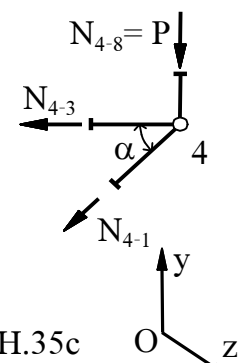
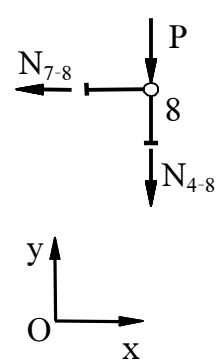
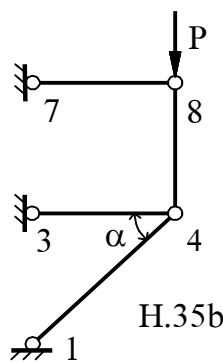
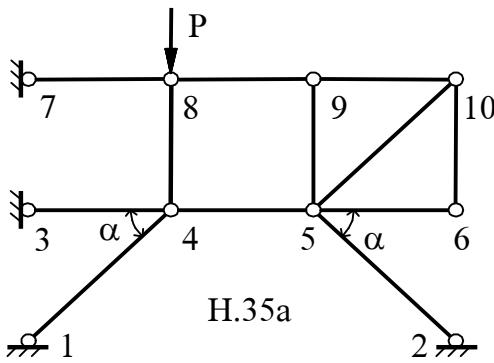
+ *Hệ quả 1*: Nếu một mắt chỉ có hai thanh không thẳng hàng (bộ đôi) và không chịu tải trọng tác dụng thì lực dọc trong hai thanh đó bằng không (Cân bằng mắt trên hình H.34a, $N_1 = N_2 = 0$).



+ *Hệ quả 2*: Nếu một mắt có ba thanh, trong đó có hai thanh thẳng hàng và không chịu tải trọng tác dụng thì nội lực trong thanh không thẳng hàng bằng không; trong hai thanh thẳng hàng thì bằng nhau về giá trị và cùng gây kéo hay gây nén (Cân bằng mắt trên hình H.34b, $N_3 = 0, N_1 = N_2$).

* *Chú ý*: Khi tính dàn, nên sử dụng hai hệ quả trên để loại bỏ những thanh dàn không làm việc ngay từ đầu.

* *Ví dụ*: Xác định lực dọc của các thanh dàn trong hệ dàn trên hình (H.35a)



Áp dụng hệ quả 1 & 2, loại bỏ các thanh dàn không làm việc: (6-5), (6-10), (10-9), (10-5), (9-8), (9-5), (5-4) & (5-2). Kết quả được hệ trên hình (H.35b)

- Tách mắt số 8:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \Rightarrow N_{7-8} = 0 \\ \sum Y = 0 \Rightarrow N_{4-8} = -P \end{cases}$$

- Tách mắt số 4:

$$\begin{cases} \sum Y = 0 \Rightarrow -P - N_{4-1} \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{4-1} = -\frac{P \cdot 2}{\sqrt{2}} (< 0) \\ \sum Z = 0 \Rightarrow N_{4-3} \sin 45^\circ - P \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{4-3} = P (> 0) \end{cases}$$

**Kết luận*: $N_{7-8} = N_{8-9} = N_{9-10} = N_{5-9} = N_{5-10} = N_{6-10} = N_{4-5} = N_{5-6} = N_{5-2} = 0$.

$$N_{7-8} = 0, N_{4-8} = -P, N_{4-1} = -\frac{P \cdot 2}{\sqrt{2}}, N_{4-3} = P.$$

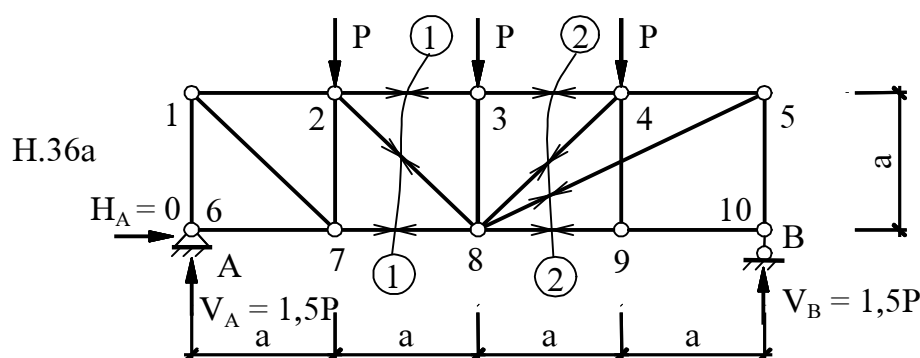
* *Ghi chú*: Phương pháp tách mắt có ưu điểm là đơn giản, dễ áp dụng, nhưng dễ mất sai lầm dặt dẹo.

b. Phương pháp mặt cắt đơn giản:

Nội dung: Đi xác định lực dọc trong các thanh dàn thuộc một mặt cắt - cắt dàn ra làm hai phần độc lập, trong đó số thành phần lực dọc chưa biết không lớn hơn ba.

Các bước tiến hành như sau:

- Xác định các thành phần phản lực (nếu cần)
- Thực hiện "mặt cắt đơn giản" qua thanh dàn cần xác định lực dọc. Yêu cầu: mặt cắt phải chia dàn ra làm hai phần độc lập. Giữ lại và xét cân bằng một phần bất kỳ.
- Thay thế tác dụng của thanh dàn bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Lúc đầu, các lực dọc chưa biết, giả thiết có chiều dương.
- Thiết lập các điều kiện cân bằng: Lúc này, ta có thể thiết lập ba phương trình cân bằng.
- Giải hệ thống ba phương trình, sẽ xác định được lực dọc cần tìm. Kết quả về dấu của nội lực, tương tự phương pháp tách mắt.



* Minh họa:

- Mặt cắt 1 - 1 trên hình (H.36a) là "mặt cắt đơn giản". Các thành phần lực dọc cần xác định thuộc mặt cắt là N_{2-3} , N_{2-8} , N_{7-8} .
- Mặt cắt 2 - 2 trên hình (H.36a) cắt qua bốn thanh chưa biết lực dọc N_{3-4} , N_{8-4} , N_{8-5} , N_{8-9} , nên không phải là "mặt cắt đơn giản".

* Để tránh phải giải hệ thống phương trình, cần thiết lập sao cho trong phương trình chỉ có một ẩn số. Cách thực hiện như sau:

- Nếu lực dọc trong hai thanh chưa biết còn lại đồng quy tại một điểm, thì lấy tổng cân bằng mômen đối với điểm đồng quy đó.
- Nếu lực dọc trong hai thanh chưa biết còn lại song song nhau, thì lấy tổng hình chiếu lên phương vuông góc với phương của hai thanh song song đó.

* Ví dụ 1: Xác định lực dọc trong thanh (2-3), (2-8) của hệ dàn trên hình (H.36a).

- Xác định N_{2-3} :

$$\Sigma M_8^r = 0 \Rightarrow 2a.V_A - a.P + a.N_{2-3} = 0 \Rightarrow N_{2-3} = -2.1,5.P + P = -2.P (< 0).$$

- Xác định N_{2-8} :

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A - P - N_{2-8}.\cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{2-8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.P (> 0)$$

Nhận xét rằng, với mặt cắt 2 - 2 trên hình (H.36a), có thể xác định N_{3-4} bằng cách viết phương trình cân bằng mômen với mắt 8.

* Ví dụ 2: Xác định lực dọc của các thanh dàn (1-3), (5-4), (3-6) trong hệ dàn trên hình (H.36b).

$$\Rightarrow N_{2-7} \cdot \frac{3.a}{2} - N_{1-6} \cdot \frac{3.a}{2} = 0 \quad (a)$$

- Với mặt cắt 2-2:

$$\sum M_3 = 0 \Rightarrow f_2(N_{1-6}, N_{2-7}) = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-7} \cdot a - N_{1-6} \cdot 2a - P \cdot a = 0 \quad (b)$$

Giải hệ (a), (b), được $N_{1-6} = N_{2-7} = -P$ (gây nén)

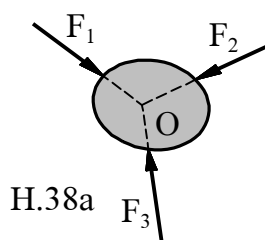
2. Phương pháp đồ giải:

Ý đồ của phương pháp: Thực hiện các phép vẽ hình học và dựa vào hình vẽ đó có thể xác định được nội lực trong các thanh dầm. Tất nhiên, mức độ chính xác của kết quả phụ thuộc vào mức độ chính xác và quy mô của hình vẽ song nói chung có thể đáp ứng được yêu cầu thực tế thiết kế.

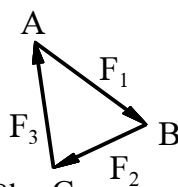
a. Cơ sở của phương pháp:

Dựa trên nguyên lý của môn Cơ học lý thuyết: Điều kiện cân và đủ để hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ lực đó phải khép kín.

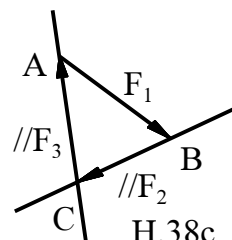
Minh họa nguyên lý:



H.38a



H.38b



H.38c

Xét một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hệ ba lực đồng quy $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ (H.38a). Tức là: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$. Ta đi vẽ đa giác lực của hệ lực này.

+ \vec{F}_1 : được biểu diễn bằng véc tơ \overline{AB} (có phương, chiều của lực \vec{F}_1 và có độ lớn biểu thị trị số của lực \vec{F}_1 theo một tỷ lệ xích tự chọn).

+ Tương tự, \vec{F}_2 được biểu diễn bằng véc tơ \overline{BC} .

Theo điều kiện khép kín của đa giác lực thì véc tơ \overline{CA} chính là \vec{F}_3 .

Tức là: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$. (H.38b)

Nhận xét 1: Nếu trong hệ ba lực này có 1 lực đã biết (chẳng hạn lực \vec{F}_1), hai lực còn lại mới chỉ biết phương (\vec{F}_2, \vec{F}_3), thì theo điều kiện khép kín của đa giác lực, ta hoàn toàn có thể xác định được chúng.

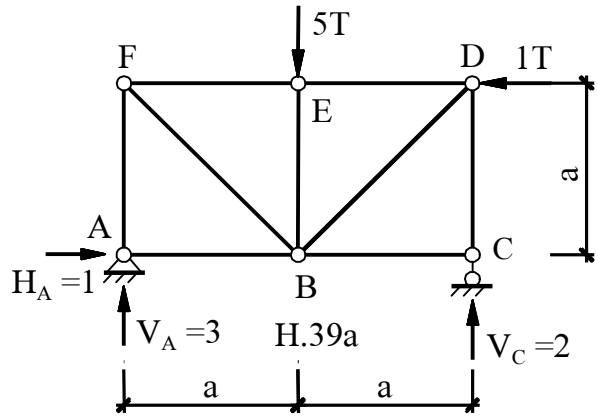
Thật vậy, dựng véc tơ \overline{AB} tương trưng cho lực \vec{F}_1 . Qua B kẻ đường thẳng song song với lực \vec{F}_2 . Qua A kẻ đường thẳng song song với lực \vec{F}_3 . Gọi C là giao điểm của hai đường này. Theo điều kiện khép kín của đa giác lực thì \overline{BC} tương trưng cho lực \vec{F}_2 , \overline{CA} tương trưng cho lực \vec{F}_3 (H.38c).

Mở rộng: Với một hệ lực đồng quy và cân bằng trong đó có hai thành phần mới chỉ biết phương, thì hoàn toàn có thể xác định được chúng theo tính chất khép kín của đa giác lực.

Nhận xét 2: Khi tách mắt dàn, hệ lực tác dụng lên mắt là hệ lực đồng quy, cân bằng và nội lực trong các thanh dàn nếu chưa biết thì cũng có phương đã biết (phương của các thanh dàn chứa nó). Vậy, nếu tại mỗi mắt của dàn chỉ có hai thành phần chưa biết thì có thể xác định được chúng.

Vận dụng nhận xét số 2 vào để xác định lực dọc của các thanh dàn trên hình vẽ (H.39a)

Tách từng mắt của dàn theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có tối đa hai lực dọc chưa biết. Vẽ đa giác lực sẽ xác định được chúng.



*. Tách mắt A:

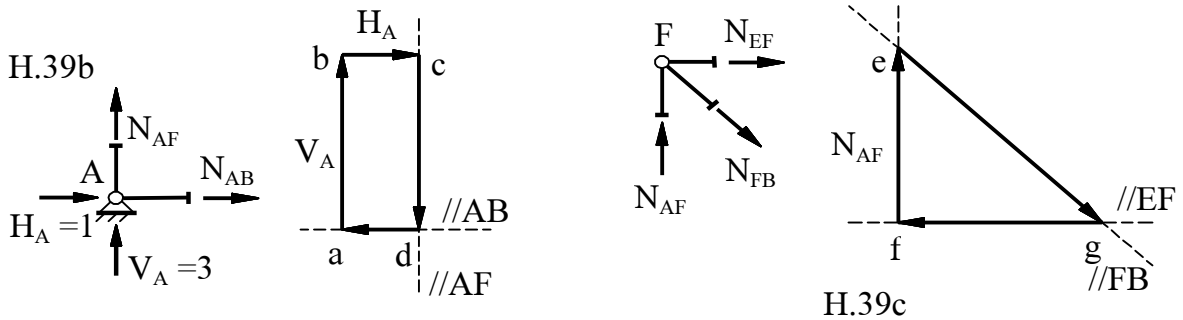
- Lực tác dụng lên mắt A:

+ \vec{H}_A, \vec{V}_A : đã biết

+ $\vec{N}_{AB}, \vec{N}_{AF}$: mới chỉ biết phương.

- Vẽ đa giác lực cho hệ lực $\{\vec{V}_A, \vec{H}_A, \vec{N}_{AB}, \vec{N}_{AF}\}$ theo tỷ lệ xích tự chọn (H.39b)

- Trị số và dấu của các lực cần xác định:



+ Đoạn c-d, d-a: biểu thị trị số của $\vec{N}_{AF}, \vec{N}_{AB}$ (theo tỷ lệ xích đã vẽ).

+ Chiều của lực: Đứng tại mắt A quan sát trên đa giác lực, các véc tơ \vec{cd}, \vec{da} hướng vào mắt dàn nên $\vec{N}_{AB}, \vec{N}_{AF}$ là lực gây nén.

*. Tách mắt F:

- Lực tác dụng lên mắt F gồm:

+ Lực \vec{N}_{AF} : đã biết (tính ở trên).

+ Lực $\vec{N}_{FB}, \vec{N}_{EF}$: chỉ mới biết phương.

- Vẽ đa giác lực cho hệ lực $\{\vec{N}_{FE}, \vec{N}_{AF}, \vec{N}_{FB}\}$. Xem hình vẽ (H.39c).

- Trị số và dấu của các lực:

+ Đoạn e-g, g-f: biểu thị trị số của lực $\vec{N}_{FB}, \vec{N}_{EF}$ (theo tỷ lệ xích đã vẽ).

+ Chiều của lực: véc tơ \vec{gf} hướng vào mắt F nên \vec{N}_{FE} gây nén, véc tơ \vec{eg} hướng ra khỏi mắt F nên \vec{N}_{FB} gây kéo.

Tiến hành tương tự cho các mắt khác theo nguyên tắc trên, ta sẽ xác định được nội lực trên toàn dàn.

Nhận xét 3: Với mỗi mắt của dàn cần phải vẽ một đa giác lực. Các đa giác này lại rời rạc nhau nên có nhiều lực phải vẽ đến hai lần, gây tốn công sức và điều quan trọng là làm giảm độ chính xác (do mắc sai số cộng dồn). Để khắc phục nhược điểm này, người ta vẽ gộp các đa giác lực trên một hình vẽ. Hình vẽ này gọi là giản đồ nội lực hay còn gọi là giản đồ Maxwell - Crêmona.

b. Giản đồ Maxwell - Cremona:

Để vẽ giản đồ nội lực, cần thống nhất một số quy ước và tiến hành theo các bước sau:

* *Bước 1:* Xác định phản lực tại các gối tựa: Thường tiến hành theo phương pháp giải tích đã biết.

* *Bước 2:* Phân miền bên ngoài và bên trong dàn.

- Miền bên ngoài dàn: là những miền nằm bên ngoài chu vi dàn và được giới hạn bởi các ngoại lực. Miền bên ngoài dàn được đánh bằng các chữ cái a, b, c...thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn.

- Miền bên trong dàn: là những miền được giới hạn bằng các thanh dàn. Miền bên trong dàn được đánh bằng các chữ số liên tục 1, 2, 3...

- Cách đọc tên ngoại lực: tên của ngoại lực được đọc bằng hai chỉ số biểu thị hai miền hai bên ngoại lực và đọc thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn.

Ví dụ: Lực V_A đọc là a-b.

- Cách đọc tên nội lực: tên của nội lực được đọc bằng hai chỉ số biểu thị hai miền hai bên thanh. Muốn đọc nội lực trong một thanh, đứng tại mắt có chứa thanh đó và đọc tên của hai miền hai bên thanh thuận theo chiều kim đồng hồ quanh mắt đang đứng.

Ví dụ: lực dọc trong thanh FB nếu đứng tại F đọc là 2-1; nếu đứng tại B đọc là 1-2.

Chú ý: - tên nội lực phụ thuộc vào vị trí đứng

- mỗi miền sau này chính là một đỉnh của đa giác lực trên giản đồ.

* *Bước 3:* Vẽ đa giác lực của ngoại lực theo tỷ lệ xích tự chọn. Khi vẽ, không dùng dấu véc tơ (mũi tên) để biểu diễn lực mà ghi trên đó hai chỉ số tương ứng với cách đọc tên ngoại lực. Chỉ số đầu biểu thị góc, chỉ số sau biểu thị ngọn.

Chú ý: đa giác lực phải tự khép kín.

* *Bước 4:* Vẽ đa giác lực của nội lực.

Nguyên tắc chung: để xác định một đỉnh (của 1 miền) nào đó trên đa giác lực ta cần biết trước hai đỉnh (của hai miền lân cận) trên đa giác. Từ hai đỉnh đã biết, kẻ hai đường thẳng song song với hai thanh dàn giới hạn bởi miền đã biết và miền cần tìm. Giao điểm chính là đỉnh (của 1 miền) cần tìm.

Ví dụ: Xác định đỉnh 1 (miền 1) trên đa giác.

Hai miền lân cận đã biết trên đa giác là a, c. Qua a, kẻ đường song song với AB, qua c kẻ đường song song với AF. Giao điểm chính là 1.

* *Bước 5:* Xác định giá trị và chiều của nội lực trong các thanh dầm.

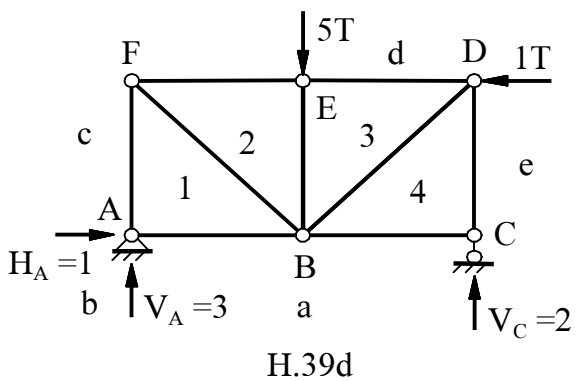
- Muốn xác định nội lực trong thanh $i-k$, ta chỉ việc đo chiều dài của đoạn $i-k$ tương ứng trên giản đồ theo tỷ lệ xích vừa vẽ.

- Muốn xác định dấu của nội lực trong thanh $i-k$, ta chỉ việc đứng tại mắt có chứa thanh $i-k$ và đọc tên của nội lực trong thanh thuận theo chiều kim đồng hồ quanh mắt đang đứng. Quan sát trên giản đồ, nếu nó có chiều hướng vào mắt là lực gây nén và ngược lại.

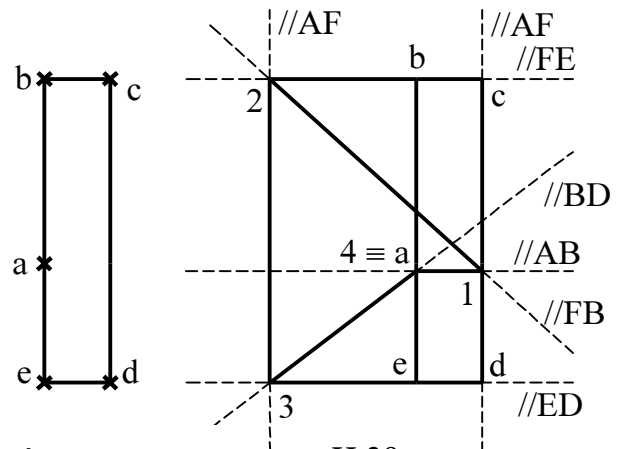
Ví dụ: lực dọc trong thanh FB.

+ Giá trị chính là đoạn 1-2 trên giản đồ.

+ Dấu: Nếu đứng tại F thì sẽ đọc là 2-1 và quan sát trên giản đồ thấy hướng ra xa mắt F nên là lực gây kéo.



H.39d

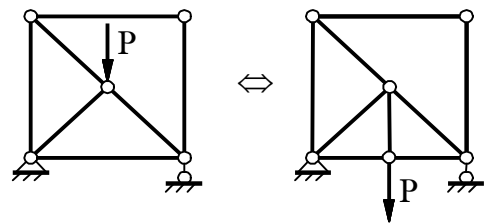


Đa giác ngoại lực

H.39e

**Chú ý:*

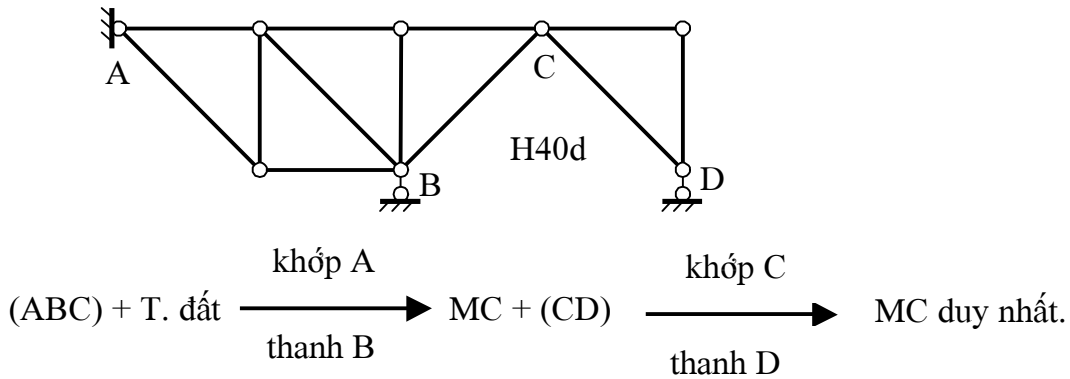
- Đối với những dầm mà không thể thực hiện tách mắt để vẽ (do có không đảm bảo việc tách mắt sao cho số ẩn không vượt quá 2), ta có thể sử dụng các phương pháp giải tích để xác định trước lực dọc trong một số các thanh dầm trước khi vẽ.



H.39f

- Nếu ngoại lực nằm bên trong dầm, tìm cách đưa ra ngoài chu vi dầm trước khi thực hiện. Ví dụ hệ trên hình (H.39f).

Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC (dầm đơn giản), CDE (hệ ba khớp).



Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC, CD là những hệ dàn.

* Nhận xét:

- Có thể xây dựng hệ ghép bằng cách phát triển miếng cứng.
- Theo chiều phát triển miếng cứng, ta loại bỏ miếng cứng trước thì hệ còn lại sẽ bị BH.

3. Cấu tạo của hệ ghép:

- Hệ chính: là hệ mà nếu loại bỏ những hệ lân cận nó vẫn BBH.
- Ví dụ:* Các hệ đầu tiên trong sơ đồ phát triển hệ của các hệ ở trên.
- Hệ phụ: là hệ mà nếu loại bỏ các hệ lân cận thì nó bị BH.
- Ví dụ:* Các hệ trừ hệ đầu tiên trong sơ đồ phát triển hệ của các hệ ở trên.
- * Hệ trung gian: là hệ phụ nhưng là hệ chính của hệ khác.
- Ví dụ:* Hệ CDE trong hệ trên hình (H.40a & H.40b).

II. Nguyên tắc làm việc của hệ ghép:

- Tải trọng tác dụng lên hệ chính chỉ gây ra nội lực trong hệ chính, không gây ra nội lực trong hệ phụ. Lúc này, do hệ quả biến dạng của hệ chính, hệ phụ chỉ bị nghiêng đi mà không biến dạng nên không xuất hiện nội lực.
- Tải trọng tác dụng lên hệ phụ thì gây ra nội lực trong cả hệ phụ và hệ chính. Tải trọng sẽ truyền áp lực từ hệ phụ lên hệ chính thông qua liên kết nối giữa hệ phụ và hệ chính.

III. Tính toán hệ ghép:

Các bước tiến hành như sau:

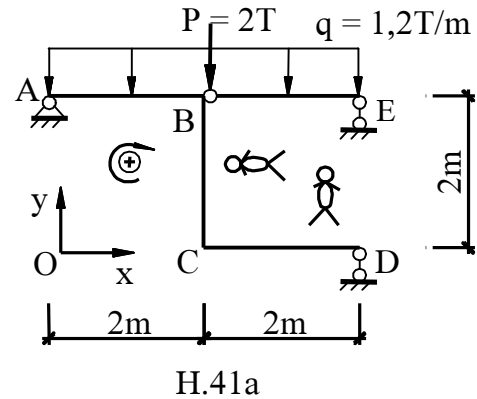
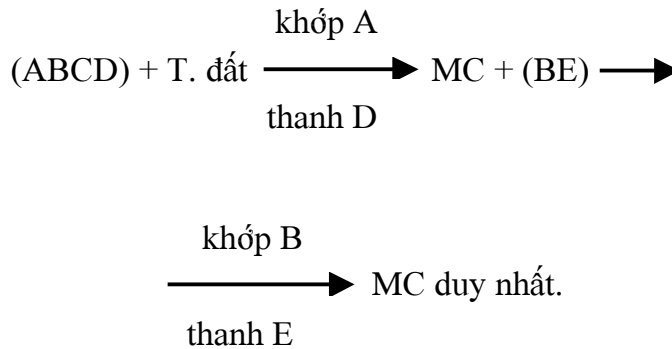
- * *Bước 1:* Phân tích cấu tạo hệ, xác định hệ chính, hệ phụ, hệ trung gian.
- * *Bước 2:* Tách hệ ghép ra thành nhiều hệ tách biệt, sắp xếp theo thứ tự: hệ phụ trước, hệ chính sau. Đối với hệ phụ, thay thế liên kết đối với hệ chính của nó bằng liên kết tương đương nối đất.
- * *Bước 3:* Giải lần lượt các hệ theo thứ tự: hệ phụ trước, hệ chính sau. Khi tính hệ chính, phải truyền phản lực từ hệ phụ (của nó) vào. Truyền tại vị trí liên kết giữa hệ phụ với hệ chính, có giá trị bằng phản lực khi tính cho hệ phụ và có chiều ngược lại.

Sau khi giải cho tất cả các hệ thành phần, ghép các biểu đồ nội lực lại với nhau, sẽ được kết quả cần tìm.

CÁC VÍ DỤ VỀ HỆ GHÉP

* Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.41a)

1. Phân tích hệ:



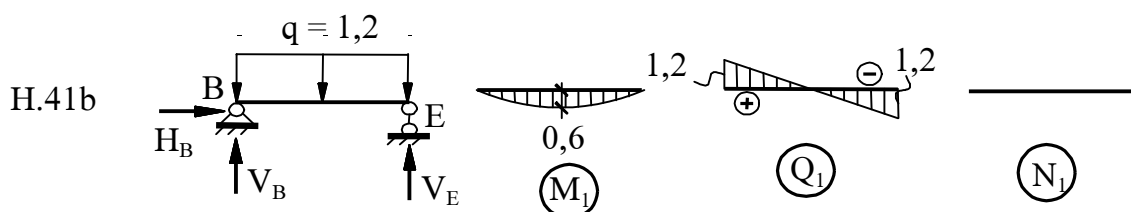
H.41a

Hệ đã cho là hệ ghép, hệ chính ABCD (hệ khung đơn giản) & hệ phụ BE (hệ dầm đơn giản).

2. Giải lần lượt các hệ đơn giản:

a. Hệ phụ BE (H.41b):

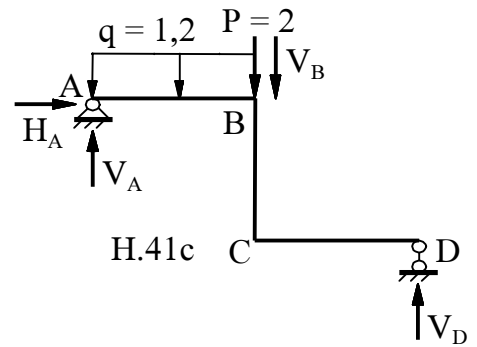
- Xác định phản lực $\{V_B, H_B, V_E\}$: Dễ thấy $H_B = 0$; $V_B = V_E = \frac{q \cdot 2}{2} = 1,2$.
- Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:
 Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = V_B = 1,2$; $N_B = 0$.
 Tại E: $M_E = 0$; $Q_E = -V_E = -1,2$; $N_E = 0$.
- Vẽ các biểu đồ nội lực (M_1), (Q_1), (N_1):
 + Biểu đồ mômen: tung độ treo $f = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{1,2 \cdot 2^2}{8} = 0,6$.
 + Biểu đồ lực cắt: là đoạn đường thẳng.
 + Biểu đồ lực dọc: là đoạn đường thẳng.



b. Hệ chính ABCD (H.41c):

- Xác định phản lực $\{V_A, H_A, V_D\}$:
 $\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0$.
 $\sum M_D = 0 \Rightarrow 4 \cdot V_A - 2 \cdot q \cdot 3 - 2 \cdot P - 2 \cdot V_B = 0$
 $\Rightarrow 4 \cdot V_A - 2 \cdot 1,2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 1,2 \cdot 2 = 0$
 $\Rightarrow V_A = 3,4 (>0)$.

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow -4.V_D + 2.q.1 + 2.P + 2.V_B &= 0. \\ \Rightarrow -4.V_D + 2.1,2.1 + 2.2 + 2.1,2 &= 0. \\ \Rightarrow V_D = 2,2 (>0) \end{aligned}$$



Kiểm tra: Dễ thấy thỏa phương trình $\sum Y = 0$.

- Xác định nội lực tại các tiết diện đặc

trung:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A = 3,4$;
 $N_A = 0$.

Tại B: $M_{BA} = 2.V_A - 2.q.1 = 2.3,1 - 1,2.2.1 = 4,4$.
 $M_{BC} = -2.V_D = -2.2,2 = -4,4$
 $Q_{BA} = V_A - 2.q = 3,4 - 2.1,2 = 1$; $N_{BA} = 0$.
 $Q_{BC} = 0$; $N_{BC} = -V_D = -2,2$.

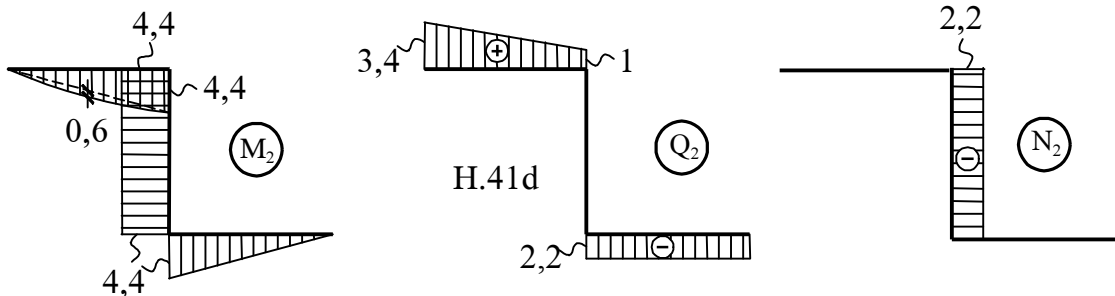
Tại C: $M_{CB} = -2.V_D = -2.2,2 = -4,4$; $Q_{CB} = 0$; $N_{CB} = -V_D = -2,2$.
 $M_{CD} = 2.V_D = 2.2,2 = 4,4$; $Q_{CD} = -V_D = -2,2$; $N_{CD} = 0$.

Tại D: $M_D = 0$; $Q_D = -V_D = -2,2$; $N_D = 0$.

- Vẽ các biểu đồ nội lực (M_2), (Q_2), (N_2) (H.41d):

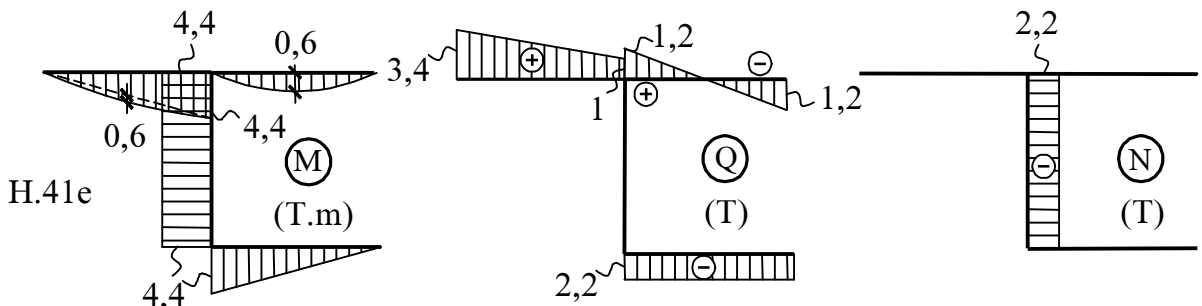
+ Biểu đồ mômen: Trên AB có tung độ treo $f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{1,2.2^2}{8} = 0,6$.

+ Biểu đồ lực cắt là những đoạn thẳng.



+ Biểu đồ lực cắt là những đoạn thẳng.

3. Vẽ gộp các biểu đồ nội lực (H.41e):



* Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.42a)

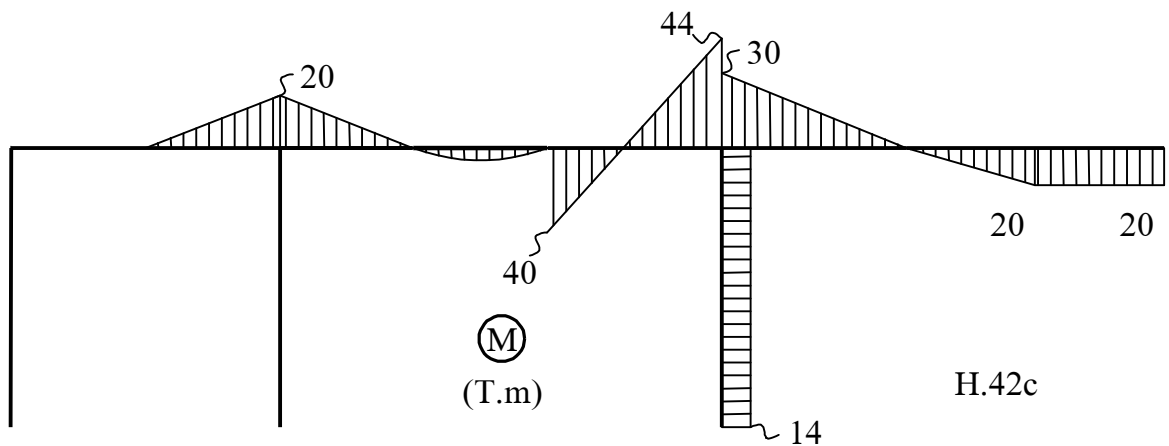
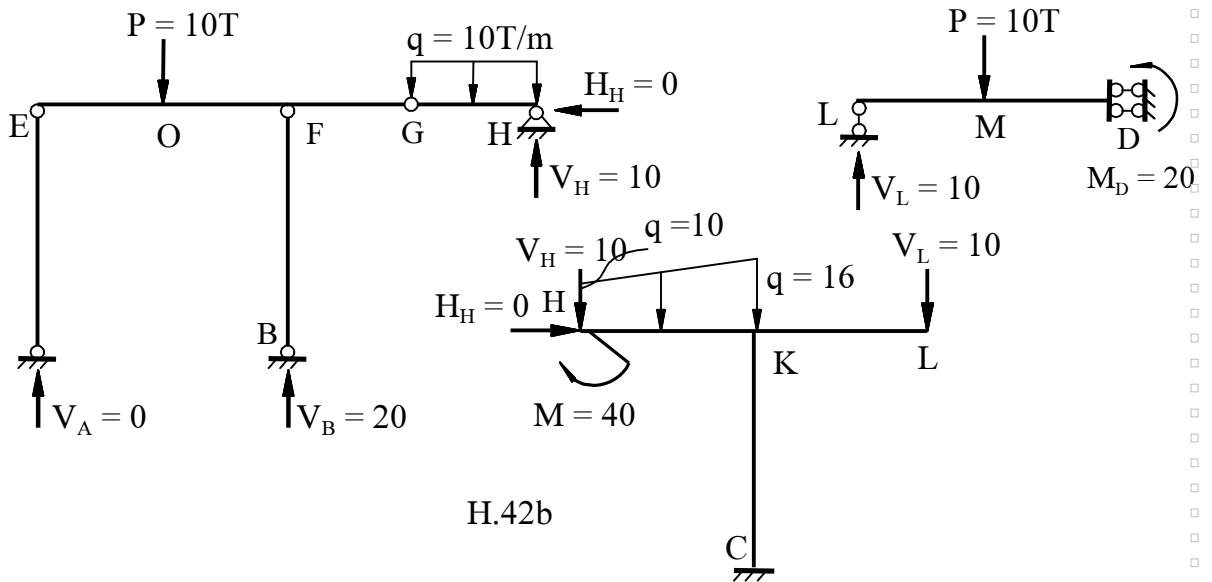
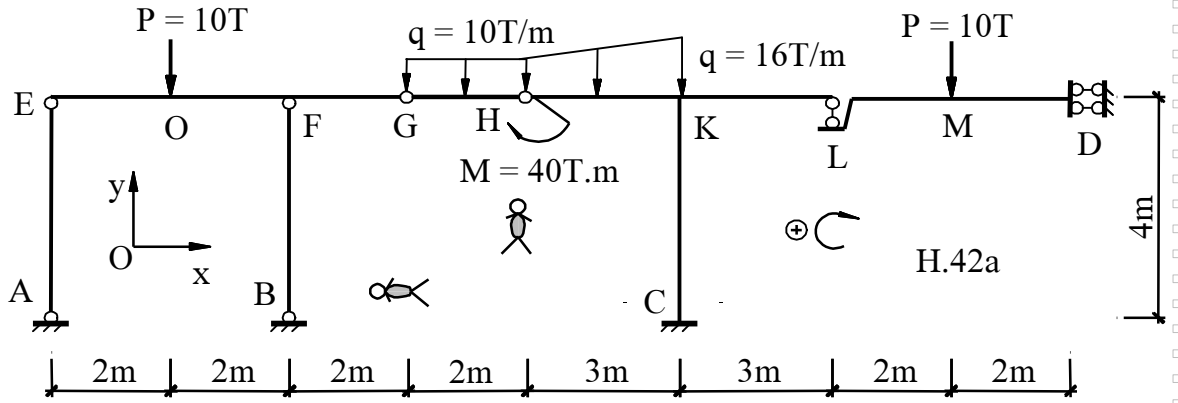
Hệ đã là hệ ghép của 3 hệ :

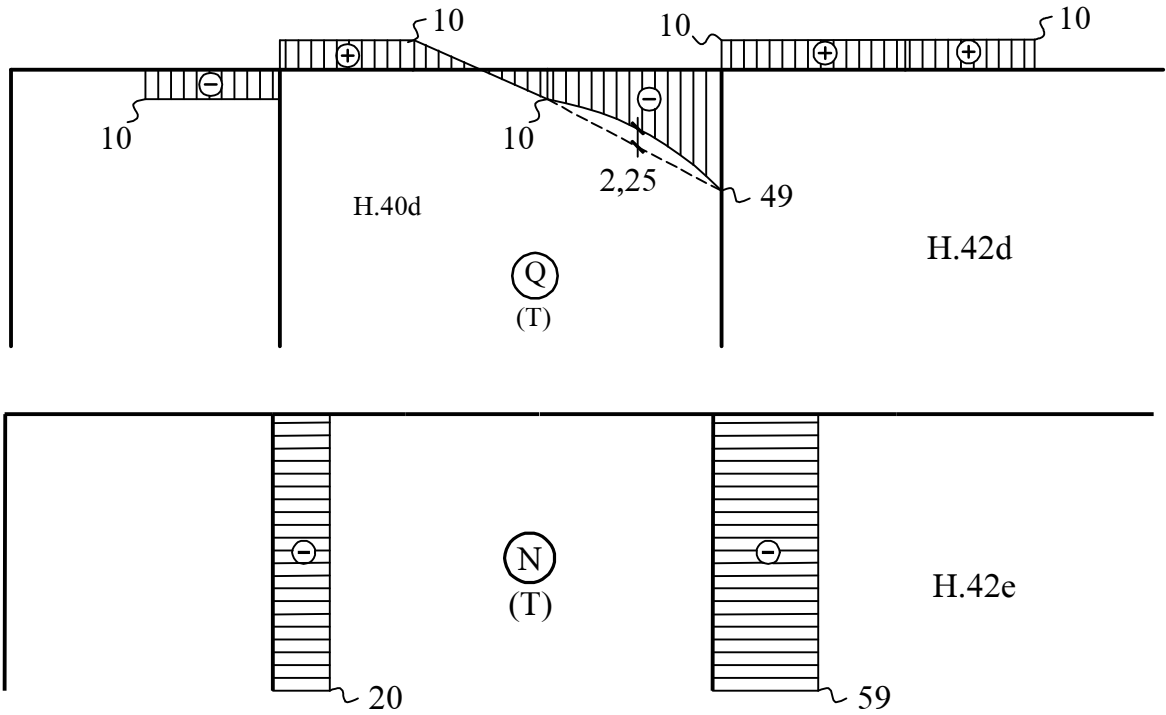
- Hệ 3 khớp ABEFGH, các khớp là H, G và khớp giả tạo bởi hai thanh AE & BF. Đây là hệ phụ.

- Hệ dầm LMD, là hệ phụ.
- Hệ khung CHKL, là hệ chính.

Quá trình tính toán trình bày trên hình (H.42b).

Kết quả biểu đồ nội lực trên toàn hệ trên hình (H.42c, d, e).





* Ví dụ 3: Xác định lực dọc trong thanh dầm (3-8), (1-7) của hệ dầm cho trên hình (H.43a)

Hệ dầm đã cho có thể xem như hệ ghép và phân tích thành hệ chính và phụ như trên hình vẽ.

- Dùng mặt cắt 1-1 tách mắt 3

$$\sum Y = 0$$

$$\Rightarrow -N_{3-8} \cdot \sin 45^\circ + V_3 = 0$$

$$\Rightarrow N_{3-8} = 0,5 \cdot P \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{P}{\sqrt{2}} (> 0)$$

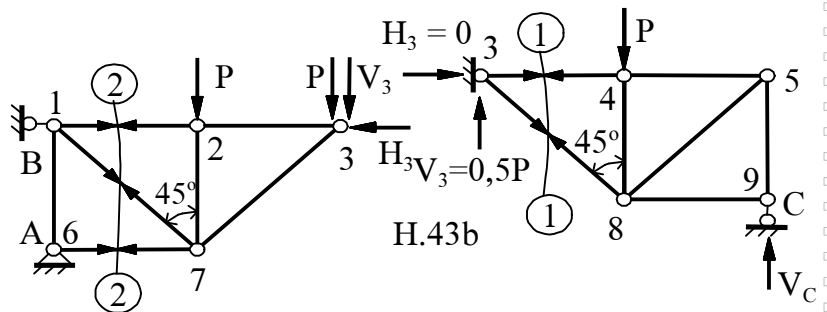
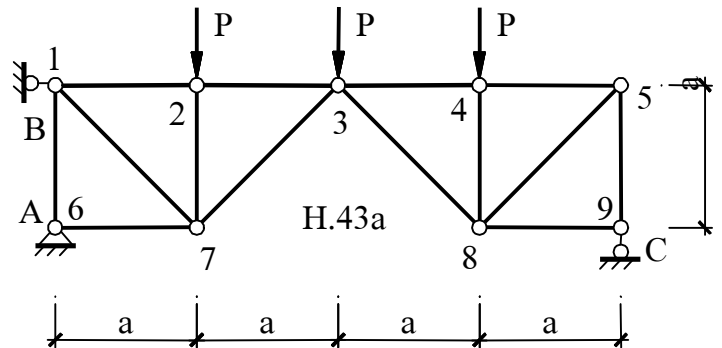
- Dùng mặt cắt "đơn giản" 2-2 trên hệ chính

$$\sum Y^{ph} = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-7} \cdot \cos 45^\circ - P - P - 0,5 \cdot P = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,5 \cdot P$$

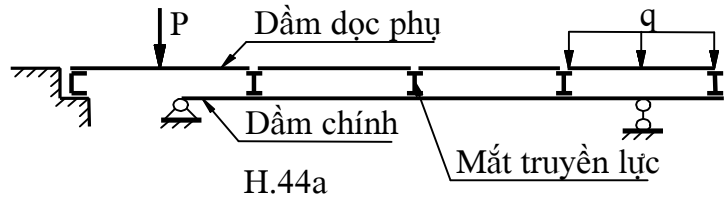
$$\Rightarrow N_{1-7} = \frac{5 \cdot P}{\sqrt{2}} (> 0)$$



§6. HỆ CÓ HỆ THỐNG TRUYỀN LỰC

I. Phân tích cấu tạo hệ:

1. Định nghĩa: là những hệ mà tải trọng không tác dụng trực tiếp lên kết cấu chịu lực chính mà phải thông qua một hệ thống truyền lực.



2. Đặc điểm của hệ có hệ thống truyền lực:

- Cố định được vị trí đặt lực.
- Giảm nhẹ trọng lượng của các kết cấu chịu lực chính.
- Bảo vệ các kết cấu chịu lực chính tránh bị hư hỏng trong quá trình chịu tải.

Chú ý: Các kết cấu hệ có hệ thống truyền lực thường gặp sàn nhà, mái nhà, kết cấu mặt cầu....

II. Tính hệ có hệ thống truyền lực:

- Phân dầm dọc phụ: làm việc như những dầm đơn giản kê lên các gối tựa tại vị trí các mắt truyền lực.
- Phần kết cấu chịu lực chính: chịu áp lực từ dầm dọc phụ thông qua các mắt truyền lực.

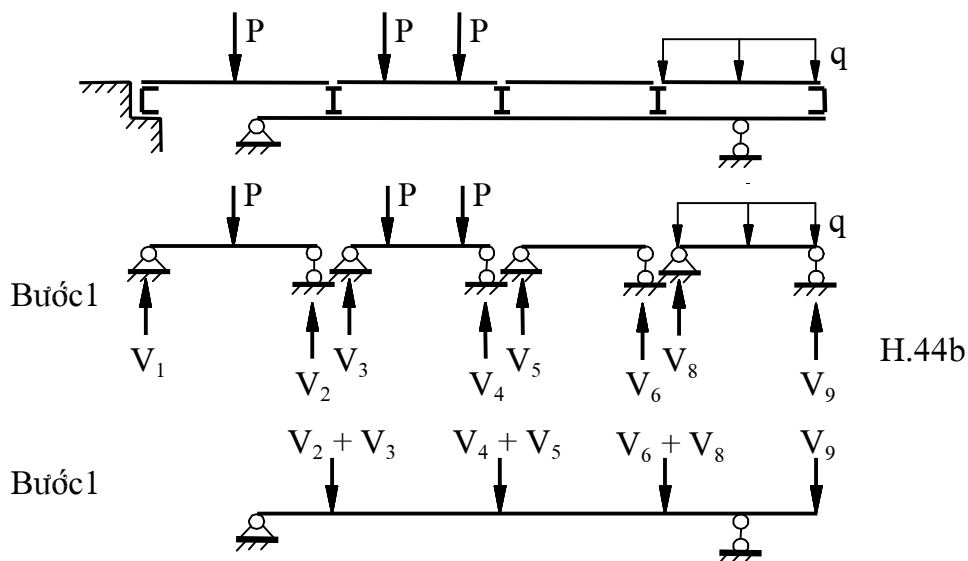
Các bước tính toán như sau:

* *Bước 1:* Xem các dầm dọc phụ như những dầm đơn giản kê lên các gối tựa tại vị trí các mắt truyền lực và chịu tải trọng tương ứng. Hệ này đã biết cách tính.

* *Bước 2:* Tính kết cấu chịu lực chính.

- Truyền phản lực từ dầm dọc phụ vào (giống hệ ghép).
- Tính kết cấu chịu lực chính như những hệ thông thường đã biết.

Minh họa:

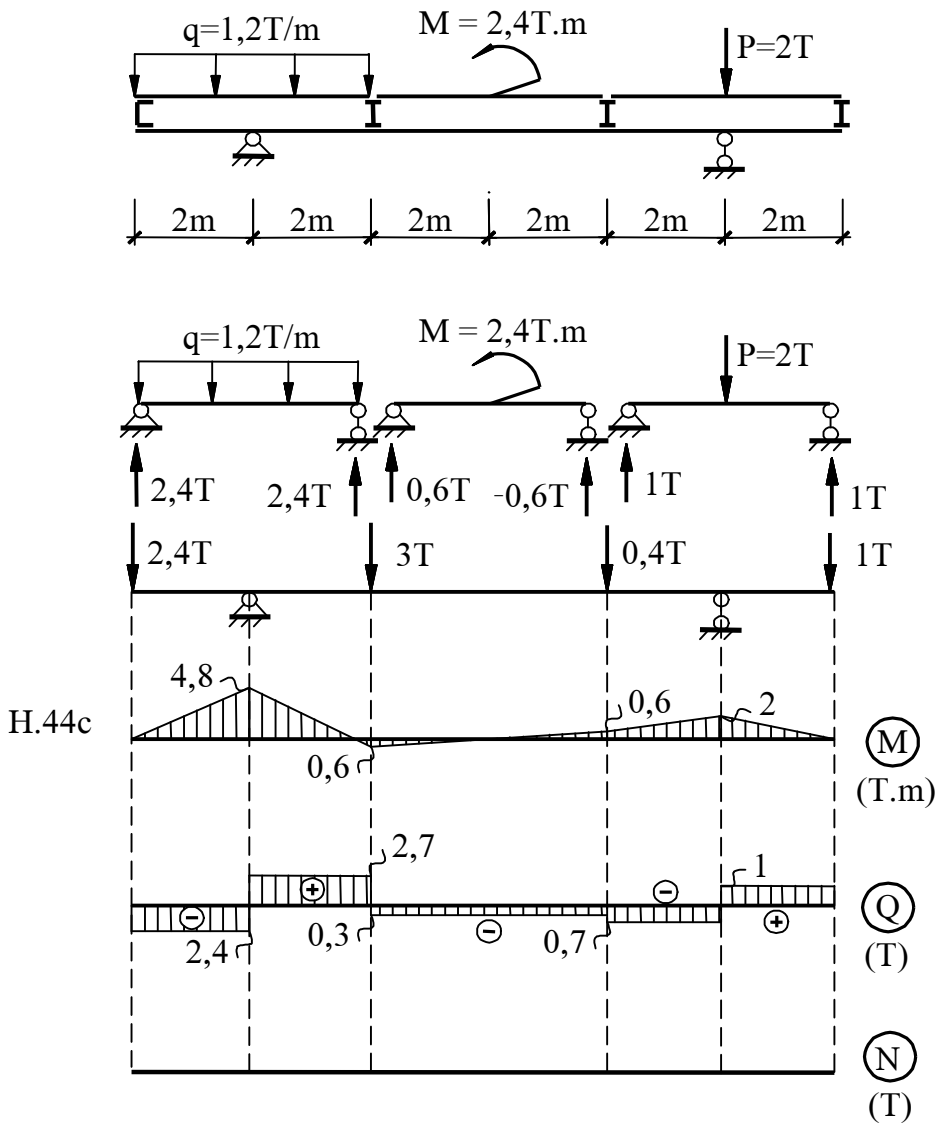


* *Nhận xét:* Do tải trọng truyền vào kết cấu chịu lực chính những lực tập trung, nên biểu đồ mômen trong kết cấu chịu lực chính có dạng đa giác còn biểu đồ lực cắt có dạng hình thang.

* *Ví dụ:* Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ có hệ thống truyền lực (H.44c).

1. Tính các dầm dọc phụ: là những dầm đơn giản, tính được dễ dàng. Ở đây chỉ xác định phản lực của nó.

2. Tính kết cấu chịu lực chính: là dầm đơn giản chịu tải trọng là áp lực từ các dầm dọc phụ truyền vào. Kết quả thể hiện trên hình vẽ.



CHƯƠNG 3

XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ PHẪNG TÍNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG.

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM.

I. Tải trọng di động và nguyên tắc tính hệ chịu tải trọng di động:

1. Tải trọng di động: là tải trọng có vị trí thay đổi tác dụng lên công trình như tải trọng của đoàn xe, đoàn người di chuyển trên cầu...

Khi tải trọng di động trên hệ, đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) sẽ thay đổi. Do đó, khi nghiên cứu hệ chịu tải trọng di động, ta phải giải quyết hai nhiệm vụ:

- Xác định vị trí bất lợi hay còn gọi là vị trí để tính của tải trọng di động trên công trình là vị trí của tải trọng để sao cho ứng với vị trí đó, đại lượng nghiên cứu S có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất.

- Xác định trị số để tính hay còn gọi là giá trị để tính là trị số lớn nhất về trị tuyệt đối của đại lượng nghiên cứu S ứng với vị trí để tính của tải trọng di động.

2. Nguyên tắc chung để tìm vị trí bất lợi và giá trị để tính:

- Giả thiết khoảng cách giữa các tải trọng di động trên công trình là không đổi và vị trí của chúng được xác định theo một tọa độ chạy z .

- Thiết lập biểu thức của đại lượng nghiên cứu S theo vị trí của tải trọng di động (theo tọa độ z) bằng các nguyên tắc như đã biết trong phần hệ chịu tải trọng bất độn. S là hàm số theo z $S(z)$.

- Tìm cực trị của hàm $S(z)$. Giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của các cực trị là giá trị để tính. Vị trí z_0 tương ứng của đoàn tải trọng là vị trí để tính.

Hàm $S(z)$ thường là hàm nhiều đoạn và không liên tục về giá trị cũng như đạo hàm của nó nên việc tìm các cực trị khó khăn. Người ta sử dụng phương pháp đường ảnh hưởng để nghiên cứu.

II. Định nghĩa đường ảnh hưởng:

Đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu S là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của đại lượng S tại một vị trí xác định trên công trình theo vị trí của một lực tập trung bằng đơn vị, không thứ nguyên, có phương và chiều không đổi di động trên công trình gây ra. Ký hiệu đ.a.h.S

III. Các quy ước khi vẽ đường ảnh hưởng:

- Đường chuẩn thường chọn có phương vuông góc với lực $P = 1$ di động (hoặc trục các cầu kiện).

- Các tung độ dựng vuông góc với đường chuẩn.

- Các tung độ dương dựng theo chiều của tải trọng di động và ngược lại.

- Ghi các ký hiệu (\oplus) , (\ominus) vào miền dương, âm của đ.a.h.S.

IV. Nguyên tắc vẽ đường ảnh hưởng:

Các bước tiến hành như sau:

**Bước 1:* Cho một lực $P = 1$ di động trên công trình. Vị trí của nó cách gốc hệ trục tọa độ chọn tùy ý một đoạn z .

**Bước 2:* Xác định biểu thức của đại lượng nghiên cứu S tương ứng với vị trí của lực P có tọa độ z bằng các phương pháp tính với tải trọng bất động đã quen biết, được $S(z)$. $S(z)$ gọi là phương trình đường ảnh hưởng.

**Bước 3:* Vẽ đồ thị của hàm số $S(z)$ sẽ được đ.a.h.S

**Ví dụ:* Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k (H.3.1a)

1. Xác định $M_k(z)$:

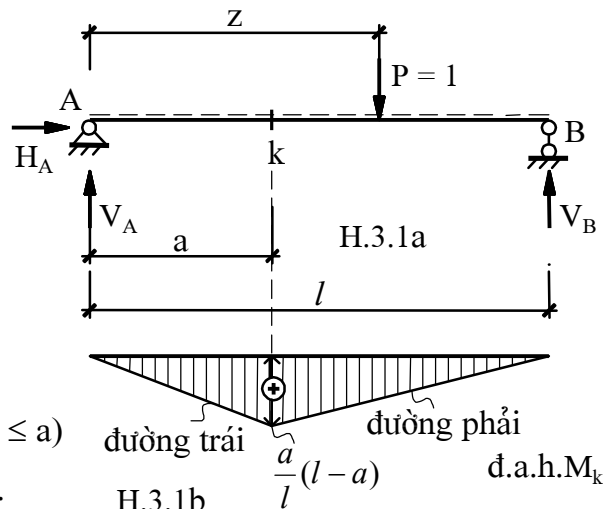
a. Xác định phản lực:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot l - P \cdot (l - z) = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{(l - z)}{l}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot l - P \cdot z = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{z}{l}$$



b. Xác định $M_k(z)$:

- Khi $P = 1$ di động bên trái k ($0 \leq z \leq a$)

$$M_k(z) = V_B \cdot (l - a) = \frac{z}{l} \cdot (l - a)$$

- Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($a \leq z \leq l$)

$$M_k(z) = V_A \cdot z = \frac{(l - z)}{l} \cdot a$$

2. Vẽ đ.a.h. M_k :

- Khi $P = 1$ di động bên trái k ($0 \leq z \leq a$)

$$M_k(z) = \frac{z}{l} \cdot (l - a) \text{ có dạng bậc nhất, được vẽ qua 2 điểm:}$$

$$+ z = 0 \Rightarrow M_k(0) = 0.$$

$$+ z = a \Rightarrow M_k(a) = \frac{a}{l} \cdot (l - a) (> 0)$$

- Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($a \leq z \leq l$)

$$M_k(z) = \frac{(l - z)}{l} \cdot a \text{ có dạng bậc nhất được vẽ qua 2 điểm:}$$

$$+ z = a \Rightarrow M_k(a) = \frac{a}{l} \cdot (l - a) (> 0)$$

$$+ z = l \Rightarrow M_k(l) = 0.$$

Kết quả trên hình (H.3.1b)

IV. Ý nghĩa và thủ nguyên của tung độ đường ảnh hưởng:

1. Ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng của đại lượng S :

Tung độ đường ảnh hưởng đại lượng S tại một tiết diện nào đó biểu thị giá trị của đại lượng S do lực $P = 1$ đặt ngay tại tiết diện đó gây ra.

2. So sánh ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng của đại lượng S với biểu đồ nội lực:

Trong chương 2, ta biết rằng: tung độ biểu đồ nội lực tại một tiết diện biểu thị giá trị của nội lực tại ngay tiết diện đó do các tải trọng có vị trí không đổi tác dụng trên toàn hệ gây ra.

Như vậy, biểu đồ nội lực cho thấy quy luật phân bố của nội lực trên tất cả các tiết diện của hệ; còn đường ảnh hưởng của đại lượng S cho thấy quy luật biến thiên của đại lượng nghiên cứu S tại một vị trí xác định nào đó do lực tập trung $P = 1$ di động trên công trình gây ra.

3. Thứ nguyên tung độ đường ảnh hưởng:

$$\text{Thứ nguyên tung độ đường ảnh hưởng} = \frac{\text{Thứ nguyên đại lượng S}}{\text{Thứ nguyên lực P}}$$

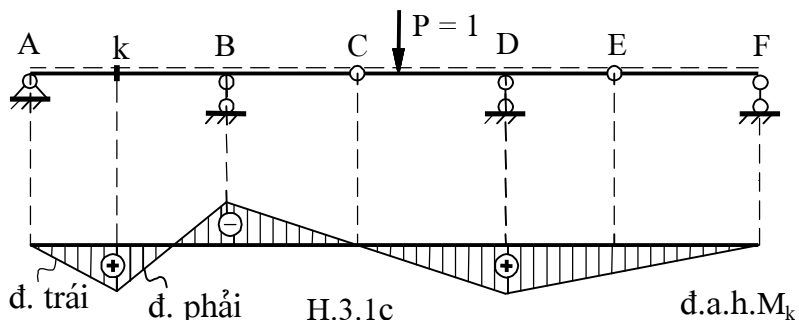
Vậy, nếu thứ nguyên của lực là kN, của chiều dài là m thì tung độ đường ảnh hưởng phản lực có thứ nguyên $\frac{kN}{kN}$ (tức là hữ số), mômen uốn là $\frac{kN.m}{kN} = m$.

V. Dạng đường ảnh hưởng:

Trong hệ tĩnh định, đường ảnh hưởng phản lực và nội lực là những đoạn thẳng tương ứng với mỗi miếng cứng thành phần của hệ nếu miếng cứng đó không chứa đại lượng nghiên cứu S.

Nếu miếng cứng thành phần chứa đại lượng nghiên cứu S thì đường ảnh hưởng thuộc miếng cứng này gồm hai đoạn thẳng giới hạn tại vị trí tương ứng dưới tiết diện chứa đại lượng S. Lúc này, đoạn đường bên trái gọi là đường trái và đoạn còn lại gọi là đường phải.

Ví dụ cho trên H.3.1c, ABC là miếng cứng thành phần có chứa đại lượng S; CDE, EF là miếng cứng thành phần không chứa đại lượng S



§2. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ DẦM, KHUNG ĐƠN GIẢN.

I. Dầm công xơn:

1. Phân tích:

a. Khi đầu thừa bên phải: (H.3.2a)

- Xác định $M_k(z)$, $Q_k(z)$, $N_k(z)$:

+ Khi $P = 1$ di động bên trái tiết diện k ($b \leq z \leq l$):

$$M_k(z) = 0, Q_k(z) = 0, N_k(z) = 0.$$

+ Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($0 \leq z \leq b$):

$$M_k(z) = -P.(b - z) = -(b - z)$$

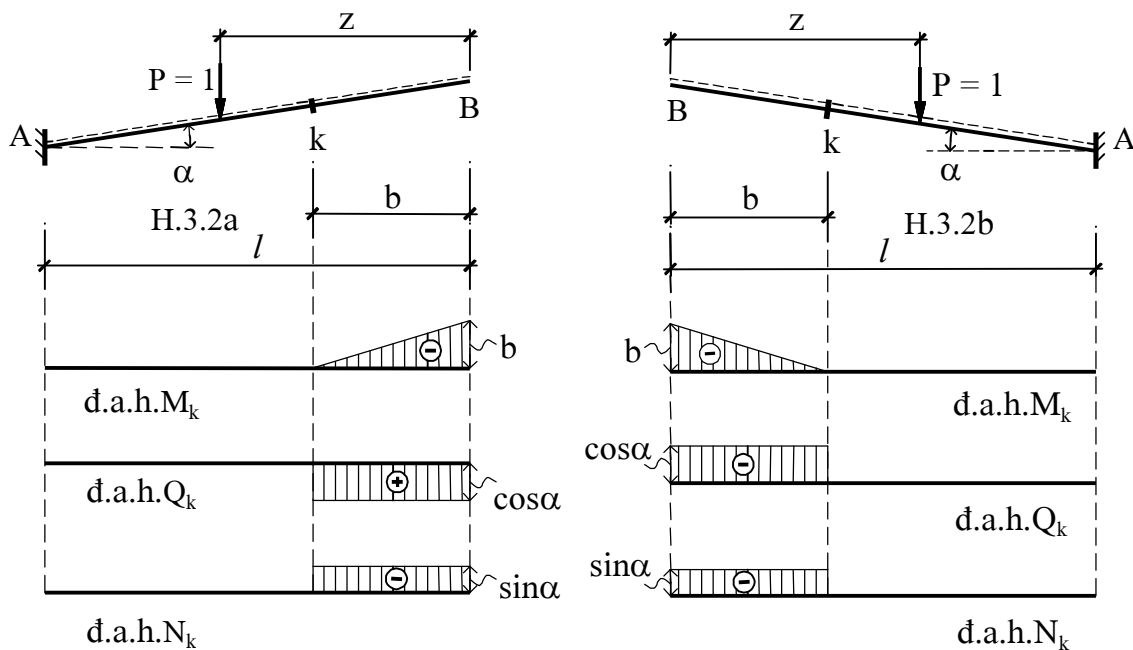
$$Q_k(z) = +P.\cos\alpha = \cos\alpha.$$

$$N_k(z) = -P.\sin\alpha = -\sin\alpha.$$

- Vẽ đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_k , đ.a.h. N_k : Cho z biến thiên và vẽ. (H.3.2a)

b. Khi đầu thừa bên trái:

Tương tự, kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.3.2b)



2. Nhận xét và cách vẽ nhanh đường ảnh hưởng:

a. Đ.a.h. M_k :

* Nhận xét: đ.a.h M_k có dạng hình tam giác.

- Tại nút thừa $M_k = -b$ (b là khoảng cách từ nút thừa đến đến tiết diện k theo phương ngang).

- Tại tiết diện k : $M_k = 0$.

- Đ.a.h. M_k luôn mang dấu âm.

- Trên đoạn từ k đến đầu ngàm, đ.a.h. M_k trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Tại nút thừa dựng tung độ $y = -b$.

- Tại k dựng tung độ $y = 0$.

- Nối hai tung độ này bằng đoạn đường thẳng sẽ được đ.a.h. M_k trên đoạn từ nút thừa đến tiết diện k .

- Trên đoạn còn lại, đ.a.h. M_k vẽ trùng đường chuẩn.

b. Đ.a.h.Q_k:

* Nhận xét: đ.a.h.Q_k có dạng hình chữ nhật.

- Tung độ $y = +\cos\alpha$ khi đầu thừa bên phải.
- Tung độ $y = -\cos\alpha$ khi đầu thừa bên trái.
- Trên đoạn từ k đến đầu ngàm, đ.a.h.Q_k trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Trên đoạn từ mút thừa đến tiết diện k, dựng đoạn đường thẳng song song đường chuẩn có tung độ $y = +\cos\alpha$ khi đầu thừa bên phải; $y = -\cos\alpha$ khi đầu thừa bên trái.

- Trên đoạn còn lại, đ.a.h.Q_k vẽ trùng đường chuẩn.

c. Đ.a.h.N_k:

* Nhận xét: đ.a.h.N_k có dạng hình chữ nhật.

- Tung độ $y = -\sin\alpha$.
- Trên đoạn từ k đến đầu ngàm, đ.a.h.N_k trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Trên đoạn từ mút thừa đến tiết diện k, dựng đoạn đường thẳng song song đường chuẩn có tung độ $y = -\sin\alpha$.

- Trên đoạn còn lại, đ.a.h.N_k vẽ trùng đường chuẩn.

*Chú ý: α lấy > 0 khi đầu B cao

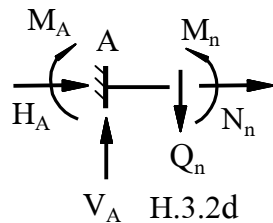
hơn đầu A và ngược lại.

Ví dụ: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k và đ.a.h phản lực gối tựa A của hệ cho trên H.3.2c

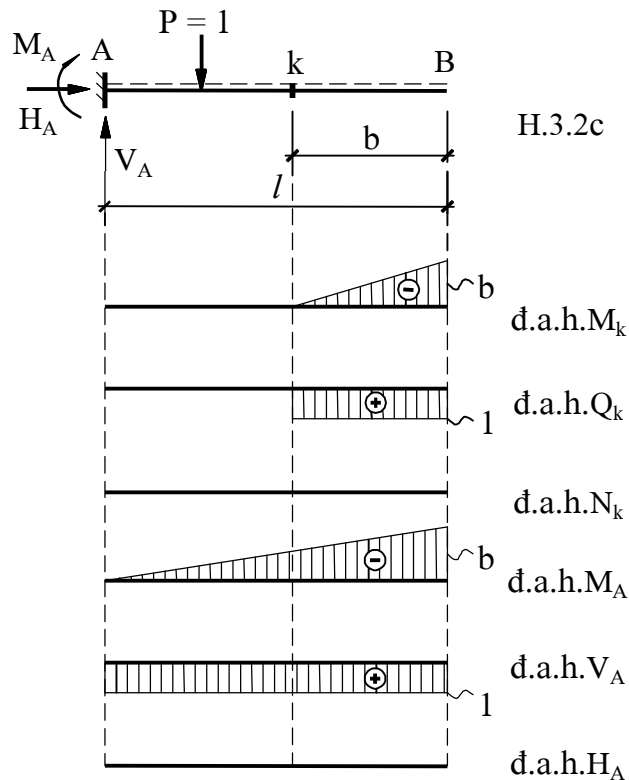
- đ.a.h nội lực tại tiết diện k vẽ theo cách vẽ nhanh.

- đ.a.h phản lực tại gối A được vẽ theo đ.a.h nội lực tiết diện tại ngàm:

$$\begin{aligned}
 + \text{đ.a.h.} V_A &\equiv \text{đ.a.h.} Q_n \\
 + \text{đ.a.h.} M_A &\equiv \text{đ.a.h.} M_n \\
 + \text{đ.a.h.} H_A &\equiv (-1)\text{đ.a.h.} N_n
 \end{aligned}$$



H.3.2d



II. Đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản có đầu thừa: (H.3.3)

1. Đường ảnh hưởng phản lực:

a. Phân tích:

- Xác định V_A, H_A, V_B :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot l - P \cdot (l - z) = 0 \Rightarrow V_A = \frac{(l - z)}{l}.$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot l - P \cdot z = 0 \Rightarrow V_B = \frac{z}{l}.$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

- Vẽ đ.a.h phản lực: Cho z biến thiên và vẽ (H.3.3)

b. Nhận xét và cách vẽ nhanh:

* Nhận xét:

- Đ.a.h. $V_A, \text{đ.a.h. } V_B$ là một đoạn thẳng duy nhất, có tung độ $y = +1$ tại gối tựa chứa đại lượng nghiên cứu, tung độ $y = 0$ tại gối tựa còn lại.

- Đ.a.h. H_A trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Đ.a.h. $V_A, \text{đ.a.h. } V_B$:

+ Dựng tung độ $y = +1$ tại gối tựa chứa đại lượng vẽ đ.a.h.

+ Dựng tung độ $y = 0$ tại gối tựa còn lại.

+ Nối hai tung độ này bằng một đoạn đường thẳng sẽ được đ.a.h cần vẽ.

- Đ.a.h. H_A : vẽ trùng đường chuẩn.

2. Đường ảnh hưởng nội lực:

a. Trường hợp tiết diện nằm bên trong nhịp:

a1. Phân tích:

- Xác định nội lực tại tiết diện k :

+ Khi $P = 1$ di động bên trái tiết diện k ($-l_1 \leq z \leq a$):

$$M_k = V_B \cdot (l - a) = \frac{z}{l} \cdot (l - a).$$

$$Q_k = -V_B \cdot \cos \alpha = -\frac{z}{l} \cdot \cos \alpha.$$

$$N_k = V_B \cdot \sin \alpha = \frac{z}{l} \cdot \sin \alpha.$$

+ Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($a \leq z \leq l + l_2$):

$$M_k = V_A \cdot a = \frac{a \cdot (l - z)}{l}.$$

$$Q_k = V_A \cdot \cos \alpha = \frac{(l - z)}{l} \cdot \cos \alpha.$$

$$N_k = -V_A \cdot \sin \alpha = -\frac{(l - z)}{l} \cdot \sin \alpha.$$

- Vẽ đ.a.h nội lực: Cho z biến thiên và vẽ (H.3.3)

a2. Nhận xét và cách vẽ nhanh:

* Đ.a.h. M_k :

- Nhận xét:

+ Đường trái và đường phải cắt nhau tại vị trí tương ứng dưới tiết diện k .

+ Nếu kéo dài đường phải đến gối tựa A, có tung độ $y = +a$ (a là khoảng cách từ k đến gối tựa A theo phương ngang)

+ Nếu kéo dài đường trái đến gối tựa B, có tung độ $y = +(l - a)$.

+ Tại vị trí gối tựa, có tung độ $y = 0$.

+ Đ.a.h. M_k không phụ thuộc góc α .

- Cách vẽ nhanh:

+ Dùng tung độ $y = 0$ tại vị trí các gối tựa (các tung độ này gọi là các điểm không).

+ Tại gối tựa A, dựng tung độ $y = +a$. Nối tung độ này với điểm không tại B bằng đường thẳng, được đường phải.

+ Qua k, dựng đường thẳng đứng cắt đường phải, xác định được phần thích dụng của đường phải và điểm chung của đường phải với đường trái.

+ Nối điểm chung vừa xác định với điểm không tại A, sẽ xác định được phần thích dụng của đường trái.

* Đ.a.h. Q_k :

- Nhận xét:

+ Đường trái và đường phải song song nhau.

+ Tại vị trí gối tựa, có tung độ $y = 0$.

+ Tại vị trí tiết diện k, có bước nhảy bằng $\cos\alpha$.

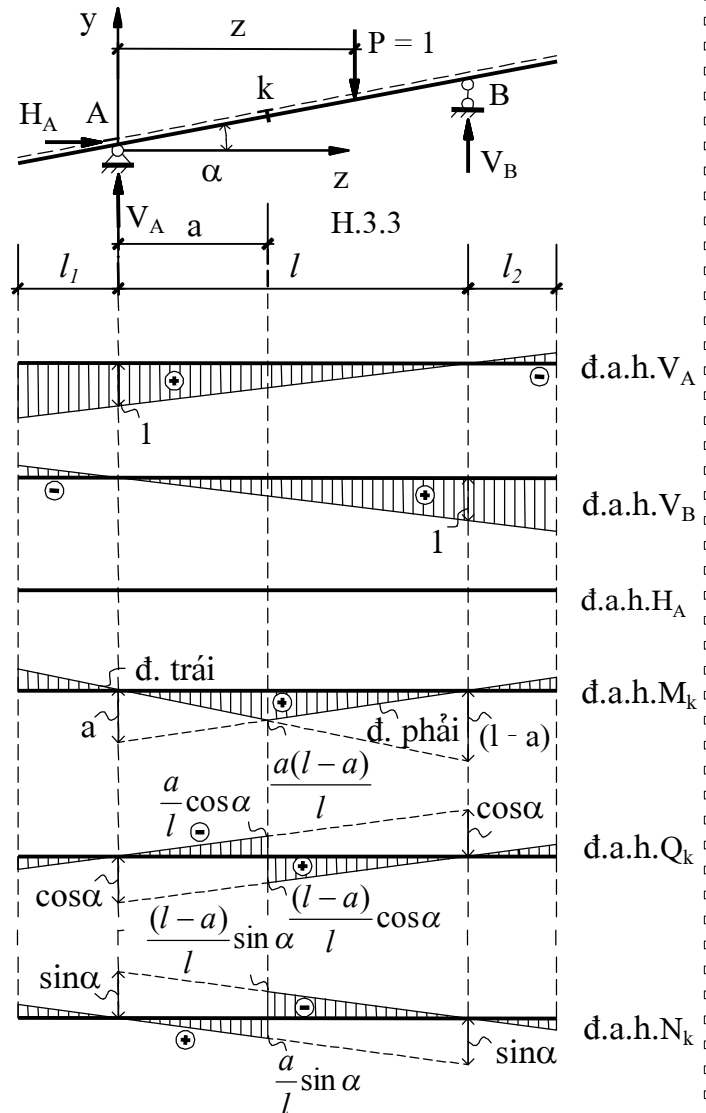
- Cách vẽ nhanh:

+ Dùng tung độ $y = 0$ tại vị trí các gối tựa (các tung độ này gọi là các điểm không).

+ Tại A, dựng tung độ $y = +\cos\alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại B bằng đường thẳng, sẽ được đường phải.

+ Tại B, dựng tung độ $y = -\cos\alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại A bằng đường thẳng, sẽ được đường trái.

+ Qua k, dựng đường thẳng đứng cắt đường phải và đường trái, sẽ xác định được phần thích dụng của chúng.



* Đ.a.h. N_k :

- Nhận xét:

- + Đường trái và đường phải song song nhau.
- + Tại vị trí gối tựa, có tung độ $y = 0$.
- + Tại vị trí tiết diện k , có bước nhảy bằng $\sin\alpha$.

- Cách vẽ nhanh:

+ Dụng tung độ $y = 0$ tại vị trí các gối tựa (các tung độ này gọi là các điểm không).

+ Tại A, dụng tung độ $y = -\sin\alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại B bằng đường thẳng, sẽ được đường phải.

+ Tại B, dụng tung độ $y = +\sin\alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại A bằng đường thẳng, sẽ được đường trái.

+ Qua k , dụng đường thẳng đứng cắt đường phải và đường trái, sẽ xác định được phân thịch dụng của chúng.

Lưu ý rằng với những nhận xét trên, còn có những cách khác để vẽ nhanh đường phải, đường trái đường ảnh hưởng nội lực.

b. Trường hợp tiết diện thuộc đầu thừa: giống dầm công xôn.

* Chú ý: Góc α lấy > 0 khi gối tựa A cao hơn gối tựa B và ngược lại.

Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h mômen, lực cắt tại tiết diện k , m & A của hệ trên hình (H.3.4a).

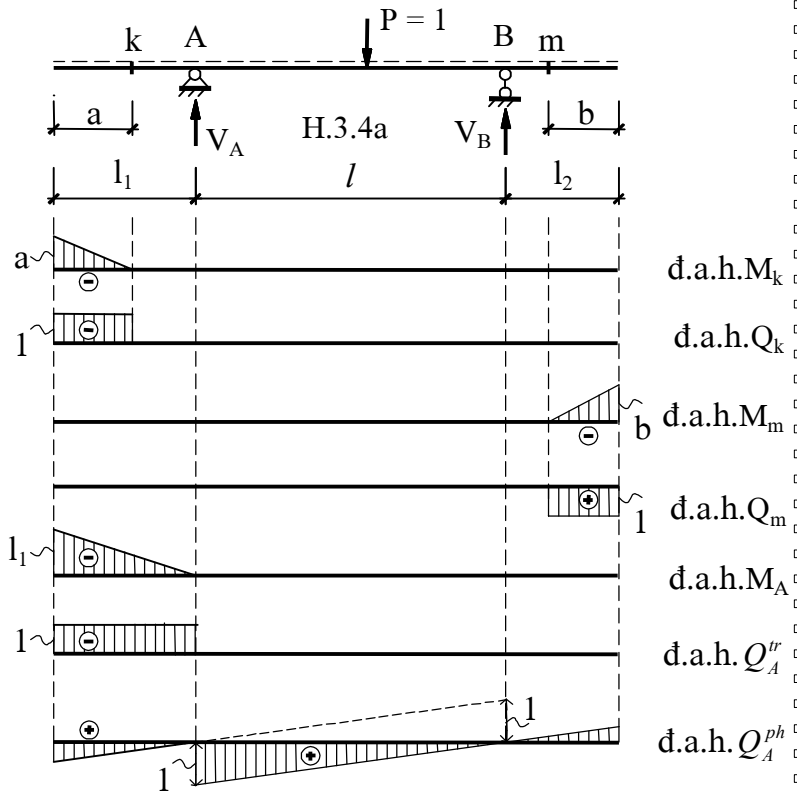
Tiết diện k & m thuộc đầu thừa nên vẽ theo đ.a.h trong dầm công xôn.

Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k của hệ trên hình (H.3.4b)

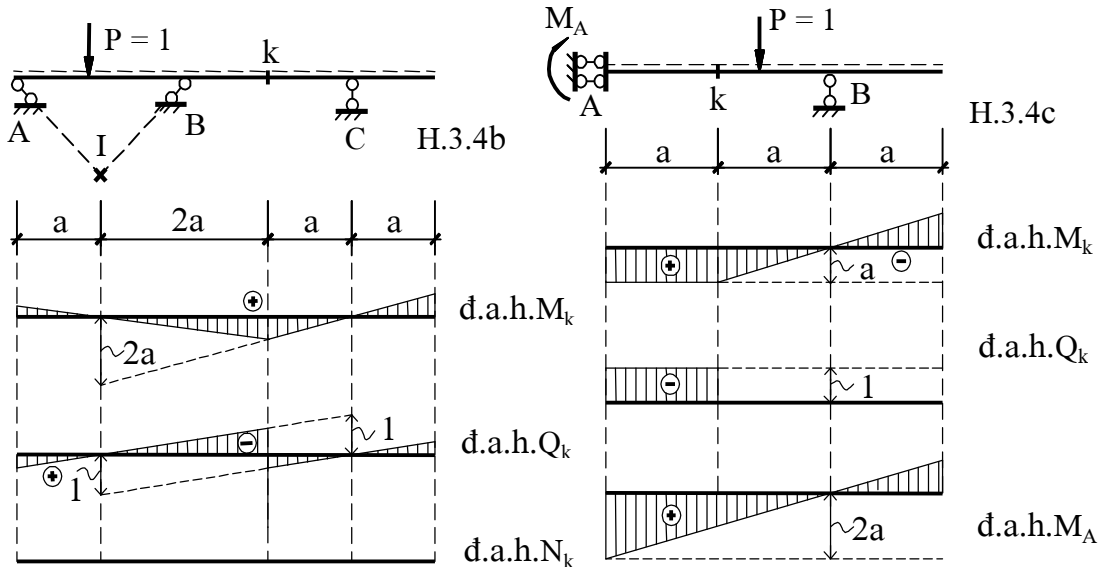
Đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện k của hệ có thể vẽ theo đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện trong nhịp của dầm đơn giản nhịp 3a

Ví dụ 3: Vẽ đ.a.h mômen uốn, lực cắt tại tiết diện k và mômen uốn phản lực gối tựa A của hệ trên hình (H.3.4c)

- Đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện k của hệ có thể vẽ theo đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện trong nhịp của dầm đơn giản có gối trái ở xa vô cùng và gối B



- Đường ảnh hưởng mômen uốn của gối A có thể vẽ theo đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện sát gối A.



III. Đường ảnh hưởng trong hệ khung đơn giản:

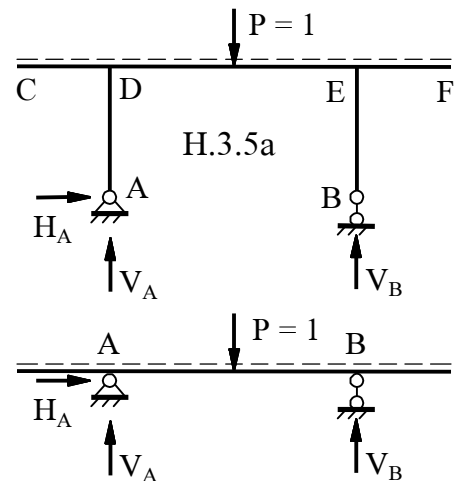
Xét một khung và dầm đơn giản tương ứng.

* Nhận xét:

- Đ.a.h phản lực và nội lực trong thanh CDEF vẽ theo đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản tương ứng.

- Đ.a.h nội lực trong thanh AD & BE vẽ dựa vào liên hệ giữa nội lực trong thanh đó với V_A, V_B .

- Nếu khung ở những dạng khác, tìm cách thiết lập phương trình đường ảnh hưởng hoặc quy về những hệ tương đương đã biết cách vẽ để vẽ.



Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k, m, n của hệ trên hình (H.3.5b)

- đ.a.h nội lực tại tiết diện k vẽ theo đ.a.h nội lực tại tiết diện đầu thừa.

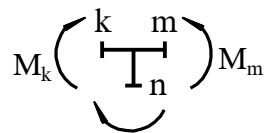
- đ.a.h nội lực tại tiết diện m vẽ theo đ.a.h nội lực tại tiết diện trong nhịp dầm đơn giản tương ứng.

- đ.a.h nội lực tại tiết diện n vẽ theo đ.a.h phản lực tại gối tựa A:

+ đ.a.h. $M_n \equiv (h) \cdot \text{đ.a.h.} H_A \equiv$ đường chuẩn.

+ đ.a.h. $Q_n \equiv (-1) \cdot \text{đ.a.h.} H_A \equiv$ đường chuẩn.

+ đ.a.h. $N_n \equiv (-1) \cdot \text{đ.a.h.} V_A$.



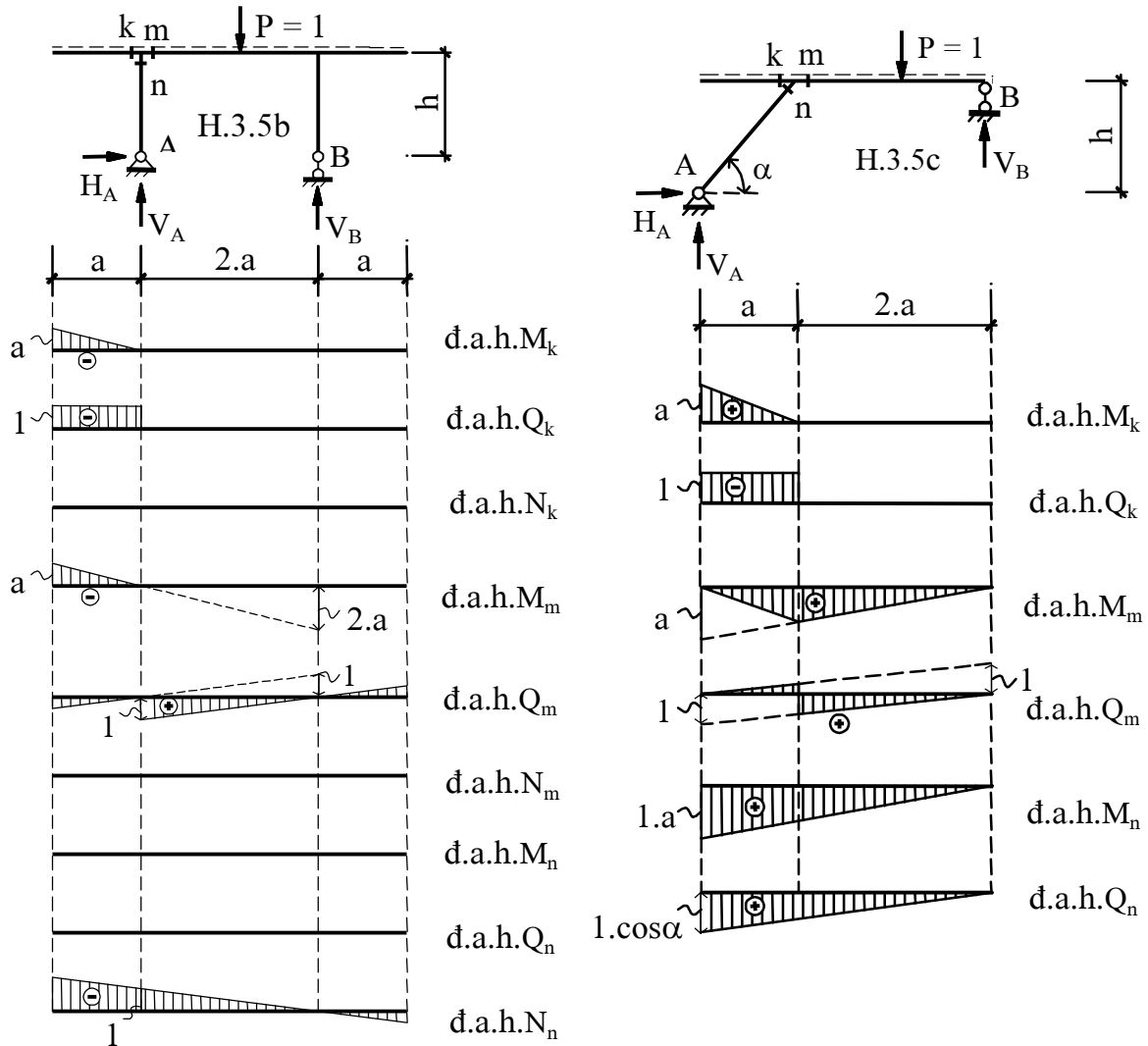
Chú ý: từ sự cân bằng mômen nút khung ta luôn có:

$$\text{đ.a.h.} M_n + \text{đ.a.h.} M_k \equiv \text{đ.a.h.} M_m$$

Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k, m, n của hệ trên hình (H.3.5c)

- Tiết diện k thuộc đầu thừa.

- Tiết diện m vẽ theo đ.a.h tiết diện trong nhịp dầm đơn giản nhịp 3a.
- Tiết diện n vẽ theo đ.a.h. V_A (đ.a.h. $H_A \equiv$ đường chuẩn).



§3. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ BA KHỚP.

I. Đường ảnh hưởng phản lực: (H.3.6a)

1. Đường ảnh hưởng V_A^d, V_B^d : là đường ảnh hưởng phản lực trong dầm đơn giản tương ứng cùng nhịp.

2. Đường ảnh hưởng của lực xô H:

Xuất phát từ biểu thức: $M_k(z) = M_k^d - H \cdot y_k$

$$\text{Cho } k \equiv C \Rightarrow M_C = 0 \Rightarrow M_C^d - H \cdot y_C = 0 \Rightarrow H = \frac{M_C^d}{y_C} = \frac{M_C^d}{f}.$$

$$\text{Hay } \text{đ.a.h. } H \equiv \frac{1}{f} \cdot \text{đ.a.h. } M_C^d.$$

3. Đường ảnh hưởng phản lực vòm Z:

Ta có $H = Z \cdot \cos\beta \Rightarrow Z = \frac{H}{\cos\beta}$.

Hay đ.a.h. $Z = \frac{1}{\cos\beta} \cdot \text{đ.a.h.H}$

4. Đường ảnh hưởng phản lực đứng V_A, V_B :

Ta có $V_A = V_A^d + H \cdot \text{tg}\beta$;

$V_B = V_B^d - H \cdot \text{tg}\beta$

Hay đ.a.h. $V_A \equiv \text{đ.a.h. } V_A^d + \text{tg}\beta \cdot \text{đ.a.h.H}$.

đ.a.h. $V_B \equiv \text{đ.a.h. } V_B^d - \text{tg}\beta \cdot \text{đ.a.h.H}$

II. Đường ảnh hưởng nội lực:

1. Đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k: (H.3.6b)

a. Phân tích:

Xuất phát từ biểu thức:

$M_k = M_k^d - H \cdot y_k$. Suy ra:

đ.a.h. $M_k \equiv \text{đ.a.h. } M_k^d - (\text{đ.a.h.H}) \cdot y_k$

b. Nhận xét và cách vẽ nhanh:

* Nhận xét:

- Tại gối tựa, tung độ đường ảnh hưởng bằng không.

- Nếu biết được đường phải có thể vẽ được đường ảnh hưởng M_k .

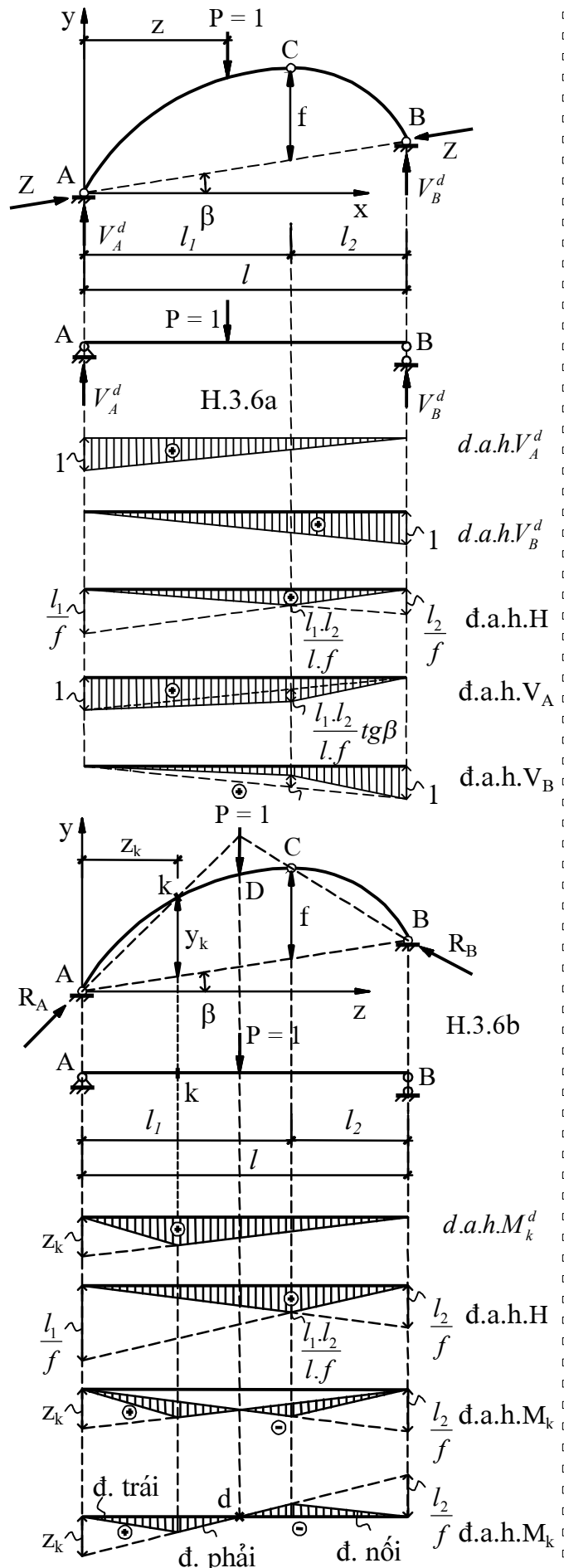
- Đường phải đi qua ba điểm:

+ Tại A, đường phải có tung độ $y = z_k$ (z_k là khoảng cách từ k đến gối A theo phương ngang).

+ Tại B, đường phải có tung độ $y = -\frac{l_2}{f} \cdot y_k$.

+ Điểm không d (là giao điểm của đường phải với đường chuẩn) là điểm ứng dưới điểm D (là giao điểm của Ak với BC).

* Cách vẽ nhanh:



- Vẽ đường phải trước bằng cách xác định hai điểm thuộc đường phải. Điểm tại A và điểm không d thường sử dụng để xác định đường phải.

- Sau khi xác định được phản thích dụng của đường phải, vẽ đường trái và đường nối như sau:

+ Đường nối là đoạn thẳng kế tiếp tung độ bằng không tại B.

+ Đường trái vẽ qua tung độ bằng không tại A và điểm chung với đường phải tại k

2. Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện k: (H.3.6c)

a. Phân tích:

Ta đã biết rằng:

$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot (\sin \alpha_k - \text{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k)$$

Ta suy ra

$$\text{đ.a.h. } Q_k \equiv \cos \alpha_k \cdot (\text{đ.a.h. } Q_k^d) - m \cdot \text{đ.a.h. } H$$

$$\text{Với } m = \sin \alpha_k - \text{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k$$

b. Nhận xét và cách vẽ

nhanh đường ảnh hưởng Q_k :

* Nhận xét:

- Tung độ bằng không tại các gối tựa.

- Đường trái và đường phải song song nhau.

- Nếu biết được đường phải, có thể vẽ được đường ảnh hưởng Q_k .

- Đường phải đi qua ba điểm:

+ Tại A, có tung độ $y =$

$$+ \cos \alpha_k.$$

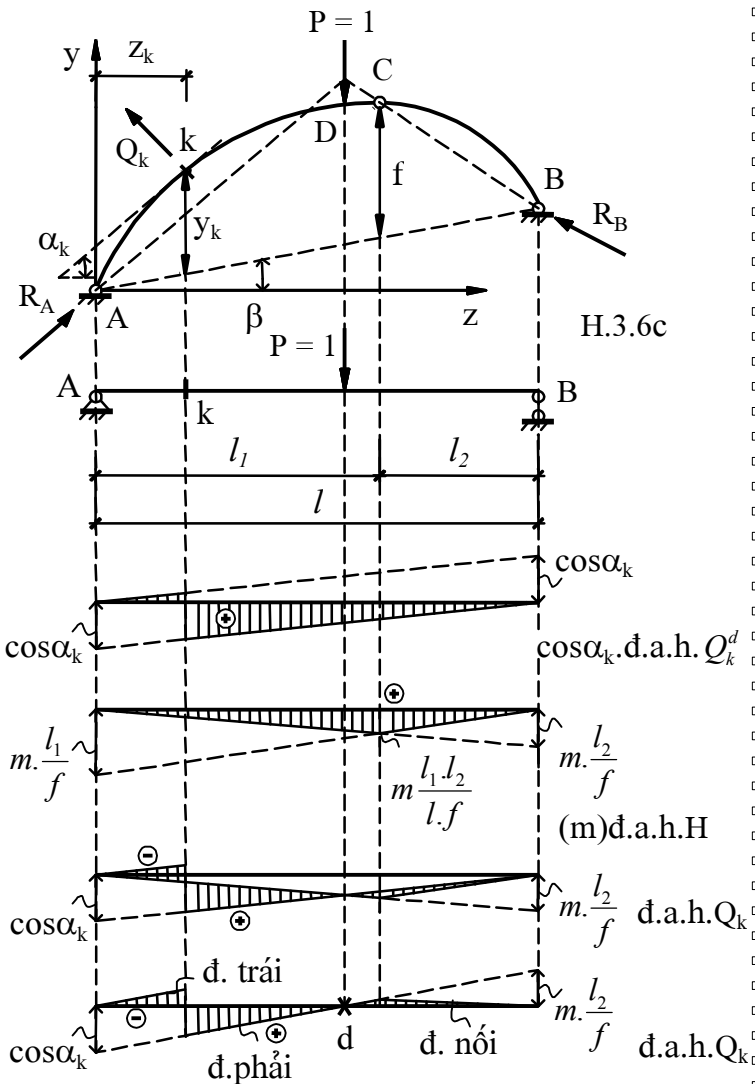
+ Tại B, có tung độ $y =$

$$- \frac{l_2}{f} \cdot m.$$

+ Điểm không d (là giao điểm của đường phải với đường chuẩn) là điểm tương ứng dưới điểm D (là giao điểm của BC với đường thẳng qua A và song song với tiếp tuyến trục vòm tại k).

* Cách vẽ nhanh:

- Vẽ đường phải trước bằng cách xác định hai điểm thuộc đường phải. Điểm tại A và điểm không d thường sử dụng để xác định đường phải.



H.3.6c

- Sau khi xác định được phần thích dụng của đường phải, vẽ đường trái và đường nối như sau:

- + Đường nối là đoạn thẳng kẻ tiếp tung độ bằng không tại B.
- + Đường trái vẽ song song với đường phải và đi qua tung độ bằng không tại A.

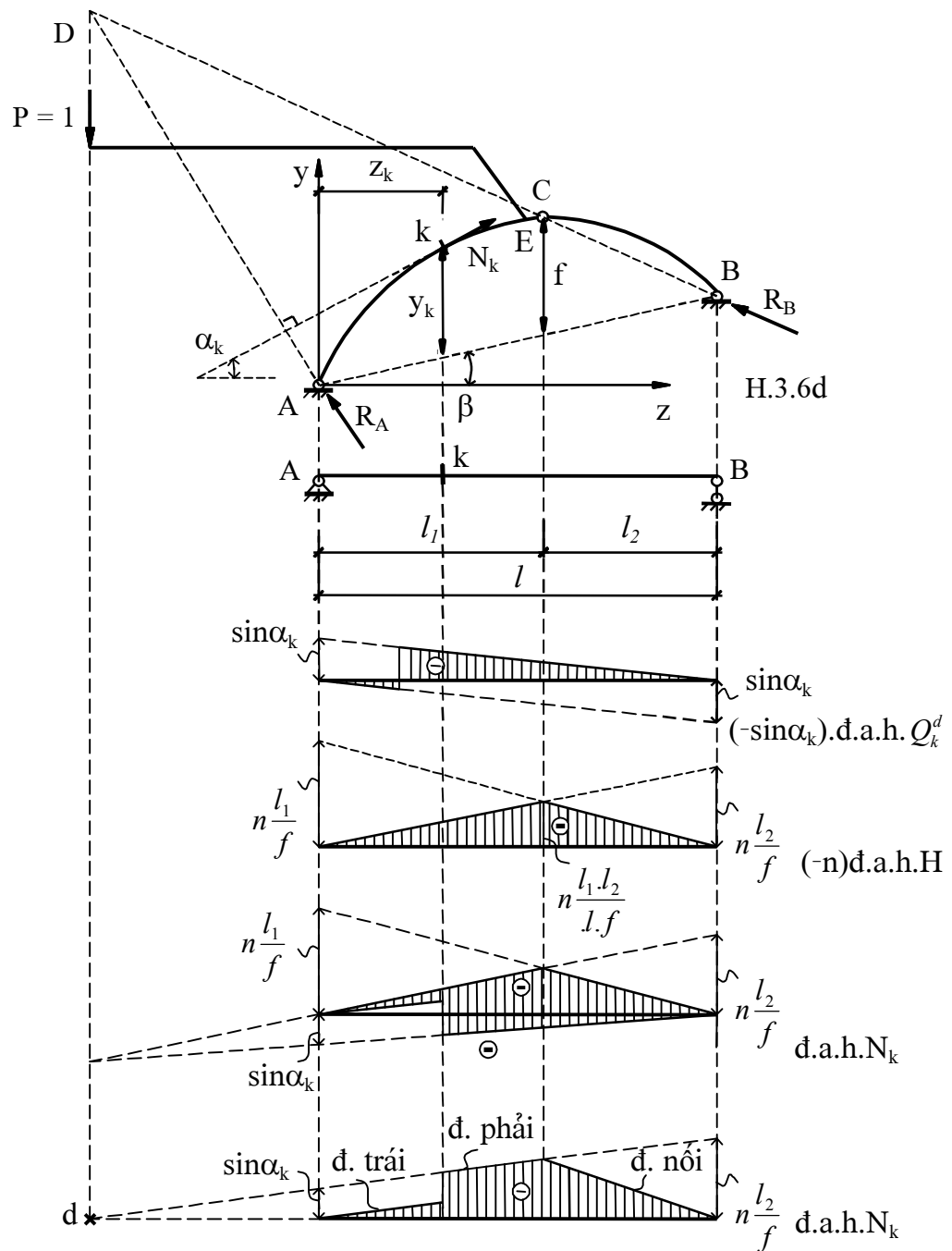
3. Đường ảnh hưởng lực dọc tại tiết diện k: (H.3.6d)

a. Phân tích:

Ta đã biết rằng: $N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot (\cos \alpha_k + \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha_k)$. Ta suy ra

$$\text{đ.a.h.} N_k = -\sin \alpha_k \cdot (\text{đ.a.h.} Q_k^d) - n \cdot \text{đ.a.h.} H$$

$$\text{Với } m = \cos \alpha_k + \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha_k$$



b. Nhận xét và cách vẽ nhanh đường ảnh hưởng N_k :

* Nhận xét:

- Tung độ bằng không tại các gối tựa.
- Đường trái và đường phải song song nhau.
- Nếu biết được đường phải, có thể vẽ được đường ảnh hưởng Q_k .
- Đường phải đi qua ba điểm:

+ Tại A, có tung độ $y = -\sin\alpha_k$.

+ Tại B, có tung độ $y = -\frac{l_2}{f}.n$.

+ Điểm không d (là giao điểm của đường phải với đường chuẩn) là điểm tương ứng dưới điểm D (là giao điểm của BC với đường thẳng qua A và vuông góc với tiếp tuyến trục vòm tại k).

* Cách vẽ nhanh:

- Vẽ đường phải trước bằng cách xác định hai điểm thuộc đường phải. Điểm tại A và điểm không d thường sử dụng để xác định đường phải.

- Sau khi xác định được phần thích dụng của đường phải, vẽ đường trái và đường nối như sau:

+ Đường nối là đoạn thẳng kẻ tiếp tung độ bằng không tại B.

+ Đường trái vẽ song song với đường phải và đi qua tung độ bằng không tại A.

* Các chú ý:

- Góc β lấy dấu dương khi gối B cao hơn gối A và ngược lại.

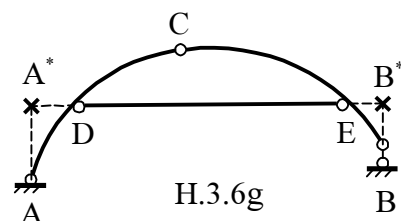
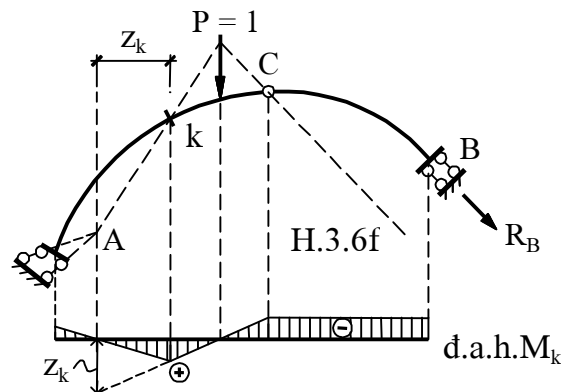
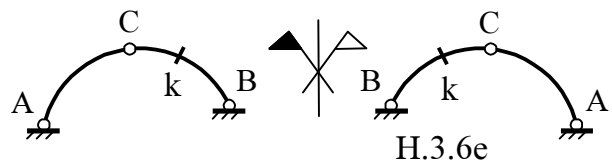
- Trường hợp đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc miêng cứng BC (H.3.6e): Nếu lấy đối xứng qua trục thẳng đứng sẽ trở lại bài toán ban đầu.

Sau đó, suy ra kết quả trên hệ ban đầu bằng cách lấy đối xứng ngược trở lại. Tuy nhiên, với đường ảnh hưởng lực cắt cần nhân thêm với hệ số -1 (đối chiều tòn độ).

- Có thể mở rộng cho những hệ có cấu tạo tương tự hệ ba khớp với các khớp có thể là khớp thực hay khớp giả tạo (H.3.6f).

- Trường hợp hệ ba khớp có thanh căng (H.3.6g):

+ Nếu đại lượng nghiên cứu nằm ngoài phạm vi thanh căng (AD, BE), vẽ theo đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản.



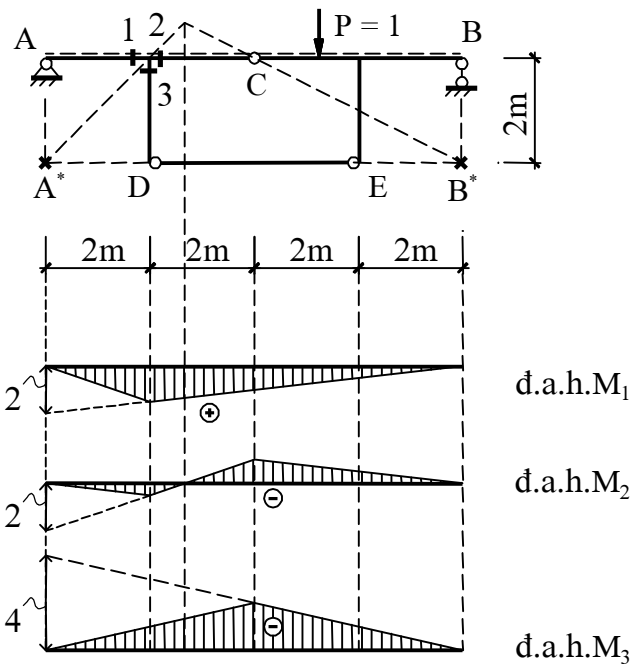
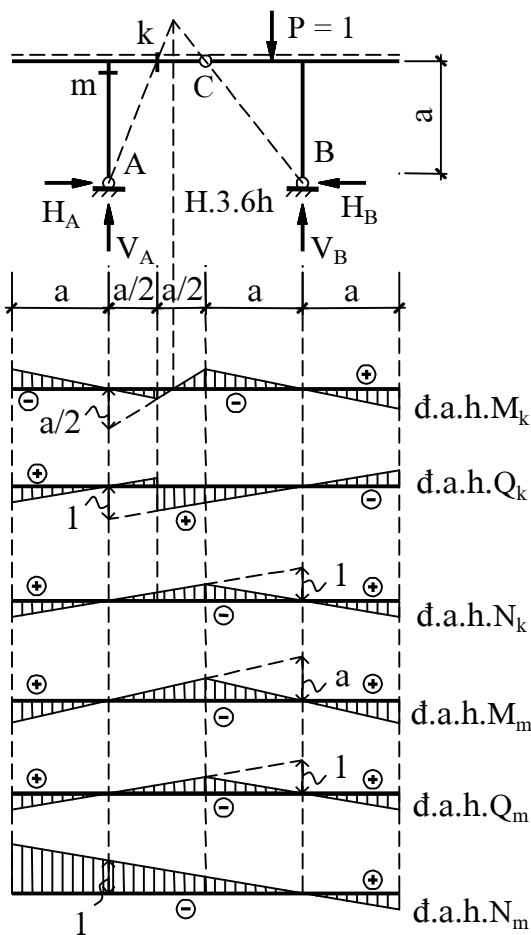
+ Nếu đại lượng nghiên cứu thuộc phạm vi thanh cứng (CEF), vẽ theo đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp A*CB*.

+ Nếu lực di động $P = 1$ di động trên thanh cứng, đường ảnh hưởng là đoạn thẳng được vẽ qua hai tung độ tại hai đầu thanh cứng. Đó cũng chính là tung độ của đường ảnh hưởng khi P di động trên miếng cứng. Như vậy, trong trường hợp này, ta đi vẽ đường ảnh hưởng khi cho lực $P = 1$ di động trên miếng cứng, sau đó giữ lại hai tung độ tại hai đầu thanh cứng, rồi nối hai tung độ đó bằng 1 đoạn đường thẳng sẽ xác định được đường ảnh hưởng cần vẽ.

*Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k & m của hệ trên hình (H.3.6h)

- Tiết diện k được vẽ theo đ.a.h nội lực trong hệ 3 khớp

- Tiết diện m có thể được vẽ theo đ.a.h phản lực V_A & H_A



H.3.6k

*Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h mômen uốn tại tiết diện 1, 2 & 3 của hệ trên hình (H.3.6k)

- Đây là hệ 3 khớp có thanh cứng DE với $P = 1$ di động trên các miếng cứng.

- Các đ.a.h. M_1, M_2, M_3 tuân theo điều kiện cân bằng mômen nút khung.

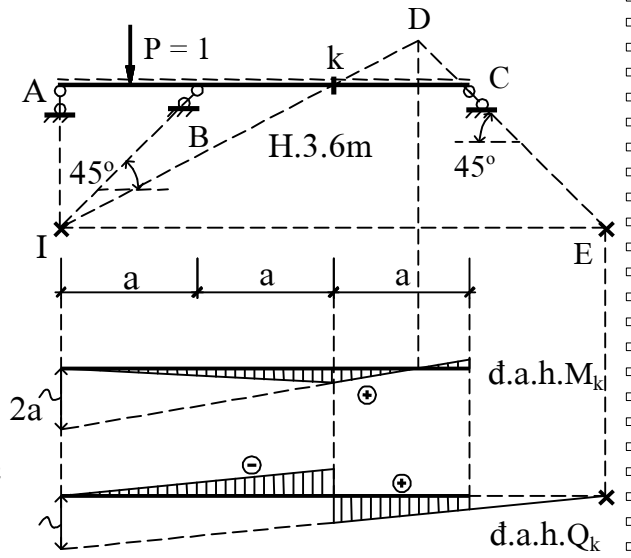
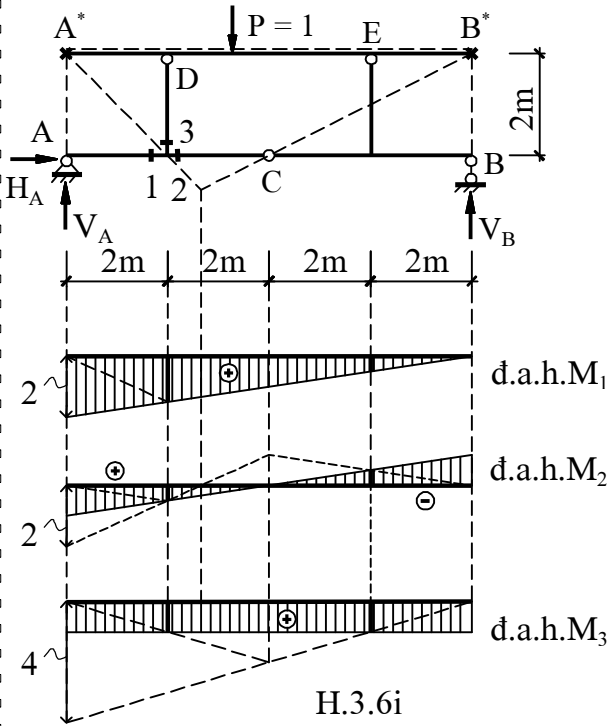
*Ví dụ 3: Vẽ đ.a.h mômen uốn tại tiết diện 1, 2 & 3 của hệ trên hình (H.3.6i)

- Đây là hệ 3 khớp có thanh cứng DE với $P = 1$ di động trên thanh cứng.

- Các đ.a.h. M_1, M_2, M_3 tuân theo điều kiện cân bằng mômen nút khung.

*Ví dụ 4: Vẽ đ.a.h mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k của hệ trên hình (H.3.6m)

- đ.a.h. M_k, Q_k có thể được vẽ theo đường ảnh hưởng trong hệ 3 khớp: 1 khớp tại I và 2 khớp tại gối di động C.



§ 4. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ DÀN

Ở đây chỉ trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ dàn dầm.

I. Đường ảnh hưởng phản lực:

Cách xác định và vẽ giống như trong hệ dầm đơn giản. Xem minh họa cho hệ dàn dầm trên hình (H.3.7a) & (H.3.7e).

II. Đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh dàn:

1. Phương pháp tách mắt:

* *Nội dung:* Tách mắt có chứa thanh cần vẽ đường ảnh hưởng lực dọc và đi thiết lập phương trình đường ảnh hưởng của nó ứng với các trường hợp của lực tập trung $P = 1$ di động trên dàn: đứng ngay tại mắt đang xét, di động ngoài phạm vi các chốt bị cắt và di động trên các chốt bị cắt.

Xét hệ dàn trên hình (H.3.7a).

Ta trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh 2 - 11, 4 - 9 & 2 - 12.

a. đ.a.h. N_{11-2} :

Tách mắt 11 và thiết lập phương trình đường ảnh hưởng ứng với các trường hợp của lực $P = 1$ di động:

- $P = 1$ đặt ngay tại mắt bị cắt

($z = 0$) (H.3.7b):

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{11-2} + V_A - P = 0$$

Lúc này $V_A = 1$

$$\text{Suy ra } N_{11-2} = P - V_A = 0.$$

- Khi $P = 1$ di động ngoài phạm vi các chốt bị cắt ($z = -d$ hoặc $d \leq z \leq 4d$) (H.3.7c):

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{11-2} + V_A = 0$$

$$\Rightarrow N_{11-2} = -V_A.$$

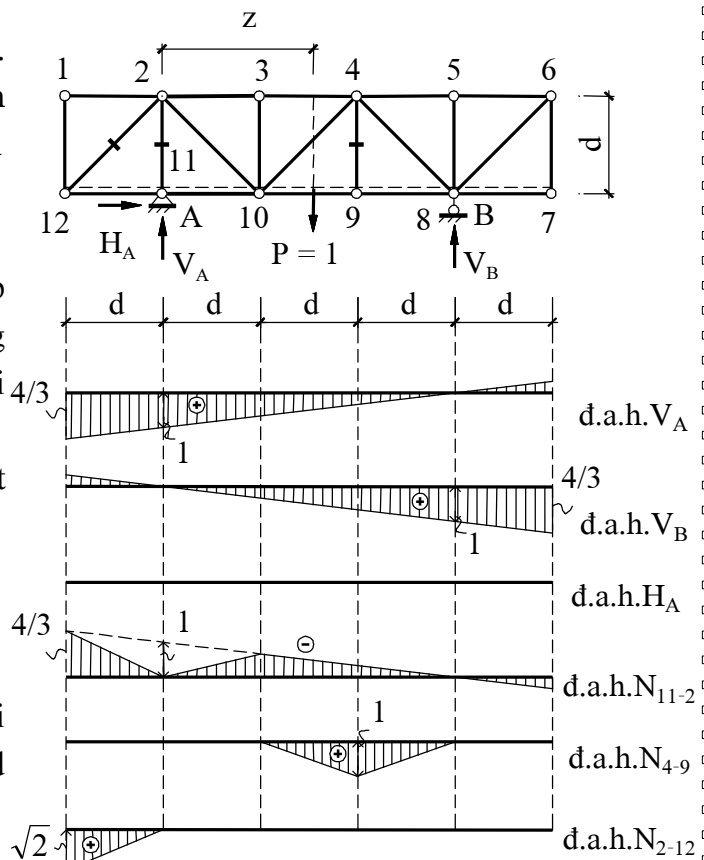
$$\Rightarrow \text{đ.a.h. } N_{11-2} \equiv (-1) \cdot \text{đ.a.h. } V_A.$$

- Khi $P = 1$ di động trên các chốt bị cắt ($-d \leq z \leq d$): đường ảnh hưởng trên các chốt này là những đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của chốt bị cắt.

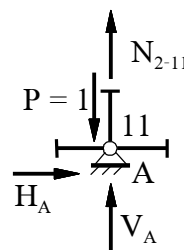
b. đ.a.h. N_{4-9} :

Tương tự, tách mắt 9:

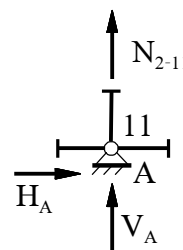
- $P = 1$ đặt ngay tại mắt 9 ($z = 2d$) (H.3.7d):



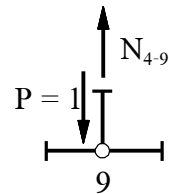
H.3.7a



H.3.7b



H.3.7c



H.3.7d

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{4-9} - P = 0 \Rightarrow N_{4-9} = P = 1.$$

- P = 1 di động ngoài phạm vi các đốt bị cắt ($-d \leq z \leq d$ hoặc $3d \leq z \leq 4d$):

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{4-9} = 0. \text{ (Hệ quả 2)}$$

Có nghĩa là đ.a.h. N_{4-9} trên đoạn này trùng với đường chuẩn.

- Khi P = 1 di động trên các đốt bị cắt ($2d \leq z \leq 4d$): đường ảnh hưởng trên các đốt này là những đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của đốt bị cắt.

c. đ.a.h. N_{2-12} :

Tương tự, dễ thấy khi P = 1 đặt tại mắt 12 thì $N_{2-12} = \sqrt{2}$; khi P = 1 di động bên ngoài đốt bị cắt thì $N_{2-12} = 0$.

2. Phương pháp mặt cắt đơn giản:

* *Nội dung*: Thực hiện "mặt cắt đơn giản" qua thanh cần vẽ đường ảnh hưởng và đi thiết lập phương trình đường ảnh hưởng của nó ứng với các trường hợp của lực P = 1 di động trên dàn: bên trái đốt bị cắt, bên phải đốt bị cắt và trên đốt bị cắt.

Xét hệ dàn trên hình (H.3.7e). Ta trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh 2 - 3, 11 - 10 & 4-10.

a. đ.a.h. N_{2-3} :

Thực hiện mặt cắt (1 - 1) qua thanh 2 - 3 và thiết lập phương trình đường ảnh hưởng N_{2-3} ứng với các trường hợp của lực P = 1 di động:

- P = 1 di động bên trái đốt bị cắt ($0 \leq z \leq d$):

$$\sum M_{12}'' = 0 \Rightarrow N_{2-3} \cdot h - P \cdot (2d - z) = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-3} = \frac{(2d - z)}{h}$$

Cho z biến thiên, vẽ được đ.a.h. N_{2-3} .

- P = 1 di động bên phải đốt bị cắt ($2d \leq z \leq 6d$):

$$\sum M_{12}'' = 0 \Rightarrow N_{2-3} \cdot h = 0 \Rightarrow N_{2-3} = 0.$$

Như vậy, trên đoạn này, đ.a.h. N_{2-3} vẽ trùng với đường chuẩn.

- P = 1 di động trên đốt bị cắt ($d \leq z \leq 2d$): đường ảnh hưởng trên đốt này là đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của đốt bị cắt.

b. đ.a.h. N_{10-11} :

Thực hiện mặt cắt (2 - 2) qua thanh 11 - 10 và thiết lập phương trình đường ảnh hưởng N_{10-11} ứng với các trường hợp của lực P = 1 di động:

- P = 1 di động bên trái đốt bị cắt ($0 \leq z \leq 3d$):

$$\sum M_4^{ph} = 0 \Rightarrow N_{10-11} \cdot h - V_B \cdot 2d = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-3} = \frac{V_B \cdot 2d}{h}$$

$$\Rightarrow \text{đ.a.h. } N_{10-11} \equiv \left(\frac{2d}{h} \right) \cdot \text{đ.a.h. } V_B$$

- P = 1 di động bên phải đốt bị cắt ($4d \leq z \leq 6d$):

$$\sum M_4^r = 0 \Rightarrow -N_{10-11} \cdot h + V_A \cdot d = 0$$

$$\Rightarrow N_{10-11} = \frac{V_A \cdot d}{h}$$

$$\Rightarrow \text{đ.a.h.} N_{10-11} \equiv \left(\frac{d}{h}\right) \cdot \text{đ.a.h.} V_A$$

- P = 1 di động trên dốt bị cắt (3d ≤ z ≤ 4d): đường ảnh hưởng trên dốt này là đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của dốt bị cắt.

c. đ.a.h. N₄₋₁₀:

Tương tự như trường hợp đ.a.h.N₁₀₋₁₁ và phương trình đường cần thiết lập cho mỗi trường hợp của P = 1 di động lúc này là ΣY = 0.

** Chú thích:*

- Trong phương pháp mặt cắt đơn giản, điểm lấy mômen khi viết phương trình cân bằng gọi là tâm mômen. Đường trái và đường phải cắt nhau tại tâm mômen

- Trong trường hợp không thể dùng được phương pháp tách mắt hay mặt cắt đơn giản để vẽ, có thể sử dụng phương pháp mặt cắt phối hợp hoặc vẽ trước một số đường ảnh hưởng có liên quan, rồi từ những mối liên hệ về nội lực suy ra đường ảnh hưởng cần vẽ.

- Trong một số bài toán phức tạp, có thể vẽ đường ảnh hưởng bằng cách: Đặt P = 1 lần lượt trên các mắt và đi xác định tung độ đường ảnh hưởng cần vẽ tương ứng. Sau đó, nối các tung độ này bằng các đoạn đường thẳng trong phạm vi mỗi dốt sẽ được đường ảnh hưởng cần vẽ.

- Khi sử dụng phương pháp mặt cắt đơn giản để vẽ đường ảnh hưởng lực dọc, có thể sử dụng cách vẽ đường ảnh hưởng của nội lực trong dầm đơn giản. Cách tiến hành như sau:

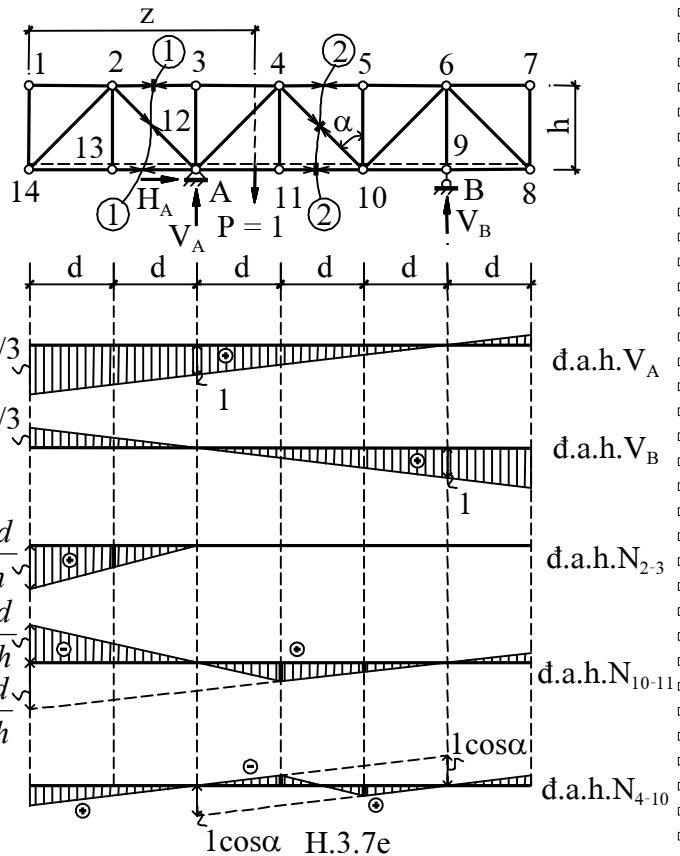
a. Nếu hai thanh còn lại của mặt cắt giao nhau tại tâm mômen I:

Biểu thức xác định lực dọc có thể viết dưới dạng: $N = \pm \frac{M_I}{r}$.

+ M_I là mômen uốn trong dầm đơn giản tương ứng tại I' (I' là vị trí tương ứng dưới tâm mômen I).

+ r là khoảng cách từ tâm mômen I đến phương của lực dọc N.

+ Biểu thức lấy dấu (+) khi lực dọc N dương tác dụng lên phần hệ bên trái quay ngược chiều kim đồng hồ quanh I và ngược lại. Từ đây suy ra cách vẽ nhanh đ.a.h.N:



vẽ đ.a.h. M_T trong dầm đơn giản phụ trợ rồi nhân với một lượng $\pm \frac{1}{r}$. Phần thích dụng của đường trái, đường phải là thuộc đường xe chạy và nằm bên trái và bên phải đôt bị cắt; trong phạm vi đôt bị cắt dùng đường nối.

b. Nếu hai thanh còn lại của mặt cắt song song nhau:

Biểu thức xác định lực dọc có thể viết dưới dạng: $N = \pm \frac{Q}{\sin \gamma}$.

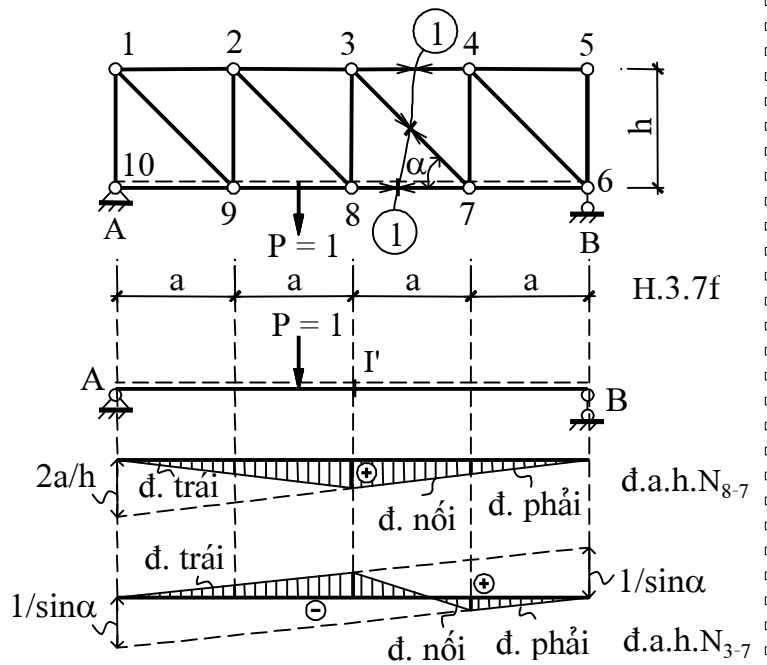
+ Q là lực cắt trong dầm đơn giản tương ứng cùng phương với hai thanh song song và lấy tại vị trí bất kỳ ứng dưới đôt bị cắt thuộc đường xe chạy.

+ γ là góc nghiêng của thanh cần vẽ đường ảnh hưởng so với phương của hai thanh song song.

+ Biểu thức lấy dấu (+) khi lực dọc N dương tác dụng lên phần bên trái hướng xuống dưới so với hai thanh song song.

Từ đây suy ra cách vẽ nhanh đ.a.h.N: vẽ đ.a.h.Q trong dầm đơn giản phụ trợ (lấy tại tiết diện bất kỳ ứng dưới đôt bị cắt thuộc đường xe chạy) rồi nhân với một lượng $\pm \frac{1}{\sin \lambda}$. Phần thích dụng của đường trái, đường phải là thuộc đường xe chạy và nằm bên trái và bên phải đôt bị cắt. Trong phạm vi đôt bị cắt dùng đường nối.

Ví dụ: Vẽ đ.a.h. N_{8-7} & đ.a.h. N_{3-7} (H.3.7f)



§ 5. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ GHÉP

I. Nguyên tắc chung:

- Phân tích cấu tạo hình học của hệ, xác định đâu là hệ phụ, hệ chính, hệ trung gian.

- Phân chia hệ thành những hệ đơn giản, hệ phụ tựa lên hệ chính.

II. Cách vẽ đường ảnh hưởng:

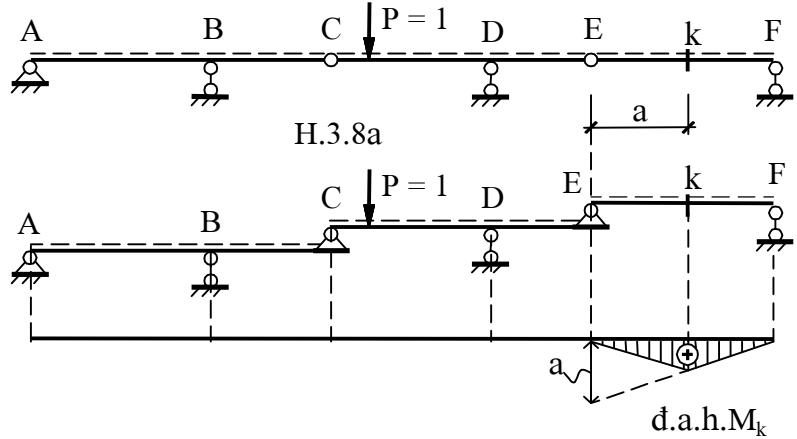
1. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ phụ:

a. Phân tích:

Xét hệ ghép trên hình vẽ (H.3.8a), vẽ đ.a.h. M_k .

- Khi $P = 1$ di động trên hệ phụ EF: có thể xem EF như dầm đơn giản độc lập và dễ dàng vẽ được đ.a.h. M_k .

- Khi $P = 1$ di động trên các phần hệ còn lại: theo tính chất của hệ ghép (hệ chính không gây ra áp lực lên hệ phụ), nên đ.a.h. M_k vẽ trùng với đường chuẩn.



b. Quy tắc vẽ:

- Khi $P = 1$ di động trên hệ phụ có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng: ta xem hệ phụ như một hệ đơn giản làm việc độc lập và vẽ đường ảnh hưởng theo cách đã biết.

- Khi $P = 1$ di động trên hệ chính và các hệ không liên quan: đường ảnh hưởng tương ứng vẽ trùng đường chuẩn.

2. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ chính hoặc hệ trung gian:

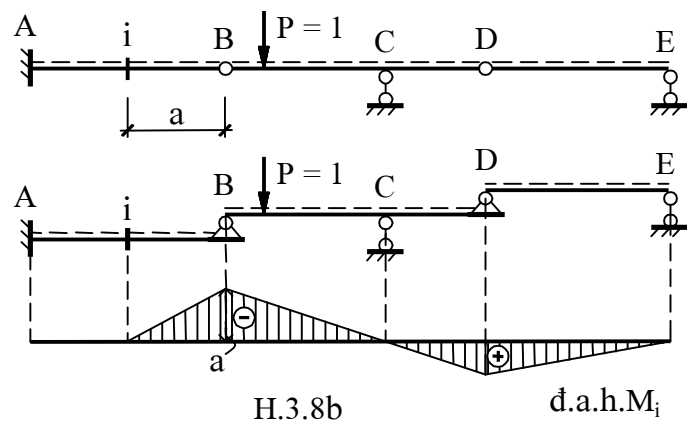
a. Phân tích:

Xét hệ ghép trên hình vẽ (H.3.8b), vẽ đ.a.h. M_i .

- Khi $P = 1$ di động trên hệ chính AB: lúc này, các hệ phụ không làm việc, có thể loại bỏ chúng, xem AB như dầm côngxôn và vẽ được đ.a.h. M_i .

- Khi $P = 1$ di động trên hệ BCD: đường ảnh hưởng M_i là đoạn đường thẳng vẽ qua hai điểm: tung độ bằng không dưới gối tựa C và tung độ chung với hệ chính AB tại nút B.

- Khi $P = 1$ di động trên hệ DE: tương tự như trên hệ BCD.



b. Quy tắc vẽ:

- Khi $P = 1$ di động trên hệ có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng: cô lập hệ đó và vẽ đường ảnh hưởng.

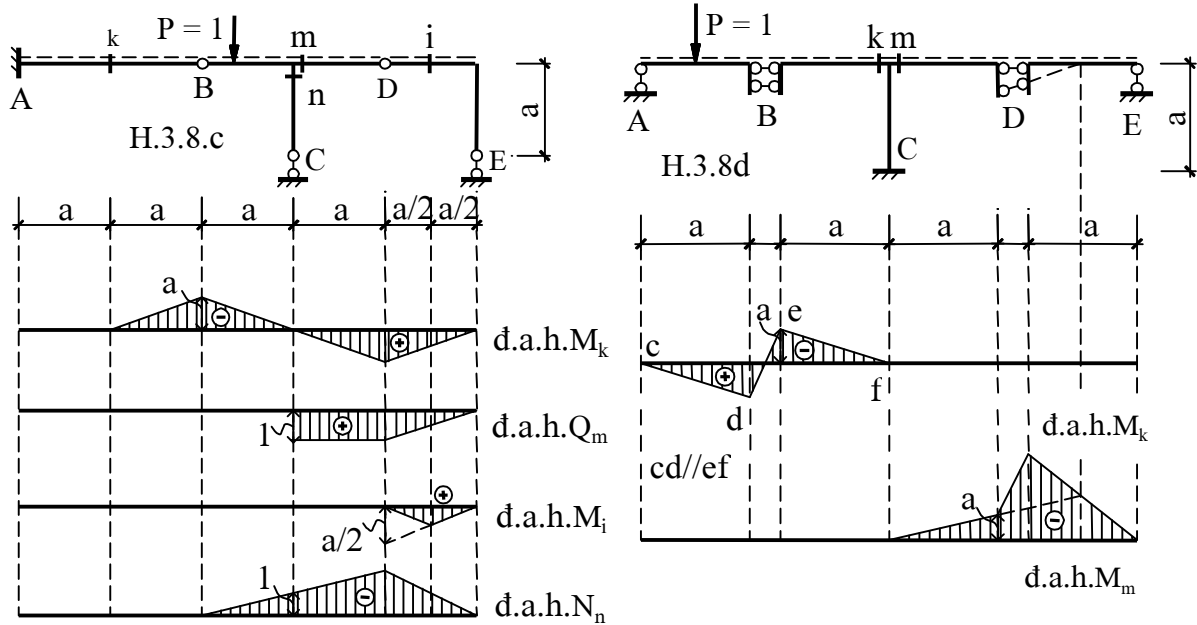
- Khi $P = 1$ di động trên những hệ kế tiếp:

+ Nếu hệ kế tiếp là hệ chính so với hệ đang xét: đường ảnh hưởng vẽ trùng với đường chuẩn.

+ Nếu hệ kế tiếp là hệ phụ so với hệ đang xét: đường ảnh hưởng sẽ là đoạn thẳng kế tiếp và đi qua tung độ bằng không tại vị trí gối tựa nối đất thẳng đứng hoặc khớp đầu tiên thuộc một hệ chính khác.

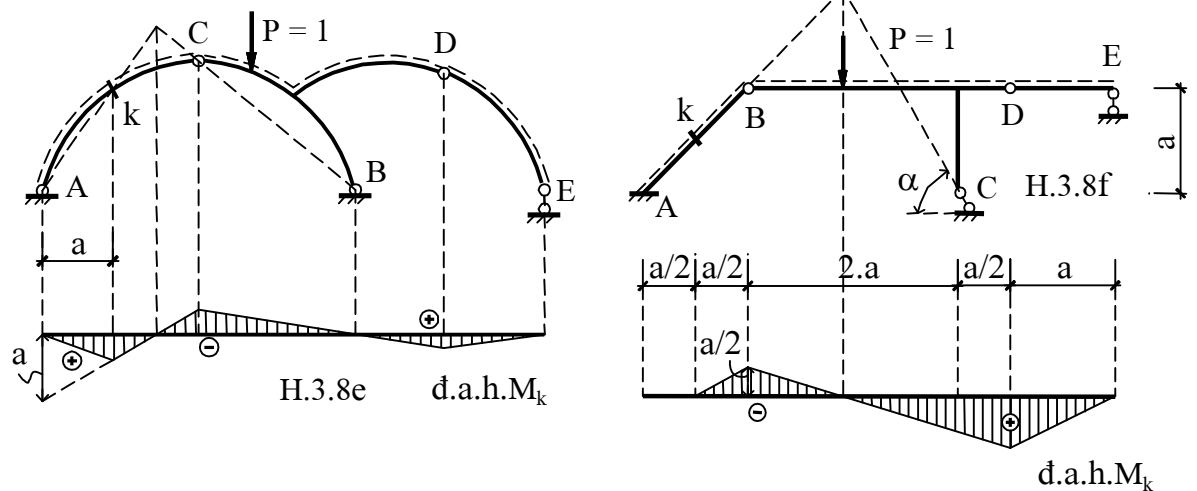
Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_m , đ.a.h. M_p , đ.a.h. N_n (H.3.8c)

Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h. M_k , đ.a.h. M_m (H.3.8d)



Ví dụ 3: Vẽ đ.a.h. M_k (H.3.8e)

Ví dụ 4: Vẽ đ.a.h. M_k (H.3.8f)



§ 6. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ CÓ HỆ THỐNG TRUYỀN LỰC

Ở đây chỉ quan tâm vẽ đường ảnh hưởng đại lượng S thuộc kết cấu chịu lực chính. Nguyên tắc vẽ là đi phân tích và so sánh sự làm việc của hệ không có hệ thống truyền lực với hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng $P = 1$ di động:

- Đường ảnh hưởng gồm các đoạn đường thẳng, mỗi đoạn tương ứng với từng dầm dọc phụ.

- Khi $P = 1$ đặt trên các mắt truyền lực gây ra ảnh hưởng như khi đứng trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính

Các bước tiến hành như sau:

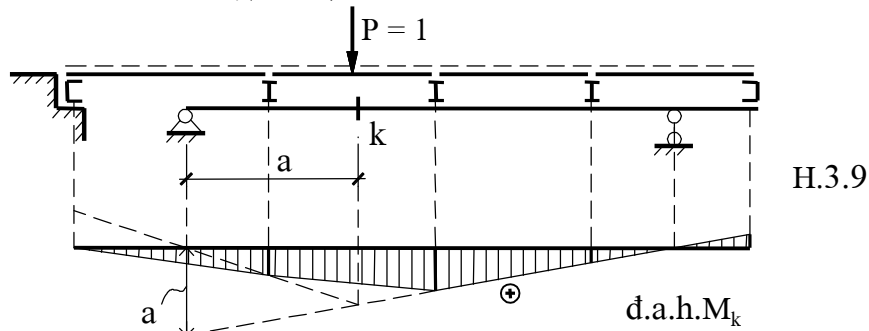
* *Bước 1:* Vẽ đ.a.h.S với giả thiết $P = 1$ di động trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính.

* *Bước 2:* Giữ lại các tung độ của đ.a.h.S vừa vẽ tại những vị trí dưới các mắt truyền lực. Các tung độ này cũng chính là các tung độ đ.a.h.S khi $P = 1$ di động trên hệ thống truyền lực.

* *Bước 3:* Lần lượt nối các tung độ vừa giữ lại ở trên trong phạm vi từng dốt bằng các đoạn thẳng, sẽ được đ.a.h.S cần vẽ.

* *Chú ý:* Khi $P = 1$ đặt tại mắt tựa trên trái đất, tung độ đ.a.h.S tại vị trí này bằng không.

Ví dụ: Vẽ đ.a.h. M_k (H.3.9)

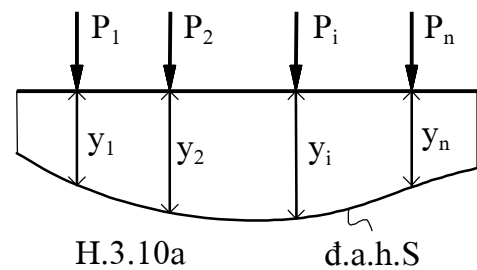


§ 6. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG NGHIÊN CỨU ỨNG VỚI CÁC DẠNG TẢI TRỌNG KHÁC NHAU BẰNG ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA NÓ.

I. Tải trọng tập trung:

Giả sử trên công trình chịu các lực tập trung P_1, P_2, \dots, P_n cùng phương tác dụng. Gọi y_1, y_2, \dots, y_n là các tung độ tương ứng dưới các tải trọng tập trung của đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu S trên công trình do lực tập trung $P = 1$ cùng phương với các lực tập trung P_1, P_2, \dots, P_n di động trên công trình gây ra (H.3.10a).

Yêu cầu: Xác định giá trị của đại lượng S do các lực tập trung gây ra bằng đường ảnh hưởng của nó.



Theo ý nghĩa tung độ đường ảnh hưởng, giá trị của đại lượng S do riêng P_i gây ra:

$$S_i = P_i \cdot y_i.$$

Theo nguyên lý cộng tác dụng, suy ra:

$$S = \sum S_i = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i$$

* *Chú thích:*

- $P_i > 0$ khi cùng chiều với $P = 1$ dùng để vẽ đ.a.h.S và ngược lại.

- Dấu của y_i lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.

- Trường hợp đ.a.h.S có bước nhảy tại vị trí tương ứng lực P_i (H.3.10b) thì đại lượng S do riêng P_i gây ra sẽ có hai giá trị tương ứng với bên trái và bên phải tiết diện có bước nhảy:

$$S_i^{tr} = P_i \cdot y_i^{ph} \text{ và } S_i^{ph} = P_i \cdot y_i^{tr}$$

**Ví dụ:* Cho hệ có sơ đồ tính như trên hình vẽ (H.3.10c). Yêu cầu: Tính mômen và lực cắt tại tiết diện k theo hai cách:

- Sử dụng biểu đồ (M) và (Q).

- Sử dụng đ.a.h. M_k và đ.a.h. Q_k .

a. Sử dụng biểu đồ nội lực:

Các biểu đồ (M), (Q) được vẽ trên hình (H.3.10c). Từ đó, suy ra:

$$M_k = 11,2(\text{T.m}), Q_k^{tr} = 1,8(\text{T}),$$

$$Q_k^{ph} = -1,2(\text{T})$$

b. Sử dụng đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_k :

- Các đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_k được vẽ trên hình

- Xác định M_k :

$$M_k = \sum_{i=1}^3 P_i \cdot y_i = P_1 \cdot 1,2 + P_2 \cdot 2,4 + P_3 \cdot 0,8 = 2 \cdot 1,2 + 3 \cdot 2,4 + 2 \cdot 0,8 = 11,2(\text{T.m})$$

- Xác định Q_k : Do đ.a.h. Q_k có bước nhảy tại vị trí lực tập trung P_2 nên Q_k do P_2 gây ra sẽ có 2 giá trị.

$$Q_k^{tr} = P_1 \cdot (-0,2) + P_2 \cdot 0,6 + P_3 \cdot 0,2 = 2 \cdot (-0,2) + 3 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,2 = 1,8(\text{T.m})$$

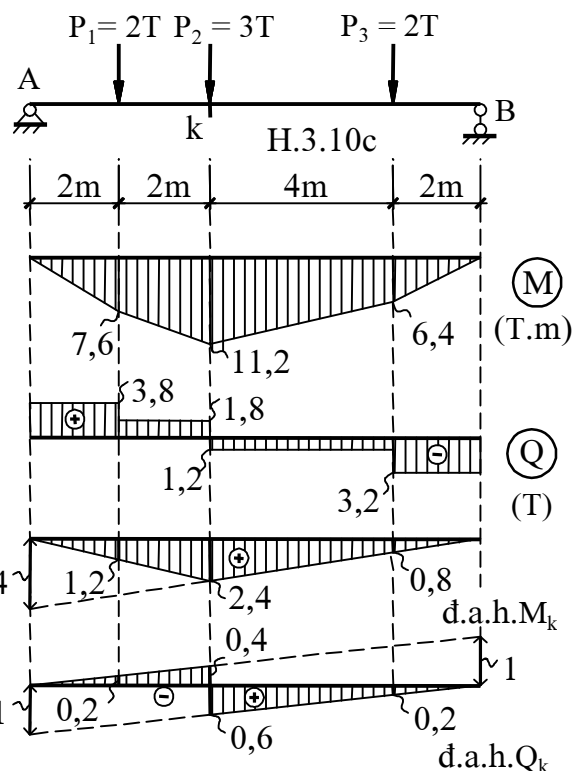
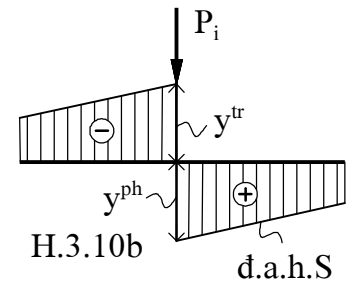
$$Q_k^{ph} = P_1 \cdot (-0,2) + P_2 \cdot (-0,4) + P_3 \cdot 0,2 = 2 \cdot (-0,2) + 3 \cdot (-0,4) + 2 \cdot 0,2 = -1,2(\text{T.m})$$

* *Nhận xét:* Kết quả của hai cách tính là như nhau.

II. Tải trọng phân bố:

Giả sử trên công trình chịu tải trọng phân bố có cường độ $q(z)$. Đường ảnh hưởng đại lượng S do $P = 1$ cùng phương với lực phân bố $q(z)$ di động trên công trình có phương trình $y = y(z)$ (H.3.10d).

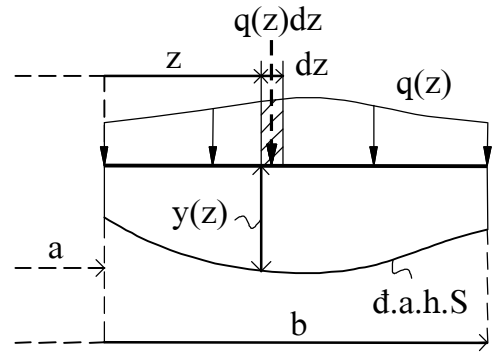
Yêu cầu: Xác định giá trị của đại lượng S do $q(z)$ gây ra bằng đường ảnh hưởng của nó.



Xét ảnh hưởng của một phân tố tải trọng có chiều dài dz . Xem phân tố này như một lực tập trung với giá trị $q(z).dz$. Gọi y là tung độ đường ảnh hưởng tương ứng dưới phân tố tải trọng $q(z).dz$.

Suy ra: $dS = q(z).dz.y(z)$

Suy ra: $S_{a-b} = \int_a^b y(z).q(z).dz$



H.3.10d

Trường hợp tải trọng phân bố đều ($q = \text{const}$):

$S_{a-b} = q.\omega_a^b$

ω_a^b là diện tích phần biểu đồ đường ảnh hưởng bên dưới tải trọng phân bố đều trên đoạn $[a, b]$.

* *Chú thích:*

- q có giá trị dương khi nó cùng chiều với lực $P=1$ dùng để vẽ đ.a.h.S
- Dấu của ω_a^b lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.

**Ví dụ:* Xác định M_k & Q_k bằng đường ảnh hưởng của nó. Hệ có sơ đồ cho trên hình (H.3.10e)

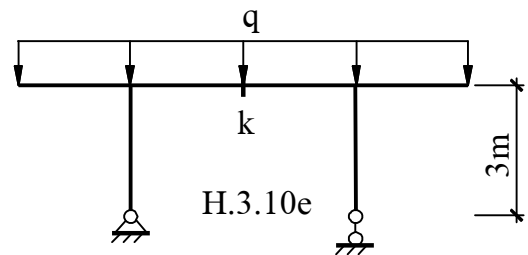
- Các đ.a.h. M_k & đ.a.h. Q_k được vẽ trên hình vẽ.

- Xác định M_k

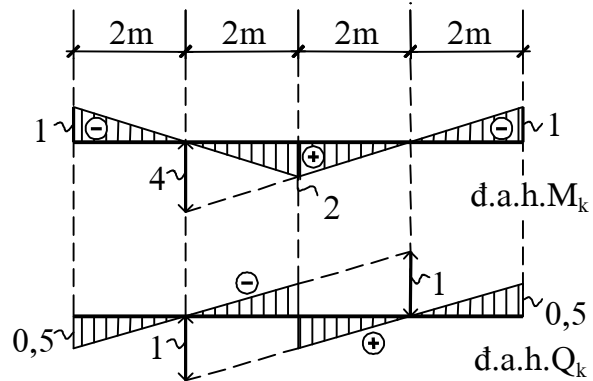
$M_k = q.\varpi = q.\left(\frac{-1.2}{2}\right) + q.\left(\frac{1.4}{2}\right) + q.\left(\frac{-1.2}{2}\right) = 0$

- Xác định Q_k :

$Q_k = q.\left(\frac{0,5.2}{2}\right) + q.\left(\frac{-0,5.2}{2}\right) + q.\left(\frac{0,5.2}{2}\right) + q.\left(\frac{-0,5.2}{2}\right) = 0$



H.3.10e

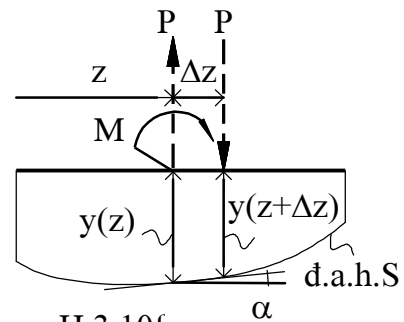


III. Mômen tập trung:

Giả sử trên công trình chịu tác dụng của mômen tập trung M và đại lượng nghiên cứu S có đường ảnh hưởng đã biết (H.3.10f).

Yêu cầu: Xác định giá trị của đại lượng S do M gây ra bằng đường ảnh hưởng của nó.

Thay thế M bằng cặp ngẫu lực $P = \frac{M}{\Delta z} (\Delta z \rightarrow 0)$



H.3.10f

Theo công thức cho trường hợp tải tập trung, ta có:

$$S = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [P \cdot y(z + \Delta z) - P \cdot y(z)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} M \left[\frac{y(z + \Delta z) - y(z)}{\Delta z} \right] = M \cdot y'(z)$$

$$S = M \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Trường hợp trên công trình có nhiều mômen tập trung: M_1, M_2, \dots, M_n .

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i$$

* *Chú thích:*

- M lấy dấu dương khi có chiều thuận chiều kim đồng hồ.

- $\operatorname{tg} \alpha$ có dấu dương khi đường ảnh hưởng đồng biến

khi qua điểm đặt M.

- Nếu đường ảnh hưởng có điểm gãy tương ứng tại điểm đặt mômen M (H.3.10g), đại lượng S sẽ có hai giá trị tương ứng bên trái và bên phải điểm gãy:

$$S^{\text{tr}} = M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{ph}}; \quad S^{\text{ph}} = M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{tr}}$$

* *Ví dụ:* Xác định M_k bằng đường ảnh hưởng của nó. Hệ có sơ đồ cho trên hình (H.3.10.h)

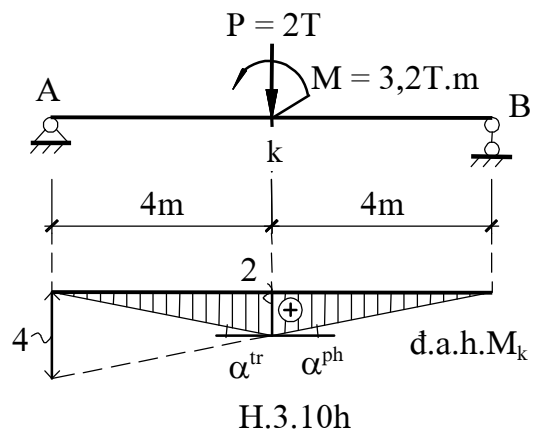
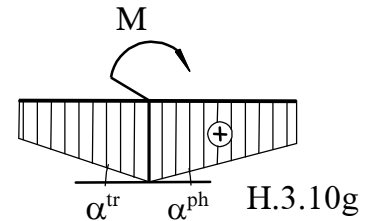
- Vẽ đ.a.h. M_k như trên hình.

- Xác định M_k :

M_k do cả lực tập trung và mômen tập trung tác dụng. Tại M, đ.a.h. M_k bị gãy khúc nên M_k sẽ có hai giá trị:

$$\begin{aligned} M_k^{\text{tr}} &= P \cdot y + M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{ph}} = \\ &= 2 \cdot 1 + (-3,2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3,6(\text{T.m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_k^{\text{ph}} &= P \cdot y + M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{tr}} = \\ &= 2 \cdot 1 + (-3,2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 0,4(\text{T.m}) \end{aligned}$$



§ 7. CÁCH DÙNG ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG ĐỂ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI CỦA ĐOÀN TẢI TRỌNG VÀ GIÁ TRỊ ĐỂ TÍNH.

Bản chất của bài toán là đi tìm cực trị của hàm $S(z)$. Giá trị lớn nhất trong số các cực đại (hay nhỏ nhất trong số các cực tiểu) là giá trị để tính. Vị trí của đoàn tải trọng tương ứng là vị trí bất lợi nhất.

I. Đường ảnh hưởng có dạng đường cong trơn tru một dấu:

Khi đó phương trình đường ảnh hưởng S và đạo hàm của nó là những hàm liên tục. Do vậy, hàm $S = f(z)$ biểu thị sự biến thiên của đại lượng S theo vị trí của tải trọng đi động và đạo hàm của nó $S'(z)$ cũng sẽ liên tục. Đối với loại bài toán này, sau khi đã

* Ví dụ: Tìm giá trị để tính của đại lượng S có đ.a.h.S như trên hình (H.3.11c).

Sơ đồ tải di động cho trên hình (H.3.11b)

- Tính $tg\alpha$ của các góc nghiêng:

$$tg\alpha_1 = \frac{3}{4}; tg\alpha_2 = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}; tg\alpha_3 = -\frac{4}{9}$$

1. Tính thử lần thứ nhất:

Chọn tải $P = 9,5(T)$ đặt vào đỉnh lồi có tung độ $y = 4$ (H.3.11d)

+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái 1 đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i tg\alpha_i &= \\ &= 3,5tg\alpha_1 + 9,5tg\alpha_2 + (3 + 7)tg\alpha_3 = \\ &= 3,5 \cdot \frac{3}{4} + 9,5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9} > 0 \end{aligned}$$

+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải 1 đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i tg\alpha_i &= 3,5tg\alpha_2 + (9,5 + 10)tg\alpha_3 \\ &= 3,5 \cdot \frac{1}{4} + 19,5 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = -\frac{70,125}{9} < 0 \end{aligned}$$

Như vậy, điều kiện (*) được thỏa mãn. Vị trí này cho ta một cực đại. Tính S_{max}

$$S_{max} = 3,5 \cdot 3 + 9,5 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{20}{9} + 7 \cdot \frac{4}{9} = 58,278$$

2. Tính thử lần thứ 2:

Đặt tải trọng $P = 3(T)$ vào đỉnh có tung độ $y = 4$ (H.3.11e).

+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i tg\alpha_i &= 9,5tg\alpha_1 + 3tg\alpha_2 + 7tg\alpha_3 = \\ &= 9,5 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{42,875}{9} > 0 \end{aligned}$$

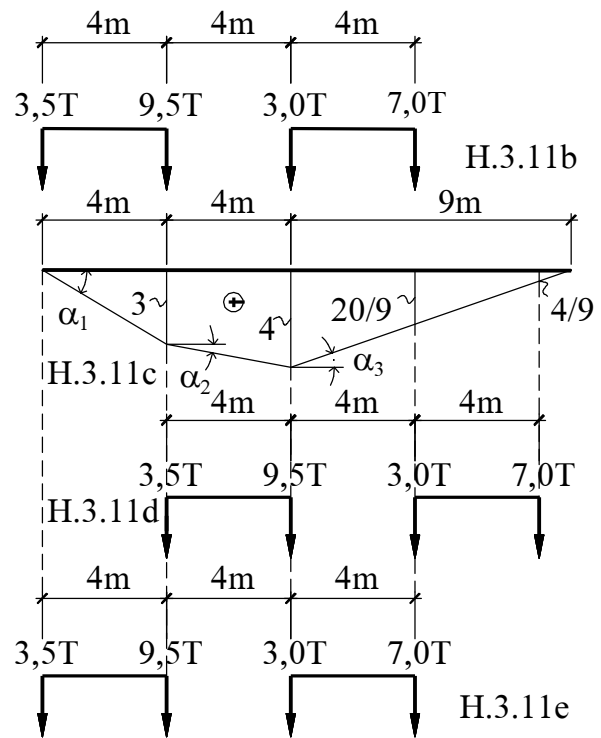
+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i tg\alpha_i &= 3,5tg\alpha_1 + 9,5tg\alpha_2 + 10tg\alpha_3 = \\ &= 3,5 \cdot \frac{3}{4} + 9,5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9} > 0 \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện (*), vị trí này không tồn tại S_{max}

Về mặt nguyên tắc, do có 4 lực và 2 đỉnh lồi nên cần thử đặt tải 8 lần. Tuy nhiên, có thể dựa vào các nhận xét sau để loại bớt những lần thử không cần thiết:

- Trong 2 lần thử trên thì lực tập trung 3,5(T) & 9,5(T) cũng đã được đặt vào đỉnh lồi có tung độ $y = 3$.



- Nếu tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trong sang bên trái hay bên phải so với 2 lần thử ở trên thì tải trọng sẽ vượt ra ngoài đường ảnh hưởng hoặc đi vào vùng tung độ bé nên ảnh hưởng sẽ giảm xuống.

Tóm lại vị trí bất lợi của đoàn tải trong là trên hình (H.3.11d) và giá trị để tính là $S_{max} = 58,278$.

III. Tải trọng tập trung trên đường ảnh hưởng có dạng tam giác:

Giả sử đường ảnh hưởng tam giác cho như trên hình (H.3.11f). Như đã biết là vị trí bất lợi của đoàn tải trọng chỉ xảy ra khi có một lực tập trung nào đó đặt tại đỉnh lồi. Gọi lực tập trung đặt tại đỉnh tam giác là P_{th} ; hợp lực của các lực bên trái và bên phải P_{tr} là R_{tr} và R_{ph} . Lần lượt cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái và bên phải 1 đoạn Δz . Điều kiện (*) được viết lại:

$$\begin{aligned} &> &< \\ (R_{tr} + P_{th}).tg\alpha_1 + R_{ph}.tg\alpha_2 &> 0 &\text{ và } &R_{tr}.tg\alpha_1 + (R_{ph} + P_{th}).tg\alpha_2 = 0 \\ &= && &< \end{aligned}$$

Từ hình vẽ thì $tg\alpha_1 = c/a$; $tg\alpha_2 = -c/b$.

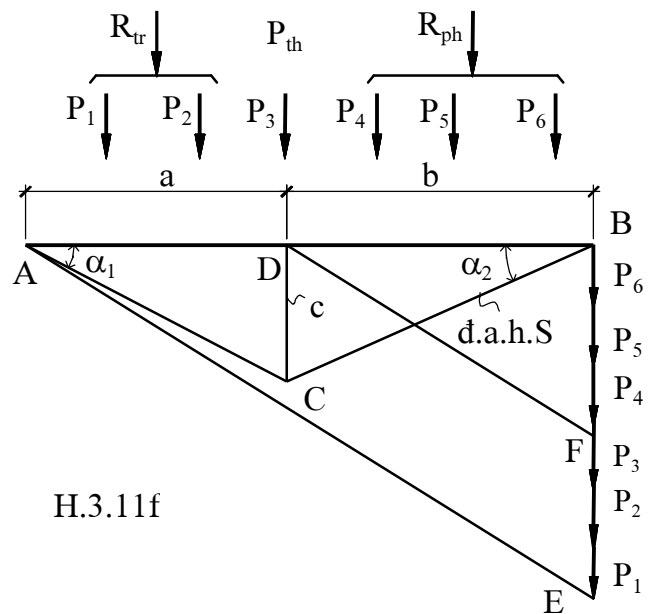
Thay vào và biến đổi, ta được điều kiện cần và đủ để xảy ra vị trí bất lợi của đoàn tải trọng:

- Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên trái thì thoả mãn điều kiện (i)
- Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên phải thì thoả mãn điều kiện (ii)

$$\begin{aligned} &> &< \\ \frac{R_{tr} + P_{th}}{a} &> \frac{R_{ph}}{b} & \text{(i); } & \frac{R_{tr}}{a} = \frac{R_{ph} + P_{th}}{b} & \text{(ii)} \\ &= && &< \end{aligned}$$

* Có thể tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng bằng đồ giải như sau:

Tại điểm B trên hình (H.3.11f) lần lượt dựng các véc tơ biểu thị cho các lực $P_1, P_2 \dots P_6$ theo thứ tự từ B đến A trên một đường thẳng bất kỳ không trùng với đường chuẩn. Gọi E là mút cuối cùng. Nối AE và từ D kẻ đường thẳng song song với AE cắt BE tại F. Điểm F thuộc véc tơ biểu thị lực nào thì lực đó là P_{th} cần đặt ở đỉnh tam giác để có vị trí bất lợi.



Thật vậy, từ các quan hệ tỷ lệ của các đoạn bị chắn trên hình vẽ, ta dễ dàng thấy được điều kiện (i) và (ii).

*Chú thích:

- Cách thực hiện trên chỉ đúng khi tất cả các tải trọng thuộc phạm vi đường ảnh hưởng.

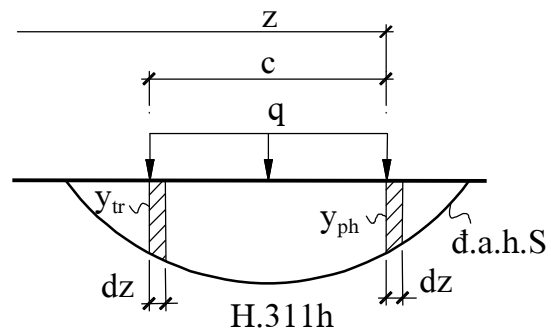
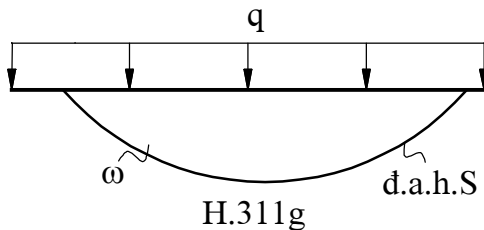
- Nếu chiều dài đoàn tải trọng vượt ra ngoài phạm vi đường ảnh hưởng thì cần phải tính thử nhiều lần với các lực P_{th} khác nhau. Lúc này có thể tồn tại nhiều P_{th} nên cũng có thể có nhiều S_{max} . Giá trị để tính là $\max S_{max}$.

- Khi sử dụng phương pháp đồ giải, nếu điểm F thuộc ranh giới của hai lực thì cả hai lực đó đều có thể là P_{th} .

IV. Tải trọng phân bố đều trên đường ảnh hưởng đơn trị bất kỳ:

1. Chiều dài tải trọng lớn hơn chiều dài đường ảnh hưởng: (H.3.11g)

$S_{max} = q \cdot \omega$; ω là diện tích toàn bộ đường ảnh hưởng.



2. Chiều dài tải trọng bé hơn chiều dài đường ảnh hưởng: (H.3.11h)

Trong trường hợp này, vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng chỉ xảy ra khi tung độ đường ảnh hưởng tại đầu trái và đầu phải của đoàn tải trọng bằng nhau.

Cm: Đại lượng S tương ứng với vị trí z của đoàn tải trọng:

$$S = q \cdot \omega_{z-c}$$

Để S đạt cực trị thì $\frac{dS}{dz} = q \cdot \frac{d\omega}{dz} = 0$, tức là $\frac{d\omega}{dz} = 0$.

Theo hình vẽ (H.3.11h) thì $d\omega = y^{ph} \cdot dz - y^{tr} \cdot dz = dz \cdot (y^{ph} - y^{tr})$

Để $d\omega = 0$ thì $y^{ph} = y^{tr}$ (đccm).

* Chú ý:

Nếu đường ảnh hưởng có 2 dấu thì phải đặt riêng cho từng phần có dấu dương hoặc dấu âm để tính S_{max} , S_{min} .

Ví dụ: Tìm M_{max} , M_{min} tại mặt cắt k của dầm có mút thừa trên hình (H.3.11i). Biết tải trọng di động phân bố đều có chiều dài $d = 1,6m$ và cường độ $q = 1,2(T/m)$.

Vẽ đ.a.h. M_k

a. Tìm M_{min} : cần đặt q vào miền đ.a.h. M_k mang dấu âm. Để thấy miền bên trái cho M_{min} và vị trí bất lợi nhất khi q ở sát mút thừa.

$$M_{min} = q \cdot \omega_o^{1,6} = 1,2 \cdot \left(-\frac{1,25 + 0,25}{2} \cdot 1,6\right) = -1,44(T.m)$$

b. Tìm M_{max} :

Đặt q vào miền đ.a.h. M_k mang dấu dương. Cần xác định z để $y^{tr} = y^{ph}$

Từ các tam giác đồng dạng, ta có:

$$\frac{y^{tr}}{0,9375} = \frac{z}{1,5}, \frac{y^{ph}}{0,9375} = \frac{4-z-d}{2,5}$$

Thay $y^{tr} = y^{ph}$ vào, suy ra:

$$4z = 1,5(4 - d)$$

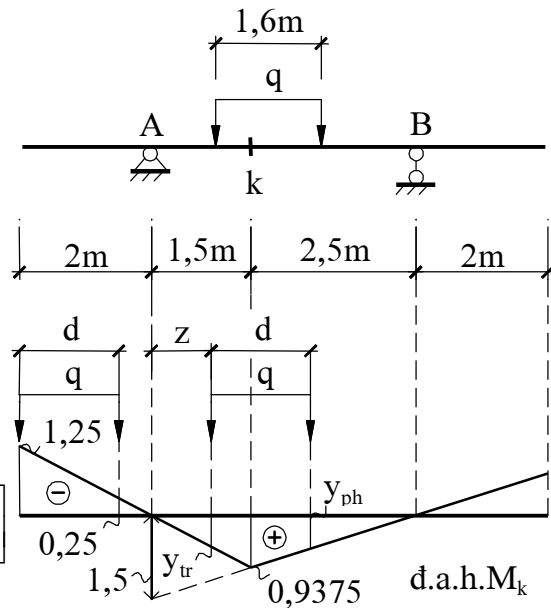
Giải ra $z = 0,9$. Suy ra:

$$y^{tr} = y^{ph} = 0,9375 \cdot \frac{z}{1,5} = 0,5625.$$

Từ đây tính được:

$$M_{max} = q \cdot \omega_{0,9}^{2,5}$$

$$= 1,2 \cdot \left[\left(\frac{0,5625 + 0,9375}{2} \right) \cdot 0,6 + \left(\frac{0,5625 + 0,9375}{2} \right) \cdot 1 \right] \\ = 1,44(\text{T.m})$$



H.3.11i

V. Khái niệm về tải trọng tương đương:

Khi thiết kế kết cấu chịu tải trọng di

động, ta thường lặp lại nhiều lần việc tìm vị trí bất lợi và giá trị để tính của một đoàn tải trọng tiêu chuẩn nào đó trên một số dạng đường ảnh hưởng có hình dạng giống nhau song chỉ khác về độ lớn. Để cho việc tính toán được thuận lợi người ta tìm cách thay thế các đoàn tải trọng tiêu chuẩn bằng tải trọng phân bố đều có chiều dài phủ kín đường ảnh hưởng, có cường độ q_{td} để sao cho đại lượng S do q_{td} gây ra đúng bằng giá trị để tính của đại lượng S do tải trọng tiêu chuẩn đặt ở vị trí bất lợi nhất. Tải trọng phân bố đều như vậy gọi là tải trọng tương đương.

Vậy tải trọng tương đương là tải trọng phân bố đều phủ kín chiều dài đặt tải của đường ảnh hưởng và sinh ra giá trị của đại lượng S chính là giá trị để tính của đại lượng S do đoàn tải trọng tiêu chuẩn được thay thế đặt ở vị trí bất lợi nhất gây ra.

Từ đây suy ra $S_{tính} = \omega \cdot q_{td}$.

Mặc khác, khi phân tích người ta nhận thấy, tải trọng tương đương chỉ phụ thuộc vào chiều dài, hình dạng của đường ảnh hưởng mà không phụ thuộc vào độ lớn tung độ đường ảnh hưởng.

Do vậy, với mỗi loại tải trọng tiêu chuẩn, với mỗi chiều dài và dạng đường ảnh hưởng, người ta đã tìm ra được một $S_{tính}$, tiếp đó tính được $q_{td} = \frac{S_{tính}}{\omega}$, và tập hợp sẵn

các q_{td} vào trong một bảng tra. Khi tính toán ta chỉ cần thực hiện:

- Căn cứ vào tải trọng và dạng đường ảnh hưởng đang xét, tìm bảng tải trọng tương đương tương ứng.
- Căn cứ vào chiều dài đường ảnh hưởng đang xét, tra tìm q_{td} .
- Tính $S_{tính} = \omega \cdot q_{td}$.

CHƯƠNG 4

XÁC ĐỊNH CUỖN VỊ TRONG HỆ THANH PHẪNG ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH.

§ 1. KHÁI NIỆM VỀ BIẾN DẠNG & CHUYỂN VỊ.

I. Biến dạng:

1. Khái niệm: Biến dạng là sự thay đổi hình dạng của phân tố dưới tác dụng của các nguyên nhân như tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa...

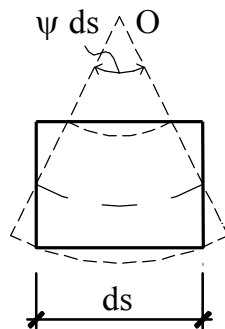
2. Các thành phần biến dạng:

Biến dạng của một phân tố thanh trong hệ thanh phẳng có chiều dài ds gồm 3 thành phần:

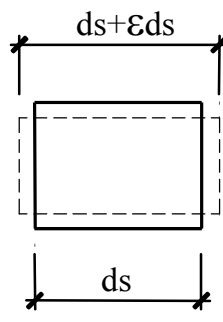
- Biến dạng góc xoay ψds : là góc xoay tương đối giữa 2 tiết diện ở 2 đầu phân tố (H.4.1.a); ψ là góc xoay tỷ đối.

- Biến dạng dọc trục ϵds : là khoảng co dãn giữa 2 tiết diện ở hai đầu phân tố theo phương dọc trục thanh (H.4.1.b); ϵ là biến dạng dọc trục tỷ đối.

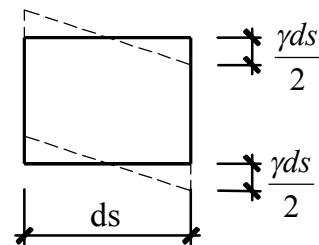
- Biến dạng trượt γds : là độ trượt tương đối giữa 2 tiết diện ở 2 đầu phân tố (H.4.1.c); γ là góc trượt tỷ đối.



H.4.1.a



H.4.1.b



H.4.1.c

* *Chú ý:* Quy ước chiều dương của biến dạng tương ứng với chiều trên hình vẽ.

II. Chuyển vị:

1. Khái niệm: Chuyển vị là sự thay đổi vị trí của tiết diện dưới tác dụng của các nguyên nhân như tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa...

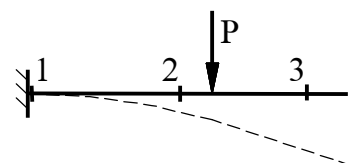
Khi hệ biến dạng, hầu hết các tiết diện đều có vị trí mới. Như vậy, có thể nói chuyển vị là hệ quả của sự biến dạng.

Tại 1 tiết diện của hệ có thể có 1 trong 3 khả năng sau:

- Có biến dạng nhưng không có chuyển vị. Ví dụ tiết diện 1 trên hình (H.4.2)

- Có biến dạng và chuyển vị. Ví dụ tiết diện 2 trên hình (H.4.2)

- Có chuyển vị nhưng không có biến dạng. Ví dụ tiết diện 3 trên hình (H.4.2)

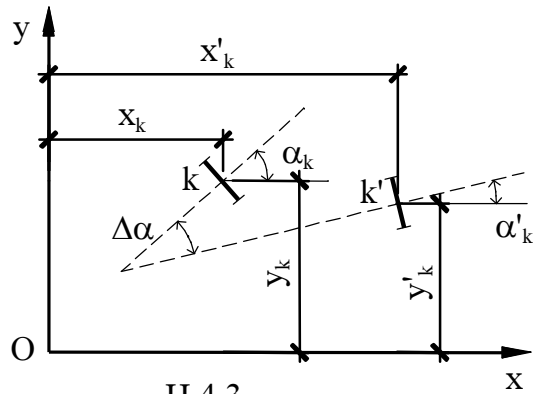


H.4.2

2. Các thành phần chuyển vị:

Tại một tiết diện bất kỳ có thể có 3 thành phần chuyển vị: 2 chuyển vị thẳng theo hai phương khác nhau và một chuyển vị góc xoay.

Thật vậy, trong hệ trục Oxy, xét 1 tiết diện k (H.4.3) được xác định bởi các tọa độ (x_k, y_k, α_k) . Sau khi hệ bị biến dạng, tiết diện k có vị trí mới là k' được xác định bởi các tọa độ (x'_k, y'_k, α'_k) .



H.4.3

Như vậy chuyển vị tại tiết diện k gồm ba thành phần:

- + Chuyển vị thẳng theo phương x: $\Delta x = x'_k - x_k$
- + Chuyển vị thẳng theo phương y: $\Delta y = y'_k - y_k$
- + Chuyển vị góc xoay: $\Delta \alpha = \alpha'_k - \alpha_k$

3. Ký hiệu chuyển vị:

Thường được ký hiệu bằng chữ Δ và kèm theo hai chỉ số: chỉ số thứ nhất chỉ vị trí và phương của chuyển vị; chỉ số thứ hai chỉ nguyên nhân gây ra chuyển vị.

Δ_{km} đọc là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương k do nguyên nhân m gây ra.

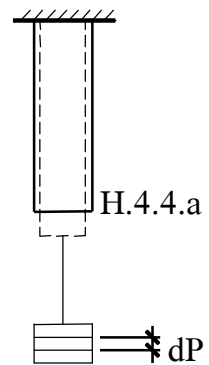
Khi nguyên nhân m gây ra chuyển vị bằng đơn vị thì gọi là chuyển vị đơn vị. Khi đó Δ được thay bằng δ . δ_{km} đọc là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương k do nguyên nhân m bằng đơn vị gây ra.

§ 2. CÔNG CỦA NGOẠI LỰC & BIỂU THỨC CÔNG.

I. Nguyên lý bảo toàn năng lượng:

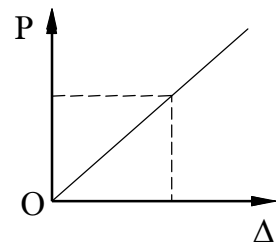
Xét 1 thanh chịu kéo đúng tâm như trên hình vẽ (H.4.4.a). Tăng dần tải trọng gây kéo bằng cách thêm dần các tải trọng vô cùng bé dP (để không gây ra lực quán tính). Quan sát ta nhận thấy:

- Thanh bị kéo dãn ra, tức là thế năng của ngoại lực U_p giảm xuống. Và biến dạng trong hệ tăng lên, tức là thế năng biến dạng đàn hồi U trong thanh tăng lên.
- Quan hệ giữa lực tác dụng và biến dạng là tuyến tính, tức là tuân theo giả thiết 1 (H.4.4.b).



H.4.4.a

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, đồng thời bỏ qua ảnh hưởng của phần năng lượng do các hiện tượng từ, nhiệt, điện... thì $U_p = U$. Nghĩa là: *Thế năng của ngoại lực U_p chuyển hóa thành thế năng biến dạng U tích lũy trong hệ nếu sự biến dạng không làm phá vỡ sự cân bằng của hệ.*



H.4.4.b

Mặc khác, năng lượng được đo bằng công:

+ $U_p = T$: công của ngoại lực được sinh ra trên chuyển vị của điểm đặt ngoại lực. Công $T > 0$ vì chuyển vị cùng chiều với điểm đặt lực P .

+ $U = A^*$: công của nội lực được sinh ra trên những biến dạng đàn hồi trong hệ. $A^* < 0$ vì nội lực có xu hướng ngăn cản biến dạng trong hệ.

Từ $U_p = U$. Suy ra $T = -A^* = U$ (4 - 1)

Như vậy: về trị số, thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ bằng công T của ngoại lực gây ra biến dạng hay bằng công A^* của nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi nhưng trái dấu.

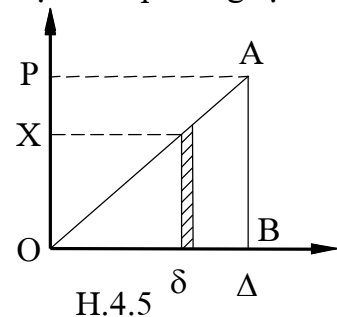
II. Công của ngoại lực (T):

Công là tích số của lực với trị số chuyển vị của điểm đặt lực theo phương lực tác dụng.

Như đã nói ở trên, quan hệ giữa lực tác dụng và chuyển vị là tuyến tính (H.4.5). Xét ở thời điểm lực tác dụng $P = X$ và chuyển vị $\Delta = \delta$, tăng thêm tải trọng tác dụng dP làm cho chuyển vị tăng thêm một lượng $d\delta$. Lực X sẽ sinh một công phân tố:

$$dT = X.d\delta$$

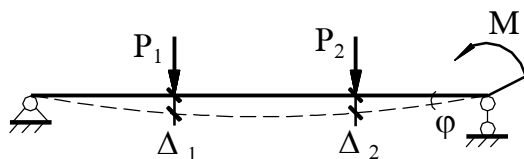
Suy ra $T = \int_0^{\Delta} X.d\delta = \frac{1}{2}.P.\Delta$ (chính là diện tích tam giác OAB)



Trong trường hợp có nhiều lực tác dụng P_1, P_2, \dots, P_n . Nếu gọi $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ là chuyển vị cuối cùng tương ứng theo phương P_1, P_2, \dots, P_n do các lực đó đồng thời tác dụng gây ra thì:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i.\Delta_i \quad (4 - 2)$$

Như vậy: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công của các ngoại lực tập trung đồng thời tác dụng tĩnh bằng một nửa tổng các tích số của các ngoại lực với giá trị của chuyển vị cuối cùng tương ứng.



$$T = \frac{1}{2}(P_1.\Delta_1 + P_2.\Delta_2 + M.\varphi)$$

H.4.6

* Chú ý:

- Công tổng cộng không phụ thuộc vào thứ tự tác dụng của ngoại lực.
- Công của ngoại lực không tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

§ 3. CÔNG CỦA NỘI LỰC - THỂ NĂNG CỦA HỆ THANH.

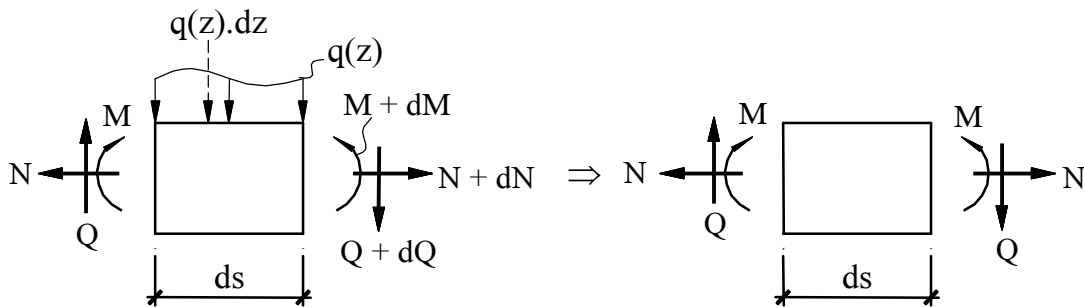
I. Công của nội lực (A^*): là công của các nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi của hệ.

Tách ra khỏi hệ một phân tố thanh có chiều dài ds (H.4.7.a). Lực tác dụng lên phân tố gồm:

+ Ngoại lực: $q(z)$ được quy về thành lực tập trung $q(z).ds$

+ Nội lực: ở đầu trái là (M, Q, N) ; ở đầu phải là $(M + dM, Q + dQ, N + dN)$.

Giả thiết chiều dương của chúng như trên hình vẽ.



H.4.7.a

H.4.7.b

* Các nhận xét:

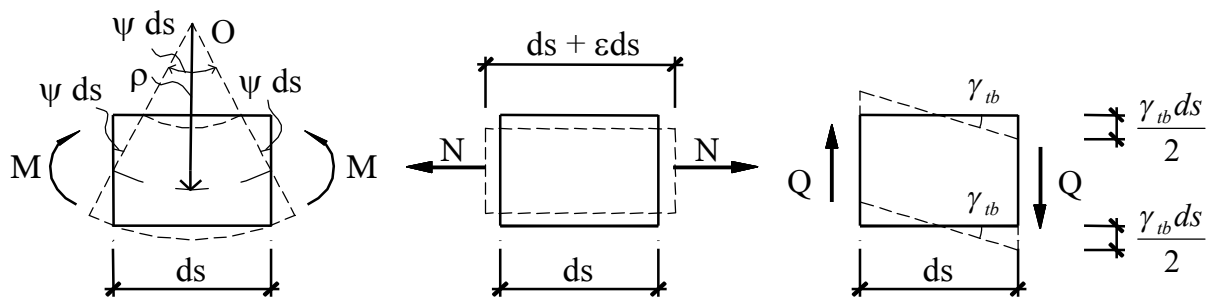
- Do xét cân bằng riêng cho phân tố nên có thể xem $M, Q, N, M + dM, Q + dQ, N + dN$ là các ngoại lực. Vì thế, có thể sử dụng biểu thức công của ngoại lực để xác định, sau đó suy ra công của nội lực theo mối quan hệ: $A^* = -T$

- Vì chỉ phân tích cho một phân tố thanh nên công được gọi là công phân tố. Khi đó ta thay $A^* = dA^*, T = dT$. Suy ra $dA^* = -dT$.

- Phân tố ds có chiều dài là rất bé nên cho phép bỏ qua các đại lượng vô cùng bé $q(z).ds, dM, dQ, dN$ khi tính công (H.4.7.b).

- Các lực M, Q, N sinh công trên những biến dạng độc lập nên cho phép tính công riêng rẽ do từng thành phần rồi cộng kết quả lại với nhau.

II. Xác định các thành phần biến dạng:



H.4.8.a

H.4.8.b

H.4.8.c

- Thành phần biến dạng góc xoay ψds (H.4.8.a):

Theo SBVL
$$\psi = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.J}$$

- Thành phần biến dạng dọc trục εds (H.4.8.b):

Theo SBVL
$$\varepsilon = \frac{N}{E.F}$$

- Thành phần biến dạng trượt $\gamma_{tb} ds$ (H.4.8.c):

Theo SBVL
$$\gamma_{tb} = \nu \cdot \frac{Q}{G.F}$$

Với ν là hệ số kể đến sự phân bố không đều của ứng suất tiếp. Hệ số ν chỉ phụ thuộc vào hình dạng của tiết diện: tiết diện hình chữ nhật ($\nu = 1,2$), tiết diện hình tròn ($\nu = 1,18$), tiết diện hình vành khăn ($\nu = 2$)...

III. Biểu thức công của nội lực:

- Do mômen M gây ra: $dT_M = \frac{1}{2} \left(M \cdot \frac{\psi \cdot ds}{2} + M \cdot \frac{\psi \cdot ds}{2} \right) = \frac{M \cdot \psi \cdot ds}{2} = \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J}$

- Do lực dọc N gây ra: $dT_N = \frac{1}{2} \left(N \cdot \frac{\varepsilon \cdot ds}{2} + N \cdot \frac{\varepsilon \cdot ds}{2} \right) = \frac{N \cdot \varepsilon \cdot ds}{2} = \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F}$

- Do lực cắt Q gây ra: $dT_Q = \frac{1}{2} \left(Q \cdot \frac{\gamma_{tb} \cdot ds}{2} + Q \cdot \frac{\gamma_{tb} \cdot ds}{2} \right) = \frac{Q \cdot \gamma_{tb} \cdot ds}{2} = \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F}$

Suy ra
$$dT = dT_M + dT_N + dT_Q = \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F}$$

Suy ra
$$dA^* = -dT = - \left(\frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right)$$

$$A^* = \int dA^* = - \left[\sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right]$$

Ở đây dấu \sum là lấy tổng trên các đoạn thanh sao cho các biểu thức dưới dấu tích phân là liên tục về mặt toán học.

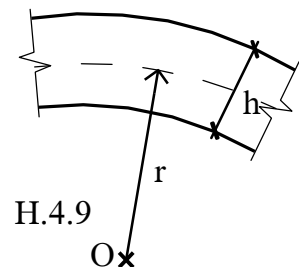
IV. Thế năng của hệ thanh:

Từ biểu thức (4 - 1), suy ra biểu thức thế năng đàn hồi của hệ thanh:

$$U = -A^* = \sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \quad (4 - 3)$$

*Các chú ý:

- Thế năng của hệ luôn dương.
- Biểu thức thế năng (4 - 3) chỉ áp dụng cho hệ gồm những thanh thẳng hoặc cong với độ cong bé ($\frac{h}{r} \leq \frac{1}{5}$) (H.4.9).



H.4.9

§ 4. VẬN DỤNG BIỂU THỨC THỂ NĂNG ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ.

I. Cách tích trực tiếp từ biểu thức thể năng:

Cách này chỉ áp dụng khi trên hệ chỉ có một lực tập trung và cần tìm chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực đó.

$$\text{Từ } U = T = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta. \text{ Suy ra } \Delta = \frac{2 \cdot U}{P}$$

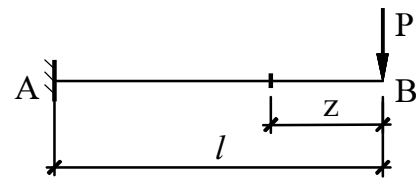
$$\text{Vậy } \Delta = \frac{2}{P} \left[\sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int v \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right] \quad (4 - 4)$$

Ví dụ: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A. Cho biết $E \cdot J = \text{const}$. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt. (H.4.10)

Biểu thức mômen uốn dọc trục thanh:

$$M(z) = -P \cdot z$$

$$\text{Thay vào: } \Delta = \frac{2}{P} \int_0^l \frac{(-P \cdot z)^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot J} = \frac{P l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$



H.4.10

II. Cách xác định theo định lý Castigliano:

Phát biểu định lý: Đạo hàm riêng thể năng biến dạng đàn hồi theo lực P_k nào đó sẽ bằng chuyển vị tương ứng với phương và vị trí của lực P_k đó.

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

Thay biểu thức (4-3) vào

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} \left[\sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int v \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right]$$

$$\Delta_k = \left[\sum \int \frac{M}{E \cdot J} \frac{\partial M}{\partial P_k} \cdot ds + \sum \int \frac{N}{E \cdot F} \frac{\partial N}{\partial P_k} \cdot ds + \sum \int v \cdot \frac{Q}{G \cdot F} \frac{\partial Q}{\partial P_k} \cdot ds \right] \quad (4 - 5)$$

Xét trở lại ví dụ trên

$$\Delta_k = \int \frac{M}{E \cdot J} \frac{\partial M}{\partial P_k} \cdot ds = \int_0^l \frac{(-P \cdot z)}{E \cdot J} \cdot (-z) dz = \frac{P l^3}{3 \cdot E \cdot J} > 0$$

* Chú ý:

- Nếu $\Delta_k > 0$ thì chuyển vị cùng chiều với P_k và ngược lại
- Nếu tải trọng tác dụng là phân bố có thể thay thế bằng nhiều lực tập trung để

tính.

- Trường hợp P_k là mômen tập trung thì chuyển vị tương ứng là góc xoay.
- Nếu cần tìm chuyển vị tại vị trí và theo phương bất kỳ thì có thể đặt thêm lực

P_k tương ứng với vị trí và phương cần tìm chuyển vị. Sau khi xác định được Δ_k , cho $P_k = 0$ sẽ được kết quả cần tìm.

§ 5. CÔNG KHẢ DĨ CỦA NỘI LỰC VÀ NGOẠI LỰC - CÁC BIỂU THỨC CÔNG KHẢ DĨ

I. Công khả dĩ:

1. Định nghĩa: Công khả dĩ (còn gọi là công ảo) là công sinh ra bởi các lực trên những biến dạng và chuyển vị vô cùng bé do những nguyên nhân bất kỳ nào đó sinh ra.

Các chuyển vị và biến dạng vô cùng bé được gọi là chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.

2. So sánh công thực và công khả dĩ:

Công thực: Nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng chính là các lực sinh công gây ra.

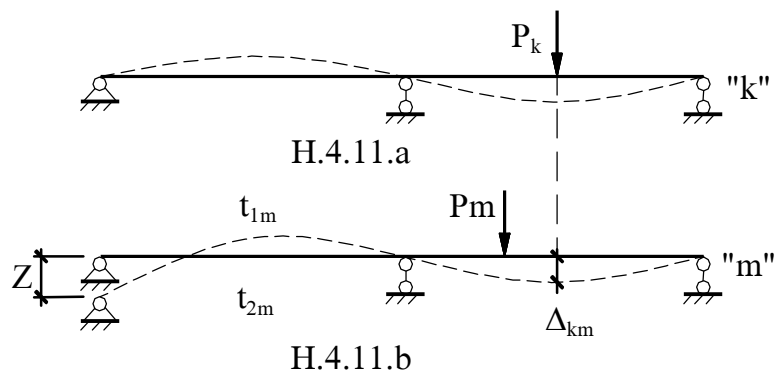
Công ảo: Nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng là bất kỳ và có thể là tải trọng hay biến thiên nhiệt độ hay chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa...

Ví dụ minh họa:

Xét một hệ đàn hồi ở hai trạng thái:

- Trạng thái thứ nhất chịu lực P_k gọi là trạng thái "k" (H.4.11.a).

- Trạng thái thứ hai chịu các nguyên nhân bất kỳ gọi là trạng thái "m" (H.4.11.b).



Gọi Δ_{km} là chuyển vị khả dĩ tương ứng với lực P_k trên hệ ở trạng thái "m".

Theo định nghĩa thì tích số $P_k \cdot \Delta_{km}$ là công khả dĩ của lực P_k trên chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m". Ký hiệu: T_{km} .

$$\text{Vậy } T_{km} = P_k \cdot \Delta_{km}$$

II. Công khả dĩ của ngoại lực (T_{km}):

Từ ví dụ minh họa ở trên, có thể định nghĩa công khả dĩ của ngoại lực như sau:

Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái "m" bằng tổng các tích số giữa các lực tác dụng ở trạng thái "k" với những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

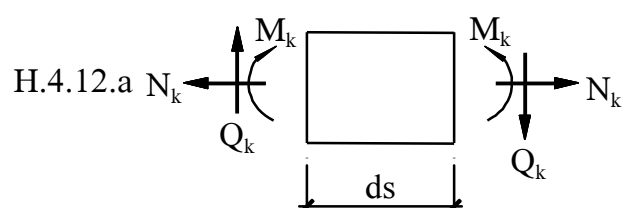
$$T_{km} = \sum_i P_{ik} \cdot \Delta_{ikm} \quad (4 - 6)$$

III. Công khả dĩ của nội lực

(A_{km}^*):

Tách riêng một phân tố thanh của hệ ở hai trạng thái "k", "m".

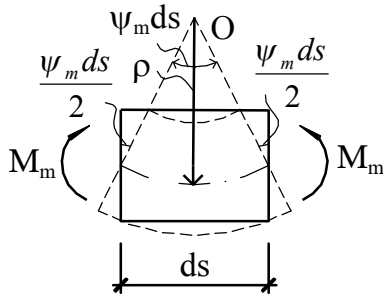
- Ở trạng thái "k": chỉ quan tâm



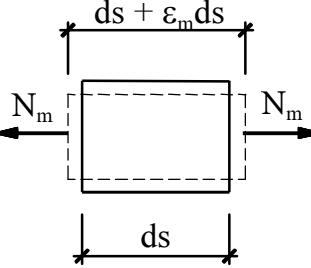
các thành phần M_k, N_k, Q_k ở hai đầu phân tố và xem là các ngoại lực như trong trường hợp công của nội lực (H.4.12.a).

- Ở trạng thái "m": Chỉ quan tâm các thành phần biến dạng như sau:

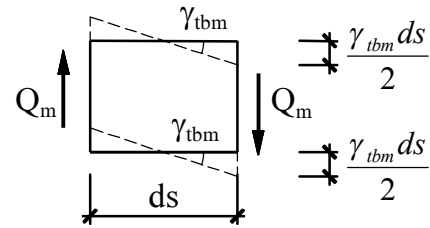
↪ Các thành phần biến dạng $\psi_m, \varepsilon_m, \gamma_{ibm}$ do các nội lực M_m, N_m, Q_m gây ra.



H.4.12.b



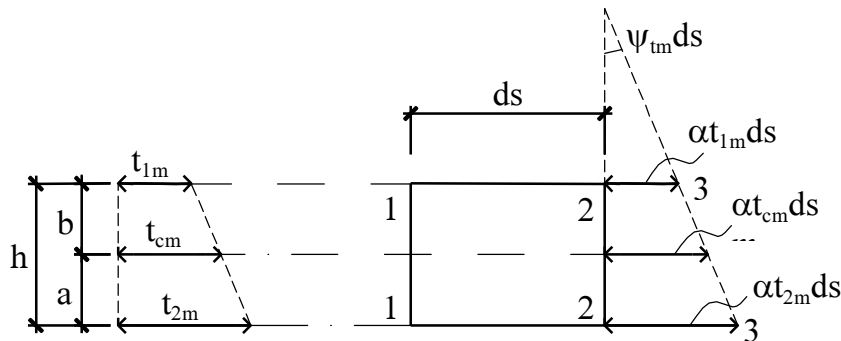
H.4.12.c



H.4.12.d

Tương tự trường hợp công của nội lực: $\psi_m = \frac{M_m}{E.J}$; $\varepsilon_m = \frac{N_m}{E.F}$; $\gamma_{mtb} = \nu \cdot \frac{Q_m}{G.F}$

↪ Các thành phần biến dạng do sự biến thiên nhiệt độ gây ra (H.4.13.a&b)



H.4.13.a

H.4.13.b

Gọi t_{2m}, t_{1m} là sự biến thiên nhiệt độ của thớ dưới và thớ trên của phân tố. Cho rằng sự biến thiên nhiệt độ dọc theo chiều cao của phân tố tuân theo quy luật đường thẳng (bậc nhất). Biến thiên nhiệt độ dọc trục thanh (H.4.13.a):

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} \cdot a + t_{2m} \cdot b}{a + b}$$

Nếu tiết diện là hình chữ nhật, tức là $a = b = \frac{h}{2}$ thì

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2}$$

Giả sử $t_{2m} > t_{1m} > 0$ và tiết diện ở đầu 1-1 của phân tố là cố định. Gọi α là hệ số dẫn nở vì nhiệt. Lúc này phân tố sẽ có hai thành phần biến dạng (H.4.13.b):

+ Biến dạng dọc trục: $\varepsilon_{tm} \cdot ds = \alpha \cdot t_{cm} \cdot ds$

+ Biến dạng góc xoay giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố:

$$\psi_{tm} \cdot ds = \frac{\alpha \cdot t_{2m} \cdot ds - \alpha \cdot t_{1m} \cdot ds}{h} = \frac{\alpha}{h} \cdot (t_{2m} - t_{1m}) \cdot ds$$

Vậy công khả dĩ của nội lực của một phân tố ds ở trạng thái "k" trên các biến dạng khả dĩ ở trạng thái "m":

$$dT_{km} = \frac{1}{2} \cdot M_k \cdot \psi_m \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot M_k \cdot \psi_m \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot N_k \cdot \varepsilon_m \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot N_k \cdot \varepsilon_m \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot Q_k \cdot \gamma_{ibm} \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot Q_k \cdot \gamma_{ibm} \cdot ds + M_k \cdot \psi_{im} \cdot ds + N_k \cdot \varepsilon_{im} \cdot ds$$

Hay $dT_{km} = \frac{1}{2} M_k \cdot \psi_m \cdot ds + N_k \cdot \varepsilon_m \cdot ds + Q_k \cdot \gamma_{ibm} \cdot ds + M_k \cdot \psi_{im} \cdot ds + N_k \cdot \varepsilon_{im} \cdot ds$

Thay tất cả các biến dạng đã tính được vào:

$$dT_{km} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot M_k \cdot M_m \cdot ds + \frac{1}{E \cdot F} \cdot N_k \cdot N_m \cdot ds + \frac{\nu}{G \cdot F} \cdot Q_k \cdot Q_m \cdot ds + M_k \cdot \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \cdot ds + N_k \cdot \alpha \cdot t_{cm} \cdot ds$$

Suy ra $dA_{km}^* = -dT_{km} = -[\frac{1}{E \cdot J} \cdot M_k \cdot M_m \cdot ds + \frac{1}{E \cdot F} \cdot N_k \cdot N_m \cdot ds + \frac{\nu}{G \cdot F} \cdot Q_k \cdot Q_m \cdot ds + M_k \cdot \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \cdot ds + N_k \cdot \alpha \cdot t_{cm} \cdot ds]$

Suy ra $A_{km}^* = \int dA_{km}^* = -[\sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} \cdot ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} \cdot ds + \sum \int \nu \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} \cdot ds + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) M_k \cdot ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} N_k \cdot ds]$ (4 - 7)

IV. Nguyên lý công khả dĩ áp dụng cho hệ đàn hồi (S. D. Poisson 1833):

1. Nguyên lý công khả dĩ cho vật rắn: Nếu một hệ chất điểm nào đó của vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ của các lực trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng bằng không

$$T_{km} = 0$$

2. Nguyên lý công khả dĩ cho hệ đàn hồi:

Nếu một hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ của các ngoại lực T_{km} trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng và công khả dĩ của nội lực A_{km}^* trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không

$$T_{km} + A_{km}^* = 0$$

Hay $\sum_i P_{ik} \cdot \Delta_{ikm} = \sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} \cdot ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} \cdot ds + \sum \int \nu \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} \cdot ds + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) M_k \cdot ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} N_k \cdot ds$ (4 - 8)

§ 6. CÁC ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ TRONG HỆ ĐÀN HỒI

I. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực (Định lý E.Betti 1872):

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái:

- Trạng thái "m": chịu các lực tác dụng P_{im} ($i = 1 \dots n$)

- Trạng thái "k": chịu các lực tác dụng P_{jk} ($j = 1...p$)

Theo biểu thức (4 - 8):

- Công khả dĩ của lực ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k":

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^n P_{im} \cdot \Delta_{imk} = \sum \int \frac{M_m \cdot M_k}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{N_m \cdot N_k}{E \cdot F} ds + \sum \int v \frac{Q_m \cdot Q_k}{G \cdot F} ds$$

- Công khả dĩ của hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m":

$$T_{km} = \sum_{j=1}^p P_{jk} \cdot \Delta_{ikm} = \sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds + \sum \int v \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} ds$$

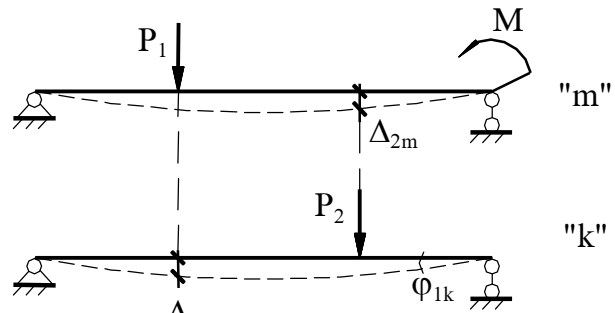
Suy ra $T_{km} = T_{mk}$ (4 - 9)

* *Phát biểu:* Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" tương hỗ bằng công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k".

* *Chú ý:*

- Hai trạng thái "k", "m" phải xảy ra trên cùng một hệ.

- Chuyển vị ở trạng thái này phải có vị trí và phương tương ứng với tải trọng ở trạng thái kia (H.4.14).



H.4.14

$$\sum_{i=1} P_{im} \cdot \Delta_{imk} = P_1 \cdot \Delta_{1k} + M \cdot \phi_{1k}$$

$$\sum_{j=1} P_{jk} \cdot \Delta_{jkm} = P_2 \cdot \Delta_{2m}$$

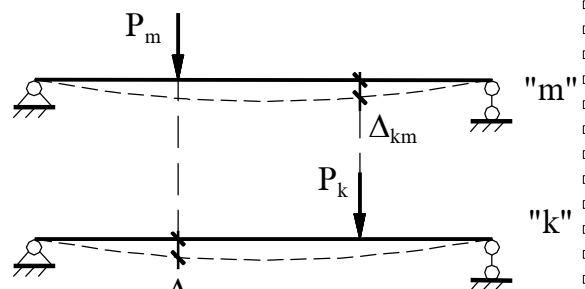
Theo định lý tương hỗ thì $P_1 \cdot \Delta_{1k} + M \cdot \phi_{1k} = P_2 \cdot \Delta_{2m}$

II. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị (Định lý J. Maxwell 1864):

Xét một hệ đàn hồi với hai trạng thái (H.4.15):

- Trạng thái "m" chỉ chịu một lực tập trung P_m .

- Trạng thái "k" chỉ chịu một lực tập trung P_k .



H.4.15

Theo định lý E.betti thì

$$P_m \cdot \Delta_{mk} = P_k \cdot \Delta_{km}$$

Suy ra $\frac{\Delta_{mk}}{P_k} = \frac{\Delta_{km}}{P_m}$ (a)

Gọi $\delta_{km} = \frac{\Delta_{km}}{P_m}$. Đại lượng này chính là chuyển vị đơn vị tương ứng với phương

và vị trí P_k do $P_m = 1$ gây ra.

Tương tự cho $\delta_{mk} = \frac{\Delta_{mk}}{P_k}$.

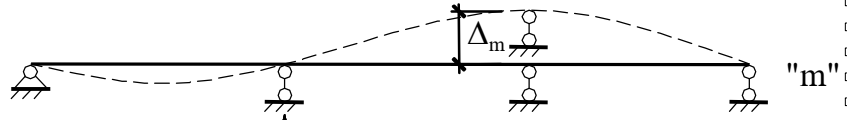
Từ (a) suy ra $\delta_{km} = \delta_{mk}$ (4 - 10)

Phát biểu: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực $P_m = 1$ gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực $P_k = 1$ gây ra.

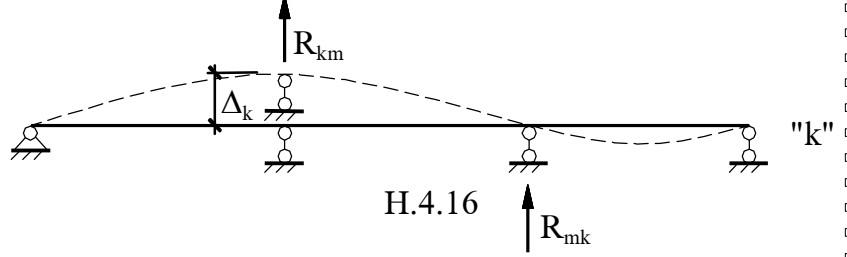
III. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị (Định lý L. Rayleigh 1875):

Xét một hệ đàn hồi với hai trạng thái (H.4.16):

- Trạng thái "m" chỉ chịu một chuyển vị cưỡng bức Δ_m tại liên kết m.



- Trạng thái "k" chỉ chịu một chuyển vị cưỡng bức Δ_k tại liên kết k.



H.4.16 $\uparrow R_{mk}$

Gọi R_{km} là phản lực tại liên kết k do chuyển vị Δ_m gây ra và R_{mk} là phản lực tại liên kết m do chuyển vị Δ_k gây ra.

Theo định lý E.Betti thì $R_{km} \cdot \Delta_k = R_{mk} \cdot \Delta_m$

Suy ra $\frac{R_{km}}{\Delta_m} = \frac{R_{mk}}{\Delta_k}$ (b)

Gọi $r_{km} = \frac{R_{km}}{\Delta_m}$. Đây chính là phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m gây ra.

Tương tự cho $r_{mk} = \frac{R_{mk}}{\Delta_k}$

Từ (b) suy ra $r_{km} = r_{mk}$ (4 - 11)

Phát biểu: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra.

IV. Định lý tương hỗ về chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị (Định lý A. A. Gvozdiev 1927):

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính với hai trạng thái (H.4.17):

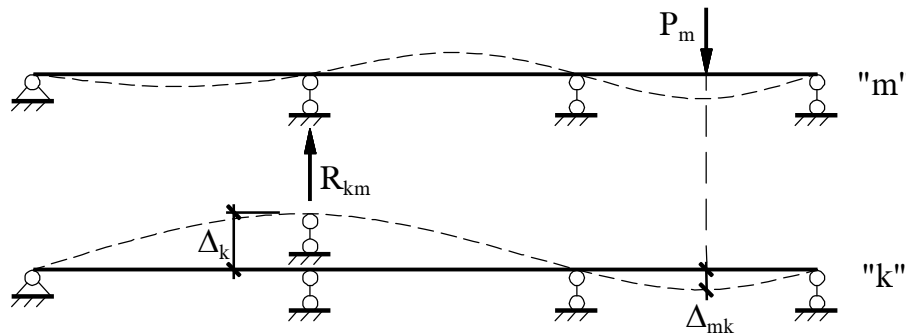
- Trạng thái "m" chỉ chịu lực P_m .
- Trạng thái "k" có một liên kết k của hệ chịu chuyển vị cưỡng bức Δ_k .

Gọi R_{km} là phản lực tại liên kết k do P_m gây ra (ở trạng thái "m") và Δ_{mk} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do Δ_k gây ra (ở trạng thái "k")

Theo định lý E.Betti thì $P_m \cdot \Delta_{mk} + R_{km} \cdot \Delta_k = 0$

Suy ra $\frac{R_{km}}{P_m} = -\frac{\Delta_{mk}}{\Delta_k}$ (c)

Gọi $\dot{r}_{km} = \frac{R_{km}}{P_m}$. Đây chính là phản lực đơn vị tại liên kết k do $P_m = 1$ gây ra.



H.4.17

$\dot{\delta}_{mk} = \frac{\Delta_{mk}}{\Delta_k}$. Đây chính là chuyển vị đơn vị tại vị trí và phương của lực P_m do chuyển vị $\Delta_k = 1$ gây ra.

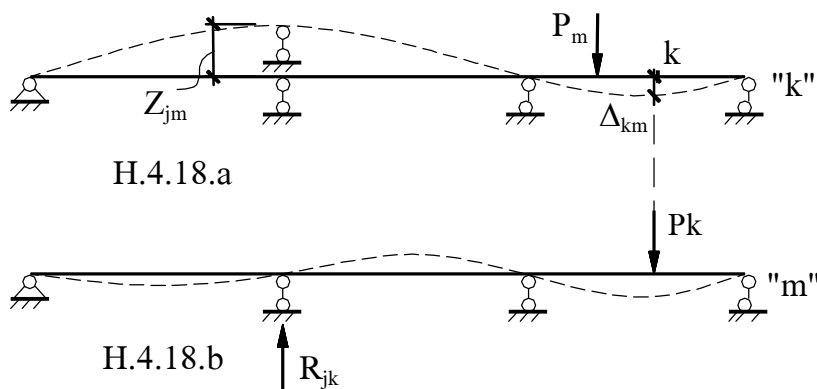
Theo (c) suy ra: $\dot{r}_{km} = -\dot{\delta}_{mk}$. (4 - 12)

Phát biểu: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết k do lực P_m bằng đơn vị gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng phương và vị trí lực P_m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra nhưng trái dấu.

§ 7. CÔNG THỨC TỔNG QUÁT XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH (Công thức Maxwell - Morh 1874)

I. Thiết lập công thức:

Xét một hệ thanh đàn hồi tuyến tính chịu tác dụng của các nguyên nhân: các tải trọng P_m , chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết Z_m , sự biến thiên nhiệt độ t_{2m} & t_{1m} . Các tiết diện trong hệ sẽ chuyển vị. Ví dụ hệ cho trên hình (H.4.18.a). Trạng thái này của hệ gọi là trạng thái "m".



Yêu cầu: tìm chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện k.

Cách tiến hành:

Tạo trạng thái khả dĩ "k" bằng cách trên hệ đã cho đặt lực P_k tương ứng với vị trí và phương cần tìm chuyển vị, chiều tùy ý chọn (H.4.18.b).

Áp dụng công thức công khả dĩ cho lực ở trạng thái "k" trên chuyển vị khả dĩ ở trạng thái "m":

$$P_k \cdot \Delta_{km} + \sum_j R_{jk} \cdot Z_{jm} = \sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds + \sum \int_V \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} ds + \\ + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) M_k ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} N_k ds$$

Chia hai vế cho P_k và đồng thời ký hiệu: $\bar{M}_k = \frac{M_k}{P_k}$; $\bar{N}_k = \frac{N_k}{P_k}$; $\bar{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k}$; $\bar{R}_{jk} = \frac{R_{jk}}{P_k}$

Nói cách khác $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k, \bar{R}_{jk}$ chính là M_k, N_k, Q_k, R_k tương ứng do $P_k = 1$ xảy ra trên hệ ở trạng thái "k".

Thay vào ta được công thức tổng quát xác định chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi:

$$\Delta_{km} = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} + \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k \cdot Q_m}{G \cdot F} ds + \\ + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \bar{M}_k ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} \bar{N}_k ds \quad (4 - 13)$$

II. Các chú ý:

+ Công thức Morh chỉ áp dụng cho hệ gồm những thanh thẳng hoặc cong với độ cong bé ($\frac{h}{r} \leq \frac{1}{5}$).

+ Khi tính hệ ở trạng thái "k" chỉ cần đặt lực $P_k = 1$.

+ Nếu cần tìm chuyển vị thẳng thì P_k là lực tập trung; nếu tìm chuyển vị góc xoay thì P_k là mômen tập trung.

+ Nếu kết quả $\Delta_{km} > 0$ thì chuyển vị là cùng chiều với lực P_k đã giả định và ngược lại.

+ Z_{jm} là chuyển vị tại liên kết j của hệ ở trạng thái "m".

+ \bar{R}_{jk} là phản lực tại liên kết j tương ứng với chuyển vị Z_{jm} do lực $P_k = 1$ gây ra ở trạng thái "k".

+ Tích $\bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm}$ lấy dấu dương khi \bar{R}_{jk} và Z_{jm} cùng chiều nhau.

+ M_m, N_m, Q_m là các biểu thức giải tích của nội lực ở trạng thái "m"

+ $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$ là các biểu thức giải tích của nội lực ở trạng thái "k" do $P_k = 1$ gây ra.

+ Công thức Morh cũng áp dụng được cho hệ siêu tĩnh.

§ 8. VẬN DỤNG CÔNG THỨC MORH VÀO CÁC BÀI TOÁN CHUYỂN VỊ

I. Hệ dầm và khung chịu tải trọng:

Trong hệ dầm và khung chịu, ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục và trượt là rất nhỏ so với biến dạng uốn. Và trong tính toán thường cho phép bỏ qua ảnh hưởng của chúng. Lúc này công thức (4 - 13) có dạng:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds \quad (4 - 14)$$

*Ví dụ 1: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại B. Cho biết độ cứng của thanh dầm $E \cdot J = const$.

1. Tính hệ ở trạng thái "m": (H.4.19.a)

$$M_m(z) = -P \cdot z \quad [0 \leq z \leq l]$$

2. Tạo và tính hệ với trạng thái "k":

(H.4.19.b)

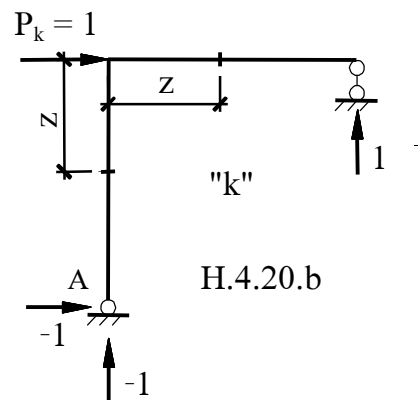
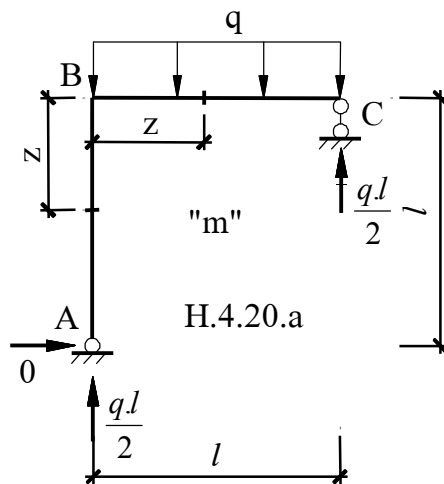
$$\bar{M}_k(z) = -P_k \cdot z = -z \quad [0 \leq z \leq l]$$

3. Xác định y_B :

$$\begin{aligned} y_B = \Delta_{km} &= \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds = \\ &= \int_0^l \frac{(-P \cdot z) \cdot (-z)}{E \cdot J} dz = \frac{P \cdot z^3}{3E \cdot J} \Big|_0^l = \frac{P \cdot l^3}{3E \cdot J} > 0 \end{aligned}$$

Kết luận: Chuyển vị cùng chiều P_k (hướng xuống).

*Ví dụ 2: Xác định chuyển vị nằm ngang tại B (H.4.20.a). Cho biết độ cứng của các thanh là như nhau và $E \cdot J = const$.



1. Tính hệ ở trạng thái "m": (H.4.20.a)

- Trong thanh BC: $M_m(z) = \frac{q \cdot l \cdot z}{2} - \frac{q \cdot z^2}{2} \quad [0 \leq z \leq l]$ (gốc tại B)

- Trong thanh AB: $M_m(z) = 0$

2. Tạo và tính hệ với trạng thái "k": (H.4.20.b)

- Trong thanh BC: $\bar{M}_k(z) = 1 \cdot (l - z) \quad [0 \leq z \leq l]$ (gốc tại B)

- Trong thanh AB: $\bar{M}_k(z) = 1 \cdot (l - z) \quad [0 \leq z \leq l]$ (gốc tại B)

3. Xác định x_B :

$$x_B = \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds = \int_0^l \frac{(q \cdot l \cdot z - q \cdot z^2) \cdot 1 \cdot (l - z)}{2 \cdot E \cdot J} dz =$$

$$= \frac{q}{2 \cdot E \cdot J} \left[\frac{l \cdot z^2}{2} - \frac{2}{3} l \cdot z^3 + \frac{z^4}{4} \right]_0^l = \frac{q \cdot l^4}{24 E \cdot J} > 0$$

* *Kết luận:* Chuyển vị là cùng chiều với P_k (hướng sang phải)

II. Hệ dàn khớp chịu tải trọng:

Trong hệ dàn, các thanh chỉ tồn tại lực dọc. Nên công thức (4 - 13) có dạng:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{N}_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds$$

Các đại lượng $\bar{N}_k, N_m, E \cdot F$ thường bằng const đối với từng thanh dàn. Suy ra:

$$\Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \int ds = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i \quad (4 - 15)$$

* *Ví dụ:* Xác định chuyển vị nằm ngang tại mắt dàn

số 5. Cho biết độ cứng trong các thanh dàn là như nhau và

$E \cdot F = const.$

1. Trạng thái "m": (H.4.21.a).

Xác định N_{im} . Kết quả thể hiện trong **Bảng 4.1**

2. Trạng thái "k": (H.4.21.b)

Xác định \bar{N}_{ik} . Kết quả thể hiện trong **Bảng 4.1**

3. Xác định x_5 :

$$x_5 = \Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i$$

Kết quả tính toán dọc thể hiện trong **Bảng 4.1**

Diễn tả **Bảng 4.1**:

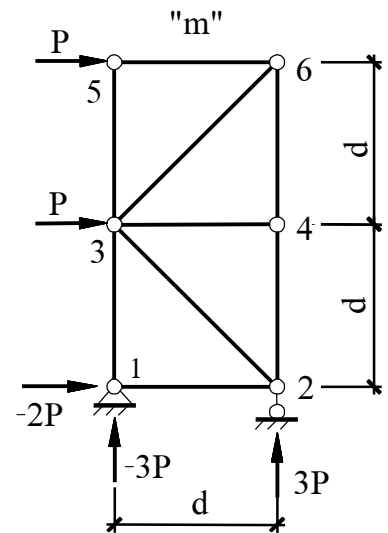
- + Cột (1) ghi các thanh dàn.
- + Cột (2) ghi chiều dài các thanh dàn.
- + Cột (3) ghi giá trị $\frac{1}{E \cdot F}$ (ở đây là như nhau cho các

thanh dàn)

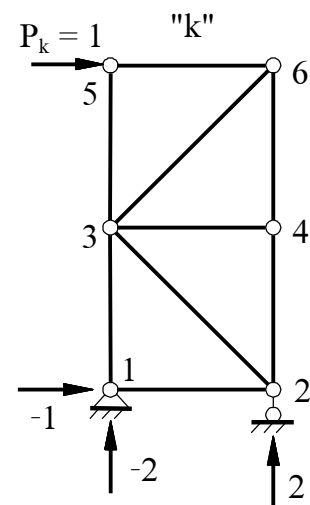
- + Cột (4) ghi lực dọc trong các thanh dàn N_{im} .
- + Cột (5) ghi lực dọc trong các thanh dàn \bar{N}_{ik}
- + Cột (6) ghi kết quả $\frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i$ cho từng thanh dàn.

Kết quả x_5 là tổng của các hàng trong cột (6):

$$x_5 = \Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i = \frac{P \cdot d}{E \cdot F} (11 + 6\sqrt{2}) > 0$$



H.4.21.a



H.4.21.b

Thanh	l_i	$\frac{1}{E.F}$	N_{im}	\bar{N}_{ik}	$\frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im} \cdot l_i}{E.F_i}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1 - 2	d	1/E.F	2P	1	2.P.d/E.F
1 - 3	d	1/E.F	3P	2	6.P.d/E.F
3 - 2	$d \cdot \sqrt{2}$	1/E.F	$-2P \sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$4\sqrt{2} \cdot P.d/E.F$
4 - 2	d	1/E.F	-P	-1	P.d/E.F
3 - 4	d	1/E.F	0	0	0
3 - 6	$d \cdot \sqrt{2}$	1/E.F	$P \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} \cdot P.d/E.F$
4 - 6	d	1/E.F	-P	-1	P.d/E.F
5 - 6	d	1/E.F	-P	-1	P.d/E.F
5 - 3	d	1/E.F	0	0	0

Bảng 4.1 Bảng tính chuyển vị của hệ dàn

III. Hệ tĩnh định chịu chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa:

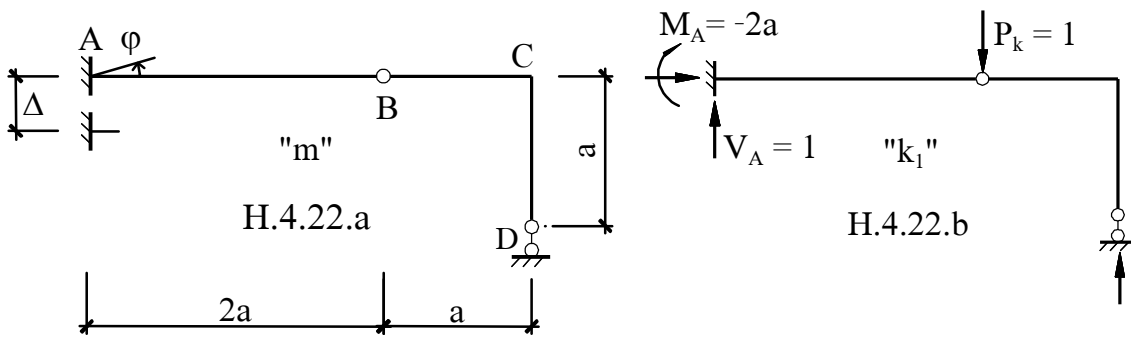
Nguyên nhân này không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định nên $N = M = Q = 0$.

Lúc này biểu thức (4 - 13) được viết lại:

$$\Delta_{km} = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} \quad (4 - 16)$$

Các đại lượng trong biểu thức đã được giả thích trong phần các chú ý của công thức Morh.

* Ví dụ: Xác định độ võng tại B và góc xoay tại C.



1. Trạng thái "m": (H.4.22.a)

2. Trạng thái "k": (H.4.22.b) để xác định y_B và (H.4.22.c) để xác định φ_C .

3. Xác định y_B & φ_C :

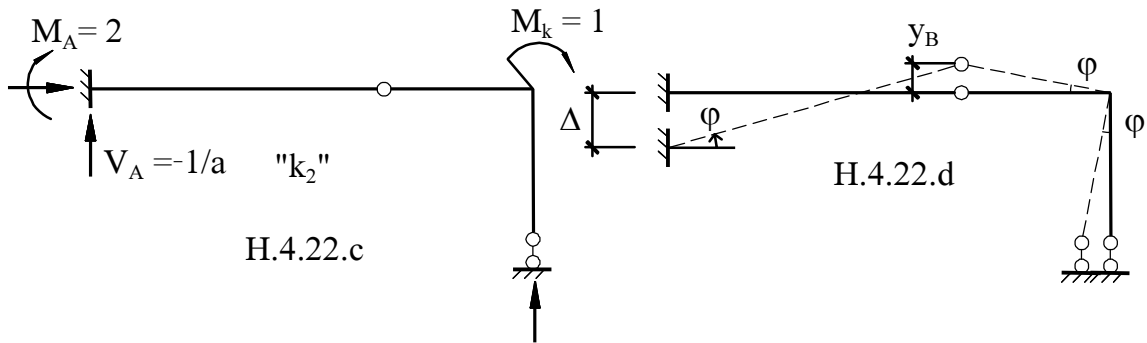
$$y_B = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} = -[-M_A \cdot \varphi - V_A \cdot \Delta] = -[2a \cdot \varphi - 1 \cdot \Delta] = \Delta - 2a \cdot \varphi$$

$$\varphi_C = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} = -[-M_A \cdot \varphi - V_A \cdot \Delta] = -[-2 \cdot \varphi + \frac{1}{a} \cdot \Delta] = 2 \cdot \varphi - \frac{\Delta}{a}$$

* Nhận xét: Có thể xác định được chuyển vị bằng các điều kiện hình học (H.4.22.d).

$$y_B = \Delta - 2a \cdot \varphi$$

$$\varphi_C = -\frac{y_B}{\Delta} = 2\varphi - \frac{\Delta}{a}$$



IV. Hệ tĩnh định chịu biến thiên nhiệt độ:

Nguyên nhân này cũng không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định nên:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \overline{M}_k ds + \sum \int \alpha t_{cm} \overline{N}_k ds$$

Nếu $\alpha, h, t_{2m}, t_{1m} = \text{const}$ trên từng đoạn thanh thì

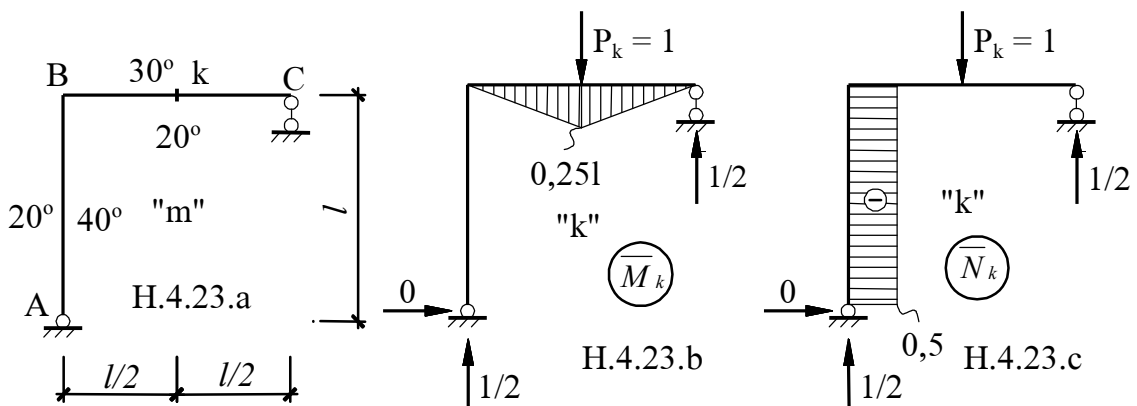
$$\Delta_{km} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\overline{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\overline{N}_k) \quad (4 - 17)$$

Trong đó:

- + t_{2m}, t_{1m} và t_{cm} là biến thiên nhiệt độ thó dưới, thó trên và thó giữa của thanh.
- + $\Omega(\overline{M}_k)$ là diện tích của biểu đồ (\overline{M}_k) trên từng đoạn thanh.
- + $\Omega(\overline{N}_k)$ là diện tích của biểu đồ (\overline{N}_k) trên từng đoạn thanh.
- + $\Omega(\overline{M}_k), \Omega(\overline{N}_k)$ lấy dấu theo dấu của biểu đồ $(\overline{M}_k), (\overline{N}_k)$.

* Ví dụ: Xác định độ võng tại tiết diện k của hệ cho trên hình (H.4.23.a)

Cho biết $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1}$; $h_{AB} = 30 \text{cm}$; $h_{BC} = 20 \text{cm}$.



- Độ biến thiên nhiệt độ dọc trục các thanh:

$$t_{cAB} = \frac{40 + 20}{2} = 30^\circ \text{C}; t_{cBC} = \frac{30 + 20}{2} = 25^\circ \text{C}$$

- Trạng thái "m": (H.4.23.a) Các nội lực M_m, N_m, Q_m không tồn tại.

- Trạng thái "k": (H.4.23.b & c) Các biểu đồ (\overline{M}_k) & (\overline{N}_k) được vẽ trên (H.4.23.b & c).

- Xác định độ võng tại k:

$$y_k = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\overline{M}_k) + \sum \alpha \cdot t_{cm} \Omega(\overline{N}_k)$$

$$= \frac{\alpha}{0,2} \cdot (20 - 30) \cdot \frac{0,25l \cdot l}{2} + \alpha \cdot 30 \cdot (-0,5l) = -6,25 \cdot \alpha \cdot l^2 - 1,5 \cdot \alpha \cdot l$$

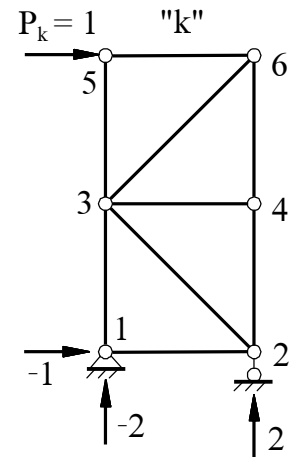
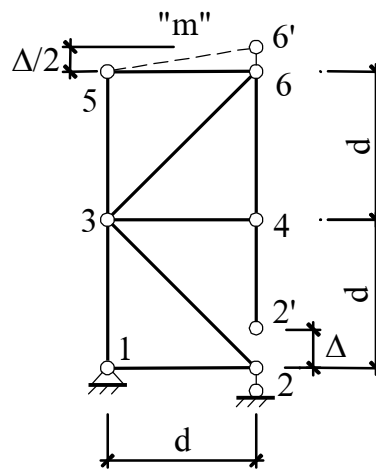
V. Hệ dàn tĩnh định có chiều dài các thanh chế tạo không chính xác:

* Nhận xét: Có thể đưa nguyên nhân này về sự biến thiên nhiệt độ dọc trục thanh. Thật vậy, để thay đổi chiều dài các thanh dàn một lượng Δ ta chỉ việc thay đổi t_c để sao cho $\Delta = \alpha \cdot l \cdot t_c$. Như vậy ta trở lại bài toán hệ chịu nguyên nhân là sự biến thiên là nhiệt độ với chú ý là $\overline{M}_k = 0$.

$$\Delta_{km} = \sum \alpha \cdot t_{cm} \Omega(\overline{N}_k) = \sum_i \alpha_i \cdot t_{ci} \cdot \overline{N}_{ik} \cdot l_i = \sum_i \overline{N}_{ik} \cdot \Delta_i \quad (4 - 18)$$

$\Delta_i > 0$ khi thanh dài hơn so với yêu cầu (còn gọi là độ dôi) và ngược lại (còn gọi là độ hụt).

* Ví dụ: Xác định chuyển vị nằm ngang tại mắt số 5 của hệ dàn trên hình (H.4.24.a)



Trạng thái "k" được tạo trên hình (H.4.24.b). Ở đây cần xác định \overline{N}_{ik} trong hai thanh (4 - 2) & (4 - 6).

$$\overline{N}_{4-6} = -1, \quad \overline{N}_{4-2} = -1$$

Chuyển vị nằm ngang tại mắt số 5.

$$X_5 = \Delta_{km} = \sum_i \overline{N}_{ik} \cdot \Delta_i =$$

$$= \overline{N}_{4-6} \cdot \left(+\frac{\Delta}{2}\right) + \overline{N}_{4-2} \cdot (-\Delta) = -1 \cdot \left(+\frac{\Delta}{2}\right) + (-1) \cdot (-\Delta) = \frac{\Delta}{2} > 0$$

Kết luận: Chuyển vị theo chiều P_k (hướng sang phải)

§ 9. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN TRONG CÔNG THỨC CHUYỂN VỊ BẰNG PHÉP "NHÂN BIỂU ĐỒ VÊRÊSAGHIN"

I. Thiết lập công thức:

Trong công thức Morh (4 - 13) nếu xét hệ chỉ gồm những thanh thẳng chịu nguyên nhân là tải trọng và E.J, E.F, G.F = const trên từng đoạn thanh thì có thể được viết lại:

$$\Delta_{km} = \sum \frac{1}{E \cdot J} \int \overline{M}_k \cdot M_m dz + \sum \frac{1}{E \cdot F} \int \overline{N}_k \cdot N_m dz + \sum \frac{\nu}{G \cdot F} \int \overline{Q}_k \cdot Q_m dz \quad (4 - 19)$$

Lúc này, sau dấu tích phân nào cũng là tích của hai hàm số, phép " nhân biểu đồ" Vêrêxaghin cho phép thay thế việc tính tích phân của tích hai hàm số bằng cách thuận tiện hơn. Nội dung như sau:

Nếu một trong hai hàm số dưới dấu tích phân có bậc nhỏ hơn hay bằng một về mặt toán học (hàm còn lại có bậc bất kỳ) thì:

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = \Omega.y \quad (4 - 20)$$

Trong đó Ω là diện tích của biểu đồ có bậc bất kỳ lấy trên đoạn $[z_1, z_2]$.

y là tung độ trên biểu đồ có bậc nhỏ hơn hay bằng một tại vị trí tương ứng với trọng tâm diện tích Ω .

Thật vậy, trong biểu thức tích phân (4-20), giả sử $A(z)$ có bậc bất kỳ, đồ thị của $A(z)$ được vẽ như trên hình (H.4.25.a); $B(z)$ có bậc nhỏ hơn hay bằng một, đồ thị của nó được vẽ trên hình (H.4.225.b). Kéo dài đồ thị $B(z)$ đến cắt trục z tại C , gọi hoành độ của điểm C là z_0 , góc của $B(z)$ so với trục z là α . Khi đó có thể biểu thị $B(z)$ như sau:

$$B(z) = (z - z_0).tg\alpha$$

Thay vào trong dấu tích phân:

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} A(z).(z - z_0).tg\alpha dz$$

Thay $A(z)dz = d\Omega$ và đưa hằng số ra ngoài dấu tích phân

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = tg\alpha \int_{z_1}^{z_2} (z - z_0).d\Omega$$

$+ \int_{z_1}^{z_2} z.d\Omega$ chính là mômen tĩnh của diện tích Ω đối với trục tung, nó chính bằng

diện tích Ω nhân với khoảng cách z_G từ trọng tâm G của diện tích Ω đến trục tung.

$$+ \int_{z_1}^{z_2} z_0.d\Omega = z_0.\Omega$$

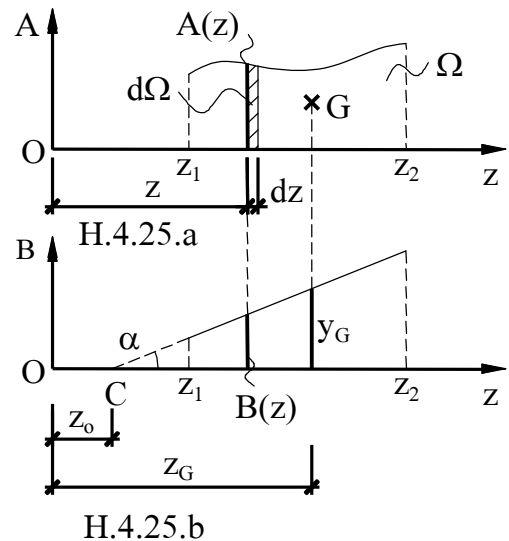
Vậy

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = tg\alpha.(z_G - z_0).\Omega$$

Mặt khác dễ thấy $(z_G - z_0).tg\alpha = y_G$: là tung độ của đồ thị $B(z)$ lấy tại vị trí tương ứng dưới trọng tâm diện tích Ω . Vậy

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = \Omega.y_G \quad (\text{đpcm})$$

Viết lại (4 - 20) theo "phép nhân biểu đồ"



$$\Delta_{km} = (\overline{M}_k).(M_m) + (\overline{N}_k).(N_m) + (\overline{Q}_k).(Q_m)$$

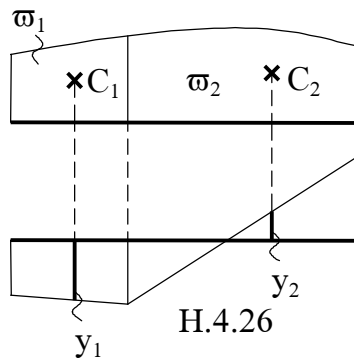
II. Các chú ý khi nhân biểu đồ:

- + Phép " nhân biểu đồ" chỉ áp dụng cho hệ gồm những thanh thẳng.
- + Tung độ y bắt buộc phải lấy trên biểu đồ có bậc ≤ 1 còn diện tích Ω được lấy trên biểu đồ có bậc bất kỳ.
- + Nếu Ω, y cùng dấu thì kết quả "nhân biểu đồ" có dấu dương và ngược lại.
- + Nếu đường biểu đồ của biểu đồ lấy tung độ bị gãy khúc thì chia thành nhiều đoạn không gãy khúc để nhân, sau đó cộng kết quả lại với nhau. (Ví dụ H.4.26)

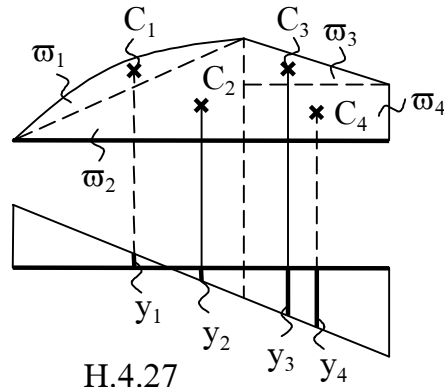
$$\Omega.y = (\omega_1.y_1) + (-\omega_2.y_2)$$

+ Khi biểu đồ lấy diện tích Ω là phức tạp (việc xác định diện tích và vị trí của trọng tâm khó khăn) thì nên chia thành nhiều hình đơn giản để tính và sau đó cộng các kết quả lại với nhau. (Ví dụ H.4.27)

$$\Omega.y = (\omega_1.y_1) + (-\omega_2.y_2) + (-\omega_3.y_3) + (-\omega_4.y_4)$$



H.4.26



H.4.27

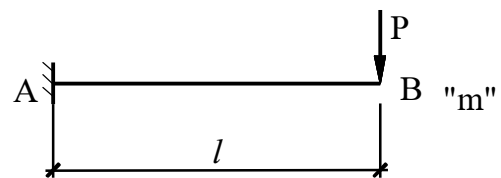
* Ví dụ 1: Xác định độ võng tại B (H.4.28.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m). Kết quả trên hình (H.4.28.b)

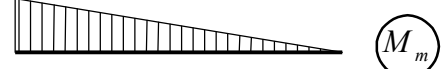
2. Trạng thái "k": Vẽ (\overline{M}_k). Kết quả trên hình (H.4.28.c)

3. Xác định y_B :

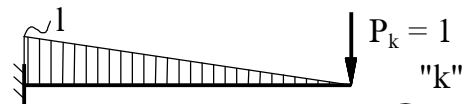
$$y_B = (\overline{M}_k).(M_m) = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{P.l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{P.l^3}{3} > 0$$



H.4.28.a



H.4.28.b



H.4.28.c

* Ví dụ 2: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại B (H.4.29.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m). Kết quả trên hình (H.4.29.b)

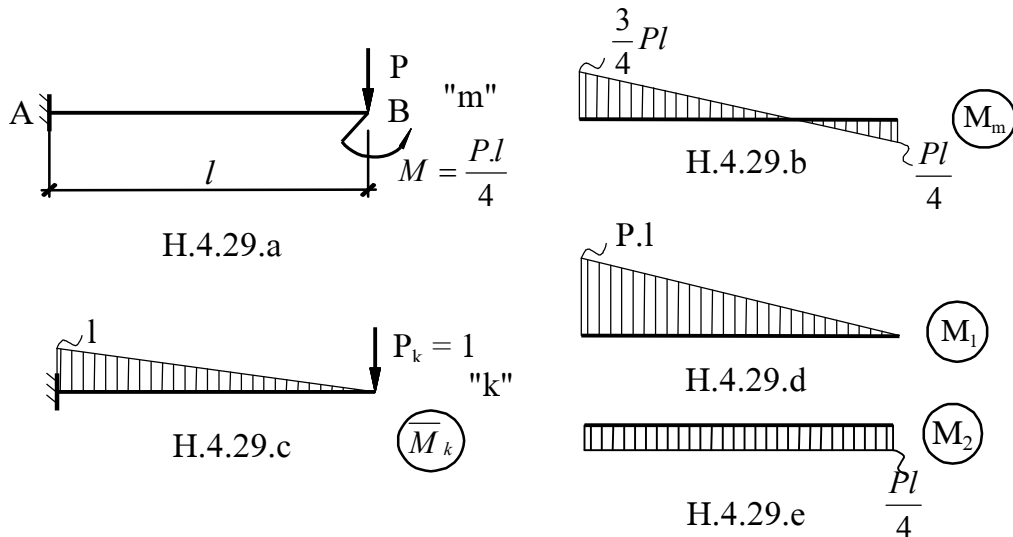
2. Trạng thái "k": Vẽ (\bar{M}_k) . Kết quả trên hình (H.4.29.c)

3. Xác định y_B :

$$y_B = (\bar{M}_k).(M_m)$$

Để dễ "nhân", ta phân tích (M_m) thành tổng của (M_1) với (M_2) như trên hình (H.4.29.d & H.4.29.e). Suy ra:

$$y_B = (\bar{M}_k).(M_m) = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{1.l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot Pl - \frac{1}{E.J} \cdot \frac{1.l}{2} \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{5}{24} \cdot \frac{Pl^2}{E.J} > 0$$



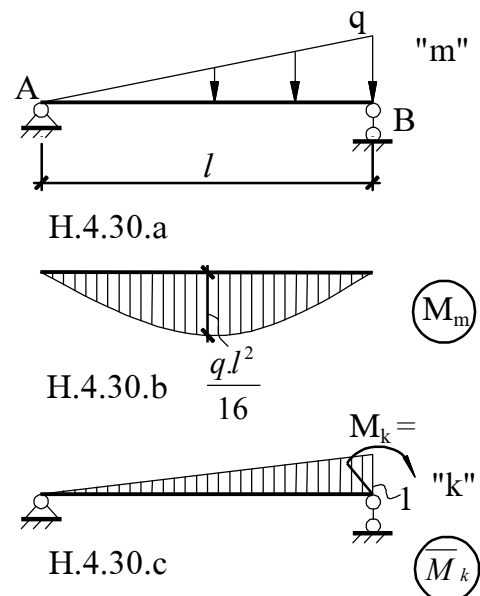
* Ví dụ 3: Xác định góc xoay tại B (H.4.30.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.30.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ (\bar{M}_k) . Kết quả trên hình (H.4.30.c)

3. Xác định φ_B :

$$\begin{aligned} \varphi_B &= (\bar{M}_k).(M_m) = \\ &= -\frac{1}{E.J} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot 1 = -\frac{ql^3}{45.E.J} < 0 \end{aligned}$$



* Ví dụ 4: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại k (H.4.31.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

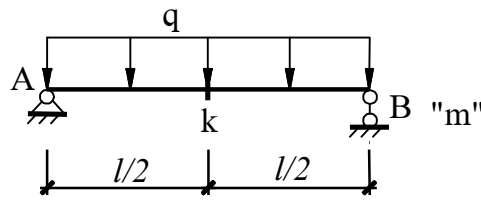
1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.31.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ (\bar{M}_k) . Kết quả trên hình (H.4.31.c)

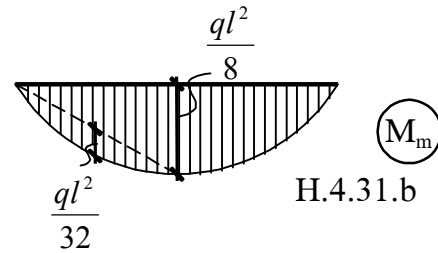
3. Xác định y_k :

$$y_k = (\bar{M}_k).(M_m) =$$

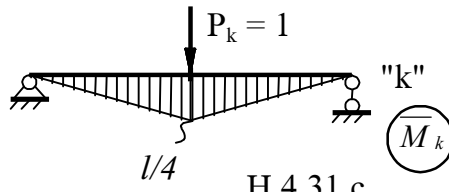
$$= \frac{2}{E.J} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{32} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right] = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{E.J} > 0$$



H.4.31.a



H.4.31.b



H.4.31.c

§ 10. CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI TIẾT DIỆN CỦA HỆ.

Khi hệ đàn hồi chịu tác dụng của các nguyên nhân ngoài thì các tiết diện trong hệ nói chung sẽ tồn tại chuyển vị. Bài toán chuyển vị của các tiết diện trong hệ ta đã giải quyết. Các chuyển vị này còn gọi là chuyển vị tuyệt đối.

Thế thì có một vấn đề đặt ra là giữa hai tiết diện của hệ chuyển vị so với nhau như thế nào?, bằng bao nhiêu?. Chuyển vị so với nhau giữa hai tiết diện theo một phương nào đó của hệ gọi là chuyển vị tương đối. Tương tự như chuyển vị tuyệt đối, chuyển vị tương đối cũng tồn tại chuyển vị thẳng và chuyển vị góc xoay tương đối.

Như vậy, nếu cần tìm chuyển vị tương đối giữa hai tiết diện theo phương nào đó, ta chỉ cần tìm chuyển vị tuyệt đối theo phương đó cho từng tiết diện rồi lấy hiệu kết quả với nhau. Có nghĩa là trạng thái "k" cần tạo và tính hai lần. Qua phân tích ta dễ thấy thay vì vậy, có thể tạo trạng thái "k" một lần bằng cách đặt ngay một cặp lực $P_k = 1$ theo phương tìm chuyển vị, ngược chiều nhau ngay từ đầu. Và dĩ nhiên các quá trình xác định chuyển vị vẫn tiến hành như trường hợp tổng quát.

* Ví dụ: Xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai tiết diện B & C theo phương nối liền hai điểm đó (H.4.32.a). Cho biết $E.J = const$ và như nhau cho tất cả các thanh. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.32.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ (\bar{M}_k) . Kết quả trên hình (H.4.32.c)

3. Xác định Δ_{B-D} :

$$\Delta_{B-D} = (\bar{M}_k).(M_m) = -\frac{1}{E.J} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{E.J} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{48} \cdot \frac{ql^3}{E.J} > 0$$

Chuyển vị thẳng hướng vào nhau.

